

von Blanckenburg, Korbinian; Hokamp, Sascha

**Working Paper**

## Exakte Bestimmung der Stabilitätsbedingungen von Marktprozessen auf der Basis des Koordinationsmängel-Diagnosekonzepts und des Schur-Theorems

Beiträge zur angewandten Wirtschaftsforschung, No. 31

**Provided in Cooperation with:**

University of Münster, Münster Center for Economic Policy (MEP)

*Suggested Citation:* von Blanckenburg, Korbinian; Hokamp, Sascha (2009) : Exakte Bestimmung der Stabilitätsbedingungen von Marktprozessen auf der Basis des Koordinationsmängel-Diagnosekonzepts und des Schur-Theorems, Beiträge zur angewandten Wirtschaftsforschung, No. 31, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Centrum für Angewandte Wirtschaftsforschung (CAWM), Münster

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/51296>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

## **Beiträge aus der angewandten Wirtschaftsforschung**

**Nr. 31 (2009)**

### **Exakte Bestimmung der Stabilitätsbedingungen von Marktprozessen auf der Basis des Koordinationsmängel-Diagnosekonzepts und des Schur-Theorems**

Korbinian von Blanckenburg<sup>\*</sup> und Sascha Hokamp<sup>\*\*</sup>

---

<sup>\*</sup> Diplom-Volkswirt Korbinian von Blanckenburg, Institut für Finanzwissenschaft, Wilmergasse 6-8, 48143 Münster, Email: [korbinian@vonblanckenburg.de](mailto:korbinian@vonblanckenburg.de), <http://www.wiwi.uni-muenster.de/iff1>.

<sup>\*\*</sup> Diplom-Mathematiker Sascha Hokamp, Institut für Finanzwissenschaft, Wilmergasse 6-8, 48143 Münster, Email: [saschahokamp@yahoo.de](mailto:saschahokamp@yahoo.de).

Differenzgleichungen höherer Ordnung, wie sie im Rahmen der KMD-Regelkreisdarstellung auftreten, können – wenn überhaupt – nur mit sehr großem Aufwand gelöst werden. Es gibt aber eine alternative Möglichkeit jene  $ab$ -Werte zu bestimmen, bei denen der Regelkreis konvergiert. Hierzu muss man für eine zu untersuchende Differenzgleichung die so genannte Charakteristische Gleichung aufstellen, welche man durch Einsetzen des allgemeinen Ansatzes  $p_t = A \cdot z^t$  in die korrespondierende homogene Differenzgleichung erhält.<sup>1</sup> Man stützt sich hierbei auf das Schur-Theorem. Dies wird im Weiteren gezeigt und zwar mit folgenden Schritten:

(1) Zunächst wird für einen „ $\tau = 1$ “-Fall gezeigt, wie die Konvergenzeigenschaft über die Lösung einer Differenzgleichung (1. Ordnung) bestimmt werden kann.

(2) Dann wird für einen „ $\tau = 1$ “-Fall gezeigt, wie mittels Schur-Theorem auf Konvergenz auch ohne die Lösung der Differenzgleichung geprüft werden kann.

(3) Da eine Lösung von „ $\tau > 1$ “-Fällen – wie gesagt – nicht ohne weiteres möglich ist, wird anschließend gezeigt, wie mittels Schur-Theorem für „ $\tau > 1$ “-Fälle auf Konvergenz getestet werden kann.

Ziel ist es, eine Art „Kochrezept“ zur Ermittlung der Stabilitäts(=Konvergenz)bereiche in Abhängigkeit von  $\tau$  aufzustellen. Die gewonnenen Stabilitätswerte können alternativ auch über die Simulation eines Regelkreises angenähert werden.<sup>2</sup> Die mathematische Herleitung kann somit der Überprüfung einer solchen Simulation dienen.

### **(1) Lösung der Differenzgleichung für den „ $\tau = 1$ “-Fall**

Gegeben seien folgende Gleichungen:  $\Delta p = 0,1 \cdot x_{t-1}^D$  und  $x_t^D = -5 \cdot p_t + L + S_t$ .

Einsetzen liefert

$$\Delta p = 0,1 \cdot (-5 \cdot p_{t-1} + L + S_{t-1})$$

$$\Leftrightarrow p_t - p_{t-1} = -0,5 \cdot p_{t-1} + 0,1 \cdot (L + S_{t-1})$$

$$\Leftrightarrow p_t = 0,5 \cdot p_{t-1} + 0,1 \cdot (L + S_{t-1})$$

<sup>1</sup> Vgl. *Chiang/Wainwright* (2005, S. 589ff.).

<sup>2</sup> Vgl. *Blanckenburg* (2008, S. 1ff.).

Verwendet man im Folgenden für die rekursiv definierte Funktion  $p_t = A \cdot p_{t-1} + B$  die Lösungsformel<sup>3</sup>

$$p_t = \left( p_0 - \frac{B}{1-A} \right) \cdot A^t + \frac{B}{1-A},$$

und setzt die oben abgelesenen Konstanten  $A = 0,5$  ,  $B = 0,1 \cdot (L + S_{t-1})$  und den als Startpreis zum Zeitpunkt  $t = 0$  aus der Gleichung  $x_0^D = -5 \cdot p_0 + L + S_0$  mit  $x_0^D = 0$  und  $S_0 = 0$  gewonnenen Wert

$$p_0 = \frac{x_0^D - L - S_0}{-5} = \frac{-L}{-5} = \frac{L}{5}$$

ein, so erhält man

$$p_t = \left( \frac{L}{5} - \frac{0,1 \cdot (L + S_{t-1})}{1 - 0,5} \right) \cdot 0,5^t + \frac{0,1 \cdot (L + S_{t-1})}{1 - 0,5}$$

$$\Leftrightarrow p_t = \left( \frac{L}{5} - \frac{L + S_{t-1}}{5} \right) \cdot 0,5^t + \frac{L + S_{t-1}}{5}$$

$$\Leftrightarrow p_t = -0,2 \cdot S_{t-1} \cdot 0,5^t + 0,2 \cdot L + 0,2 \cdot S_{t-1}.$$

Aus der offensichtlichen Konvergenz von  $0,5^t$  gegen Null und der Tatsache, dass  $S_t$  ausschließlich in der Periode 1 einen von Null verschiedenen Wert annimmt und sonst den Wert Null hat, folgt dass  $p_t$  sich für alle  $t$ -Werte  $> 1$  mit wachsendem  $t$  einem konstanten Wert annähert. Damit folgt aus der obigen Differenzgleichung auch Konvergenz für die Differenzmengenfunktion, denn wenn  $\Delta p = 0,1 \cdot x_{t-1}^D$  gegen Null konvergiert, konvergiert auch  $x_t^D = 10 \Delta p$  gegen Null.

---

<sup>3</sup> Vgl. *Blanckenburg* (2008, S. 2f.) für die Lösung einer Differenzgleichung 1. Ordnung im Rahmen des KMD-Konzepts.

## (2) Alternative Bestimmung der Konvergenz beim „ $\tau = 1$ “-Fall mittels Schur-Theorem

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\tau$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten

$$\chi(z) = a_0 z^\tau + a_1 z^{\tau-1} + \dots + a_{\tau-1} z + a_\tau$$

sind dann und nur dann sämtlich im Inneren des Einheitskreises gelegen, wenn die  $\tau$  Determinanten

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_\tau \\ a_\tau & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_\tau & a_{\tau-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_\tau \\ a_\tau & 0 & a_\tau & a_1 \\ a_{\tau-1} & a_\tau & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_\tau = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & a_\tau & a_{\tau-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & a_\tau & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{\tau-1} & a_{\tau-2} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_\tau \\ a_\tau & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{\tau-1} \\ a_{\tau-1} & a_\tau & \dots & 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{\tau-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_\tau & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

positive von Null verschiedene Werte haben.<sup>4</sup>

Übertragen auf die Differenzgleichung folgt dann für ihre Lösungen Konvergenz.

**Tabelle 1: Schema zur Bestimmung der Konvergenz der Lösungen einer Differenzgleichung mit Hilfe des Schur-Theorems. Quelle: In Anlehnung an Chiang/Wainwright (2005, S. 589ff.).**

Mit Hilfe der Charakteristischen Gleichung und des Schur-Theorems kann man die Konvergenz auch ohne Kenntnis der Lösung überprüfen. Für den hier betrachteten „ $\tau = 1$ “-Fall lässt sich die Charakteristische Gleichung ableiten aus den Ausgangsgleichungen von (1) für  $\Delta p$  und  $x_t^D$

$$p_t - p_{t-1} = -0,5 \cdot p_{t-1} + 0,1 \cdot (L + S_{t-1})$$

$$\Leftrightarrow p_t - 0,5 \cdot p_{t-1} = 0,1 \cdot (L + S_{t-1})$$

$$\Leftrightarrow p_{t+1} - 0,5 \cdot p_t = 0,1 \cdot (L + S_t)$$

Für die Konvergenzeigenschaften ist nur der korrespondierende homogene Linkshandteil dieser inhomogenen Differenzgleichung verantwortlich. Er muss zur Bestimmung dieser Eigenschaften gleich Null gesetzt werden.<sup>5</sup> Dies liefert:

<sup>4</sup> Eine Verallgemeinerung dieses Spezialfalles kann man bei Schur (1918, S. 134f.) finden.

<sup>5</sup> Die allgemeine Lösung einer inhomogenen Differenzgleichung erhält man durch die Addition einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzgleichung und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differenzgleichung. Vgl. Chiang/Wainwright (2005, S. 548).

$$p_{t+1} - 0,5 \cdot p_t = 0$$

Benutzt man den allgemeinen Ansatz  $p_t = A \cdot z^t$ , so ergibt sich

$$A \cdot z^{t+1} - 0,5 \cdot A \cdot z^t = 0.$$

Nach Division durch  $A \cdot z^t$  gelangt man zu der Charakteristischen Gleichung

$$1 \cdot z^1 - 0,5 \cdot z^0 = 0.$$

Aus ihr lassen sich die Koeffizienten  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -0,5$  ablesen. Nach dem Schur-Theorem ist nun die folgende Determinante zu betrachten

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Wenn diese Determinante einen positiven von Null verschiedenen Wert annimmt, folgt für die Lösung der Differenzgleichung Konvergenz.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,5 = 0,75 > 0.$$

Damit folgt für eine einmalige Störung  $S_t$  aus der obigen Differenzgleichung auch Konvergenz für die Differenzmengenfunktion, denn wenn  $\Delta p = 0,1 \cdot x_{t-1}^D$  gegen Null konvergiert, konvergiert auch  $x_t^D = 10 \Delta p$  gegen Null. Im Folgenden wird daher für die „ $\tau = 1, \dots, 10$ “-Fälle lediglich auf Konvergenz von  $\Delta p$  untersucht, da dies zu den genannten Bedingungen für die Verteilung der Störgröße auch Konvergenz gegen Null für  $x_t^D$  bedeutet.

### (3) Herleitung der Stabilitätsbereiche für $\tau = 1, \dots, 10$ mittels Schur-Theorem

Im Folgenden sollen Konvergenzkriterien mit Hilfe des Schemas aus Tabelle 1 für allgemeine  $ab$ -Werte in Abhängigkeit von  $\tau$  berechnet werden. Die allgemeinen Gleichungen für den Regelkreis des M-Prozesses lauten:

$$\Delta p = a \cdot x_{t-\tau}^D \text{ und} \tag{1}$$

$$x_t^D = b \cdot p_t + L + S_t \tag{2}$$

Um die Konvergenz dieses Gleichungssystems zu überprüfen, müssen die Gleichungen (1) und (2) zunächst in eine Charakteristische Gleichung überführt werden. Diese kann dann für verschiedene  $\tau$ -Werte verwendet werden.

Ineinander Einsetzen liefert

$$\Delta p = a \cdot (b \cdot p_{t-\tau} + L + S_{t-\tau})$$

$$\Leftrightarrow p_t - p_{t-1} = a \cdot (b \cdot p_{t-\tau} + L + S_{t-\tau})$$

$$\Leftrightarrow p_t - p_{t-1} - a \cdot b \cdot p_{t-\tau} = a(L + S_{t-\tau})$$

$$\Leftrightarrow p_{t+\tau} - p_{t+\tau-1} - a \cdot b \cdot p_t = a(L + S_t)$$

$$\Leftrightarrow p_{t+\tau} - p_{t+\tau-1} + 0 \cdot p_{t+\tau-2} + \dots + 0 \cdot p_{t+1} - a \cdot b \cdot p_t = a(L + S_t)$$

$$1 \cdot z^\tau - 1 \cdot z^{\tau-1} + 0 \cdot z^{\tau-2} + 0 \cdot z^{\tau-3} + \dots + 0 \cdot z^1 - ab = 0$$

**Tabelle 2: Charakteristische Gleichung des M-Prozesses. Quelle: eigene Herleitung.**

### Der „ $\tau = 1$ “-Fall

Einsetzen von „ $\tau = 1$ “ in die Charakteristische Gleichung liefert:

$$1 \cdot z^1 - 1 \cdot z^0 - ab = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot z^1 - (1 + ab) = 0$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Koeffizienten der Charakteristischen Gleichung für den „ $\tau = 1$ “-Fall wie folgt lauten:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -(1 + ab)$ . Im Folgenden muss nur eine Determinante bestimmt werden. Für alle  $ab$ -Werte mit einer positiven von Null verschiedenen Determinante folgt Konvergenz.

Aufstellen der  $\Delta_1$ -Determinanten ergibt:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -(1 + ab) \\ -(1 + ab) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 - (1 + ab) \cdot (1 + ab) > 0$$

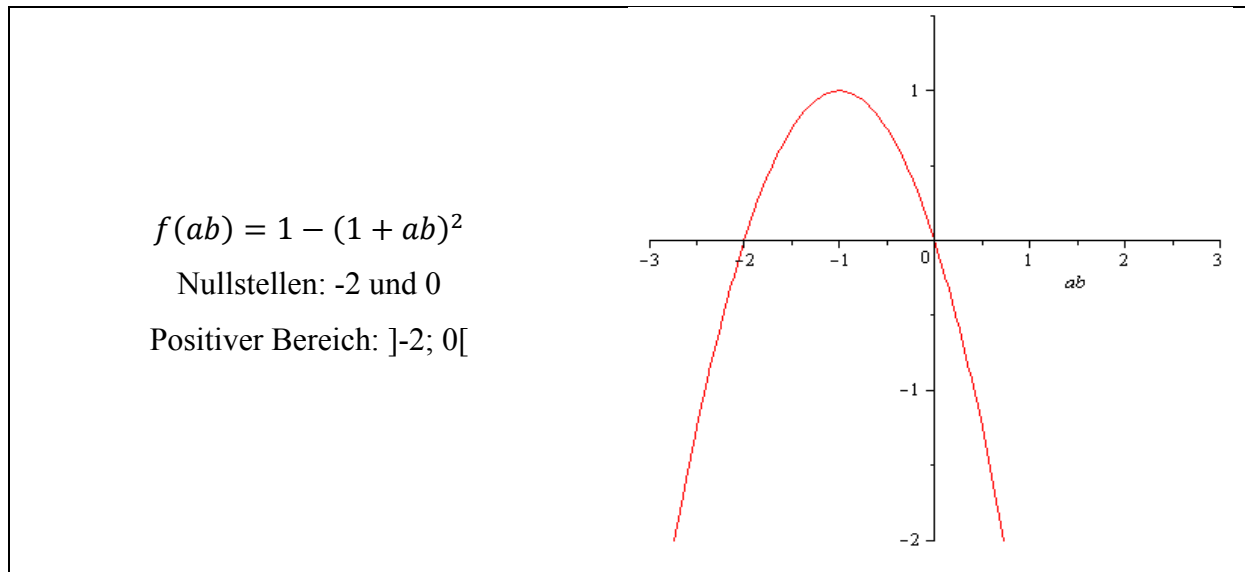
$$\Leftrightarrow 1 - (1 + ab)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > (1 + ab)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 > 1 + ab > -1$$

$$\Rightarrow ab \in ] - 2; 0[ \text{ (Stabilitätsintervall)}$$

Die Bedingung für das Stabilitätsintervall lässt sich auch als Funktion darstellen:



**Abbildung 1: Grafische Darstellung der Determinante die den Stabilitätsbereich für  $\tau = 1$  bestimmt (Positiver Bereich). Quelle: eigene Darstellung.**

### Der „ $\tau = 2$ “-Fall

Einsetzen von „ $\tau = 2$ “ in die Charakteristische Gleichung liefert:

$$1 \cdot z^2 - 1 \cdot z^1 - ab = 0$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Koeffizienten der Charakteristischen Gleichung für den „ $\tau = 2$ “-Fall wie folgt lauten:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = -ab$ . Im Folgenden müssen zwei Determinanten bestimmt werden. Für alle  $ab$ -Werte, für die beide Determinanten positiv von Null verschieden sind, folgt Konvergenz.

Aufstellen der  $\Delta_1$ -Determinanten ergibt:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -ab \\ -ab & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 - (-ab) \cdot (-ab) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - (ab)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (ab)^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < ab < 1 \text{ (Stabilitätsbereich: Erste Bedingung)}$$

Aufstellen der  $\Delta_2$ -Determinanten ergibt:



$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -ab & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -ab \\ -ab & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -ab & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (ab)^4 - 3(ab)^2 - 2(ab) > 0 \text{ (Stabilitätsbereich: Zweite Bedingung)}$$

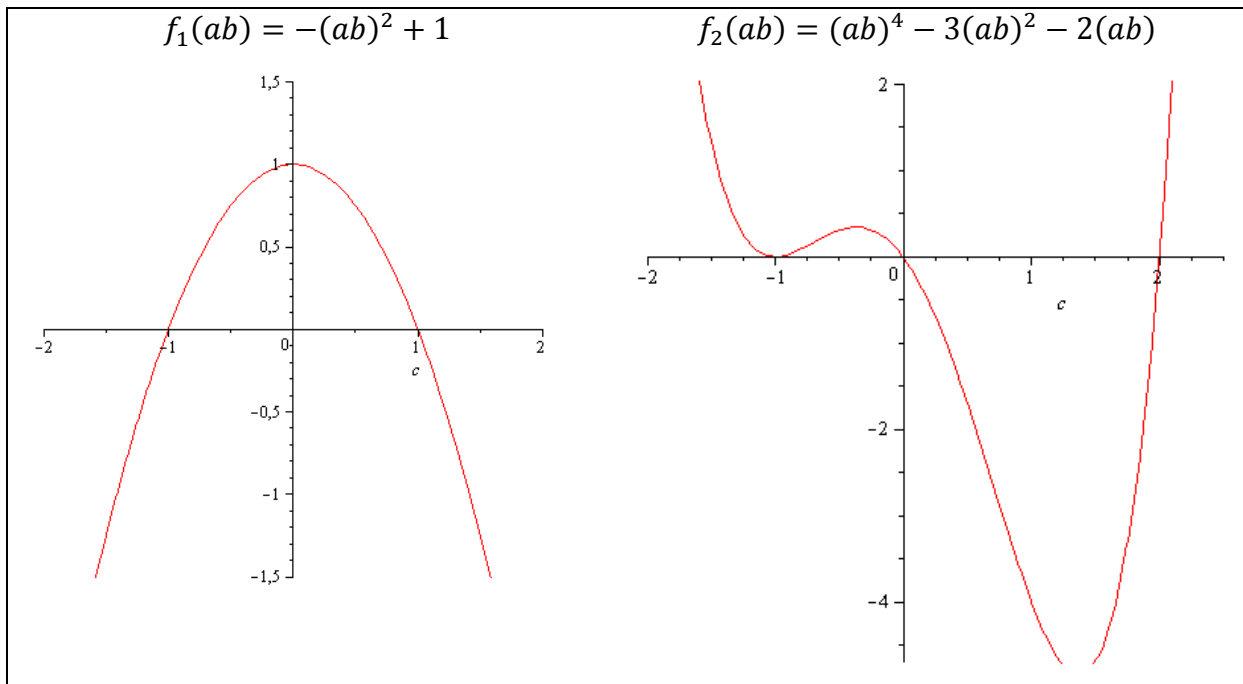


Abbildung 2: Grafische Darstellung des Stabilitätsbereichs für  $\tau = 2$ . Quelle: eigene Darstellung.

Es muss nun der Bereich bestimmt werden, bei dem beide Determinanten positiv sind. Hierzu können die Nullstellen ermittelt werden. Die Nullstellen von  $f_1(ab)$  lauten: -1 und +1, die von  $f_2(ab)$  lauten: -1, 0 und 2 daraus ergibt sich ein gemeinsamer positiver Bereich von  $] - 1; 0[$  (Stabilitätsbereich „ $\tau = 2$ “-Fall).<sup>6</sup>

### Der „ $\tau = 3$ “-Fall

Einsetzen von „ $\tau = 3$ “ in die Charakteristische Gleichung liefert:

$$1 \cdot z^3 - 1 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Koeffizienten der Charakteristischen Gleichung für den „ $\tau = 3$ “-Fall wie folgt lauten:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = -ab$ . Im Folgenden müssen drei Determinanten bestimmt werden. Für alle  $ab$ -Werte, für die alle drei Determinanten positiv von Null verschieden sind, folgt Konvergenz. Aufstellen der  $\Delta_1$ -Determinanten ergibt:

<sup>6</sup>  $ab$ -Werte, die den Nullstellen entsprechen, führen nicht zur Konvergenz. Allerdings auch nicht zu einer explosiven Entwicklung. Sie stellen die Grenzen der Stabilitätsintervalle dar und führen zu einer konstanten Schwingung.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -ab \\ -ab & 1 \end{vmatrix}$$

Die erste Stabilitätsbedingung wurde bereits im „ $\tau = 2$ “-Fall hergeleitet; sie lautet  $-1 < ab < 1$

Aufstellen der  $\Delta_2$ -Determinanten ergibt:

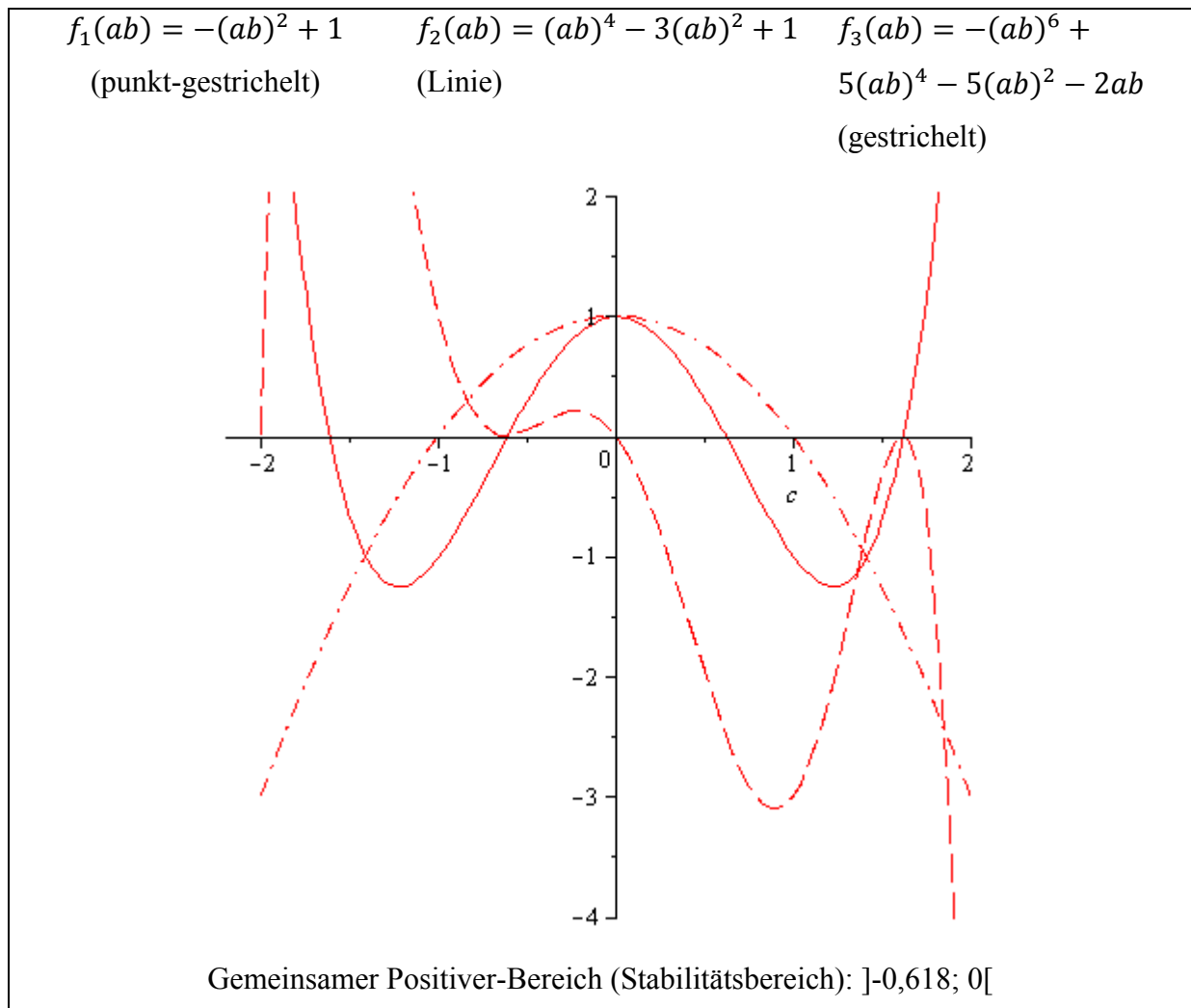
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -ab & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -ab \\ -ab & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -ab & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1 > 0$$

Aufstellen der  $\Delta_3$ -Determinanten ergibt:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -ab & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -ab \\ -ab & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -ab & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 5(ab)^2 - 2ab > 0$$



**Abbildung 3: Grafische Darstellung des Stabilitätsbereichs für  $\tau = 3$ . Quelle: eigene Darstellung.**

Wie man in der Abbildung sehen kann, lässt sich der gemeinsame positive Bereich über die Nullstellen der Determinanten bestimmen. Hier lautet dieser Bereich ]-0,618; 0[.

### Der „ $\tau = 4$ “-Fall

Einsetzen von „ $\tau = 4$ “ in die Charakteristische Gleichung liefert:

$$1 \cdot z^4 - 1 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Koeffizienten der Charakteristischen Gleichung für den „ $\tau = 4$ “-Fall wie folgt lauten:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $a_4 = -ab$ . Im Folgenden müssen vier Determinanten bestimmt werden. Für alle  $ab$ -Werte, für die alle vier Determinanten positiv von Null verschieden sind, folgt Konvergenz.

$\Delta_1$  und  $\Delta_2$  wurden bereits im „ $\tau = 4$ “-Fall bestimmt.

Aufstellen der  $\Delta_3$ -Determinanten ergibt:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -ab & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -ab \\ -ab & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -ab & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1 > 0$$

Auf fünf Stellen gerundete Nullstellen	Positiver Bereich
-1,8020	]-1,8020; -1,2470[
-1,2470	
-0,44505	]-0,44505; 0,44505[
0,44505	
1,2470	]1,2470; 1,8019[
1,8019	

**Tabelle 3: Nullstellen im „ $\tau = 4$ “-Fall ( $\Delta_3$ -Determinante). Quelle: eigene Berechnungen.**

Aufstellen der  $\Delta_4$ -Determinanten ergibt:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -ab & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -ab & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -ab & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -ab \\ -ab & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -ab & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -ab & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -ab & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (ab)^8 - 7(ab)^6 + 14(ab)^4 - 7(ab)^2 - 2ab > 0$$

Auf fünf Stellen gerundete Nullstellen	Positiver Bereich
-1,8020	$]-\infty; -1,8020[$
-1,8020	$]-1,8020; -0,44505[$
-0,44505	
-0,44505	$]-0,44505; 0[$
0	
1,2470	
1,2470	
2	

**Tabelle 4: Nullstellen im „ $\tau = 4$ “-Fall ( $\Delta_4$ -Determinante). Quelle: eigene Berechnungen.**

Aus den Nullstellen der beiden Determinanten ergibt sich ein gemeinsamer positiver Bereich von  $]-0,44505; 0[$ .

Für die „ $\tau = 5, \dots, 10$ “-Fälle wird analog vorgegangen, deshalb erfolgt eine verkürzte Beschreibung des Rechenweges. Es werden die Gleichungen der Determinanten angegeben und die daraus resultierenden gemeinsamen positiven Bereiche.

### Der „ $\tau = 5$ “-Fall

$$1 \cdot z^5 - 1 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0 \text{ (Charakteristische Gleichung)}$$

Die ersten drei Determinanten sind bereits bekannt:

$$\Delta_1 = -(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_3 = -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1$$

Die folgenden Determinanten ergeben:

$$\Delta_4 = (ab)^8 - 7(ab)^6 + 15(ab)^4 - 10(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_5 = -(ab)^{10} + 9(ab)^8 - 27(ab)^6 + 30(ab)^4 - 9(ab)^2 - 2ab$$

Aus den Nullstellen ergibt sich folgender gemeinsamer positiver Bereich:  $]-0,34730; 0[$

**Der „ $\tau = 6$ “-Fall**

$$1 \cdot z^6 - 1 \cdot z^5 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0 \text{ (Charakteristische Gleichung)}$$

Die ersten vier Determinanten sind bereits bekannt:

$$\Delta_1 = -(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_3 = -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_4 = (ab)^8 - 7(ab)^6 + 15(ab)^4 - 10(ab)^2 + 1$$

Die folgenden Determinanten ergeben:

$$\Delta_5 = -(ab)^{10} + 9(ab)^8 - 28(ab)^6 + 35(ab)^4 - 15(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_6 = (ab)^{12} - 11(ab)^{10} + 44(ab)^8 - 77(ab)^6 + 55(ab)^4 - 11(ab)^2 - 2ab$$

Aus den Nullstellen ergibt sich folgender gemeinsamer positiver Bereich:  $] -0,28463; 0[$

**Der „ $\tau = 7$ “-Fall**

$$1 \cdot z^7 - 1 \cdot z^6 + 0 \cdot z^5 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0$$

(Charakteristische Gleichung)

Die ersten fünf Determinanten sind bereits bekannt:

$$\Delta_1 = -(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_3 = -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_4 = (ab)^8 - 7(ab)^6 + 15(ab)^4 - 10(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_5 = -(ab)^{10} + 9(ab)^8 - 28(ab)^6 + 35(ab)^4 - 15(ab)^2 + 1$$

Die folgenden Determinanten ergeben:

$$\Delta_6 = (ab)^{12} - 11(ab)^{10} + 45(ab)^8 - 84(ab)^6 + 70(ab)^4 - 21(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_7 = -(ab)^{14} + 13(ab)^{12} - 65(ab)^{10} + 156(ab)^8 - 182(ab)^6 + 91(ab)^4 - 13(ab)^2 - 2ab$$

Aus den Nullstellen ergibt sich folgender gemeinsamer positiver Bereich:  $] -0,24107; 0[$

**Der „ $\tau = 8$ “-Fall**

$$1 \cdot z^8 - 1 \cdot z^7 + 0 \cdot z^6 + 0 \cdot z^5 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0$$

(Charakteristische Gleichung)

Die ersten sechs Determinanten sind bereits bekannt:

$$\Delta_1 = -(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_3 = -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_4 = (ab)^8 - 7(ab)^6 + 15(ab)^4 - 10(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_5 = -(ab)^{10} + 9(ab)^8 - 28(ab)^6 + 35(ab)^4 - 15(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_6 = (ab)^{12} - 11(ab)^{10} + 45(ab)^8 - 84(ab)^6 + 70(ab)^4 - 21(ab)^2 + 1$$

Die folgenden Determinanten ergeben:

$$\Delta_7 = -(ab)^{14} + 13(ab)^{12} - 66(ab)^{10} + 165(ab)^8 - 210(ab)^6 + 126(ab)^4 - 28(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_8 = (ab)^{16} - 15(ab)^{14} + 90(ab)^{12} - 275(ab)^{10} + 450(ab)^8 - 378(ab)^6 + 140(ab)^4 - 15(ab)^2 - 2ab$$

Aus den Nullstellen ergibt sich folgender gemeinsamer positiver Bereich:  $]0,20906; 0[$

**Der „ $\tau = 9$ “-Fall**

$$1 \cdot z^9 - 1 \cdot z^8 + 0 \cdot z^7 + 0 \cdot z^6 + 0 \cdot z^5 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0$$

(Charakteristische Gleichung)

Die ersten sieben Determinanten sind bereits bekannt:

$$\Delta_1 = -(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_3 = -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_4 = (ab)^8 - 7(ab)^6 + 15(ab)^4 - 10(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_5 = -(ab)^{10} + 9(ab)^8 - 28(ab)^6 + 35(ab)^4 - 15(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_6 = (ab)^{12} - 11(ab)^{10} + 45(ab)^8 - 84(ab)^6 + 70(ab)^4 - 21(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_7 = -(ab)^{14} + 13(ab)^{12} - 66(ab)^{10} + 165(ab)^8 - 210(ab)^6 + 126(ab)^4 - 28(ab)^2 + 1$$

Die folgenden Determinanten ergeben:

$$\Delta_8 = (ab)^{16} - 15(ab)^{14} + 91(ab)^{12} - 286(ab)^{10} + 495(ab)^8 - 462(ab)^6 + 210(ab)^4 - 36(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_9 = -(ab)^{18} + 17(ab)^{16} - 119(ab)^{14} + 442(ab)^{12} - 935(ab)^{10} + 1122(ab)^8 - 714(ab)^6 + 204(ab)^4 - 17(ab)^2 - 2ab$$

Aus den Nullstellen ergibt sich folgender gemeinsamer positiver Bereich: ]-0,18454; 0[

### Der „ $\tau = 10$ “-Fall

$$1 \cdot z^{10} - 1 \cdot z^9 + 0 \cdot z^8 + 0 \cdot z^7 + 0 \cdot z^6 + 0 \cdot z^5 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z^1 - ab = 0 \text{ (Charakteristische Gleichung)}$$

Die ersten acht Determinanten sind bereits bekannt:

$$\Delta_1 = -(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_2 = (ab)^4 - 3(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_3 = -(ab)^6 + 5(ab)^4 - 6(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_4 = (ab)^8 - 7(ab)^6 + 15(ab)^4 - 10(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_5 = -(ab)^{10} + 9(ab)^8 - 28(ab)^6 + 35(ab)^4 - 15(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_6 = (ab)^{12} - 11(ab)^{10} + 45(ab)^8 - 84(ab)^6 + 70(ab)^4 - 21(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_7 = -(ab)^{14} + 13(ab)^{12} - 66(ab)^{10} + 165(ab)^8 - 210(ab)^6 + 126(ab)^4 - 28(ab)^2 + 1$$

$$\Delta_8 = (ab)^{16} - 15(ab)^{14} + 91(ab)^{12} - 286(ab)^{10} + 495(ab)^8 - 462(ab)^6 + 210(ab)^4 - 36(ab)^2 + 1$$

Die folgenden Determinanten ergeben:

$$\Delta_9 = -(ab)^{18} + 17(ab)^{16} - 120(ab)^{14} + 455(ab)^{12} - 1001(ab)^{10} + 1287(ab)^8 - 924(ab)^6 + 330(ab)^4 - 45(ab)^2 + 1$$

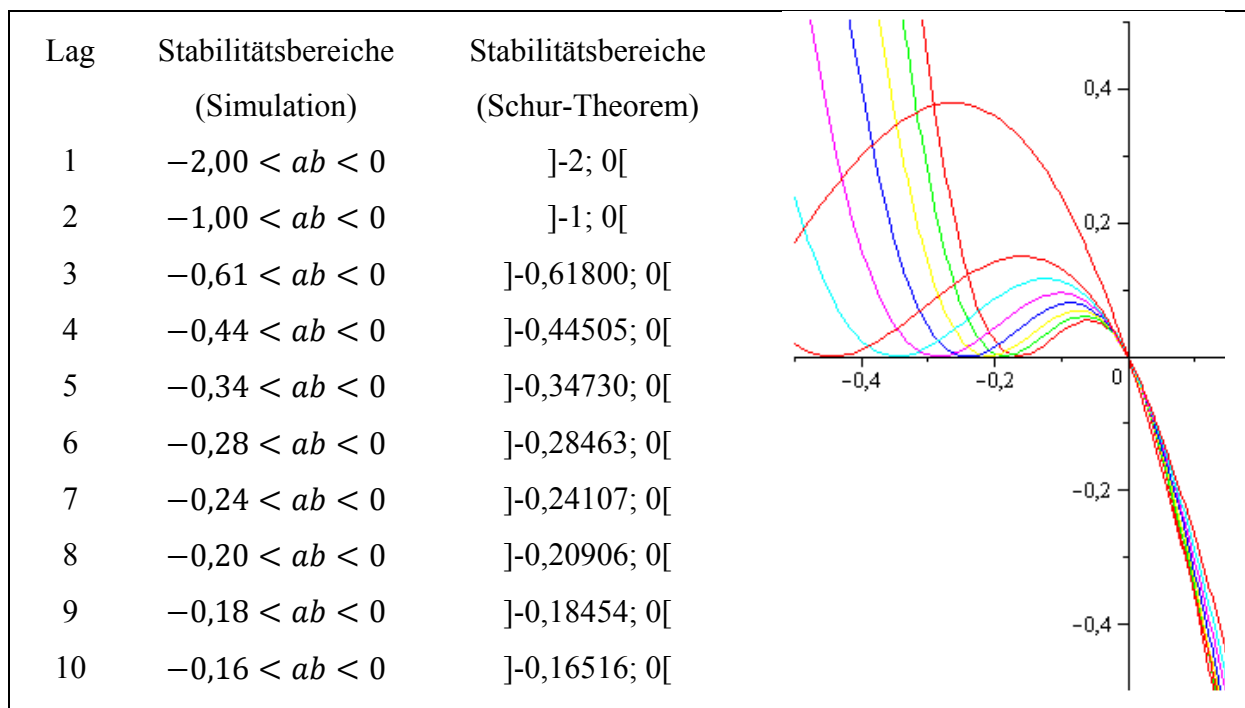
$$\Delta_{10} = (ab)^{20} - 19(ab)^{18} + 152(ab)^{16} - 665(ab)^{14} + 1729(ab)^{12} - 2717(ab)^{10} + 2508(ab)^8 - 1254(ab)^6 + 285(ab)^4 - 19(ab)^2 - 2ab$$

Aus den Nullstellen ergibt sich folgender gemeinsamer positiver Bereich: ]-0,16516; 0[



## Zusammenfassung

Mit Hilfe des Schur-Theorems haben wir für die Bestimmung der Stabilität der Rückkopplungsparameter im KMD-Konzept und damit der Konvergenz des Regelkreises eine alternative Möglichkeit aufgezeigt, die ohne eine explizite Lösung der Differenzgleichungen höherer Ordnung auskommt. Hierfür ist aus der Differenzgleichung zuerst eine Charakteristische Gleichung abzuleiten. Um anschließend eine Aussage über deren Nullstellen machen zu können, sind zunächst die Determinanten des Schur-Theorems zu berechnen und zu überprüfen, wann alle gleichzeitig positive Werte besitzen. Dazu bestimmen wir die Nullstellen der Determinanten und betrachten die sich ergebenden Intervalle. Haben wir einen gemeinsamen positiven Bereich gefunden, so liegen für diese  $ab$ -Werte alle Lösungen der Charakteristischen Gleichung innerhalb des Einheitskreises. In diesem Fall konvergiert die allgemeine Lösung der Differenzgleichung, womit der Regelkreis stabil ist bzw. in der Lage ist, eine Störung auszuregulieren.



**Abbildung 4:** Stabilitätsbereiche bei exakter Berechnung mit Hilfe des Schur-Theorems und eine Darstellung der restriktivsten Determinanten für  $\tau = 3, \dots, 10$ . Quelle: eigene Darstellung.

Wie man in Abbildung 4 erkennen kann, stimmen die Ergebnisse der Berechnung der Stabilitätsbereiche mittels Schur-Theorem recht gut mit den aus der Simulation gewonnenen Ergebnissen überein. Das Schur-Theorem hat somit einerseits die Simulation bestätigt und andererseits ein Tool geliefert, mit dem es ohne großen Aufwand möglich ist, die Konvergenzeigenschaft auch für höhere  $\tau$ -Werte zu bestimmen. Auf der rechten Seite der Abbildung 4 ist zusätzlich der Verlauf der restriktivsten Determinanten für  $\tau = 3, \dots, 10$  dargestellt. Die von zwei Nullstellen eingeschlossenen positiven Bereiche stimmen mit den

Stabilitätsbereichen überein. Hierbei kann man sehen, dass die Stabilitätsbereiche mit steigendem  $\tau$  immer kleiner werden. Bei  $\tau = 10$  wird nur noch ein kleiner positiver Bereich von den Nullstellen  $-0,16516$  und  $0$  eingeschlossen.

## **Literatur**

*Blanckenburg, K. v.* (2008): „Grenzen der Stabilitätsintervalle für die KMD-Regelprozesse“, in: Beiträge zur angewandten Wirtschaftsforschung, Schriftenreihe des Centrums für angewandte Wirtschaftsforschung Münster (CAWM), Nr. 28, S. 1-32.

*Chiang, A. C./Wainwright, K.* (2005): „Fundamental Methods of Mathematical Economics“, McGraw-Hill/Irwin, New York.

*Schur, I.* (1918): „Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind“, in: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 148, S. 122-145.

## **Beiträge zur angewandten Wirtschaftsforschung**

1. **Manfred Borchert**  
The Changing Character of the European Banking (November 2003)
2. **Anne Kretschmer**  
Suchmöglichkeiten am Arbeitsmarkt – Zur Bedeutung von Arbeitsvermittlungsorganisationen (Mai 2004)
3. **Ulrich van Suntum**  
Methodische Probleme des Benchmarking - Der Bertelsmann-Benchmarking-Index (Juni 2004)
4. **Mark Trede und Bernd Wilfling**  
Estimating Exchange Rate Dynamics with Diffusion Processes:  
An Application to Greek EMU Data (2004)
5. **Manfred Borchert**  
The Impact of Banking Behaviour on Monetary Strategy (Oktober 2004)
6. **Mark Trede und Cornelia Savu**  
Goodness-of-fit tests for parametric families of Archimedean copulas (Oktober 2004)
7. **Andreas Behr**  
A Rolling MTAR model to test for efficient stock Pricing and asymmetric adjustment (November 2004)
8. **Anne Kretschmer**  
Das australische Arbeitsvermittlungssystem – Vorbild für Deutschland? (Januar 2005)
9. **Robert Vehrkamp und Klaus Hafemann**  
Korruption, Arbeitsmarkt und Beschäftigung – Ergebnisse einer empirischen Analyse für die osteuropäischen Transformationsländer (Mai 2005)
10. **Tholen Eekhoff**  
Combination Versus Competition – The Welfare Trade-offs Revisited (August 2005)
11. **Christian Lorenz**  
Der KMD-Kartellcheck – Marktscreening nach Kartellstrukturen am Beispiel des deutschen Zementmarkts (August 2005)
12. **Holger Bonus und Ivo Bayer**  
Europäische Identität und symbolische Politik (August 2005)
13. **Manfred Borchert**  
The Impact of Banking Behaviour on Monetary Strategy in Europe (revised and extended edition 2005)

14. **Andreas Behr und Ulrich Pötter**  
Downward Wage Rigidity in Europe: A New Flexible Parametric Approach and Empirical Results (November 2005)
15. **Cornelia Savu und Win Lon Ng**  
The ScoD Model – Analyzing Durations with a Semiparametric Copula Approach (April 2006)
16. **Andreas Behr und Ulrich Pötter**  
Analysing wage differences between the USA and Germany using proportional hazards models (April 2006)
17. **Ulrich van Suntum und Karsten Rusche**  
Integrierte Regionalprognose 2020 – Ökonomisch-demographische Perspektiven in Deutschlands Regionen – (Mai 2006)
18. **Mark Wipprich**  
Efficiency and vertical networks: A note on demand uncertainty and separated markets (Dezember 2006)
19. **Ulrich van Suntum und Klaus Hafemann**  
Effizienter Steuerverbund statt korrigierenden Finanzausgleichs – ein Vorschlag zur Neuordnung der Bund-Länder-Einnahmenverteilung (März 2007)
20. **Ulrich van Suntum und Andreas Westermeier**  
Umlegung der Erbschaftsteuer auf die Einkommensteuer (Oktober 2007)
21. **Sebastian Gundel und Heiko Peters**  
Wie gut sind Immigranten in den deutschen Arbeitsmarkt integriert?  
Löhne von Immigranten und Deutschen im Vergleich (November 2007)
22. **Karsten Rusche**  
Bestimmung und Prognose regionaler Wohneigentumsquoten mithilfe eines ökonometrisch-mathematischen Mischverfahrens (Februar 2008)
23. **Korbinian von Blanckenburg**  
Testverfahren zur Beurteilung der Funktionsfähigkeit von Marktprozessen (Juli 2008)
24. **Heinz Grossekketter**  
Marktprozessbedingte Controllingaufgaben im Unternehmen (August 2008)
25. **Alexander Geist, Korbinian von Blanckenburg, Andreas Hadamitzky**  
Die Legitimation des Briefmonopols zur Finanzierung des Universaldienstes im Briefverkehr (September 2008)
26. **Heinz Grossekketter**  
Marktprozessbedingte Controllingaufgaben in Unternehmen, 2., erweiterte Auflage (November 2008)

27. **Korbinian von Blanckenburg**  
Eine Methode zur Schätzung der Rückkopplungsparameter im Koordinationsmängel-Diagnosekonzept (November 2008)
28. **Korbinian von Blanckenburg**  
Grenzen der Stabilitätsintervalle für die KMD-Regelprozesse (Dezember 2008)
29. **Michael Heuterkes, Matthias Janssen**  
Die Regulierung von Gas- und Strommärkten in Deutschland (Dezember 2008)
30. **Korbinian von Blanckenburg**  
Die Halbwertzeit einer Störungserosion (Januar 2009)
31. **Korbinian von Blanckenburg, Sascha Hokamp**  
Exakte Bestimmung der Stabilitätsbedingungen von Marktprozessen auf der Basis des Koordinationsmängel-Diagnosekonzepts und des Schur-Theorems (Februar 2009)