

Martin Nell, Philipp Pohl

Wertorientierte Steuerung von Lebensversicherungs- unternehmen mittels stochastischer Prozesse

Working Papers on Risk and Insurance
Hamburg University

No 15
November 2005

UH



Martin Nell¹, Philipp Pohl²

**Wertorientierte Steuerung von
Lebensversicherungsunternehmen mittels stochastischer
Prozesse**

No 15

November 2005

ISSN 1617-8653

¹ Prof. Dr. Martin Nell, Universität Hamburg, Institut für Versicherungsbetriebslehre, Von-Melle-Park 5, 20146 Hamburg, Tel.: +49 40 428384014, Fax: +49 40 428385505, Email: martin.nell@rrz.uni-hamburg.de.

² Philipp Pohl, Universität Hamburg, Institut für Versicherungsbetriebslehre, Von-Melle-Park 5, 20146 Hamburg, Tel.: +49 40 428385503, Fax: +49 40 428385505, Email: philippohl@web.de.

Martin Nell, Philipp Pohl

**Wertorientierte Steuerung von Lebensversicherungsunternehmen mittels
stochastischer Prozesse**

Abstract

In dieser Arbeit wird das Konzept einer wertorientierten Steuerung von Lebensversicherungsunternehmen basierend auf stochastischen Prozessen vorgestellt. Dabei werden die stochastischen Prozesse dazu verwendet, die zufälligen wertbestimmenden Parameter der Unternehmensbewertung zu modellieren. Als Ergebnis erhält man für den Unternehmenswert Verteilungsfunktionen, die approximativ bzw. exakt in der Klasse der Normalverteilungen liegen. Betrachtet werden dabei stochastische Prozesse in diskreter bzw. stetiger Zeit und mit diskretem bzw. stetigem Zustandsraum.

1. Einleitung

Nach dem gravierenden Einbruch der Kapitalmärkte in den vergangenen Jahren ist das Wettbewerbsumfeld, in dem Lebensversicherungsunternehmen agieren, durch zunehmenden Kostendruck geprägt. In dieser Situation ist ein eindeutig ausgerichtetes und klar messbares Instrumentarium für die Unternehmenssteuerung unverzichtbar. Ein solches Konzept wird mit der wertorientierten Steuerung von Versicherungsunternehmen zur Verfügung gestellt. Dabei kommt der Schätzung zukünftiger finanzieller Überschüsse, die insbesondere auch von zufälligen Rahmenbedingungen abhängen, eine große Bedeutung zu.

Die bisherigen Ansätze der wertorientierten Steuerung von Versicherungsunternehmen gehen von deterministischen Planungsrechnungen und damit von Punktschätzungen für den daraus abgeleiteten Unternehmenswert aus.^{3,4,5} Der in diesem Aufsatz vorgestellte grundlegend neue Ansatz modelliert die Planungsrechnung auf Basis eines stochastischen Prozesses, also durch zufällige wertbestimmende Parameter.⁶ Als Konsequenz erhält man für den Unternehmenswert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das zentrale Ergebnis des Aufsatzes ist, dass diese Verteilung abhängig vom zu Grunde liegenden stochastischen Prozess approximativ bzw. exakt durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann. Darüber hinaus wird erläutert, wie dieses Ergebnis auch auf Unternehmen anderer Branchen übertragen werden kann.

Der Aufsatz gliedert sich wie folgt: Zuerst wird im folgenden Abschnitt der Cashflow eines Lebensversicherungsunternehmens als entscheidende Größe der wertorientierten

³ *Rappaport, A.* (1995), S. 55 leitet den für die Unternehmensbewertung relevanten Cashflow für Unternehmen beliebiger Branche explizit her.

⁴ *Oletzky, T.* (1998) zeigt, wie das Konzept der wertorientierten Steuerungen für Versicherungsunternehmen in der Theorie zum Tragen kommt.

⁵ *Oletzky, T. / Pohl, P.* (2004) erläutern die Einführung der wertorientierten Steuerung von Versicherungsunternehmen in der Praxis.

⁶ Stochastische Prozesse kommen in der Schadenversicherung insbesondere für die Bestimmung von Ruinwahrscheinlichkeiten zum Einsatz, vgl. etwa *Cai, J. / Dickson, D.* (2004), S. 513-716, sind aber für die Wertermittlung von Versicherungsunternehmen sowie von Unternehmen anderer Branchen bisher nicht verwendet worden.

Steuerung aus aktuarieller Sicht analysiert und als wesentliche Einflussparameter die Nettoverzinsung, die Kosten und das Sterblichkeitsrisiko diskutiert. Diese Parameter werden daraufhin im dritten Abschnitt als stochastische Prozesse modelliert und über die Cashflows Verteilungen des Unternehmenswerts abgeleitet. Dabei sollen Prozesse sowohl in diskreter bzw. stetiger Zeit als auch mit diskretem bzw. stetigem Zustandsraum betrachtet werden. Im abschließenden vierten Abschnitt erfolgt ein Ausblick auf weitere mögliche betriebswirtschaftliche Anwendungen und ihre mathematische Modellierung.

2. Aktuarielle Analyse der Cashflows

Das Ziel einer wertorientierten Unternehmensteuerung besteht in der Maximierung des Marktwertes des Eigenkapitals (Shareholder Value).⁷ Dies bedeutet, dass alle Managemententscheidungen vor dem Hintergrund getroffen werden, den Marktwert des Eigenkapitals zu erhöhen. Damit ist in eindeutiger Weise festgelegt, ob Investitionsvorhaben überhaupt durchgeführt und in welcher Reihenfolge sie priorisiert werden.

Die zentrale Formel zur Ermittlung des Shareholder Value, die zur wertorientierten Steuerung verwendet wird, ist gegeben in der Form des folgenden Ausdrucks:

$$EK = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{\prod_{i=1}^t (1+k_i)} + \frac{RW_T}{\prod_{i=1}^T (1+k_i)} + NBV^8, \quad (1)$$

wobei: EK: Wert des Eigenkapitals,

T: Prognosezeitraum (Anzahl der Perioden),

⁷ Vgl. *Albach, H.* (2001), S. 643.

⁸ Da sich der Restwert zu jedem Zeitpunkt aus der Summation der noch ausstehenden diskontierten Cashflows ergibt, kann er in der Formel weggelassen werden, wenn dafür die Summation der Cashflows bis unendlich durchgeführt wird. Das nicht-betriebsnotwendige Vermögen wird für die weiteren Betrachtungen unerheblich sein, so dass wir es als null voraussetzen wollen.

CF_t : Cashflow der Periode t ,

k_t : Kapitalkosten der Periode t ,

RW_T : Restwert des Bewertungsobjekts am Ende des Prognosezeitraums,

NBV: Wert des nicht-betriebsnotwendigen Vermögens⁹.

Wir werden die Überschüsse mit Hilfe der Kontributionsformel darstellen und darauf aufbauend den für die wertorientierte Steuerung relevanten Cashflow aus dem einzelnen Vertrag ableiten. Anschließend wird als weitere Komponente der wertorientierten Steuerung der Cashflow aus der Eigenkapitalunterlegung, die zum Betreiben des Versicherungsgeschäfts notwendig ist, hergeleitet.

2.1. Cashflows aus dem einzelnen Versicherungsvertrag

Wir betrachten zunächst die für alle $t = 0, \dots, m$ gültige Äquivalenzgleichung¹⁰

$$V_t + B_t = v_t q_{x+t} T_{t+1} + L_t + \beta_t B_t + \gamma_t S + v_t p_{x+t} V_{t+1},$$

wobei B_t : Prämienzahlung der Periode t ,

L_t : Erlebensfalleistung der Periode t ,

T_t : Todesfalleistung der Periode t ,

S : Versicherungssumme,

V_t : ausreichende Deckungsrückstellung der Periode t ,

β_t, γ_t : Verwaltungskostensätze der Periode t ,

⁹ Die Formel gibt die Berechnung des Shareholder Value im Equity-Ansatz wider. Im Entity-Ansatz werden dagegen die den Eigen- und Fremdkapitalgebern zustehenden Überschüsse betrachtet und anschließend der Wert des Fremdkapitals zum Abzug gebracht.

¹⁰ Vgl. Heller, U. (2002), S. 34.

p_x : einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen,

q_x : einjährige Todeswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen und

v_t : Diskontierungsfaktor mit Nettoverzinsung i_t der Periode t .

Dabei beschreibt die linke Seite der Gleichung die dem Versicherungsunternehmen zustehenden Erträge, die rechte Seite der Gleichung die dem Versicherungsunternehmen entstehenden Aufwendungen. Nach dem Äquivalenzprinzip müssen die beiden Seiten gleich sein. Durch eine einfache Umformung erhält man den Gewinn in der Form wie er in Abbildung 1 dargestellt ist:

$$\begin{aligned}
 G'_{t+1} &= E'_{t+1} - A'_{t+1} \\
 &= (V_t + B_t) + i'_t(V_t + B_t) - q'_{x+t}T_{t+1} - L_t - (\beta'_t B_t + \gamma'_t S) - i'_t(L_t + \beta'_t B_t + \gamma'_t S) - p'_{x+t}V_{t+1} \\
 &= \underbrace{B_t}_{\text{Prämie}} - \underbrace{(q'_{x+t}T_{t+1} + L_t)}_{\text{Versicherungsleistung}} - \underbrace{(\beta'_t B_t + \gamma'_t S)}_{\text{Kosten}} + \underbrace{i'_t(V_t + B_t - L_t - \beta'_t B_t - \gamma'_t S)}_{\text{Zinsertrag}} + \underbrace{(V_t - p'_{x+t}V_{t+1})}_{\text{Änderung Deckungsrückstellung}}
 \end{aligned}$$

wobei E'_t : tatsächliche Erträge der Periode t ,

A'_t : tatsächliche Aufwendungen der Periode t ,

β'_t, γ'_t : tatsächliche Verwaltungskostensätze der Periode t ,

p'_x : tatsächliche einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen,

q'_x : tatsächliche einjährige Todeswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen und

i'_t : tatsächliche Nettoverzinsung der Periode t .

Aufbauend auf der Äquivalenzgleichung kann der Gewinn G'_{t+1} als Summe aus

$$\begin{array}{ll}
 (i'_t - i_t)(V_t + (1 - \beta_t)B_t - L_t - \gamma_t S) & \text{Zinsgewinn} \\
 (q_{x+t} - q'_{x+t})(T_{t+1} - V_{t+1}) & \text{Risikogewinn} \\
 ((\beta_t - \beta'_t)B_t + (\gamma_t - \gamma'_t)S)(1 + i'_t) & \text{Kostengewinn}
 \end{array} \tag{2}$$

dargestellt werden. Diese Darstellung wird als Kontributionsformel¹¹ bezeichnet.

Da für die wertorientierte Steuerung die Cashflows des Unternehmens relevant sind, wollen wir aufbauend auf der soeben durchgeführten Ertrags- bzw. Aufwandsrechnung diese Zahlungsüberschüsse herleiten. Dabei sind die Prämien, die Versicherungsleistungen und die Kosten per se zahlungswirksame Ertrags- bzw. Aufwandspositionen. Gleiches gilt für die Zinserträge des Versicherungsunternehmens. Da in die Berechnung der Cashflows weiterhin die Zusatzinvestitionen in das Anlage- und Umlaufvermögen einfließen, wird die Veränderung der Deckungsrückstellungen auch als nicht zahlungswirksamer Aufwand zum Abzug gebracht, da ihr auf der Aktivseite durch den Kauf von Wertpapieren genau eine Zusatzinvestition entspricht.¹² Damit entspricht der für die wertorientierte Steuerung betrachtete Cashflow im Wesentlichen der in Gleichung (2) hergeleiteten Überschussgröße. Anpassungen sind lediglich für die Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung und der Steuerlast vorzunehmen.

¹¹ Die Kontributionsformel in der hier verwendeten Form findet sich in *Heller, U.* (2002), S. 34. Ähnliche Darstellungen der Kontributionsformel sind in *Milbrodt, H. / Helbig M.* (1999), Kap. 11 und *Wolfsdorf, K.* (1997), S. 255 hergeleitet.

¹² Zu diesem Ergebnis kommt auch *Oletzky, T.* (1998), S.116.

Wir erhalten also für den Unternehmenswert – aufgefasst als Wertzuwachs bzw. Wertvernichtung – für einen einzelnen Versicherungsvertrag als geschlossenen Ausdruck

$$UW_{\text{Vertrag}} = (1 - \text{Steuer}_{\text{Quote}}) (1 - \text{RfB}_{\text{Quote}}) \sum_{t=1}^T \frac{D'_{x+t}}{D'_x} G'_t, \quad (3)$$

wobei $D'_x = l'_x v^x$ diskontierte Zahl der tatsächlich Lebenden und

$$v = \frac{1}{1 + k^{\text{EK}}} \text{ Diskontierungsfaktor mit zugehörigen Eigenkapitalkosten } k^{\text{EK}}.$$

Für diese Darstellung wurde lediglich auf die Gleichung (1) zurückgegriffen und der Sachverhalt eingearbeitet, dass nur noch ein im Bestand befindlicher Vertrag einen Wertbeitrag generieren kann. Die Planungsdauer T entspricht der Versicherungsdauer m .

Betrachten man die RfB-Quote, so müsste man streng genommen diese wie folgt definieren:

$$\text{RfB}_{\text{Quote}} = \begin{cases} \text{ca. 90\%} & \text{falls } G'_t \geq 0 \\ 0\% & \text{falls } G'_t < 0 \end{cases}.$$

Nach §56a VAG ist jedoch das Versicherungsunternehmen berechtigt, mit Zustimmung der Aufsichtsbehörde in Ausnahmefällen die Rückstellung für Beitragsrückerstattung, soweit sie nicht auf bereits festgelegte Überschussanteile entfällt, im Interesse der Versicherten zur Abwendung eines Notstandes heranzuziehen. Wir können also auch für negative G'_t eine Ausschüttung in Höhe von $(1 - \text{RfB}_{\text{Quote}}) G'_t$ annehmen.

Die Steuerquote ergibt sich als Anteil der vom Unternehmen zu zahlenden Ertragssteuern bezogen auf den Vorsteuergewinn. Dabei kann auf Grund der Linearität der Steuerquote ein Verlust und eine damit zusammenhängende negative Steuerzahlung im Sinne

der Zusammenführung der Einzelverträge als wechselseitige Verrechnung der einzelnen Steuerzahlungen aufgefasst werden.¹³

2.2. Cashflows aus der Unterlegung von Eigenkapital

Um die eben hergeleiteten Cashflows generieren zu können, muss das Versicherungsunternehmen ausreichend Eigenkapital bereitstellen.¹⁴ Für dieses Eigenkapital muss die von den Kapitalgebern geforderte Verzinsung erwirtschaftet werden. Berücksichtigt man, dass das eingesetzte Eigenkapital steuerpflichtige Zinserträge erwirtschaftet, ergibt sich als diskontierter Cashflow

$$-EK_0 + \sum_{t=0}^T \frac{(1 - \text{Steuer}_{\text{Quote}}) i'_t EK_0}{(1 + k^{\text{EK}})^t} + \frac{EK_0}{(1 + k^{\text{EK}})^T}.$$

Es wird unterstellt, dass das Versicherungsunternehmen das zur Verfügung stehende Eigenkapital am Kapitalmarkt zur Anlagerendite i'_t investieren kann. Dabei ist zu beachten, dass das Kapitalanlageportefeuille von Lebensversicherern schon auf Grund der Kapitalanlagevorschriften zu einem großen Teil aus festverzinslichen Wertpapieren mit geringem Ausfallrisiko besteht. Daher ist die Anlagerendite i'_t grundsätzlich niedriger als die von den Kapitalgebern geforderte Eigenkapitalrendite, so dass der diskontierte Cashflow einen negativen Wert annimmt.

Es bleibt die Frage nach der Höhe des notwendigen Eigenkapitals. Dieses definieren wir gemäß den gesetzlichen Solvabilitätsbestimmungen als vorgeschriebenen Prozentsatz der

¹³ Als Steuern auf Unternehmensebene sind die Gewerbeertrag- sowie die Körperschaftsteuer zu beachten. Auf Grund der Abzugsfähigkeit der Körperschaft- von der Gewerbeertragsteuer ergibt sich die Steuerquote zu $\text{Steuer}_{\text{Quote}} = \text{KöSt}_{\text{Quote}} + \text{GewSt}_{\text{Quote}} (1 - \text{KöSt}_{\text{Quote}})$.

¹⁴ Auch *Oletzky, T.* (1998), S. 119 stellt fest, dass der Wert der Eigenkapitalunterlegung mit in die Vertragsbewertung einfließen muss.

Deckungsrückstellungen und des Risikokapitals der Periode.¹⁵ Wir erhalten also jeweils zum Ende der Perioden $t = 0, \dots, t = T$ die Eigenkapitalbasis

$$0,04_1 V_x + 0,003(S_{-1} V_x), 0,04_2 V_x + 0,003(S_{-2} V_x), \dots, 0,04_T V_x + 0,003(S_{-T} V_x), 0.$$

Der Cashflow berechnet sich damit unter Beachtung von Verzinsung und Veränderung des Eigenkapitals zu

$$\begin{aligned} \text{UW}_{\text{Eigenkapital}} &= \sum_{t=0}^T \frac{\Delta_t + (1 - \text{Steuer}_{\text{Quote}}) i'_t \text{EK}_t}{(1 + k^{\text{EK}})^{t+1}} \\ &= \sum_{t=0}^T v^{t+1} \left(\underbrace{\Delta_t}_{\text{Zuführung neues EK}} + \underbrace{(1 - \text{Steuer}_{\text{Quote}}) i'_t \text{EK}_t}_{\text{Verzinsung vorhandenes EK}} \right), \end{aligned}$$

wobei $\Delta_t := \text{EK}_t - \text{EK}_{t+1}$ die Veränderung des Eigenkapitals in Periode t und

$$\text{EK}_0 := \text{EK}_{T+1} := 0.$$

Nach diesen Vorarbeiten sind wir in der Lage, den Unternehmenswert im Sinne einer Bottom-up-Planung für die wertorientierte Steuerung eines Lebensversicherungsunternehmens genauer zu untersuchen. Dabei ist der Unternehmenswert als $\text{UW} = \text{UW}_{\text{Vertrag}} + \text{UW}_{\text{Eigenkapital}}$ definiert.¹⁶

¹⁵ Alternativ kann man argumentieren, dass die gesetzliche Solvabilitätsspanne eine Untergrenze darstellt und von Lebensversicherern, die am Markt bestehen wollen, weit übertroffen werden muss. Dann würde sich anbieten, ein Vielfaches der Solvabilitätsspanne als notwendige Eigenkapitalunterlegung anzusetzen. An der grundsätzlichen Argumentation ändert sich hierdurch jedoch nichts.

¹⁶ *Oletzky, T.* (1998), S. 125 kommt zu einem äquivalenten Ergebnis, wobei dieses Ergebnis über betriebswirtschaftliche und nicht wie hier über aktuarielle Schlussweisen hergeleitet wird.

Die vorangegangenen theoretischen Überlegungen werden nun in Abbildung 1 exemplarisch aufgezeigt. Dabei werden die Überschüsse auf Basis eines Versicherungsvertrags, der Leistungen in Höhe von 10.000 GE im Todes- und Erlebensfall für einen 30-jährigen männlichen Versicherungsnehmer vorsieht, in einer Plan-GuV-Rechnung dadurch erwirtschaftet, dass die Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung von denen erster Ordnung im positiven Sinne abweichen. Ebenfalls ist die notwendige Eigenkapitalunterlegung in diesem Modell dargestellt. Der Unternehmenswert ergibt sich durch die Diskontierung und Summation der entsprechenden Überschüsse.

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	$t=8$	$t=9$	$t=10$
GuV Ende t											
Beitrag	946,27	944,87	943,48	942,08	940,61	939,07	937,43	935,68	933,80	931,78	0,00
Leistung _{leben}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-9.823,64
Leistung _{Tod}	-14,76	-14,74	-14,85	-15,44	-16,31	-17,34	-18,52	-19,85	-21,38	-23,18	0,00
Kosten _{beta}	-9,46	-9,45	-9,43	-9,42	-9,41	-9,39	-9,37	-9,36	-9,34	-9,32	0,00
Kosten _{gamma}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-49,12
Änderung Deckungskapital	-917,96	-941,83	-966,23	-990,81	-1.015,73	-1.041,10	-1.066,91	-1.093,18	-1.119,83	-1.146,81	9.921,88
Zins	26,80	73,01	121,97	170,70	218,48	263,80	308,31	355,70	403,25	465,48	2,33
Überschuss	30,89	51,86	74,94	97,10	117,64	135,05	150,94	169,00	186,49	217,95	51,45
Formel	30,89	51,86	74,94	97,10	117,64	135,05	150,94	169,00	186,49	217,95	51,45
Veränderung Eigenkapital	-49,96	-34,85	-35,75	-36,66	-37,58	-38,52	-39,48	-40,45	-41,43	-42,43	397,11
Verzinsung Eigenkapital	0,00	1,73	3,00	4,26	5,50	6,68	7,84	9,07	10,31	11,92	13,20
Überschuss	-49,96	-33,12	-32,75	-32,40	-32,08	-31,84	-31,64	-31,38	-31,13	-30,51	410,31
Formel	-49,96	-33,12	-32,75	-32,40	-32,08	-31,84	-31,64	-31,38	-31,13	-30,51	410,31
Eigenkapital	49,96	84,81	120,56	157,22	194,80	233,32	272,80	313,24	354,68	397,11	0,00
Solvabilitätskomponente 1	21,58	59,25	97,90	137,53	178,16	219,81	262,48	306,21	351,00	396,88	0,00
Solvabilitätskomponente 2	28,38	25,56	22,66	19,69	16,64	13,51	10,31	7,03	3,67	0,23	0,00
Deckungskapital	539,45	1.481,28	2.447,51	3.438,32	4.454,05	5.495,14	6.562,06	7.655,23	8.775,06	9.921,88	0,00

Abbildung 1: Darstellung der Überschüsse

3. Stochastische Prozesse zur Modellierung des Cashflows

Nachdem wir den Jahresüberschuss eines Lebensversicherungsunternehmens analysiert und darauf aufbauend die relevanten Cashflows für die wertorientierte Steuerung abgeleitet haben, soll nun erläutert werden, welche der den Überschuss bestimmenden Parameter mittels eines stochastischen Prozesses modelliert werden können. Dazu führen wir zunächst einen stochastischen Prozess ein.

Definition (Stochastischer Prozess)

Es seien (Ω, \mathcal{A}) und (S, Σ) Messräume sowie $T \subseteq \mathfrak{R}$ eine Parametermenge. Weiter sei $\forall t \in T X_t : \Omega \rightarrow S, X = (X_t)_{t \in T}$ eine Familie von Funktionen. Dann heißt X stochastischer Prozess bezüglich $(\Omega, \mathcal{A}, S, \Sigma, T)$, falls $\forall t \in T X_t$ messbar ist. Ist S diskret, so heißt X diskreter stochastischer Prozess.

Alle stochastischen Prozesse lassen sich über einen diskreten bzw. stetigen Zeit- bzw. Zustandsraum eindeutig klassifizieren. Gemäß dieser Einteilung wollen wir im weiteren Verlauf die möglichen Modelle diskutieren. Eine wichtige Klasse stochastischer Prozesse sind diejenigen, deren Zustand zur Zeit t lediglich vom Zustand zur Zeit $t-1$ und nicht von weiteren vergangenen Zuständen abhängt. Formal lässt sich dieser Sachverhalt wie folgt definieren.

Definition (Markoveigenschaft)¹⁷

Es sei $X = (X_t)_{t \in T}$ ein diskreter stochastischer Prozess. X besitzt die Markoveigenschaft, falls

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathfrak{N}_0, t_0, \dots, t_{n+1} \text{ mit } t_0 < \dots < t_{n+1}, i_0, \dots, i_{n+1} \in S: \\ & P(X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) > 0 \\ & \Rightarrow P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, \dots, X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n). \end{aligned}$$

Legt man als Zustandsraum die natürlichen bzw. reellen Zahlen zu Grunde und definiert die gewünschten Randverteilungen des stochastischen Prozesses, so existiert im Allgemeinen ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Grundwahrscheinlichkeitsraum, so dass der stochastische Prozess genau die vorgegebenen Randverteilungen besitzt.¹⁸ Wir können also

¹⁷ Diese Definition gilt nur für diskrete stochastische Prozesse. Eine allgemeinere Definition für stochastische Prozesse mit stetigem Zustandsraum findet sich in *Stieglitz, M. (1998), S. 80.*

¹⁸ Legt man eine Menge S als metrisierbar, vollständig und mit abzählbarer topologischer Basis zu Grunde – man beachte, dass die reellen Zahlen diesen Eigenschaften genügen –, betrachtet eine projektive Familie (P_j) von Wahrscheinlichkeitsmaßen und definiert (X_t) als eindimensionale Projektionen, so gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P , so dass X ein stochastischer Prozess bezüglich P ist und die Projektionen nach J

alle gewünschten Eigenschaften des stochastischen Prozesses festlegen und haben die Gewissheit, dass aus maßtheoretischer Sicht ein solcher Prozess auch existiert.

Betrachten wir nun die Nettoverzinsung, die als der entscheidende Parameter den Jahresüberschuss eines Lebensversicherungsunternehmens beeinflusst,¹⁹ so können wir die Nettoverzinsung des Geschäftsjahres t als Nettoverzinsung des Geschäftsjahres $t-1$ und einer zufälligen Änderungsgröße auffassen. Diese Änderungsgröße wiederum fasst die Veränderung der Rahmenbedingungen, also insbesondere die Veränderung der Renditen von Aktien und festverzinslichen Wertpapieren, zusammen. Somit lässt sich die Nettoverzinsung als stochastischer Prozess modellieren. Weiterhin wollen wir die Nettoverzinsung des Jahres t nur von der Nettoverzinsung des Jahres $t-1$ und nicht von weiteren Jahren abhängen lassen, so dass der stochastische Prozess die Markoveigenschaft besitzt.

Die Kosten, die als weiterer Parameter den Jahresüberschuss beeinflussen, können mit ähnlichen Überlegungen als stochastischer Prozess modelliert werden. Dabei lassen wir uns von der Vorstellung leiten, dass die Kosten des aktuellen Geschäftsjahres auf den Kosten des Vorjahres basieren und durch eine zufällige Änderungsgröße angepasst werden. Diese Änderungsgröße kann entweder als auf Grund gesetzlicher Vorgaben oder marktwirtschaftlicher Begebenheiten notwendige, also vom Management in Art und Höhe nur bedingt beeinflussbare Kostensteigerung oder als beabsichtigte aber in ihrer Höhe nicht exakt bestimmte Kostensenkung aufgefasst werden. Dabei besteht eine gewisse Asymmetrie in diesen beiden Ausprägungen: Kostensteigerungen werden im Allgemeinen von der Unternehmensführung nur als Begleiterscheinungen strategischer Investitionsvorhaben in Kauf genommen und haben überwiegend stochastischen Charakter, Kostensenkungen dagegen werden explizit eingeleitet. Die Realisierung und damit die tatsächliche Höhe der Kostensenkung bleibt jedoch in der Regel zufälliger Natur. Somit lässt sich die Kostenentwicklung als stochastischer Prozess abbilden, von dem wir zusätzlich annehmen, dass er die Markoveigenschaft aufweist.

angewandt auf P gerade den endlich dimensional Verteilungen P_j entsprechen. Dabei werden das Wahrscheinlichkeitsmaß P der projektive Limes der (P_j) und der stochastischer Prozess (X_t) der zu (P_j) gehörige kanonische stochastische Prozess genannt. Den Beweis dieser Aussage findet man in *Bauer, H.* (1991) S. 307.

Als letzte Einflussgröße haben wir schließlich das Sterblichkeitsrisiko kennen gelernt. Dieses ist für jedes Ausscheidejahr individuell gegeben. Auch hier wäre es denkbar, für die Entwicklung eines jeden Ausscheiderisikos einen stochastischen Prozess zu unterstellen. Insbesondere in der Rentenversicherung stellt bekanntlich die immer höhere Lebenserwartung genau ein solches Problem dar. Über eine geeignete Klassifizierung der Ausscheidealter und homogene Prozessverläufe innerhalb dieser Klassen könnte man die tatsächliche Ausscheidewahrscheinlichkeit des Jahres t als Ausscheidewahrscheinlichkeit des Jahres $t-1$ und einer zufälligen (aus Sicht des Versicherungsunternehmens in die negative Richtung wirkende) Veränderung modellieren. Auf Grund der hohen Komplexität – für jede Klasse müsste ein adäquater stochastischer Prozess gefunden werden – und des vergleichsweise niedrigen Beitrags des Risikogewinns zum Cashflow soll im Weiteren auf eine Untersuchung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten verzichtet werden. Darüber hinaus ist es auch möglich, die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und den damit zusammenhängenden Zahlungsstrom des Versicherungsunternehmens an den Kunden als Realisierung einer Zufallsvariablen zu modellieren.²⁰

Damit haben wir alle Werteparameter diskutiert, die nach der Kontributionsformel den Überschuss eines Lebensversicherungsunternehmens bestimmen.²¹ Im weiteren Verlauf wollen wir nun – differenziert nach den einzelnen Klassen der stochastischen Prozesse – die Einflussgrößen Nettoverzinsung und Kosten im Hinblick auf den Jahresüberschuss und darauf aufbauend den Unternehmenswert eines Lebensversicherungsunternehmens untersuchen.²² Dabei werden wir uns von der zentralen Frage leiten lassen, ob die hergeleiteten Verteilungen für den Unternehmenswert in einer vorgegebenen Klasse von Verteilungen liegen. Systematisch werden wir dabei einerseits die Einflussgrößen Nettoverzinsung und Kosten,

¹⁹ Vgl. *Heller, U.* (2002), S. 32.

²⁰ *Sanders, D.* (1968), S. 393f. stellt einen Ansatz für eine stochastische Entwicklung der Ausscheidewahrscheinlichkeiten mit Auswirkungen auf die Gewinn- und Verlustrechnung eines Lebensversicherungsunternehmens vor.

²¹ Es wäre darüber hinaus auch möglich, die Eigenkapitalkosten des Lebensversicherungsunternehmens als stochastischen Prozess zu modellieren. Wir wollen diese aber als vom Kapitalmarkt vorgegebene Größe betrachten und uns auf die Parameter der Kontributionsformel konzentrieren.

²² *Goldstein, A. / Markowitz, B.* (1982) S. 596-600 und *Levine, K.* (1973) S. 555-557 stellen Modelle für die Geschäftsentwicklung eines Lebensversicherers vor und untersuchen die unterschiedlichen Einflussgrößen auf die Gewinn- und Verlustrechnung. Dabei werden die Parameter als Realisierungen von einzelnen Zufallsvariablen modelliert und nicht auf Basis eines stochastischen Prozesses.

andererseits die verschiedenen Klassen der stochastischen Prozesse untersuchen. Es wird sich zeigen, dass die vorgegebene Klasse von Verteilungen bzw. Dichtefunktionen das Aussehen

$$\Phi := \left\{ f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \mid f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right\}$$

besitzt, also genau aus den Normalverteilungen mit Parametern μ und σ^2 besteht. Dabei werden wir zuerst die unterschiedlichen Geschäftsverläufe mit zugehörigen Cashflows simulieren und die so gewonnenen Unternehmenswertverteilungen mittels einer Maximum-Likelihood-Schätzung anpassen. Daraufhin werden wir feststellen, dass bei hinreichenden Voraussetzungen an den stochastischen Prozess die Unternehmenswertverteilung auch exakt theoretisch hergeleitet werden kann.

3.1. Prozesse in diskreter Zeit und mit diskretem Zustandsraum

In diesem Abschnitt soll zunächst ein stochastischer Prozess in diskreter Zeit und mit diskretem Zustandsraum, der so genannte Randomwalk, eingeführt und dieser als Grundlage zur Simulation der entsprechenden Unternehmenswertverteilung betrachtet werden. Diese Verteilung wollen wir daraufhin mittels einer Maximum-Likelihood-Schätzung weiter analysieren. Dabei sollen sowohl Ergebnisse hinsichtlich einer stochastischen Nettoverzinsung als auch einer stochastischen Kostenentwicklung untersucht werden.

3.1.1. Der Randomwalk

Wir betrachten zunächst als stochastischen Prozess den so genannten Randomwalk. Dieser ist gegeben durch die Vorschrift, dass der Prozess zum Zeitpunkt 0 im Zustand 0 startet und dann jeweils pro Zeiteinheit einen Schritt nach oben +1 mit Wahrscheinlichkeit p bzw. nach unten -1 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ machen kann. Im weiteren Verlauf wird das Jahr in $k \in \mathfrak{N}$ Abschnitte eingeteilt – denkbar sind hier $k = 4$ (vierteljährlich) oder $k = 12$ (monatlich).

Wir erweitern die Definition des Randomwalk dahingehend, dass die Schrittweite des Prozesses nicht 1 sondern $d \in \mathfrak{R}$ beträgt. Damit lässt sich der Prozess in der Gestalt

$$X_0 = 0 \text{ und } X_k = \sum_{j=1}^k dY_j \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

wobei $Y_j \in \{-1, 1\}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $P(Y_j = 1) = p$

darstellen. Die Nettoverzinsung zum Zeitpunkt t wird als eine von diesem stochastischen Prozess generierte Größe aufgefasst. Das bedeutet, dass wir, ausgehend von einem gewissen Startniveau i'_0 , die neue Nettoverzinsung durch über ein Jahr betrachtet k zufällige Änderungen erhalten. Formal dargestellt ergibt sich

$$I'_t := i'_0 + X_{tk} \quad t = 1, 2, \dots$$

Damit gilt

$$I'_t = i'_0 + X_{(t-1)k} + (X_{tk} - X_{(t-1)k}) = I'_{t-1} + (X_{tk} - X_{(t-1)k}) = I'_{t-1} + \sum_{j=(t-1)k+1}^{tk} dY_j = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dY_j.$$

Der Erwartungswert von I'_t ist gegeben durch

$$EI'_t = i'_0 + E\left(\sum_{j=1}^{tk} dY_j\right) = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dE(Y_j) = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} d(2p-1) = i'_0 + tkd(2p-1) \quad t = 1, 2, \dots$$

Die so modellierte Nettoverzinsung wird verwendet, um die für die wertorientierte Steuerung relevanten Überschüsse nach der Kontributionsformel (2) zu ermitteln. Dafür

wurde auf Basis der aktuariellen Grundlagen ein Excelmodell entwickelt, das die entsprechenden Geschäftsverläufe simuliert. Die als Ergebnis dieser Simulation erhaltene Verteilung für den Unternehmenswert ist in Abbildung 2 dargestellt.

Neben der Nettoverzinsung kann auch die Kostenentwicklung mit Hilfe des Randomwalk modelliert werden. Dazu setzen wir

$$\beta'_t := \beta'_0 + X_{tk} \quad t = 1, 2, \dots$$

Erneut ergeben sich die relevanten Überschüsse aus der Kontributionsformel (2). Die simulierte Unternehmenswertverteilung ist in Abbildung 3 gezeigt.

3.1.2. Ergebnisse der Simulation

Häufigkeitsverteilung der simulierten Unternehmenswerte

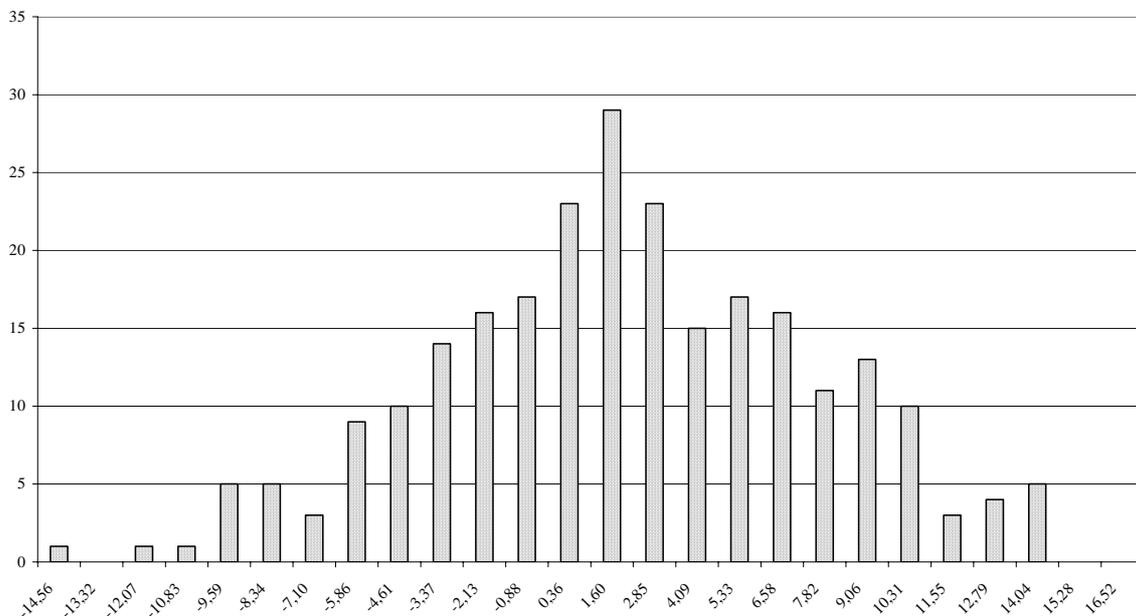


Abbildung 2: Unternehmenswertverteilung bei stochastischer Nettoverzinsung

Häufigkeitsverteilung der simulierten Unternehmenswerte

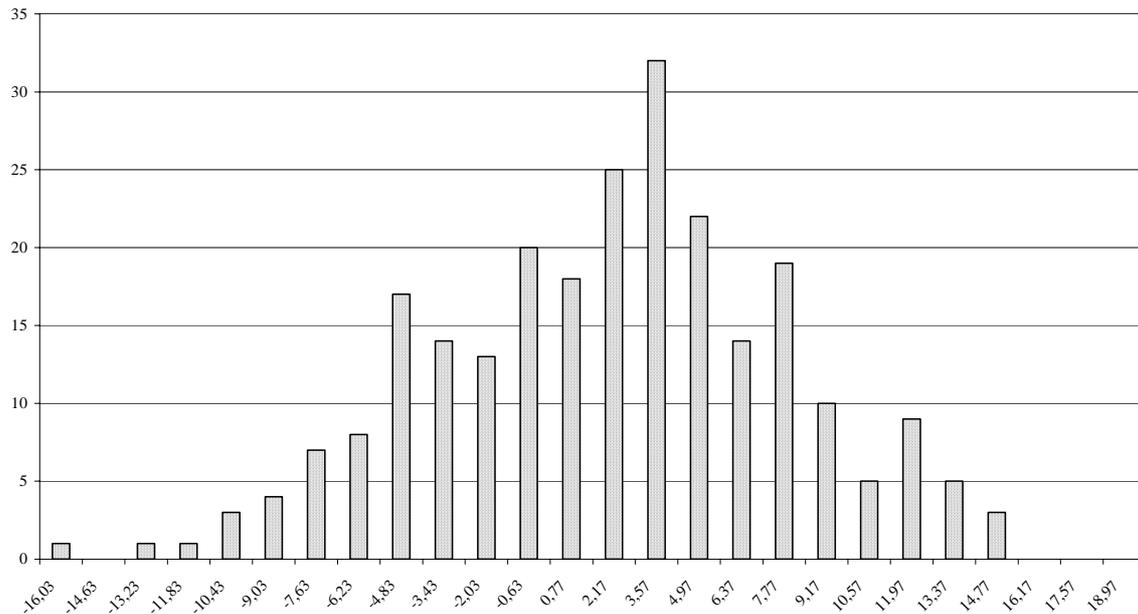


Abbildung 3: Unternehmenswertverteilung bei stochastischer Nettoverzinsung und stochastischer Kostenentwicklung

Betrachtet man die Abbildungen genauer, so ist festzustellen, dass die Verteilungen von der Struktur her in die Klasse der Normalverteilungen passen. Daher soll an diese empirischen Dichtefunktionen mittels einer Maximum-Likelihood-Schätzung die Dichte einer Normalverteilung angepasst werden. Dabei wählt die Maximum-Likelihood-Schätzung in einer vorgegebenen Klasse von Modellen jenes Modell aus, das im Sinne einer Optimierung der Dichtefunktion am besten auf die Daten passt. Wir erhalten für den Fall der stochastischen Nettoverzinsung eine Normalverteilung mit $\mu = 2,64$ und $\sigma^2 = 5,60$ (vgl. Abbildung 4) und im Fall der stochastischen Nettoverzinsung und Kostenentwicklung eine Normalverteilung mit $\mu = 2,77$ und $\sigma^2 = 5,93$.

Angepasste Verteilung als Ergebnis der Maximum-Likelihood-Schätzung

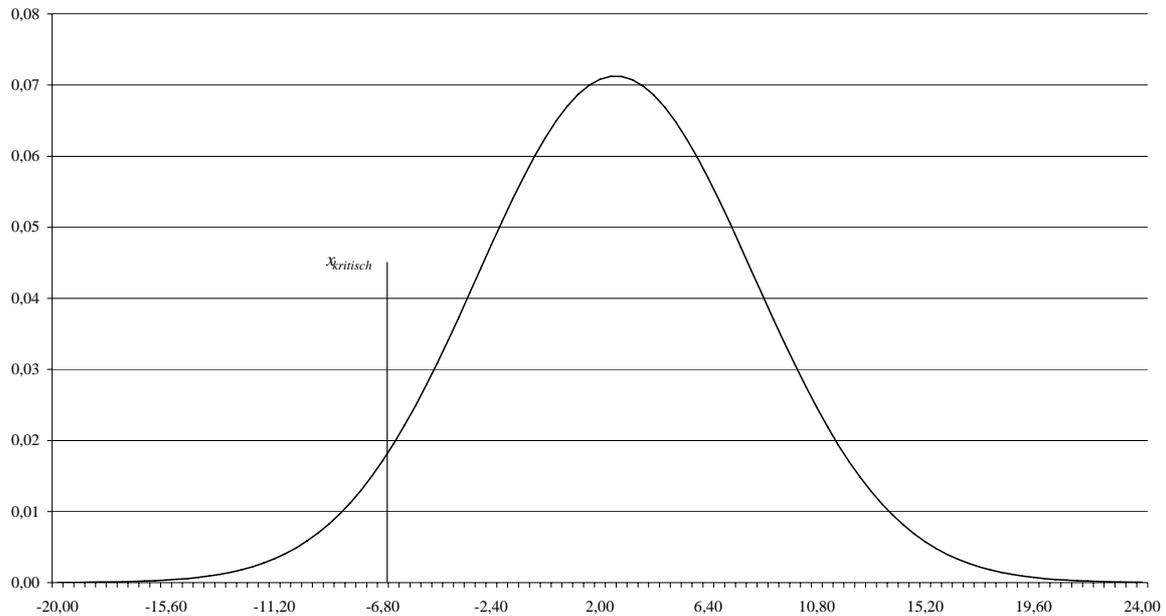


Abbildung 4: Angepasste Normalverteilung bei stochastischer Nettoverzinsung

Bezeichnen wir mit $UW_{\text{angepasst}}$ die Zufallsvariable, die durch die angepasste Normalverteilung gegeben ist, so lässt sich eine Value at Risk Betrachtung vornehmen, indem für beliebige kritische Werte x_{kritisch} die Wahrscheinlichkeit angegeben werden kann, mit der diese Werte unterschritten werden. Weiter betrachten wir die folgenden Äquivalenzumformungen

$$P(UW_{\text{angepasst}} \leq x_{\text{kritisch}}) = \alpha$$

$$P\left(\frac{UW_{\text{angepasst}} - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_{\text{kritisch}} - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x_{\text{kritisch}} - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$$\frac{x_{\text{kritisch}} - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha)$$

$$x_{\text{kritisch}} = \sigma\Phi^{-1}(\alpha) + \mu.$$

Interpretiert man die letzte Gleichung, so ist bei vorgegebenen Niveau α und über die durch Simulation und Anpassung bestimmten Parameter μ und σ^2 der kritische Wert

gegeben. Die Leistung des Managements im Sinne der wertorientierten Steuerung besteht nun darin zu beurteilen, ob dieser kritische Wert in Anbetracht der beabsichtigten Wertsteigerung des Unternehmens hinreichend groß ist.

3.1.3. Theoretische Betrachtung der Unternehmenswertverteilung

Wir wollen nun eine theoretische Begründung für die empirisch gewonnene Normalverteilung geben. Dazu betrachten wir den Unternehmenswert UW_{Vertrag} in der folgenden Darstellung

$$UW_{\text{Vertrag}} = \sum_{t=1}^T a_t i'_t + b_t,$$

wobei die Koeffizienten a_t und b_t durch (2) und (3) eindeutig gegeben sind. Um im Folgenden asymptotische Überlegungen betreiben zu können, soll von einer unendlichen Lebensdauer ausgegangen werden. Mit

$$\mu_t := E(a_t i'_t + b_t) = a_t E(i'_t) + b_t$$

definieren wir

$$\xi_t := a_t i'_t + b_t - \mu_t.$$

Weiter seien die σ -Algebren A_t so gewählt, dass ξ_t A_t -messbar und $A_t \subseteq A_{t+1}$ sind. Darüber hinaus seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

$$(A) \quad \sum_{t=1}^T P(|\xi_t| > \varepsilon | A_{t-1}) \xrightarrow{P} 0,$$

$$(B) \quad \sum_{t=1}^T \mathbb{E} \left(\xi_t \mathbf{I}_{\left[\frac{|\xi_t|}{\sigma} \leq 1 \right]} \middle| \mathcal{A}_{t-1} \right)^P \rightarrow 0,$$

$$(C) \quad \sum_{t=1}^T \mathbb{V} \left(\xi_t \mathbf{I}_{\left[\frac{|\xi_t|}{\sigma} \leq \varepsilon \right]} \middle| \mathcal{A}_{t-1} \right)^P \rightarrow \sigma^2 \geq 0.$$

Dabei ist (A) äquivalent zu

$$(A^*) \quad \max_t |\xi_t| \xrightarrow{P} 0$$

und bedeutet damit die stochastische Konvergenz der ξ_t gegen 0 in der Maximumnorm. (B) und (C) stellen Konvergenzkriterien für die ersten und zweiten bedingten Momente der ξ_t dar. Im Fall der stochastischen Unabhängigkeit der ξ_t entsprechen die bedingten Momente gerade den normalen Momenten und die Voraussetzungen vereinfachen sich entsprechend. Unter den Voraussetzungen (A), (B) und (C) gilt²³:

$$\sum_{t=1}^T \xi_t \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2).$$

Damit ist der Unternehmenswert UW_{Vertrag} für große T approximativ normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_T$ und Varianz σ^2 . Analog kann eine approximative Normalverteilung für den Unternehmenswert $UW_{\text{Eigenkapital}}$ hergeleitet werden, so dass der Unternehmenswert UW als Summe aus zwei approximativen Normalverteilungen wieder approximativ normalverteilt ist.

²³ Zum Beweis siehe *Shiryayev, A. (1989), S. 541-553.*

Diese Überlegungen können darüber hinaus auf Unternehmen beliebiger Branche übertragen werden, da der Unternehmenswert strukturell immer die Summe der diskontierten Cashflows ist. Wählt man nun die stochastischen Prozesse und die darauf aufbauende Gewinnzusammensetzung so, dass die Voraussetzungen (A), (B), und (C) erfüllt sind, so folgt, dass der Unternehmenswert wiederum normalverteilt ist.

3.2. Prozesse in stetiger Zeit und mit diskretem Zustandsraum

Im Folgenden wird die Entwicklung der Nettoverzinsung betrachtet, die durch einen zu Grunde liegenden Poissonzählprozess beschrieben wird.

3.2.1. Der Poissonzählprozess

Definition (Zählprozess)

Sei $(N_t)_{t \in \mathfrak{R}_{\geq 0}}$ ein stochastischer Prozess mit diskretem Zustandsraum. Dann heißt N Zählprozess, falls $\forall \omega \in \Omega$:

- (i) $N_0(\omega) = 0$
- (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t(\omega) = \infty$
- (iii) $t \rightarrow N_t(\omega)$ monoton steigend und rechtsstetig.

Definition (Poissonzählprozess)

Sei $(N_t)_{t \in \mathfrak{R}_{\geq 0}}$ ein Zählprozess und $\lambda \in \mathfrak{R}$. Dann heißt N Poissonzählprozess mit Parameter λ , falls

- (i) N hat unabhängige Zuwächse

$$(ii) \forall s \geq 0, t \geq 0 : N_{s+t} - N_s \sim \pi(\lambda t)$$

$$\text{d.h. } \forall i \in \mathbb{N}_0 : P(N_{s+t} - N_s = i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}.$$

Wir unterteilen ein Geschäftsjahr wieder in $k \in \mathbb{N}$ Abschnitte, wählen als Parameter $\lambda = k$ und definieren einen weiteren stochastischen Prozess X wie folgt

$$X_1 := N_{\frac{1}{k}} - N_0, X_2 := N_{\frac{2}{k}} - N_{\frac{1}{k}}, \dots, X_k := N_1 - N_{\frac{k-1}{k}}, \dots$$

Damit gilt

$$X_1 \sim \pi\left(k \frac{1}{k}\right), X_1 \sim \pi(1), \dots, X_k \sim \pi(1), \dots$$

Die Nettoverzinsung, modelliert als Zufallsgröße, die von einem Poissonzählprozess generiert wird, hat damit das folgende Aussehen

$$I'_t := i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dY_j X_j, \quad t = 1, 2, \dots,$$

wobei $d \in \mathfrak{R}$ die Schrittweite und

$$Y_j \in \{-1, 1\} \text{ unabhängige Zufallsvariablen mit } P(Y_j = 1) = p.$$

Der Erwartungswert von I'_t ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 EI'_t &= i'_0 + E\left(\sum_{j=1}^{tk} dY_j X_j\right) = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dE(Y_j X_j) = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dE(Y_j)E(X_j) \\
 &= i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} d(2p-1) = i'_0 + tkd(2p-1) \quad t = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Mit der so angesetzten Nettoverzinsung wurden wiederum verschiedenen Geschäftsverläufe simuliert und als Ergebnis die Unternehmenswertverteilung, wie sie in Abbildung 5 dargestellt ist, erhalten.

3.2.2. Ergebnisse der Simulation

Häufigkeitsverteilung der simulierten Unternehmenswerte

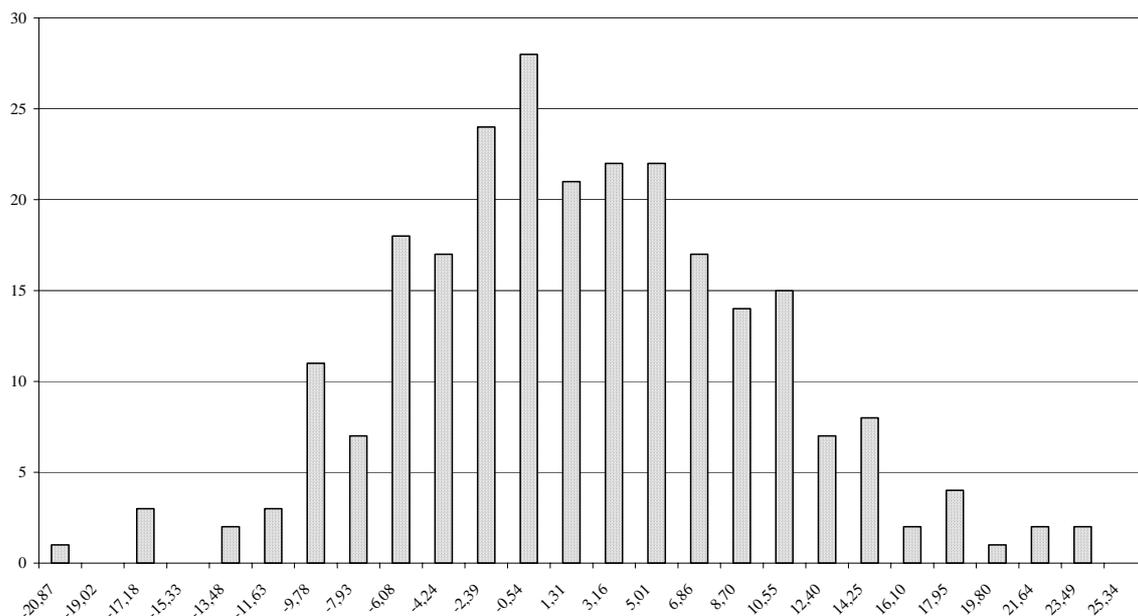


Abbildung 5: Unternehmenswertverteilung bei stochastischer Nettoverzinsung

Wiederum ist festzustellen, dass die simulierte Verteilung gut durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann. Die Maximum-Likelihood-Schätzung liefert als Verteilungsparameter $\mu = 2,86$ und $\sigma^2 = 7,86$. Damit liegt der Erwartungswert in dem Bereich des in 3.1.2 ermittelten Erwartungswerts, die Varianz dagegen ist deutlich größer. Dies erscheint bei dem Vergleich der beiden stochastischen Prozesse

$$I'_t = i'_0 = \sum_{j=1}^{tk} dY_j \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

$$I'_t = i'_0 = \sum_{j=1}^{tk} dY_j X_j \text{ für } k = 1, 2, \dots$$

sowie unter Beachtung der Beziehungen $E(1) = 1 = E(X_j)$ und $\text{Var}(1) = 0 < 1 = \text{Var}(X_j)$ plausibel.

3.3. Prozesse in diskreter Zeit und mit stetigem Zustandsraum

Wir wollen nun aus dem Poissonzählprozess den stochastischen Prozess der Zwischenankunftszeiten als Prozess in diskreter Zeit und mit stetigem Zustandsraum ableiten.

Definition (Ankunftszeit, Zwischenankunftszeit)

Es sei N ein Poissonzählprozess und $j \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$W_j := \begin{cases} \Omega \rightarrow \mathfrak{R}_{\geq 0} \\ W_j(\omega) := \inf \{t \in \mathfrak{R}_{\geq 0} \mid N_t(\omega) \geq j\} \end{cases}$$

die Ankunftszeit von N in j . Darüber hinaus heißt $Z_j := W_j - W_{j-1}$ die Zwischenankunftszeit von N zwischen $j-1$ und j bzw. die Verweilzeit in $j-1$.

Somit ergibt sich ein neuer stochastischer Prozess $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in diskreter Zeit und mit stetigem Zustandsraum, den wir Exponentialprozess nennen wollen. Es lässt sich zeigen, dass die Aussagen

$N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist Poissonzählprozess und

$Z = (Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ unabhängig, identisch verteilt mit $Z_1 \sim \exp(\lambda)$

äquivalent sind.²⁴ Es sei darauf hingewiesen, dass diese Äquivalenz nur für den ursprünglichen Poissonzählprozess und nicht für den die Nettoverzinsung generierenden abgewandelten Poissonzählprozess gilt.

3.3.1. Der Exponentialprozess

Betrachtet wird ein Exponentialprozess $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit Parameter $\lambda = 1$, den wir uns als Zwischenankunftszeit eines Poissonzählprozesses vorstellen können. Wir teilen das Geschäftsjahr wiederum in $k \in \mathbb{N}$ Abschnitte. Somit ergibt sich

$$X_1 \sim \exp(1), X_2 \sim \exp(1), \dots, X_k \sim \exp(1), \dots$$

Die Nettoverzinsung wird angesetzt auf Basis dieses stochastischen Prozesses als

$$I'_t := i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dY_j X_j, \quad t = 1, 2, \dots,$$

wobei $d \in \mathbb{R}$ die Schrittweite und

$$Y_j \in \{-1, 1\} \text{ unabhängige Zufallsvariablen mit } P(Y_j = 1) = p.$$

Der Erwartungswert von I'_t ist gegeben durch

²⁴ Zum Beweis vgl. Billingsley, P. (1995), S. 289.

$$\begin{aligned}
 EI'_t &= i'_0 + E\left(\sum_{j=1}^{tk} dY_j X_j\right) = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dE(Y_j X_j) = i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} dE(Y_j)E(X_j) \\
 &= i'_0 + \sum_{j=1}^{tk} d(2p-1) = i'_0 + tkd(2p-1) \quad t = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Mit dieser Nettoverzinsung wurden erneut unterschiedliche Geschäftsverläufe simuliert mit dem Ergebnis der in Abbildung 6 gezeigten Unternehmenswertverteilung.

3.3.2. Ergebnisse der Simulation

Häufigkeitsverteilung der simulierten Unternehmenswerte

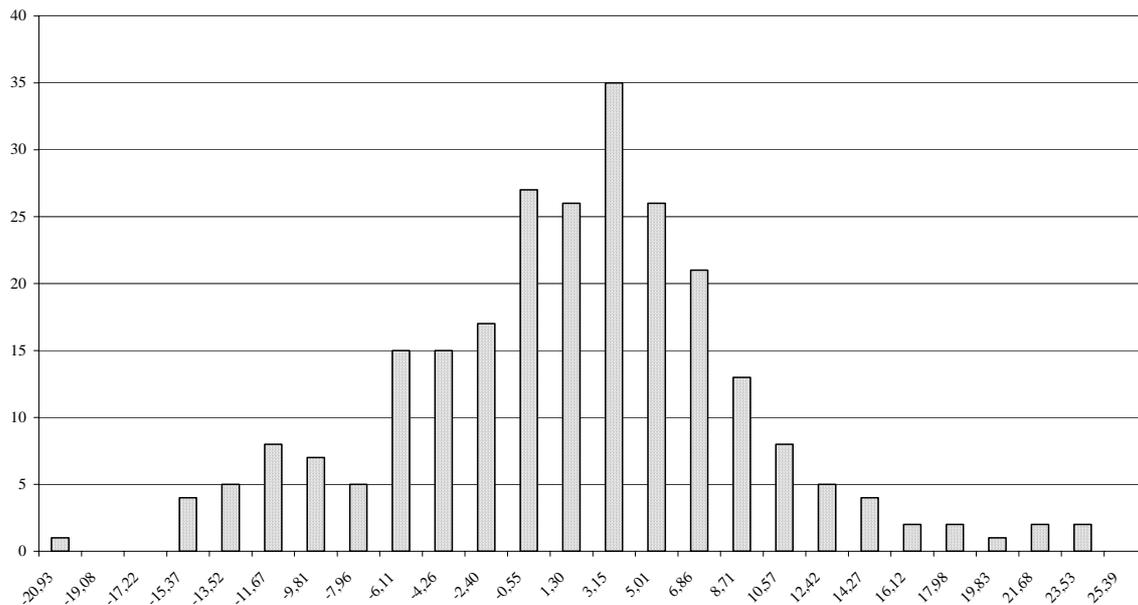


Abbildung 6: Unternehmenswertverteilung bei stochastischer Nettoverzinsung

Die simulierte Verteilung lässt sich erneut gut durch eine Normalverteilung beschreiben. Die Maximum-Likelihood-Schätzung liefert als Verteilungsparameter $\mu = 2,43$ und $\sigma^2 = 7,61$. Damit liegt der Erwartungswert in dem Bereich des in 3.1.2 ermittelten Erwartungswerts, die Varianz dagegen ist wiederum deutlich größer. Die Erklärung für diese beiden Beobachtungen kann analog 3.2.2 vorgenommen werden.

3.4. Prozesse in stetiger Zeit und mit stetigem Zustandsraum

In diesem Abschnitt wird ein theoretisches Resultat hergeleitet, das die Verteilung des Unternehmenswertes exakt angibt und nicht wie in den vorherigen Abschnitten näherungsweise bestimmt. Dabei ergibt sich, dass wir auch in diesem Modell in der Klasse der vorgegebenen Normalverteilungen bleiben.

3.4.1. Der Wiener Prozess

Wir führen zunächst mit der folgenden Definition den Wiener Prozess ein.

Definition (Wiener Prozess)

Ein stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t \in \mathfrak{R}_{\geq 0}}$ heißt standardisierter Wiener Prozess, wenn gilt:

(i) $W_0(\omega) = 0$

(ii) die Zuwächse sind normalverteilt und stationär, d.h.

$$W_{t+u}(\omega) - W_t(\omega) \sim N(0, u) \text{ für alle } t, u \geq 0$$

(iii) für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse

$$W_{t_2}(\omega) - W_{t_1}(\omega), \dots, W_{t_n}(\omega) - W_{t_{n-1}}(\omega) \text{ unabhängig}$$

(iv) die Pfade von W sind stetig.

Wir betrachten nun einen stochastischen Prozess, der durch die folgende stochastische Differenzialgleichung gegeben ist:

$$dX_t = rdt + sdW_t,$$

wobei $r \in \mathfrak{R}$: Driftparameter,

$s > 0$: Streuungsparameter und

W_t : standardisierter Wiener Prozess.

Es gilt²⁵

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \sim N(\mu_0, \Sigma_0) \text{ mit } \mu_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ \vdots \\ r \ m \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_0 = s^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & & m \end{pmatrix}. \quad (4)$$

3.4.2. Herleitung der Unternehmenswertverteilung

Für den weiteren Gang der Überlegungen benötigen wir den folgenden Hilfssatz für lineare Abbildungen von normalverteilten Zufallsvektoren.

*Hilfssatz*²⁶

Es sei $X \sim N_d(a, \Sigma)$. Sind A eine $(s \times d)$ -Matrix und $b \in \mathbb{R}^s$, so folgt

$$AX + b \sim N_s(Aa + b, A\Sigma A^T).$$

Betrachtet man den Rechnungszins 2. Ordnung I'_t , der vom stochastischen Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ gemäß

²⁵ Vgl. Fahrmeir, L. / Kneib, T. (2005), S. 2.

²⁶ Zum Beweis vgl. Henze, N. (1997), S. 194.

$$I'_t := i'_0 + X_t \text{ für } t \geq 0$$

erzeugt wird, so ergibt sich nach Anwendung des Hilfssatzes für I'_0, I'_1, \dots, I'_m die Verteilung

$$\begin{pmatrix} I'_0 \\ \vdots \\ I'_m \end{pmatrix} \sim N(\mu_1, \Sigma_1) \text{ mit } \mu_1 = \mu_0 + \begin{pmatrix} i'_0 \\ \vdots \\ i'_0 \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma_1 = \Sigma_0. \quad (5)$$

Im Folgenden werden die jährlichen Überschüsse G_1, G_2, \dots, G_m mit Hilfe der Kontributionsformel in Abhängigkeit des Rechnungszinses 2. Ordnung I'_0, I'_1, \dots, I'_m dargestellt. Für die jährlichen Überschüsse gilt:

$$G'_t = \text{Zinsüberschuss}_t + \text{Kostenüberschuss}_t + \text{Risikoüberschuss}_t \text{ für } t = 1, \dots, m+1.$$

Gemäß der Kontributionsformel (2) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} G'_1 \\ \vdots \\ G'_{m+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A(m) \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} I'_0 \\ \vdots \\ I'_m \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B(0) \\ \vdots \\ B(m) \end{pmatrix}}_{=:b} \text{ wobei}$$

$$A(j) := V_j + (1 - \beta_j)B_j - L_j - \gamma_j S + (\beta_j + \beta'_j)B_j + (\gamma_j + \gamma'_j)S \text{ und}$$

$$B(j) := -i_0(V_j + (1 - \beta_j)B_j - L_j - \gamma_j S) + (q_{x+j} - q'_{x+j})(T_{j+1} - V_{j+1}) + (\beta_j + \beta'_j)B_j + (\gamma_j + \gamma'_j)S.$$

Die jährlichen Überschüsse hängen linear vom Rechnungszins 2. Ordnung ab. Daher kann der Hilfssatz erneut angewendet werden und es ergibt sich

$$G' := \begin{pmatrix} G'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ G'_{m+1} \end{pmatrix} \sim N(\mu_2, \Sigma_2) \text{ mit } \mu_2 = A\mu_1 + b \text{ und } \Sigma_2 = A\Sigma_1A^T. \quad (6)$$

Ausgehend von G' ergibt sich durch Diskontierung der Unternehmenswert, der also erneut linear von G' und damit auch linear vom Rechnungszins 2. Ordnung abhängt. Die entsprechende Gleichung hat die Gestalt

$$UW_{\text{Vertrag}} = \underbrace{(1 - \text{Steuer}_{\text{Quote}})(1 - \text{RfB}_{\text{Quote}})}_{\equiv c} \begin{pmatrix} \frac{D'_{x+1}}{D'_x} & \frac{D'_{x+2}}{D'_x} & \dots & \frac{D'_{x+m+1}}{D'_x} \end{pmatrix} G'.$$

Nach Anwendung des Hilfssatzes erhalten wir das zentrale Resultat dieses Abschnitts in der Form

$$UW_{\text{Vertrag}} \sim N(\mu_{\text{Vertrag}}, \sigma_{\text{Vertrag}}^2) \text{ mit } \mu_{\text{Vertrag}} = c\mu_2 \text{ und } \sigma_{\text{Vertrag}}^2 = c\Sigma_2c^T. \quad (7)$$

Das Ergebnis wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 1

Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess gemäß $dX_t = rdt + s dW_t$ mit Parametern $r \in \mathbb{R}$ und $s > 0$ sowie $I'_t = i'_0 + X_t$ für $t \geq 0$ der von $(X_t)_{t \geq 0}$ erzeugte Rechnungszins 2. Ordnung. Dann besitzt der Unternehmenswert UW_{Vertrag} eine $N(\mu_{\text{Vertrag}}, \sigma_{\text{Vertrag}}^2)$ -Verteilung, wobei μ_{Vertrag} und $\sigma_{\text{Vertrag}}^2$ gemäß (4) bis (7) berechnet werden.

In 2.2 wurde gezeigt, dass der für die wertorientierte Steuerung relevante Cashflow als weitere Komponente die Eigenkapitalunterlegung berücksichtigen muss. Vergegenwärtigen wir uns das zugehörige Formelwerk, so können wir den Unternehmenswert schreiben als

$$UW_{\text{Eigenkapital}} = \underbrace{(1 - \text{Steuer}_{\text{Quote}})}_{=d} \underbrace{(v^1 EK_0 \quad v^2 EK_1 \quad \dots \quad v^{m+1} EK_m)}_{=d} \begin{pmatrix} I'_0 \\ \vdots \\ I'_m \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{t=0}^m v^{t+1} \Delta_t}_{=:e}$$

Mittels des Hilfssatzes erhalten wir auch für diesen Unternehmenswertbestandteil eine Normalverteilung mit

$$UW_{\text{Eigenkapital}} \sim N(\mu_{\text{Eigenkapital}}, \sigma_{\text{Eigenkapital}}^2) \quad (8)$$

mit $\mu_{\text{Eigenkapital}} = d\mu_1 + e$ und $\sigma_{\text{Eigenkapital}}^2 = d\Sigma_1 d^T$.

Satz 2

Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess gemäß $dX_t = rdt + s dW_t$ mit Parametern $r \in \mathfrak{R}$ und $s > 0$ sowie $I'_t = i'_0 + X_t$ für $t \geq 0$ der von $(X_t)_{t \geq 0}$ erzeugte Rechnungszins 2. Ordnung. Dann besitzt der Unternehmenswert $UW_{\text{Eigenkapital}}$ eine $N(\mu_{\text{Eigenkapital}}, \sigma_{\text{Eigenkapital}}^2)$ -Verteilung, wobei $\mu_{\text{Eigenkapital}}$ und $\sigma_{\text{Eigenkapital}}^2$ gemäß (8) berechnet werden.

Als Folgerung aus den beiden Sätzen erhalten wir unter erneuter Anwendung des Hilfssatzes, dass auch der Unternehmenswert $UW = UW_{\text{Vertrag}} + UW_{\text{Eigenkapital}}$ als Summe von zwei normalverteilten Zufallsvariablen wieder normalverteilt ist mit Parametern $\mu = \mu_{\text{Vertrag}} + \mu_{\text{Eigenkapital}}$ und $\sigma^2 = \sigma_{\text{Vertrag}}^2 + \sigma_{\text{Eigenkapital}}^2 + 2\text{Cov}_{\text{Vertrag}/\text{Eigenkapital}}$, wobei sich der Ausdruck $\text{Cov}_{\text{Vertrag}/\text{Eigenkapital}}$ auf $\text{Cov}(I'_s, I'_t)$ für $s, t = 0, \dots, m$ zurückführen und gemäß (5) exakt berechnen lässt.

Insbesondere liegt die Verteilung des Unternehmenswerts in der untersuchten Klasse der Normalverteilungen. Der Unterschied zu den vorherigen Abschnitten besteht aber darin, dass es hier gelungen ist, die Verteilung exakt theoretisch herzuleiten und nicht über den Weg der Simulation und Maximum-Likelihood-Schätzung anzunähern.

4. Ausblick

Aufbauend auf den in diesem Aufsatz vorgestellten Ansätzen erscheinen weitere Möglichkeiten der mathematischen Modellbildung zur Analyse der den Unternehmenswert beeinflussenden stochastischen Rahmenbedingungen interessant. So ist es denkbar, die Entwicklung der Nettoverzinsung detaillierter zu betrachten, indem die Nettoverzinsung in ihre einzelnen Komponenten zerlegt wird und daraufhin diese Komponenten als stochastische Prozesse modelliert werden. Eine erste Unterteilung wäre dabei sicherlich durch (im Allgemeinen negativ korrelierte) Prozessverläufe für Aktien und festverzinsliche Wertpapiere gegeben. Weitere Detaillierungsstufen könnten für Aktien über Wirtschaftszweige und Regionen sowie für festverzinsliche Wertpapiere über Emittenten und Laufzeiten vorgenommen werden. Die Schwierigkeit liegt dabei in der Bestimmung der Korrelationen der verschiedenen stochastischen Prozesse.

Der in dieser Arbeit diskutierte Ansatz geht immer von einer einzelvertraglichen Bewertung auf Basis einer Bottom-up-Planung aus. Darauf aufbauend sind verschiedene Möglichkeiten denkbar, diese Bausteine für ökonomisch relevante Bereiche zusammenzufassen. Hier interessieren insbesondere Aussagen zu Produkt-, Kunden- und Vermittlergruppen, die alle aus der Bewertung der Einzelverträge gewonnen werden können. Entscheidend ist es weiterhin, geeignete Klassen von Verträgen zu definieren, die hinreichend homogen sind, so dass ein einzelner Vertrag stellvertretend für die gesamte Klasse bewertet werden kann. Damit können die Ergebnisse der Bottom-up-Planung konsequent bis auf Ebene strategischer Geschäftseinheiten oder auf Gesamtunternehmensebene aggregiert werden. Bei allen Verdichtungsprozessen ist es dabei äquivalent, die Cashflows der einzelnen Jahre oder den Unternehmenswert als diskontierte Summe der Cashflows aufzusummieren. Folgt man dem hier entwickelten wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz für die Einzelvertrags-

bewertung, so ergeben sich für die entsprechenden Verdichtungseinheiten Faltungen von Verteilungen.

Ein weiteres interessantes Anwendungsgebiet sind Value at Risk Berechnungen. Die in diesem Umfeld für die wertbestimmenden Parameter häufig verwendeten Normalverteilungen erfahren durch die hier vorgestellten stochastischen Prozesse eine theoretische Fundierung. Dafür wird lediglich eine Aktienkursveränderung mit einer Veränderung des Unternehmenswerts in Beziehung gesetzt, so dass sich wie gezeigt approximativ bzw. exakt eine Normalverteilung ergibt. Darauf aufbauend steht dann das gesamte Instrumentarium der Value at Risk Berechnungen zur Verfügung.

Insgesamt bleibt festzustellen, dass eine erfolgreiche wertorientierte Steuerung von Lebensversicherungsunternehmen nur dann gelingen kann, wenn die Ergebnisse der in diesem Aufsatz zur Verfügung gestellten mathematischen Modelle mit betriebswirtschaftlichem Sachverstand beurteilt und die ökonomisch gewonnenen Erkenntnisse wieder zur Verbesserung der Parameteranpassung bei den entsprechenden stochastischen Prozessen verwendet werden. Die wertorientierte Steuerung ist also ein gelungenes Beispiel für die wechselseitige Bereicherung von Mathematik und Betriebswirtschaftslehre.

Literaturverzeichnis

- Albach, H.* (2001): Shareholder Value, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 71. Jahrgang, Heft 6, S. 643-674.
- Bauer, H.* (1991): Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Auflage, New York.
- Billingsley, P.* (1995): Probability and Measure, 3. Auflage, New York.
- Bühner, R.* (1990): Das Management-Wert-Konzept – Strategien zur Schaffung von mehr Wert im Unternehmen, Stuttgart.
- Cai, J. / Dickson, D.* (2004): Ruin Probabilities with a Markov chain interest model, in: Insurance: Mathematics and Economics, 35. Jahrgang, Heft 3, S. 513-716.
- Copeland, T. / Koller, T. / Murrin, J.* (1994): Valuation: measuring and managing the value of companies, 2. Auflage, New York.
- Fahrmeir, L. / Kneib, T.* (2005): Stochastische Prozesse, München.
- Goldstein, A. / Markowitz, B.* (1982): A Dynamic Insurance Model with Investment Structure, Policy Benefits and Taxes, in: The Journal of Finance, 37. Jahrgang, Heft 2, S.595-604.
- Heller, U.* (2002): Mathematik der Lebensversicherung – Grundwissen, Flensburg.
- Henze, N.* (1997): Stochastik II – Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie –, Karlsruhe.
- Levine, K.* (1973): Corporate Modeling of a Life Insurance Company: A Developmental Game Plan, in: The Journal of Risk and Insurance, 40. Jahrgang, Heft 4, S. 555-564.
- Milbrodt, H. / Helbig, M.* (1999): Mathematische Methoden der Personenversicherung, Berlin.
- Oletzky, T.* (1998): Wertorientierte Steuerung von Versicherungsunternehmen, Hannover.
- Oletzky, T. / Pohl, P.* (2004): Balanced Scorecard: Eine Brücke zwischen Theorie und Praxis, in: Versicherungswirtschaft, 59. Jahrgang, Heft 24, S. 1920-1922.
- Rappaport, A.* (1986): Creating Shareholder Value – The New Standard for Business Performance, New York.
- Rappaport, A.* (1995): Shareholder Value – Wertsteigerung als Maßstab für die Unternehmensführung, Stuttgart.
- Sanders, D.* (1968): Some Methods of Simulating the Random Components of Life Insurance Company Financial Results, in: The Journal of Risk and Insurance, 35. Jahrgang, Heft 3, S. 393-410.
- Shiryayev, A.* (1989): Probability, New York.
- Stieglitz, M.* (1998): Stochastische Prozesse, Karlsruhe.

Wolfsdorf, K. (1997): *Versicherungsmathematik, Teil 1*, Stuttgart.

Working Papers on Risk and Insurance

- No 15: **Martin Nell, Philipp Pohl**, Wertorientierte Steuerung von Lebensversicherungsunternehmen mittels stochastischer Prozesse, November 2005.
- No 14: **Martin Nell, Andreas Richter, Jörg Schiller**, When prices hardly matters: Incomplete insurance contracts and markets for repair goods, January 2005.
- No 13: **Jörg Schiller**, Versicherungsbetrugs als ökonomisches Problem: Eine vertragstheoretische Analyse, July 2004.
- No 12: **Martin Nell, Andreas Richter**, Catastrophic Events as Threats to Society: Private and Public Risk Management Strategies, January 2004, erscheint in: Frenkel, M., Hommel, U., Rudolf, M. (eds.): Risk Management: Challenge and Opportunity, 2nd ed., Berlin Heidelberg.
- No 11: **M. Martin Boyer, Jörg Schiller**, Merging Automobile Insurance Regulatory Bodies: The Case of Atlantic Canada, November 2003, erschienen in: Assurances et Gestion des Risques, 72. Jg. (2004), S. 57 – 89.
- No 10: **Martin Nell, Andreas Richter**, Improving Risk Allocation Through Cat Bonds, November 2002, erschienen in: The Geneva Papers on Risk and Insurance – Issues and Practice, 29. Jg. (2004), S. 183 – 201.
- No 9: **Klaus Bender, Andreas Richter**, Optimales Vertragsdesign bei moralischem Risiko in der Rückversicherung, October 2002, erschienen in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 92. Jg. (2003): S. 483 – 506.
- No 8: **Jörg Schiller**, The Impact of Insurance Fraud Detection Systems, October 2002.
- No 7: **Martin Nell, Jörg Schiller**, Erklärungsansätze für vertragswidriges Verhalten von Versicherungsnehmern aus Sicht der ökonomischen Theorie, May 2002, erschienen in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 91. Jg. (2002), S. 533 – 556.
- No 6: **Walter Karten**, Ökonomische Aspekte einer EU-Richtlinie zur Versicherungsvermittlung, January 2002, erschienen in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 91. Jg. (2002), S. 43 – 60.
- No 5: **Andreas Richter, Jochen Ruß**, Tax Arbitrage in the German Insurance Market, December 2001, erschienen in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, 25. Jg. (2002), S. 659 – 672.
- No 4: **Martin Nell**, Staatshaftung für Terrorrisiken?, Dezember 2001, erschienen in: ifo Schnelldienst, 54. Jg. (2001), Heft 24, S. 6 – 9.

- No 3: **Andreas Richter**, Moderne Finanzinstrumente im Rahmen des Katastrophen-Risk-Managements – Basisrisiko versus Ausfallrisiko, September 2001, erschienen in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 56. Jg. (2004), S. 99 – 121.
- No 2: **Martin Nell**, Managed Claims: Zur Notwendigkeit einer vertikalen Integration von Versicherungs- und Reparaturleistungen, August 2001, erschienen in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 53. Jg. (2001), 47. Sonderheft, S. 207 – 231.
- No 1: **Martin Nell, Andreas Richter**, The Design of Liability Rules for Highly Risky Activities – Is Strict Liability the Better Solution?, June 2001, erschienen in: International Review of Law & Economics, 23. Jg. (2003), S. 31 – 47.

For orders please contact / Kontaktadresse für Bestellungen:

Prof. Dr. Martin Nell

Geschäftsführender Direktor des
Instituts für Versicherungsbetriebslehre

Von-Melle-Park 5

D-20146 Hamburg

Tel.: +49-(0)40-42838-4014

Fax: +49-(0)40-42838-5505

E-mail: martin.nell@rrz.uni-hamburg.de

<http://www.rrz.uni-hamburg.de/IfVBL/wp.htm>

Mit freundlicher Unterstützung des
Vereins zur Förderung der Versicherungswissenschaft in Hamburg e.V.