

Stahl, Gerhard; Sibbertsen, Philipp; Bertram, Philip

**Working Paper**  
**Modellrisiko**

Diskussionsbeitrag, No. 468

**Provided in Cooperation with:**

School of Economics and Management, University of Hannover

*Suggested Citation:* Stahl, Gerhard; Sibbertsen, Philipp; Bertram, Philip (2011) : Modellrisiko, Diskussionsbeitrag, No. 468, Leibniz Universität Hannover, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Hannover

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/66030>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# Modellrisiko = Spezifikation $\oplus$ Validierung

Gerhard Stahl<sup>§1</sup>, Philipp Sibbertsen<sup>‡</sup> und Philip Bertram<sup>‡</sup>

§Talanx AG, Hannover und Universität Ulm  
‡Leibniz Universität Hannover, Institut für Statistik

## Zusammenfassung

Als Teil des operationellen Risikos stellt das Modellrisiko eine wichtige Komponente für die Risikoermittlung bei Finanzinstitutionen dar. Da letztere z.B. bei der Tarifierung und Bepreisung von Derivaten bzw. Portfolien oder bei der Markt- und Kreditrisikoberechnung auf stochastische Modelle zurückgreifen, kann die Spezifikation falscher Modelle zu einer erheblichen Fehlkalkulation des Risikos führen. Aufbauend auf einer prozessorientierten Definition von Modellrisiko werden Beispiele des Auftretens von Modellrisiko in der aktuariellen Praxis angeführt. Dies wird anhand des *Market Consistent Embedded Value* und des Wilkie-Modells illustriert. Bei der Schätzung, Spezifikation und Validierung von letzterem verdeutlichen wir das Zusammenspiel dieser drei Komponenten mit dem Modellrisiko. Hierzu wird das Wilkie-Modell im Rahmen von multivariaten Zeitreihenmodellen dargestellt und analysiert.

Stichwörter: Modellrisiko, multivariate Zeitreihenmodelle, Wilkie-Modell

---

<sup>1</sup>Korrespondenz:

Telefon: +49 511 3747-2181, Fax: +49 511 3747-2147  
e-mail: gerhard.stahl@talax.com

Wir danken der Talanx AG sowie der Fritz-Thyssen-Stiftung für die finanzielle Unterstützung.

# 1 Einleitung

Die Umsetzung von Solvency II gibt Versicherungsunternehmen die Option, unternehmensspezifische Modelle anstatt Standardmethoden, wie sie beispielsweise in QIS 4b dargelegt sind, zur Berechnung des Solvenzkapitals zu verwenden. Interne Modelle genügen in besonderer Art den erhöhten Anforderungen von Stakeholdern an die Qualität des Risikomanagements, da nur sie es ermöglichen, auf Grund einer möglichst genauen Berechnung den unterschiedlichen Anforderungen der Stakeholder simultan Rechnung zu tragen. Interne Modelle genügen einerseits dem modernen, risikoorientierten Aufsichtsparadigma sowie andererseits auch den Bedürfnissen der Shareholder nach einer risikoadjustierten und optimierten Kapitalallokation. Neben Vorteilen in der Risikomessung, also bei den quantitativen Anforderungen, besteht gleichfalls ein Korrelat zu den qualitativen Anforderungen, da mit der Implementierung eines internen Modells eine Vertiefung der Risikokultur einhergeht. Als Beispiel hierfür mag die Vorgehensweise von Ratingagenturen dienen, ein Unternehmen bzgl. des Risikomanagements nur dann als *strong* einzustufen, falls dieses ein internes Modell zur Risikomessung verwendet. Ein solches Vorgehen wäre ohne obige Kontingenz nicht schlüssig.

Bei internen Modellen handelt es sich um große (hohe Anzahl an erklärenden Variablen), nichtlineare (eingebettete Optionen), stochastische (Modellierung zukünftiger Umweltzustände) Systeme. Im Rahmen des holistischen Ansatzes von Solvency II erfolgt damit eine Schätzung einer Prognoseverteilung des Bilanzsaldos. Hierzu finden sowohl Unternehmensmodelle (Managementregeln, freie RfB etc.), als auch stochastische Modelle Verwendung. Die Darstellung in Abb.1 zeigt schematisch die Bausteine eines internen Modells. Der Systemtheorie folgend (vgl. Luhmann, 1993) induziert die Verwendung sowohl von Standard- als auch von internen Modellen eine neue Risikokategorie: das *Modellrisiko*.

Eine operationale (bottom-up) Definition des Begriffes Modellrisiko ist zum einen auf Grund der Größe und zum anderen auf Grund der oft geringen empirischen Basis eines internen Modells kaum möglich. Dies gilt umso stärker für die aufsichtliche Definition, welche das Modellrisiko unter dem operationellen Risiko subsummiert und auch eine fehlerhafte An-

wendung des Modells einschließt. In den folgenden Abschnitten wird auf das Modellrisiko am Beispiel des Wilkie-Modells (vgl. Wilkie, 1995), das stellvertretend für ökonomische Szenariogeneratoren steht, exemplifiziert. Dies ist dadurch motiviert, dass ökonomische Szenariogeneratoren den wesentlich neuen Modellbaustein in Solvency II darstellen. Doch zuvor seien noch einige grundlegende Anmerkungen geäußert.

**Zum Begriff des Modellrisikos:** Der Begriff ist in der Praxis insoweit umgangssprachlich interpretiert, als dass unter einer Risikosituation eine solche bezeichnet wird, unter welcher eine Verteilung über die Umweltzustände bekannt ist. Eine derartige Situation liegt beispielsweise bei bayesianischen Ansätzen, unter der Annahme, dass diese nicht fehlspezifiziert sind, vor. Solche Vorgehensweisen finden in der aktuariellen Praxis heute schon Anwendung.

**Beispiel aus Denuit et al. (2005):** Bezeichne  $F[X|\theta]$  die Verteilung einer Verlustfunktion und  $\rho_g[X|\theta]$  ein Risikomaß im Sinne von Wang, wobei  $g(\cdot)$  eine konvexe Distortionsfunktion darstellt. Dann gilt:  $\rho_g[X] \geq E[\rho_g(X|\Theta)]$ , wobei das letzte Integral über den Parameterraum  $\Theta$  berechnet wird (vgl. Denuit et al. 2005, S.91ff.). In diesem Sinne definieren Denuit et al.

$$F(x) = \int F(\theta, x) dG(\theta)$$

als gemittelten Modellfehler. Für eine konvexe Detorierungsfunktion  $G(\theta)$  kann eine konservative Abschätzung erfolgen, die jedoch nicht mit der Nutzenfunktion aller Stakeholder vereinbar ist. Im Sinne der von Knight (1921) eingeführten Terminologie wäre indiziert von Modellunsicherheit zu sprechen.

**Sicherheitsbedürfnisse erhöhen das Modellrisiko:** Diese auf den ersten Blick paradoxe Aussage sei am Beispiel des Value-at-Risk für ein Signifikanzniveau von  $\alpha \geq 0.99$  und einem Prognosehorizont von einem Jahr erläutert. Ersterer ist gegeben durch  $VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ , wobei die Verteilungsfunktion  $F$  unbekannt ist und durch die empirische Verteilungsfunktion  $\hat{F}$  geschätzt werden muss. Der Schätzfehler, der hierbei gemacht werden kann, ist lediglich ein Teil des Modellrisikos und lässt sich für ein Quantil wie folgt berechnen.

Bezeichne  $\hat{\xi}_n := \hat{F}_n^{-1}(\alpha)$  die Schätzung des  $\alpha$ -Quantils  $\xi_\alpha$  durch die empirische Vertei-

lungsfunktion. Dann besitzt  $\hat{\xi}_n$  folgende asymptotische Verteilung:

$$\hat{\xi}_n \rightarrow N\left(\xi_\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{nf(\xi_\alpha)}\right), \quad (1)$$

wobei  $f(\cdot)$  die Dichtefunktion der zu Grunde liegenden Variable bezeichnet. Der Varianzterm in (1) ist unter der Annahme, dass der Träger durch die reellen Zahlen definiert ist, unter folgenden Aspekten interessant. Nach der Regel von de L'Hospital erhält man für den Limes

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{\alpha(1-\alpha)}{nf(\xi_\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1-2\alpha}{nf'(\xi_\alpha)}, \quad (2)$$

welcher für festes  $n$  über den Schätzfehler entscheidet. Letzterer ist mit dem Modellfehler verknüpft, da der Limes von dem asymptotischen Verhalten der Dichte des Modells abhängt. Wie (2) zeigt, bestimmt die Asymptotik der Ableitung der Dichte über den Limes. Diese Annahmen werden im Regelfall nicht empirisch überprüft.

In der Wahl moderater  $\alpha$  besteht eine Möglichkeit das obige Paradoxon aufzulösen, da für diese das Modell die Daten interpoliert und nicht wie für zu seltene Ereignisse extrapoliert. Ähnlich wie in den Ingenieurwissenschaften, müssten die Kennziffern für solche moderaten  $\alpha$  mit einem Sicherheitsfaktor multipliziert werden.

**Modellrisiko in der Praxis:** Wie im unteren Teil von Abb.1 erläutert, handelt es sich bei der Modellierung um einen iterativen Prozess, der in Analogie zum Managen von Risiken, dasjenige Mittel der Wahl ist, um Modellrisiken zu vermeiden. Die Modellierung geht Hand in Hand mit der Modellvalidierung sowie Sensitivitätsanalysen und Stresstests. Eine Unterlegung des Modellrisikos mit Eigenmitteln erscheint zweifelhaft, da in Folge dessen auch Modellrisiken in Standardverfahren mit Eigenmitteln zu hinterlegen wären. Die Höhe dieses Sicherheitsfaktors müsste höher als derjenige sein, welcher bei internen Modellen Anwendung fände, da das Modellrisiko in internen Modellen nach Konstruktion geringer sein muss, als dasjenige für Standardverfahren. Eine Analyse des Modellrisikos kann nur für Teilmodelle bzw. für Teil-Teil-Modelle erfolgen, da diese eine Analyse im Sinne von Fehlspezifikation ermöglichen. Hierzu betrachten wir im Folgenden das Modell von Wilkie, da dieses stellvertretend für die Modellklasse der ökonomischen Szenariogeneratoren steht, die unter Solvency II die neue Modellklasse ist, welche unter allen Teilmodellen Anwendung findet.

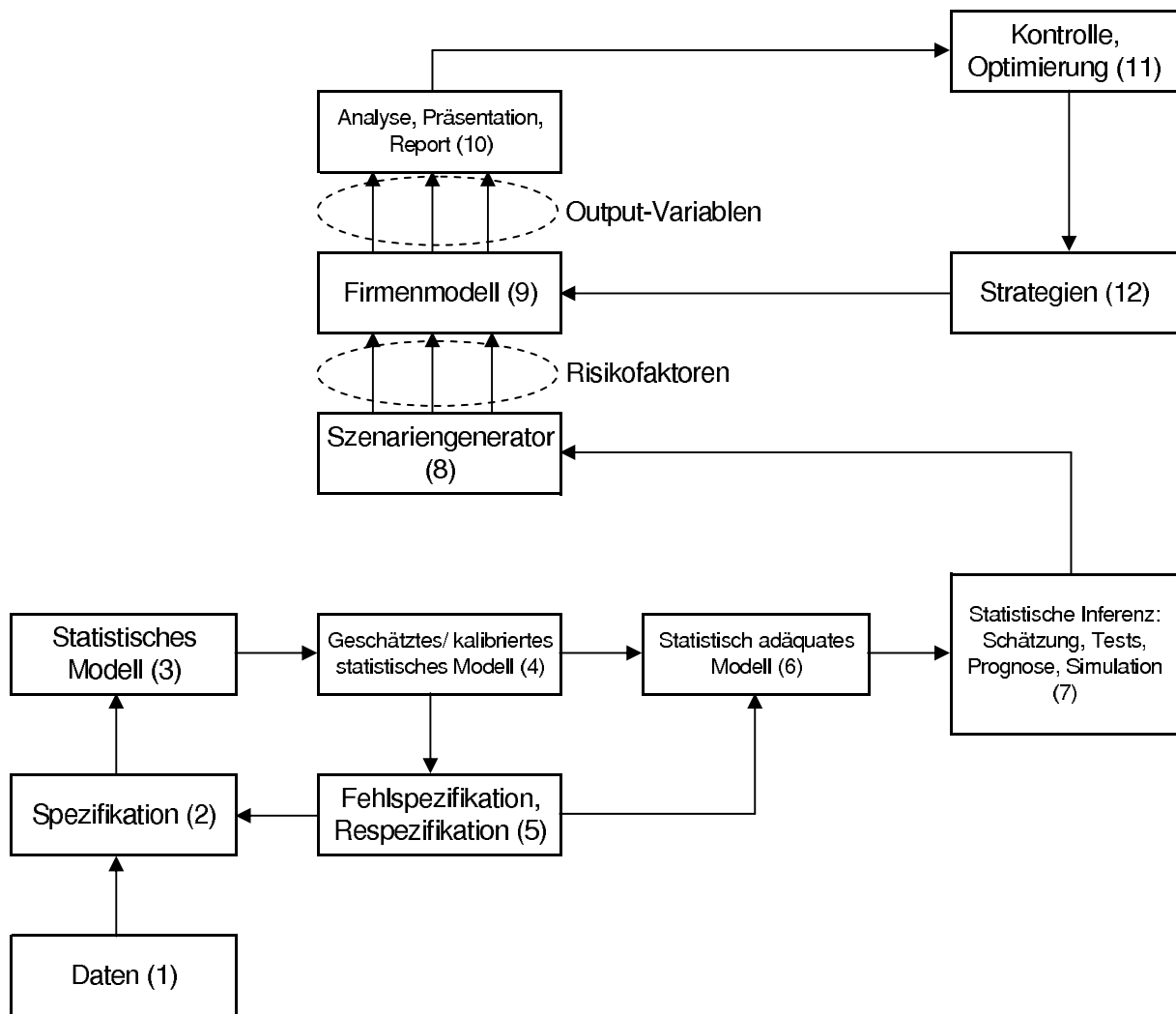


Abbildung 1: In dieser Abbildung werden die Bausteine des internen Modells eines Versicherungsunternehmens schematisch dargestellt. Hierbei gilt es zum einen die Feedbackstruktur des Regelkreises, welcher dem Risikomanagementprozess (bestehend aus 8–12) zu Grunde liegt, hervorzuheben. Zum anderen ist die vorgeschaltete statistische Modellierung, welcher ebenfalls ein Prozess zu Grunde liegt, nämlich der Modellierungsprozess (1–7), zu betonen. Hierbei übernimmt (5) die Aufgabe des Feedbacks.

## 2 Arten von Modellrisiko

In der Versicherungswirtschaft sind stochastische Modelle in zweierlei Hinsicht relevant: erstens bei der Tarifierung und der Bepreisung von Derivaten (Garantien in Versicherungsprodukten oder Hedges in Kapitalmarktrisiken) bzw. Portfolien (Market Consistent Embedded Value) und zweitens zur Risikoberechnung.

Während die Tarifierung zu den traditionellen Aufgaben der Versicherungswirtschaft gehört, wurde durch die neuen Solvabilitätsvorschriften für die Eigenmittelausstattung von Versicherungsunternehmen ein neuer Aspekt induziert – das Modellrisiko. Die Bedeutung von letzterem hat durch die Heranziehung stochastischer Modelle im Rahmen von Solvency II stark zugenommen. Das stochastische Modell fungiert dabei als Bindeglied zwischen der Erfassung des konkreten Finanztitels und dessen Bewertung. Abb.2 verdeutlicht diesen Zusammenhang (vgl. im Folgenden Baumgartner et al., 2004).

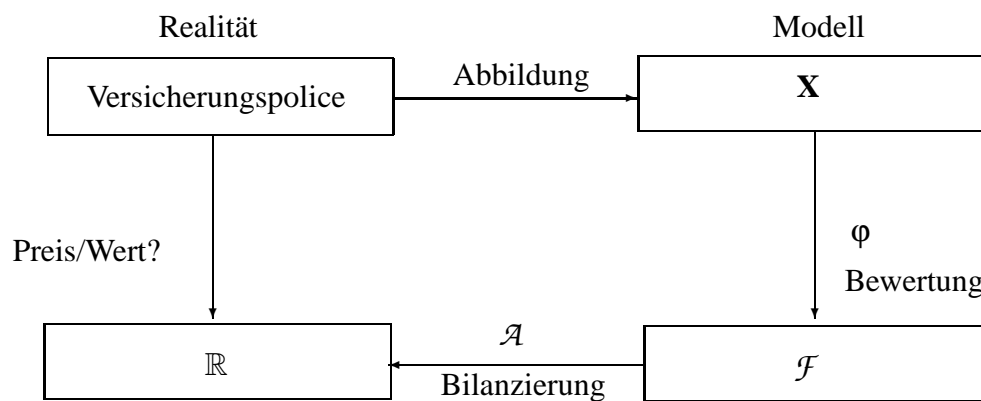


Abbildung 2: Zusammenhang zwischen Modell und Valuierung. Ein Finanztitel wird anhand eines Versicherungsmodells als Cashflow ( $\mathbf{X}$ ) abgebildet und mit einem Bewertungsprinzip valuiert. Der bewertete Titel wird anschließend mit Hilfe von Buchungsprinzipien in die Bilanz aufgenommen.

Ausgangspunkt des Bewertungsprozesses stellt die Erfassung eines zu valuierenden Finanztitels durch das stochastische Modell dar. Als Beispiel sei die Modellierung einer Le-

bensversicherungspolice anhand eines Markov Modells angeführt. Das Modell wird dabei durch die Funktionen  $a_{it}$ ,  $b_{ijt}$  und  $p_{ijt}$  beschrieben, wobei

$a_{it} :=$  Zahlung in  $t$  wenn sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt  $t$  in Zustand  $i$  befindet (z.B. Prämienzahlung),

$b_{ijt} :=$  Zahlung in  $t + 1$  wenn sich der Versicherungsnehmer zum Zeitpunkt  $t$  in Zustand  $i$  und zum Zeitpunkt  $t + 1$  in Zustand  $j$  befindet (z.B. Todesfalleistung),

$p_{ijt} :=$  Wahrscheinlichkeit, im Intervall  $[t, t+1)$  von Zustand  $i$  in Zustand  $j$  zu wechseln.

Die Versicherungspolice wird somit mit Hilfe des Markov Modells in Cashflows ( $\mathbf{X}$ ) umgewandelt. Letztere sind stochastische Größen. Im zweiten Schritt werden die Policen bewertet. Die Menge aller Lebensversicherungspolicen  $\mathcal{F}$  wird hierbei durch die Abbildung  $\varphi$  in den Vektorraum valuerter Portfolien  $\mathcal{F}$  projiziert. Hierbei wird der Erwartungswert des Cashflows  $E^Q[\mathbf{X}]$  unter einem Maß  $Q$  bestimmt. Die Wahl von  $Q$  kann somit z.B. einen mark-to-market oder einen mark-to-model Ansatz induzieren. Bezogen auf Abb.1 entspringt das Maß dem Szenariengenerator (8), während die Cashflows als Teil des Firmenmodells fungieren und als Ergebnisse im Report aufgenommen werden. Schließlich wird die valuierte Police unter Anwendung eines Buchungsprinzips (z.B. nach IFRS) in die Bilanz aufgenommen.

Berücksichtigt werden sollte hierbei, dass in jedem dieser Schritte Modelle und damit auch Modellrisiken involviert sind. Um das gesamte Modellrisiko zu erfassen, müssen somit die verschiedenen Risiken auf den einzelnen Stufen einbezogen werden.

An dieser Stelle sei nochmals betont, dass wir Modellierung als einen Prozess im Sinne von Hendry (1995, S.16ff.) verstehen. Dieses nimmt erneut den unteren Teil von Abb.1 auf und greift voraus auf Tab.1.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Definition von Modellrisiko, welche an die Definition von Crouhy et al. (1998) angelehnt ist

**Definition 1.** *Modellrisiko bezeichnet jede Art von Risiko, das durch die Anwendung eines statistischen Modells induziert wird.*



Diesem Ansatz wird im Folgenden nicht gefolgt, da er unzureichend operational ist. Die folgende Definition ist prozessorientiert und beschreibt folglich das Risiko, dass das spezifizierte und geschätzte Modell falsch ist. Es wird also weniger auf die Eigenschaften des Modells als vielmehr auf die Diskrepanz zwischen den vorliegenden Daten und dem spezifizierten Modell abgestellt (vgl. Sibbertsen et al., 2008).

**Definition 2.** *Modellrisiko im strengen Sinne bezeichnet jede Art von Risiko, das durch die Auswahl, Spezifikation und Schätzung eines statistischen Modells induziert wird.*

Damit kann Modellrisiko potentiell in jedem der drei Modellierungsschritte eintreten.

**Bemerkung:** Diese Definition schließt jedes Risiko, das auf menschlichem Versagen basiert aus. Dasjenige Risiko, welches aus kontaminierten Daten entstehen kann ist hingegen in der Definition enthalten.

Die konkrete Spezifikation des Modells umfasst vier Modellierungsstufen. Die Aspekte aus Definition 2 sind hierin enthalten (s. auch Cuthbertson et al., 1992):

1. Marginalisierung des datengenerierenden Prozesses;
2. Modellspezifikation bzgl. der Variablenauswahl;
3. Modellspezifikation bzgl. der funktionalen Form;
4. Parameterschätzung.

Eine weitere Differenzierung der Modellierungsstufen liefert Tab.1 (vgl. Sibbertsen et al., 2008). Beispiele für die einzelnen Kategorien werden in Kapitel 3 aufgegriffen.

Komponenten des Modellrisikos	Kategorien	Prozessstufe #
Modellfehler und Fehlspezifikation	• Fehler in der analytischen Lösung	3
	• Fehlspezifikation des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses	1
	• Unberücksichtigte Risikofaktoren	2
	• Unberücksichtigte Überlegungen	2
	• Falsche Klassifizierung/Identifikation des zugrundeliegenden Assets	2,3
	• Änderung der Marktbedingungen	1,2,3
	• Stichprobengröße	1
	• Fehler in den Variablen	2
Modellschätzung	• konkurrierende Schätzmethoden	4
	• Schätzfehler	4
	• Ausreißerproblematik	2,4
	• Schätzintervalle	4
	• Kalibrierung und Revision der geschätzten Parameter	4

Tabelle 1: Klassifikation von Modellrisiko

Tab.1 verdeutlicht die zwei zentralen Aufgaben bei der datenorientierten Modellierung: die Wahl der funktionalen Form und die Schätzung der Parameter. Während Fehler in ersterem implizieren, dass das Modell nicht geeignet ist, die Daten zu repräsentieren, resultieren Schätzfehler in verzerrten Parameterwerten.

Unser Ansatz zur Erfassung des Modellrisikos ist offensichtlich auch mit einigen Schwierigkeiten behaftet. So bedarf es eines alternativen Modells mit dem das zu untersuchende Modell verglichen werden kann. Konkret ist zum Vergleich also ein korrektes Modell vonnöten, welches in der Praxis schwer zu bestimmen ist. Abhilfe kann zwar dadurch geschaffen werden, dass als Alternative ein Benchmarkmodell, also dasjenige Modell, welches am nächsten an den Daten liegt, herangezogen wird. Ist dieses jedoch bekannt, so erübrigt sich der Vergleich von Modellrisiken, da das bestmögliche Modell damit bereits gefunden ist. Die Wahl eines Benchmarkmodells ist also ein schwerwiegendes Problem, welches im Kontext der Diskussion über Modellrisiko allerdings kaum übergangen werden kann.

## 3 Praxisbeispiele

### 3.1 Market Consistent Embedded Value

Der Market Consistent Embedded Value (MCEV) stellt ein Prinzip zur marktkonsistenten Bewertung von Versicherungsunternehmen aus Sicht der Eigentümer dar (vgl. CFO Forum, 2008). Da für versicherungstechnische Verpflichtungen im Allgemeinen kein aktiver Markt existiert, müssen Modelle für eine market-to-model Bewertung der Bestände herangezogen werden. Allgemein wird von einer marktkonsistenten Bewertung gesprochen, wenn der market-to-model Preis der zu bewertenden Verpflichtung innerhalb gewisser Toleranzgrenzen repliziert werden kann. Dies bedeutet, dass in einem arbitragefreien Kapitalmarktmodell der Erwartungswert der diskontierten zukünftigen Cashflows der Kapitalanlage seinem aktuellen Marktwert entspricht. Die Cashflows der Periode  $t = 1, \dots, T$  können beschrieben werden als

$$X_t = \begin{cases} 0,0955 \cdot KE_t \cdot ZE_t, & \text{falls } KE_t^{ph} > 0 \\ (1 - r_{tax}) \cdot (KE_t \cdot ZE_t - i \cdot DR_{t-1}), & \text{falls } KE_t^{ph} \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

$KE^{ph}$  bezeichnet den auf den Versicherungsnehmer entfallenden Anteil der erwirtschafteten Kapitalerträge ( $KE$ ). Ist  $KE^{ph} > 0$ , wird den Versicherten eine Überschussbeteiligung gezahlt, wobei der Versicherer für  $KE^{ph} \leq 0$  die gesamten Kapitalerträge einbehält.  $ZE$  beschreibt das von den Versicherungsnehmern eingesetzte Vermögen, gemessen an den gesamten Passiva, während  $r_{tax}$  den Steuersatz und  $i$  die Garantieverzinsung der Deckungsrückstellung ( $DR$ ) bezeichnet. Der Wert 0,0955 ergibt sich als der unter Berücksichtigung der Mindestzuführungsverordnung verbleibende Anteil der Kapitalerträge des Versicherers nach Steuern (vgl. Baur 2009, S. 82).

Es ist zu beachten, dass die Kapitalerträge von den stochastischen Zinserträgen abhängen. Damit stellen die Cashflows Zufallsvariablen dar und sollten somit unter Anwendung finanzmathematischer Methoden bewertet werden.

Der MCEV zum Zeitpunkt  $t$ ,  $\pi(t)$ , ergibt sich nun als Produkt aus gegenwärtigem Dis-

kontfaktor  $B_t$  und dem bedingten Erwartungswert der zukünftigen abdiskontierten Cashflows:

$$\pi(t) = B_t \cdot E_Q \left[ \sum_{\tau=t}^T \frac{X_\tau}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (4)$$

Unter der Bedingung eines vollständigen, arbitragefreien Marktes, wird der Erwartungswert der Cashflows unter einem Martingalmaß  $Q$  bestimmt. Weiterhin wird  $E[\cdot]$  bedingt auf die in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t$  enthaltenen verfügbaren Informationen zum Zeitpunkt  $t$ . Da eine geschlossene Berechnungsformel für die komplexen Zahlungsströme  $X_\tau$  i.A. nicht existiert, erfolgt die Bestimmung des bedingten Erwartungswertes in (4) häufig mit Hilfe von Simulationen.

Durch die marktkonsistente Bewertung sind folglich drei potentielle Fehlerquellen gegeben. Erstens kann die Darstellung des Portfolios an Versicherungsbeständen als Cashflows Modellfehler induzieren. So unterliegt (3) diversen Annahmen, bei deren Ungültigkeit  $X_\tau$  fehlerhaft berechnet werden kann. In Bezug auf Tab.1 kann diese fehlerhafte Messung von  $X_\tau$  als Fehler in den Riskofaktoren interpretiert werden.

Ein zweiter Modellfehler kann durch die Wahl des Martingalmaßes  $Q$  hervorgerufen werden. Dies wird in Tab.1 unter dem Stichwort Kalibrierungsfehler angeführt.

Detlefsen und Härdle (2006) zeigen, dass das Kalibrationsrisiko als wichtige Komponente des Modellrisikos nicht vernachlässigt werden sollte. So wird anhand einer Simulationsstudie demonstriert, dass bei der Bewertung von exotischen Optionen die Wahl des Fehlerfunktional das Modellrisiko stark beeinflusst. Die Bedeutung der Wahl des Fehlerfunktional ist dabei umso höher, je größer die Unsicherheit bzgl. der Adäquatheit des parametrischen Modells ist.

Schließlich kann ein Schätzfehler auftreten, da  $\pi(t)$  nicht bekannt ist, sondern durch  $\hat{\pi}(t)$  approximiert werden muss.

## 3.2 Wilkie-Modell

Das Wilkie-Modell (vgl. Wilkie, 1995) ist ein stochastisches Investitionsmodell, welches in der Versicherungswirtschaft als Benchmarkmodell für die Modellierung und Simulation ökonomischer Szenarien genutzt wird. In seiner ursprünglichen Form umfasst das Gesamtmodell

sechs Teilmodelle, in denen folgende Variable modelliert werden: Inflation, Dividendenrenditen, Dividendenindices, kurz- und langfristige Zinsen sowie Wechselkurse.

Die Teilmodelle sind über eine Kaskadenstruktur miteinander verbunden (s. Abb.3). Hinsichtlich der Wirkungsrichtung impliziert die Kaskadenstruktur eine Kausalkette ohne Rückkopplungseffekte. Dem Inflationsmodell fällt hierbei eine besondere Rolle zu, da es als treibende Kraft des Gesamtmodells unmittelbar bzw. mittelbar in jedes nachgeordnete Teilmodell einfließt.

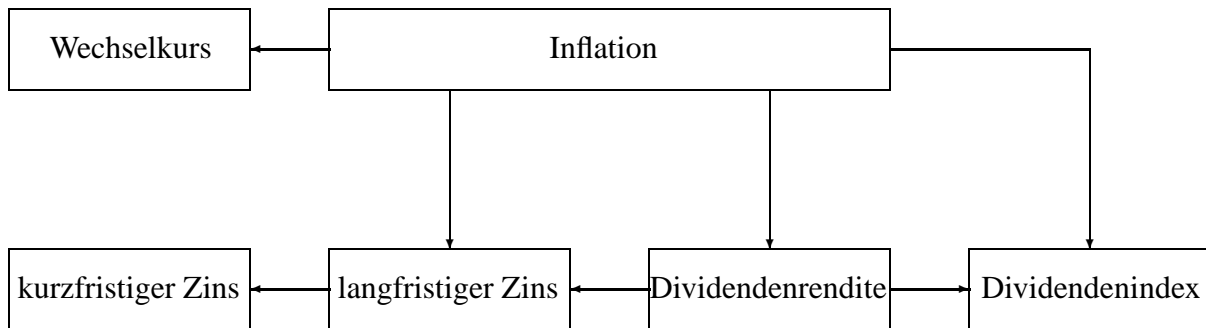


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Wilkie-Modells

Die statistische Modellierung des Systems erfolgt in der Klasse der linearen State-Space Modelle. Letztere werden durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$z_t = B_{t-1}z_{t-1} + F_{t-1}x_{t-1} + \omega_{t-1} \quad (5)$$

$$y_t = H_t z_t + G_t x_t + e_{t-1}. \quad (6)$$

$z_t$  beschreibt dabei einen Vektor unbeobachtbarer Variablen, während die beobachtbaren endogenen und exogenen Variablen durch  $y_t$  bzw.  $x_t$  erfasst werden.  $\omega_t$  und  $e_t$  sind voneinander unabhängige weiße Rauschen und  $B_t$ ,  $F_t$ ,  $H_t$  sowie  $G_t$  sind Koeffizientenmatrizen. (5) wird als Zustandsgleichung und (6) als Beobachtungsgleichung bezeichnet.

Der Vorteil von State-Space Modellen liegt darin, dass sie als Überbau für verschiedene Modellklassen, wie z.B. VARMAX-Modelle (vektorautoregressive moving-average Modelle

mit exogenen Variablen), VARX-Modelle mit zeitinvarianten Koeffizienten oder Zeitreihenmodelle mit Trend- und Saisonkomponente fungieren. Während Wilkie also die einzelnen Gleichungen seines Modells spezifiziert und versucht diese miteinander zu verknüpfen, folgt diese Vorgehensweise einer Spezifikation des Systems in holistischer Gestalt. So wird an Stelle von Einzelgleichungen ein Gleichungssystem modelliert.

Die rekursive Schätzung der Zustandsvariable  $z_t$  erfolgt durch die Anwendung des Kalman-Filters (Kalman, 1960; Kalman und Bucy, 1961). Die Schätzung der Parametermatrizen kann mit der Maximum-Likelihood Methode durchgeführt werden. Die exakte State-Space Darstellung des Wilkie-Modells soll im Folgenden kurz beschrieben werden.

Das Wilkie-Modell besteht gemäß Abb.3 aus sechs Variablen. Diese seien im Vektor  $\lambda_t = (\lambda_{1t}, \dots, \lambda_{6t})'$  zusammengefasst. Weiterhin beschreibt  $v = (v_1, \dots, v_6)'$  einen Vektor von Konstanten und  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{6t})'$  ein sechsdimensionales weißes Rauschen. Die Teilmodelle sind gemäß der ursprünglichen Form des Wilkie-Modells (Wilkie, 1995) wie folgt definiert.

**Inflationsrate:** Die Inflationsrate wird als autoregressiver Prozess erster Ordnung (AR(1)-Prozess) modelliert. Formal gilt

$$\lambda_{1t} = v_1 + \beta_1 \lambda_{1,t-1} + \varepsilon_{1t}.$$

**Dividendenrendite:** Ebenfalls anhand eines AR(1)-Prozesses erhält die logarithmierte Dividendenrendite Einzug in das Modell. Zusätzlich wird die Inflationsrate unverzögert als Erklärungsvariable in das Teilmodell aufgenommen. Es gilt

$$\ln \lambda_{2t} = v_2 + \alpha_1 \lambda_{1t} + \beta_2 \ln \lambda_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}.$$

**Dividendenindex:** Die Wachstumsrate des Dividendenindex wird modelliert als moving-average-Prozess erster Ordnung (MA(1)-Prozess). Als weitere Einflussfaktoren erhalten die unverzögerte Inflationsrate sowie der Störterm des Dividendenrenditemodells Einzug in das Modell.<sup>2</sup> Folglich ergibt sich

$$\Delta \ln \lambda_{3t} = v_3 + \alpha_2 \lambda_{1t} + \delta_1 \varepsilon_{2,t-1} + \delta_2 \varepsilon_{3,t-1} + \varepsilon_{3t}.$$

---

<sup>2</sup>Es sei darauf hingewiesen, dass der Term  $DM_t$  aus dem Wilkie-Modell in dieser Spezifikation nicht in das

**Langfristiger Zinssatz:** Die langfristigen Zinsen werden als AR(1)-Prozess mit zusätzlichem Einfluss der unverzögerten Innovation der Dividendenrendite modelliert. Als endogene Variable fungiert in diesem Modell der logarithmierte, inflationsbereingte langfristige Zinssatz. Die Bereinigung erfolgt hierbei durch Subtraktion der zukünftig erwarteten Inflationsrate ( $\theta$ ). Letztere wird mit Hilfe eines exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitts der Inflationsrate konstruiert. Dabei kann der Parameter  $\rho$  auf Grund von Identifikationsproblemen nicht geschätzt werden. Dies bedeutet, dass sich algebraisch keine eindeutige Berechnungsformel zur Schätzung des Parameters angeben lässt. In solchen Fällen wird oft auf Erfahrungswerte zurückgegriffen, wobei Wilkie den Wert  $\rho = 0.045$  wählt. Das Modell ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} \ln(\lambda_{4t} - \theta_t) &= v_4 + \beta_3 \ln(\lambda_{4,t-1} - \theta_{t-1}) + \gamma_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{4t}, \quad \text{wobei} \\ \theta_t &= (1 - \rho)^t \cdot \bar{\lambda}_1 + \rho \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} \lambda_{1i}. \end{aligned}$$

**Kurzfristiger Zinssatz:** Dieses Teilmodell modelliert die Differenz der Logarithmen von lang- und kurzfristigem Zinssatz. Dies geschieht anhand des AR(1)-Prozesses

$$\ln \lambda_{4t} - \ln \lambda_{5t} = v_5 + \beta_4 (\ln \lambda_{4,t-1} - \ln \lambda_{5,t-1}) + \varepsilon_{4t}.$$

**Wechselkurs:** Aufbauend auf der Theorie der Kaufkraftparität spezifiziert das Wechselkursmodell die Differenz im Logarithmus von Wechselkurs und der Differenz der Verbraucherpreisindices der Länder  $j$  und  $i$  ( $\ln Q_{jt} - \ln Q_{it}$ ) als endogene Variable. Letztere folgt dem AR(1)-Prozess

$$\ln \lambda_{6t} - \ln Q_{jt} + \ln Q_{it} = v_6 + \beta_6 (\ln \lambda_{6,t-1} - \ln Q_{j,t-1} + \ln Q_{i,t-1}) + \varepsilon_{6t}.$$

Mit

$$y_t = (y_{1t}, \dots, y_{6t}) = (\lambda_{1t}, \ln \lambda_{2t}, \Delta \ln \lambda_{3t}, \ln(\lambda_{4t} - \theta_t), \ln \lambda_{4t} - \ln \lambda_{5t}, \ln \lambda_{6t} - \ln Q_{jt} + \ln Q_{it}) \quad (7)$$

Modell mitaufgenommen wurde. Laut Wilkie (1995, S. 842ff.) ist dies durchaus sinnvoll, da der Glättungsparameter  $DD$  sich in fast allen Modellspezifikationen nicht signifikant von Null unterscheidet.

kann das Wilkie-Modell somit durch das strukturelle VARMA(1,1)-Modell

$$A_0 y_t = v + A_1 y_{t-1} + M_0 \varepsilon_t + M_1 \varepsilon_{t-1} \quad (8)$$

dargestellt werden, wobei

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_5 \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit  $u_t = A_0^{-1} M_0 \varepsilon_t$ ,  $\tilde{A}_1 = A_0^{-1} A_1$ ,  $\tilde{M}_1 = A_0^{-1} M_1 M_0^{-1} A_0$  und  $\tilde{v} = A_0^{-1} v$  ist die VAR(1)-Darstellung von (8) gegeben durch

$$Y_t = \tilde{v} + A Y_{t-1} + U_t \quad \text{mit} \quad Y_t = \begin{bmatrix} y_t \\ u_t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{M}_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ u_t \end{bmatrix}.$$

Die State-Space Darstellung von (8) ergibt sich nun über die oben angeführten Gleichungen (5) und (6), wobei  $e_t = G_t = 0$ ,  $B_t = A$ ,  $x_t = 1$ , und  $F_t = \tilde{v}$  jeweils für alle  $t = (1, \dots, T)$  Gültigkeit besitzt. Weiterhin ist  $z_t = Y_t$  sowie  $\omega_t = U_t$ . Schließlich gilt  $H_t = [E_6 \ ; \ 0] \sim (6 \times 12)$ , wobei  $E_6$  die sechsdimensionale Einheitsmatrix und 0 die Nullmatrix der Dimension  $(6 \times 6)$  beschreibt.

Im Folgenden soll auf einige in Tab.1 beschriebene potentielle Fehlerquellen im Rahmen der Spezifikation und Schätzung des Wilkie-Modells eingegangen werden.

**Strukturbrüche und Fensterbreite:** Wilkie modelliert die Inflationsrate unter Heranziehung eines AR(1)-Modells. Im Folgenden verwenden wir eine leicht geänderte, jedoch kanonische Notation. Das Inflationsmodell lässt sich somit darstellen als:

$$I_t = \alpha_0 + \alpha_1 I_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (9)$$



$I_t$  bezeichnet dabei die Inflationsrate im Jahr  $t$ ,  $\alpha_0$  die Konstante,  $|\alpha_1| < 1$  den AR-Parameter und  $\varepsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$  für alle  $t$ , beschreibt ein normalverteiltes weißes Rauschen.

Es sei nun davon ausgegangen, dass die Gesamtstichprobe  $t \in \{1, \dots, \tilde{t}, \tilde{t} + 1, \dots, T\}$  in zwei Teilstichproben  $t_1 \in \{1, \dots, \tilde{t}\}$  und  $t_2 \in \{\tilde{t} + 1, \dots, T\}$  aufgeteilt werden kann, wobei  $t_1$  eine innerhalb einer moderaten Bandbreite um ihren Mittelwert schwankende Reihe beschreibt.  $t_2$  wiederum beinhaltet außergewöhnliche Vorkommnisse wie Krisen oder Zeiten hohen Wachstums, die durch eine starke Persistenz in extremen Werten gekennzeichnet sind. Es ist nun leicht ersichtlich, dass bei Heranziehung von  $t_1 + t_2$  die Parameterschätzung von  $\alpha_1$  in (9) betragsmäßig näher an Eins liegen sollte als bei einer Schätzung des Modells auf Basis von  $t = t_1$ . Unter der Annahme, dass (9) den wahren datengenerierenden Prozess (DGP) darstellt, können also bei der Modellierung durch Unterschlagung eines Teils der Stichprobe unterschiedliche Parameterwerte geschätzt werden. Somit entsteht Modellrisiko auf Basis der Nichtberücksichtigung wichtiger Prozesscharakteristika.

Dieser Aspekt wird in Tabelle 1 durch die Punkte *Veränderung der Marktbedingungen* sowie *Stichprobengröße* aufgegriffen. Je deutlicher die Unterschiede in den Teilstichproben hinsichtlich dieser Punkte ausfallen, desto stärker steigt die Bedeutung der Wahl der Stichprobengröße im Modellierungsprozess. Wilkie (1995) zeigt die Abhängigkeit der Parameterschätzungen im Inflationsmodell von der Wahl der Fensterbreite in Abschnitt 2.3.

**Beispiel:** Obige Problemstellung bei der Schätzung von (9) soll anhand eines empirischen Beispiels verdeutlicht werden. Als endogene Variable im Modell wird hierbei die vom *Internationalen Währungsfonds* publizierte monatliche US-amerikanische Inflationsrate im Zeitraum 1973 bis 2009 herangezogen. Eine graphische Darstellung dieser Zeitreihe liefert Abb.4.

Offensichtlich sind die Ausschläge der Zeitreihe während des Zeitraums der beiden Ölkrisen (1973-1982) sehr viel größer als in den Folgejahren. Bei Schätzung von (9) auf Basis des Zeitraumes  $t_2 \in (1983, \dots, 2009)$  ergeben sich die Parameterwerte  $\hat{\alpha}_0^{t_2} = 2.99$  und  $\hat{\alpha}_1^{t_2} = 0.95$ , wohingegen sich bei Hinzuziehung von  $t_1 \in (1973, \dots, 1982)$  die Schätzwerte  $\hat{\alpha}_0^{t_1+t_2} = 4.01$  und  $\hat{\alpha}_1^{t_1+t_2} = 0.99$  ergeben. Alle Parameterschätzungen sind hochsignifikant. Die Proble-

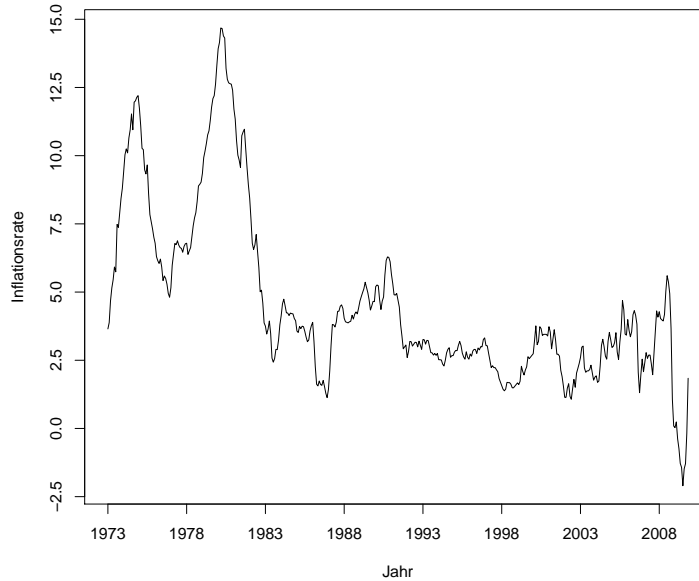


Abbildung 4: Monatliche Inflationsrate in den USA von 1973 bis 2009

matik lässt sich aber in diesem Beispiel nicht nur auf die unterschiedlichen Parameterwerte beschränken. Auch die Stationaritätsuntersuchungen für die jeweiligen Fensterbreiten liefern unterschiedliche Ergebnisse. So lehnt der Augmented Dickey-Fuller-Test (vgl. Dickey und Fuller, 1979) die Nullhypothese der Instationarität auf Basis von  $t = t_2$  ab, während  $H_0$  für  $t = t_1 + t_2$  nicht verworfen werden kann.

Ob sich der Anwender somit primär auf den aktuellsten Teil der Stichprobe konzentrieren sollte oder eine möglichst lange Reihe heranzuziehen ist, kann nicht pauschal beantwortet werden. Die Entscheidung hängt vielmehr von den Zielen der Untersuchung (kurz- vs. langfrist Analyse/Prognose) ab.

**Fehlspezifikation des DGP:** Entspricht der in (9) unterstellte DGP dem Inflationsmodell, so gilt für OLS- (ordinary least squares) und Maximum-Likelihood-Schätzung unter klassischen

Bedingungen (vgl. z.B. Green 2003, S.10ff.) und ohne Berücksichtigung der Konstanten:

$$\hat{\alpha}_1 = (X_2'X_2)^{-1} (X_2'X_1) = E[\alpha_1], \text{ da} \quad (10)$$

$$\alpha_1 = (X_2'X_2)^{-1} [X_2'(X_1 - \varepsilon)], \quad (11)$$

wobei  $X_1 = (I_T, I_{T-1}, \dots, I_1)'$ ,  $X_2 = (I_{T-1}, I_{T-2}, \dots, I_0)'$  und  $\varepsilon = (\varepsilon_T, \varepsilon_{T-1}, \dots, \varepsilon_1)'$ . Die Koeffizientenschätzung ist somit unverzerrt.

Ist das Modell allerdings fehlspezifiziert, so gilt (10) nicht. Wenn im Modell weitere Erklärungsvariablen, wie z.B. der Ölpreis oder die Zinsrate Einfluss erhalten und diese unberücksichtigt bleiben, so entstehen verzerrte Parameterschätzungen.

Die mit  $U$  bezeichneten unterdrückten Variablen werden in (9) von der Störgröße absorbiert, sodass gilt:  $\varepsilon_t = U_t + \tilde{\varepsilon}_t$ , wobei  $E[U] \neq 0$  und  $\tilde{\varepsilon}_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} (0, \sigma^2)$  für alle  $t$ . Aus (11) ergibt sich somit  $E[\alpha_1] = \hat{\alpha}_1 - (X_2'X_2)^{-1} (X_2'U) \neq \hat{\alpha}_1$ .

Damit hat die Nichtberücksichtigung wichtiger Einflussfaktoren schwerwiegende Konsequenzen für den Modellierungsprozess. Dies stellt nicht nur auf den Einbezug zusätzlicher Variablen, sondern auch auf die Lagstruktur, also unberücksichtigte gelaggte endogene Variablen, ab. Es sollte dabei beachtet werden, dass die Unterdrückung von Einflussfaktoren bei der Modellierung lediglich eine Möglichkeit der Fehlspezifikation des DGP darstellt. Weiterhin kann letzterer in seiner funktionalen Form zwischen endogener und (schwach) exogenen Variablen oder auch hinsichtlich des Kausalzusammenhangs fehlspezifiziert sein. Abhilfe kann z.B. dadurch geschaffen werden, dass Fehlspezifikationstests herangezogen werden, die Lagstruktur mit Informationskriterien bestimmt wird oder Kausalitätstests bei der Modellierung Anwendung finden. Auf Letzteres wird in Kapitel 4 ausführlich eingegangen.

**Konkurrierende Schätzmethoden:** Auch durch die Verwendung verschiedener Schätzmethoden können Risiken im Modellierungsprozess induziert werden. Dies soll anhand eines Vergleichs der Schätzung von (9) nach OLS und nach GLS (generalised least squares) illustriert werden.

Während sich die Parameterschätzung zwischen beiden Methoden nicht unterscheidet, da

jeweils das Funktional  $\sum_t \varepsilon_t^2$  minimiert wird, bestehen Unterschiede in der Schätzung der Kovarianzmatrix  $E[\varepsilon\varepsilon'] = \Sigma$ . Für die Varianz der Koeffizientenschätzer gilt

$$\text{Var}[\alpha_1]_{OLS} = \sigma^2 (X_2'X_2)^{-1}, \quad \text{Var}[\alpha_1]_{GLS} = \sigma^2 (X_2'X_2)^{-1} (X_2'\Omega X_2) (X_2'X_2)^{-1},$$

wobei  $\Omega = \Sigma/\sigma^2$ ,  $\sigma^2 = \sum_t \varepsilon_t^2/(T - K)$  und  $K$  die Anzahl der zu schätzenden Parameter bezeichnet. Nach Schätzung von  $\sigma^2$  und  $\Omega$  lassen sich somit  $\widehat{\text{Var}}[\alpha_1]_{OLS}$  und  $\widehat{\text{Var}}[\alpha_1]_{GLS}$  bestimmen.

Gilt  $\Omega = E$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix beschreibt, so ist  $\text{Var}[\alpha_1]_{OLS} = \text{Var}[\alpha_1]_{GLS}$ . Ist die Gleichheit allerdings nicht gegeben, wird also  $\varepsilon_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$  verletzt, so unterscheiden sich die Varianzschätzer. Da auf letzteren die Signifikanzanalyse der Parameter basiert, hat die Auswahl des Schätzverfahrens unmittelbare Auswirkungen auf die Inferenz. So kann es beispielsweise passieren, dass  $\widehat{\alpha}_1$  bei Schätzung mittels OLS signifikant und damit von Null verschieden ist, während die GLS-Methode Insignifikanz des Koeffizienten signalisiert. Ob die Variable  $I_{t-1}$  bei der Modellierung des Inflationsmodell berücksichtigt werden sollte, hinge somit von der verwendeten Schätzmethode ab. In der Praxis sollten folglich vor der Anwendung der Schätzmethode die zu Grunde liegenden Annahmen letzterer durch Tests evaluiert werden.

Schließlich sollte bemerkt werden, dass die obigen Risikofaktoren in jedem Teilmodell auftreten können. Die Risiken einzelner Teilmodelle können sich damit im gesamten Modell fortpflanzen. Dieser Effekt ist umso größer, je stärker die einzelnen Variablen untereinander vernetzt sind. Ist also die Verbindung der Teilmodelle miteinander stark ausgeprägt, so ist ein insgesamt höheres Modellrisiko zu erwarten, als im Fall einer weniger starken Vernetzung.

## 4 Modellrisiko und Simultanitätsbias

Ein klassischer ökonomischer Szenariengenerator mit einer Kaskadenstruktur ist das Investitionsmodell von Wilkie (1995). Eine Kaskadenstruktur bedeutet dabei, dass man ausgehend von einer Grundvariablen ein Gesamtmodell aufbaut, dessen Einzelkomponenten immer

stärker ineinander verschachtelt werden. Die Kaskadenstruktur von Wilkies Investitionsmodell ist in Abb.3 gegeben.

In der Ökonometrie spricht man bei derartigen Zusammenhängen von Kausalität. Man spricht von Granger-Kausalität, wenn bei einer gegebenen Informationsmenge bis zum Zeitpunkt  $t - 1$  eine Variable  $Y$  zum Zeitpunkt  $t$  durch die Einbeziehung einer weiteren Variable  $X$  einen geringeren mittleren quadratischen Prognosefehler aufweist, als ohne diese Einbeziehung. Granger (1969) geht bei der Formulierung dieses Kausalitätsbegriffs davon aus, dass die Ursache der Wirkung zeitlich immer vorrausgeht. Dieser zeitliche Unterschied kann in Grangers Definition infinitesimal klein sein. Formal kann man Granger-Kausalität mit Hilfe eines VAR(p)-Modells definieren:

**Definition 3.**  $X_1$  und  $X_2$  seien zwei Zeitreihen, die durch das folgende bivariate VAR(p)-Modell unter Vernachlässigung der Konstanten beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11,1} & \alpha_{12,1} \\ \alpha_{21,1} & \alpha_{22,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{11,p} & \alpha_{12,p} \\ \alpha_{21,p} & \alpha_{22,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-p} \\ X_{2,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$$

$X_2$  ist genau dann Granger-kausal für  $X_1$ , wenn mindestens einer der Werte  $\alpha_{12,1}$  bis  $\alpha_{12,p}$  nicht Null ist. Umgekehrt ist  $X_1$  ist genau dann Granger-kausal für  $X_2$ , wenn mindestens einer der Werte  $\alpha_{21,1}$  bis  $\alpha_{21,p}$  nicht Null ist.

Wie aus der Definition hervorgeht, geht die Granger-Kausalität nicht notwendigerweise nur in eine Richtung, es kann auch Wechselwirkungen geben.

Besteht ein derartiger Rückkopplungszusammenhang nicht, ist also beispielsweise die Variable  $X_2$  nicht Granger-kausal für  $X_1$ , wobei durchaus  $X_1$  Granger-kausal für  $X_2$  sein kann, so wird das System  $X_1, X_2$  auch als exogen bezeichnet. Anderenfalls nennt man es endogen. Die Annahme der Exogenität ist eine der zentralen Annahmen in der Ökonometrie und eine der wichtigsten Annahmen im Bereich der linearen Regression. So kann insbesondere die Unverzerrtheit des OLS-Schätzers im linearen Regressionsmodell nur unter der Annahme exogener

Regressoren gezeigt werden. Im Falle endogener Regressoren wäre der OLS-Schätzer verzerrt, man spricht vom Endogenitätsbias. Diese Aussage hat Konsequenzen weit über das einfache lineare Regressionsmodell hinaus, da zahlreiche Schätzprobleme auf das lineare Regressionsmodell zurückgeführt werden können.

Einen Spezialfall des Endogenitätsbias, den Simultanitätsbias, kann man sich am linearen Regressionsmodell gut vor Augen führen. Es sei dabei erwähnt, dass wir hier zur Vereinfachung der Darstellung keine zeitlich verzögerten Variablen betrachten. Gehen wir von dem klassischen linearen Regressionsmodell

$$y = X\beta + u$$

aus, wobei  $y$  und  $X$  nun aber gegenseitig kausal füreinander sind, das System ist also endogen. In diesem Fall ist der Regressor  $X$  nicht mehr unabhängig vom Störterm  $u$ . Den OLS-Schätzer für den Modellparameter  $\beta$  erhält man durch

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Für einen konsistenten Schätzer muss gelten, dass  $E[\hat{\beta}] = \beta$  ist. Hier erhalten wir hingegen

$$\begin{aligned} E[\hat{\beta}] &= E \left[ (X'X)^{-1} X'y \right] \\ &= E \left[ (X'X)^{-1} X'(X\beta + u) \right] \\ &= E \left[ (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'u \right] \\ &= \beta + E \left[ (X'X)^{-1} X'u \right]. \end{aligned}$$

Der letzte Summand auf der rechten Seite ist nun nicht mehr Null und entspricht dem Endogenitätsbias. Dieser kann durchaus erheblich sein.

Wilkie (1995) betrachtet in seinem Modell einen zeitlich unverzögerten Kausalitätszusammenhang, sogenannte instantaneous causality, den es in Grangers Modellwelt nicht geben kann. Ein derartiger Kausalitätszusammenhang kann allerdings durch Aggregationseffekte entstehen, da in Wilkies Modell nur Quartalsdaten vorliegen und somit keine infinitesimal kleinen Zeitunterschiede betrachtet werden können. Im weiteren werden wir daher mit Bezug

auf das Wilkie-Modell nur noch von Kausalität sprechen und gehen von einer instantaneous causality aus, die durch Aggregationseffekte aus der Granger-Kausalität hervorgegangen ist.

Durch die Kaskadenstruktur induziert, geht das Wilkie-Modell nicht davon aus, dass es Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Variablen gibt. Die Kausalitätsbeziehung geht stets nur in eine Richtung. Die Inflation ist in diesem Modell also kausal für den langfristigen Zins, umgekehrt ist der langfristige Zins aber nicht kausal für die Inflation. Das Kaskadenmodell von Wilkie ist somit ein exogenes System, indem die Modellparameter konsistent geschätzt werden können.

Problematisch im Sinne eines Modellrisikos ist die Tatsache, dass Wilkie die Exogenität des Modells angenommen hat. Es ist somit eine Modellannahme des Wilkie-Modells, dass die Parametermatrizen des Modells obere Dreieckmatrizen sind. Im Sinne einer ökonometrisch sauberen Modellspezifikation hätte die Exogenität des Systems allerdings zunächst getestet werden müssen.

Eine formale Beschreibung von instantaneous causality zwischen den Größen  $X_1$  und  $X_2$  erhält man wie folgt:

**Definition 4.**  $X_1$  und  $X_2$  seien zwei Zeitreihen, die durch die folgende  $VMA(\infty)$ -Darstellung des bivariaten  $VAR(p)$ -Modells beschrieben werden:

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{11}(B) & \Phi_{12}(B) \\ \Phi_{21}(B) & \Phi_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix},$$

wobei  $\Phi_{ij}(B)$  Polynome des Backshift Operators  $B$  sind und  $u_{it}$  unabhängige Fehlerterme darstellen.  $X_1$  ist genau dann nicht unverzögert kausal für  $X_2$ , wenn  $E[u_1 u_2'] = 0$  ist.

Diese Bedingung kann mittels eines Wald-Tests getestet werden. Die Teststatistik folgt einer  $\chi^2(N)$ -Verteilung, wobei  $N$  die Anzahl der Freiheitsgrade beschreibt. Letztere sind gegeben durch die Anzahl der simultan getesteten Nullhypothesen. Nähere Informationen zu diesem Test finden sich in Lütkepohl (2005, S.104ff.).

**Beispiel:** Um zu überprüfen, ob die Exogenitätsannahme des Wilkie-Modells gerechtfertigt ist, haben wir einen Wald-Test auf unverzögerte Kausalität auf das Modell angewendet. Die Nullhypothesen lauten somit

$$H_0 : E[u_i u_j] = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : E[u_i u_j] \neq 0 \quad \text{für } i \neq j \in \{1, \dots, 6\}.$$

Aufgrund der Symmetrie werden somit insgesamt 15 Hypothesen sequentiell getestet, wobei der kritische Wert zum 5% Niveau mit  $\chi^2(1) = 3.84$  gegeben ist. Mit den Reihen 1 bis 6 sind die jeweiligen Transformationen der Variablen Inflation, Dividendenrendite, Dividendenindex, langfristige Zinsen, kurzfristige Zinsen und Wechselkurse gemäß (7) bezeichnet. Es ergaben sich folgende Teststatistiken:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
2	3.34				
3	3.58	8.89			
4	8.19	4.13	0.02		
5	2.17	0.08	0.49	5.63	
6	0.09	1.51	6.22	0.09	0.08

Tabelle 2: Ergebnisse des Tests auf unverzögerte Kausalität

Daran erkennt man, dass die Nullhypothese für zahlreiche Reihenpaare zum 5%-Niveau verworfen werden muss. So ist die Dividendenrendite mit den langfristigen inflationsbereinigten Zinsen unverzögert kausal, die Exogenitätsannahme gilt hier also nicht. Im Wilkie-Modell gar nicht modelliert ist die unverzögerte Kausalität zwischen dem Dividendenindex und kaufkraftbereinigtem Wechselkurs. Lediglich verzögerte Kausalität findet man im Modell zwischen Dividendenrendite und dem Dividendenindex. Folglich erscheint es erwägenswert, ob diejenigen vom Test als signifikant ausgegebenen Korrelationen in das Modell miteinbezogen werden sollten.



Um diese Fragesetzung anhand der Prognosegüte beider Modelle zu evaluieren, haben wir den Test von Clements und Hendry (1998, S.233ff.) herangezogen. Dieser Encompassing-Test vergleicht die Out-of-Sample Prognosegüte zweier (oder mehrerer) Modelle. Hierfür wird folgende Hilfsregression eingeführt:

$$\text{vec}(e_{it}) = \alpha(\text{vec}(e_{it}) - \text{vec}(e_{jt})) + \text{vec}(\varepsilon_{it}), \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Dabei stellt  $\varepsilon_{it}$  ein weißes Rauschen dar und  $e_{it}$  und  $e_{jt}$  bezeichnen die geschätzten Out-of-Sample Prognosefehler für alle Reihen der jeweiligen Modelle  $M_i$  und  $M_j$ . Getestet wird nun die Nullhypothese  $H_0 : \alpha = 0$  gegen  $H_1 : \alpha \neq 0$ . Unter  $H_0$  lässt sich die Prognosegüte von  $M_i$  durch Berücksichtigung von  $M_j$  nicht verbessern, während unter  $H_1$   $M_j$  einen Erklärungsbeitrag für die Prognose des Modells leistet. Die p-Werte der Koeffizientenschätzer sind in Tab.3 gegeben. Dabei bezeichnet  $M_1$  das Modell in der von Wilkie vorgeschlagenen Form.  $M_2$  hingegen berücksichtigt die signifikanten Korrelationen aus Tab.2 und kann somit als unrestringiertes Modell bezeichnet werden.  $\pi$  spiegelt dabei das Verhältnis aus Anzahl von Out-of-Sample- und In-Sample Beobachtungen wider.

Benchmarkmodell ( $M_i$ )	$\pi = 0.4$	$\pi = 1$
$M_1$	0.000	0.000
$M_2$	0.390	0.154

Tabelle 3: Ergebnisse des Tests auf Prognosegüte

Die Testergebnisse signalisieren somit, dass das unrestringierte Modell eine bessere Out-of-Sample Prognosegüte aufweist, als das Wilkie-Modell. Zusammenfassend lässt sich somit sagen, dass das Wilkie-Modell die Kausalitätsstrukturen zwischen seinen Komponenten nur unzureichend widerspiegelt. Die Exogenitätsannahme kann nicht bestätigt werden, es ist mit einem Endogenitätsbias bei der Parameterschätzung zu rechnen.

## 5 Konklusion

Der Begriff *Modellrisiko* ist eng mit den Termini *Modellspezifikation* und *Modellvalidierung* verbunden. Um Aussagen über ersteres treffen zu können, ist eine Auseinandersetzung mit der korrekten Spezifikation des Modells fundamental. Wir haben gezeigt, dass bei Nichtbeachtung dieses Aspekts das Modellrisiko erheblich zunehmen kann und daher eine konsistente Spezifikationsstrategie vonnöten ist. Ein hinreichend gut spezifiziertes Modell sollte schließlich anhand von Datensätzen validiert werden. Die notwendige Respezifikation bei unzureichend validierten Modellen verdeutlicht den Prozesscharakter dieses Vorganges. Somit sollte auch das Modellrisiko prozessorientiert verstanden werden:



Abbildung 5: Modellrisiko, Spezifikation und Validierung.

Nicht explizit berücksichtigt in dieser Überlegung wurden die topologischen Argumente von Davies (2008). Letzterer übt Kritik an den konventionellen klassischen sowie bayesianischen statistischen Verfahren und formuliert eine weniger restriktive Topologie für die Spezifikation, Validierung und Inferenz in statistischen Modellen. Dieses sollte neben der Elaboration von Spezifikationstests Gegenstand weiterführender Forschung sein.

## A Bibliographie

**Baumgartner, G., Bühlmann, H., Koller, M. (2004):** „Multidimensional Valuation of Life Insurance Policies and Fair Value“. *Mitteilungen SAV I*, Schweizerische Aktuarvereinigung, Bern.

**Baur, T. (2009):** „Marktkonsistente Bewertung in der Lebensversicherung“. Gesellschaft für Finanz- und Aktuarwissenschaften, Ulm.

**CFO Forum (2008):** „Market Consistent Embedded Value Principles“. [www.cfoforum.nl/downloads/MCEV\\_Principles\\_and\\_Guidance\\_October\\_2009.pdf](http://www.cfoforum.nl/downloads/MCEV_Principles_and_Guidance_October_2009.pdf).

**Clements, M., Hendry, D. (1998):** *Forecasting Economic Time Series*. Cambridge: Cambridge University Press.

**Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. (1998):** „Model risk“. *Journal of Financial Engineering* 7, 267–288.

**Cuthbertson, K., Hall, S.G., Taylor, M.P. (1992):** *Applied Econometric Techniques*. Harvester Wheatsheaf, York.

**Davies, L. (2008):** „Approximating Data“. *Journal of the Korean Statistical Society*, 37 (2), 191–211.

**Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2005):** *Actuarial Theory for Dependent Risk. Measures, Orders and Models*. Wiley, New York.

**Detlefsen, K., Härdle, W. (2006):** „Calibration Risk for Exotic Options“. *Journal of De-*

*rivatives* 14, 4, 47–63.

**Dickey, D. and Fuller, W. (1979):** „Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root“. *Journal of the American Statistical Association* 74, 427–431.

**Granger, C. (1969):** „Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods“. *Econometrica*, 37, 424–438.

**Green W. H. (2003):** *Econometric Analysis*. Pearson, New York.

**Hendry, D. (1995):** *Dynamic Econometrics*. Oxford University Press, Oxford.

**Kalman, R. E. (1960):** „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems“. *Journal of Basic Engineering* 82, 35–45.

**Kalman, R. E., Buvy, R. S. (1961):** „New Results in Linear Filtering and Prediction Theory“. *Journal of Basic Engineering* 83, 95–108.

**Knight, F. (1921):** *Risk, Uncertainty and Profits*. Neuauflage: Kelley, 1961, New York.

**Luhmann, N. (1993):** „Die Moral des Risikos und das Risiko der Moral“. S. 327–338 .  
In: Gotthard Bechmann (Hrsg.), *Risiko und Gesellschaft*. Westdeutscher Verlag, Opladen.

**Lütkepohl, H. (2005):** *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, Berlin.

**Sibbertsen, P., Stahl, G., Luedtke, C. (2008):** „Measuring model risk“. *Journal of Risk Model Validation* 2, 65–81.

**Wilkie, A. (1995):** „More on a stochastic asset model for actuarial use“. *British Actuarial Journal* 1, V, 777–964.