

Siebert, Horst

Article — Digitized Version

Die Anwendung der Mengentheorie für die Abgrenzung von Regionen

Jahrbuch für Sozialwissenschaft

Provided in Cooperation with:

Kiel Institute for the World Economy – Leibniz Center for Research on Global Economic Challenges

Suggested Citation: Siebert, Horst (1967) : Die Anwendung der Mengentheorie für die Abgrenzung von Regionen, Jahrbuch für Sozialwissenschaft, ISSN 0075-2770, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, Vol. 18, Iss. 3, pp. 215-222

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/3507>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Die Anwendung der Mengentheorie für die Abgrenzung von Regionen

K

Von

Horst Siebert

Die mathematische Mengentheorie¹ hat in der Volkswirtschaftslehre bisher kaum Anwendung gefunden. Dies ist vor allem deshalb verwunderlich, weil der Wirtschaftswissenschaftler laufend den Mengenbegriff verwendet und in seinen Überlegungen häufig Operationen mit Mengen durchführt. Ein typisches Beispiel für den Gebrauch mengentheoretischer Begriffe und Operationen bildet die Abgrenzung von Regionen. Auf dieses Problem soll die Mengentheorie im folgenden angewandt werden.

1. Gegeben sei die Menge aller Raumpunkte einer Volkswirtschaft. Eine Menge ist „eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens . . . zu einem Ganzen“². Ein Raumpunkt ist als eine Standorteinheit zu verstehen, also als ein Standardmaß für die räumliche Ausdehnung. Eine solche Standorteinheit kann den Standort eines oder mehrerer landwirtschaftlicher oder gewerblicher Unternehmen oder eines oder mehrerer Haushalte darstellen.

Eine Volkswirtschaft bestehe aus einer endlichen Menge solcher Standorteinheiten. Bezeichnen wir diese Raumstellen mit $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, so gilt:

$$(1) \quad A = \{a/a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ werden auch als Elemente der Menge A bezeichnet.

Bei der Abgrenzung von Regionen wird die Menge A in die Teilmengen $B, C, D \dots$ zerlegt. Diese Teilmengen können mit Hilfe des Aussonderungsaxioms³ aus der Menge A gewonnen werden. Für die Teilmenge B lautet das Axiom⁴:

$$(2) \quad \bigvee_B \bigwedge_a (a \in B \leftrightarrow a \in A \wedge \varphi(a))$$

¹ Zur Mengentheorie vgl. Rotman, B., und Kneebone, B. T., *The Theory of Sets and Transfinite Numbers*, London 1966; Suppes, P., *Axiomatic Set Theory*, London 1965.

² Kamke, E., *Mengenlehre*, Berlin 1965, S. 5.

³ Suppes, P., a.a.O. S. 6.

⁴ Die Symbole: \bigvee : Existenzquantor; \bigwedge : Allquantor; \in : ist Element von; \leftrightarrow : genau dann wenn; \wedge : und.

Dieses Aussonderungsaxiom ist wie folgt zu lesen: Es gibt eine Menge B , so daß für alle Raumstellen a gilt: a ist genau dann ein Element der Teilmenge B , wenn a ein Element von A ist und wenn a eine gebundene Variable ist. a muß also durch eine Funktion mit einer Konstanten oder einer Variablen verknüpft sein. Das Aussonderungsaxiom erlaubt uns, diejenigen Elemente einer gegebenen Menge auszusondern, die eine bestimmte Eigenschaft besitzen und die eine neue Menge bilden, deren Elemente genau diese Eigenschaft haben. Wenn Region B aus der Menge A abgegrenzt werden soll, muß die Eigenschaft spezifiziert werden, die einige Elemente der Menge A von anderen Elementen der Menge A unterscheidet. Wir können die Teilmengen $B, C, D \dots$ also bestimmen, indem wir eine Formel für $\varphi(a)$ angeben.

2. Im folgenden sei zur Vereinfachung unterstellt, daß die Aufteilung der Menge A in Regionen nur zu den zwei Teilmengen B und C führt. Die Menge A hat dann nur die beiden Regionen B und C als Teilmengen:

$$(3) \quad A = \{B, C\}$$

Die Vereinigung der beiden Teilmengen ergibt A :

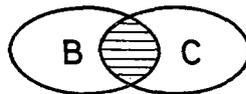
$$(4) \quad B \cup C = A$$

Wenn eine gesamtflächendeckende Aufteilung einer Volkswirtschaft in Teilräume angestrebt wird, müssen die Regionen in einer solchen Weise abgegrenzt werden, daß jeder Raumpunkt nur Element einer einzigen Teilmenge ist. Deshalb muß die Formel $\varphi(a)$ so gewählt werden, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(5) \quad B \cap C = \emptyset,$$

wobei \emptyset eine leere Menge kennzeichnet. Der Durchschnitt der beiden Teilmengen muß also eine leere Menge sein. Eine Abgrenzung der folgenden Form ist durch (5) ausgeschlossen.

Darstellung 1:



In diesem Fall ergibt der Schnitt von B und C keine leere Menge, was bedeutet, daß bestimmte Raumpunkte Elemente beider Teilmengen sind.

Genügt die Regionsabgrenzung der Bedingung (5), so sind die Teilmengen B und C disjunkt:

$$(6) \quad B = \{b/b = (a_1 \dots a_k)\}$$

$$(7) \quad C = \{c/c = (a_{k+1} \dots a_n)\}$$

3. Eine recht einfache Möglichkeit der Regionsabgrenzung besteht darin, ein Entfernungskriterium anzuwenden. Es sei möglich, davon auszugehen, daß zumindest jeweils eine Raumstelle der beiden Teilmengen bereits bekannt ist, z.B. liege a_1 in B , und a_n liege in C . Für a_1 und a_n können intuitiv sehr große Orte ausgewählt werden. Eine beliebige Raumstelle a wird nun demjenigen Teilraum zugeschlagen, von dessen bekanntem Punkt a_1 bzw. a_n sie die geringste Entfernung hat. Unter der Annahme, daß $a_1 \in B$ und $a_n \in C$, ergibt sich für das Aussonderungssaxiom⁵:

$$(8) \quad a \in B \leftrightarrow a \in A \wedge m_{aa_1} \leq m_{aa_n}$$

$$(9) \quad a \in C \leftrightarrow a \in A \wedge m_{aa_1} > m_{aa_n}$$

m_{aa_1} kennzeichnet die Entfernung von einem beliebigen Raumpunkt a nach a_1 . Analog für m_{aa_n} .

Die Entfernungen können aus einer Entfernungsmatrix entnommen werden:

Darstellung 2:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_n
a_1	—	$m_{a_1a_2}$	$m_{a_1a_3}$	$m_{a_1a_4}$	$m_{a_1a_5}$	$m_{a_1a_n}$
a_2		—	$m_{a_2a_3}$	$m_{a_2a_4}$	$m_{a_2a_5}$	$m_{a_2a_n}$
a_3			—	$m_{a_3a_4}$	$m_{a_3a_5}$	$m_{a_3a_n}$
a_4				—	$m_{a_4a_5}$	$m_{a_4a_n}$
a_5					—	$m_{a_5a_n}$
⋮						⋮
a_n						—

4. Ein anderes mögliches Kriterium für die Abgrenzung von Regionen ist das Kriterium der Homogenität. Legt man dieses Unterscheidungsmerkmal zugrunde, so stellt eine Region die Menge der Raumstellen dar, die in ausgewählten Merkmalen eine als hinreichend definierte Gleichartigkeit zeigen. Dadurch, daß bestimmte Eigenschaften an einigen Raumpunkten erfüllt und an anderen nicht gegeben sind, kann die Region als Strukturelement des Raumes herausgehoben und im Gesamtraum isoliert werden. Das Kriterium der Homogenität kann sich auf geographisch-physikalische Eigenschaften, auf

⁵ Wenn in (8) und (9) nur das Ungleichheitszeichen benutzt wird, gibt es keine Vorschrift für die Raumstellen, für die $m_{aa_1} = m_{aa_n}$.

das soziale System (z.B. institutionell-administrative Einheitlichkeit) und auf rein ökonomische Charakteristika, wie z.B. die Produktionsstruktur, beziehen⁶.

Bezeichnet man den charakteristischen Schwellenwert der Homogenität⁷ für die Region B mit \bar{x} und für C mit \bar{y} , so lautet das Aussonderungssaxiom:

$$(10) \quad a \in B \leftrightarrow a \in A \wedge x_a \geq \bar{x}$$

$$(11) \quad a \in C \leftrightarrow a \in A \wedge y_a \geq \bar{y}$$

Eine Regionsabgrenzung entsprechend (10) und (11) unter Beachtung der Bedingung (5) ist nur möglich, wenn \bar{x} und \bar{y} sich nicht überschneiden. Wegen dieser Voraussetzung ist eine gesamtflächende Regionsabgrenzung mit Hilfe des Homogenitätskriteriums in der Regel sehr schwierig.

5. Eine weitere Möglichkeit ist darin zu sehen, die Regionen nach dem Kriterium der Interdependenz abzugrenzen. Eine Region ist dann als ein räumlich gebundenes System zu verstehen. Ein System stellt eine Menge von Variablen dar, die untereinander in stärkerer Interdependenz stehen als mit anderen Variablen. Dabei handelt es sich nicht um eine einseitige Interdependenz auf der Beschaffungsseite (Bezugsregion eines Verbrauchszentrums) oder auf der Absatzseite (Absatzregion eines Produktionszentrums), sondern um den allgemeinen Fall der Interdependenz aller Austauschbeziehungen⁸.

Um dieses Kriterium anzuwenden, muß durch $\varphi(a)$ die Interdependenz der Elemente a erfaßt werden. Alle Elemente von A sind also so in zwei Teilmengen einzuteilen, daß die Interdependenz innerhalb der Teilmengen stärker ist als zwischen den Teilmengen.

Die Interdependenz der Raumstellen kann durch einen Graphen dargestellt werden. Ein Graph $G = (A, I)$ ist definiert als die Menge A und die Funktion I , die A in A abbildet⁹. Der Graph kann auch geschrieben werden als $G = [a_j^i]$, wobei i und j für alle Raumstellen a stehen. Raumpunkte stellen die Knotenpunkte des Graphen dar. Die Interdependenz zwischen zwei Raum-

⁶ Zu den Kriterien der Regionsabgrenzung vgl. Boudeville, J. R., *L'économie régionale — espace opérationnel*, Cahiers de l'Institut de Science Economique Appliquée, Série L, No 3, 1958, S. 5 ff.; ders., *A Survey of Recent Techniques for Regional Analysis*, in: Isard, W., and Cumberland, J. H., *Regional Economic Planning, Techniques of Analysis for less Developed Areas*, Paris 1961, S. 377 ff.; ders., *Les Espaces économiques*, Paris 1961, S. 7 ff.; Romus, P., *Zur Bestimmung des Begriffs Region, Raumforschung und Raumordnung*, Festschrift für E. Dittrich, Bd. 22, 1964, S. 234 ff.

⁷ Anstelle eines einzelnen Kriteriums kann auch ein zusammengesetzter Index verwandt werden.

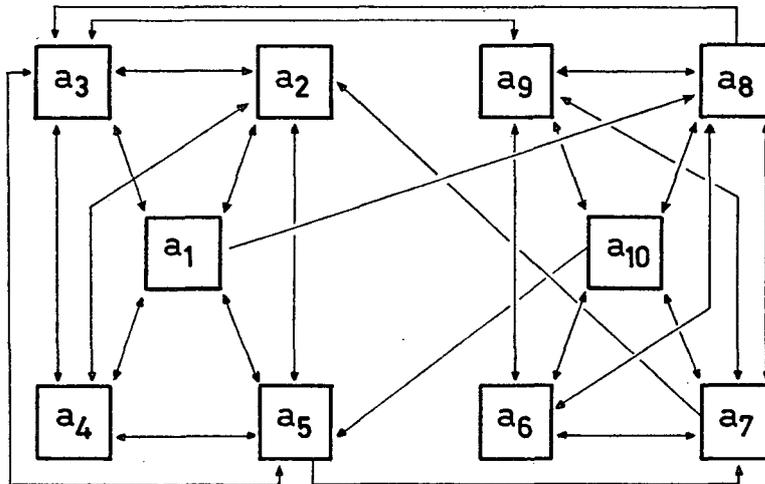
⁸ Binswanger, H. C., *Das intra-regionale Gleichgewicht — zur Integration von Standorttheorie und Theorie des internationalen Handels*. Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, Bd. 97, 1961, S. 144.

⁹ Zur Graphentheorie vgl. Avondo-Bodino, *Economic Applications of the Theory of Graphs*, New York 1962; Berge, C., *Théorie des Graphes et ses Applications*, Paris 1958; König, D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936.

punkten, z. B. die Existenz eines backward oder forward linkage, wird durch eine gerichtete Kante dargestellt. Die Kante gibt lediglich die Existenz einer Interdependenz an, sagt aber nichts über deren Intensität aus. Wenn die Interdependenz in beiden Richtungen verläuft, ist die Kante ungerichtet.

Zur Vereinfachung sei unterstellt, daß die Volkswirtschaft aus zehn Raumstellen besteht. Es ergebe sich folgender Graph zur Umschreibung der Interdependenzen:

Darstellung 3:



Dieser Graph kann durch die Matrix in Abbildung 4 dargestellt werden, wobei die Zeile $a_1 \dots a_{10}$ den Ursprungsort der Interdependenz und die Spalte $a_1 \dots a_{10}$ ihren Wirkungsort angeben. Interdependenzen sind durch eine 1 angegeben; leere Felder zeigen an, daß keine Interdependenz zwischen zwei Raumstellen besteht.

Ist ein solcher Graph oder die entsprechende Matrix der Interdependenzen gegeben, so muß ein Algorithmus gefunden werden, der es erlaubt, diejenigen Raumstellen, die untereinander in stärkerer Interdependenz sind, herauszufinden. Ein sehr einfacher Algorithmus würde etwa folgendermaßen lauten: Man wähle einige Raumpunkte als „vorläufige“ Region aus. Es wird nun geprüft, ob beliebige Raumpunkte dieser „vorläufigen“ Region zugeschlagen werden können. Das Kriterium für die Zugehörigkeit einer beliebigen Raumstelle a zur „vorläufigen“ Region ist in der Anzahl der Interdependenzen zu sehen. Ist die Anzahl der Verknüpfungen eines Raumpunktes zur „vorläufigen“ Region stärker als zu allen restlichen Raumstellen, so wird der Raumpunkt der „vorläufigen“ Region hinzugeschlagen.

Wählen wir im vorliegenden Beispiel $\{a_1, a_2, a_3\}$ als „vorläufige“ Region aus, so ergibt sich in bezug auf a_4 : Die Zahl der Verknüpfungen mit der „vorläufigen“ Region beträgt 6; die Zahl der Verknüpfungen mit $\{a_5 \dots a_{10}\}$

beträgt 3. a_4 ist also der „vorläufigen“ Region zuzuschlagen. Für a_5 ist die Zahl der Verknüpfungen mit $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 8; die Zahl der Verknüpfungen mit $\{a_6 \dots a_{10}\}$ beträgt 2. Auch die Raumstelle a_5 ist der „vorläufigen“ Region hinzuzuzählen. Jetzt müssen alle Raumstellen $\{a_6 \dots a_{10}\}$ auf die vorläufige Region $\{a_1 \dots a_{10}\}$ getestet werden. Der Prozeß der Abgrenzung beginnt von neuem, wenn man zumindest zwei Raumstellen außerhalb der gefundenen Region B für eine neue „vorläufige“ Region C auswählt und dabei den gleichen Prozeß wiederholt.

Darstellung 4:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_1	—	1	1	1	1			1		
a_2	1	—	1	1	1					
a_3	1	1	—	1	1				1	
a_4	1	1	1	—	1					
a_5	1	1	1	1	—		1			
a_6						—	1	1	1	1
a_7		1				1	—	1	1	1
a_8			1			1	1	—	1	1
a_9			1			1	1	1	—	1
a_{10}					1	1	1	1	1	—

Bezeichnet man eine vorläufige Region mit v , die Anzahl der Verknüpfungen einer Raumstelle a mit v als N_{av} und die Anzahl der Verknüpfungen mit den restlichen Raumpunkten des Gesamtsystems mit N_{ar} , so gilt für die Region B und analog für andere Regionen:

$$(12) \quad a \in B \leftrightarrow a \in A \wedge N_{av} > N_{ar}$$

Dieser einfache Algorithmus, der vom Zwei-Regionen-Fall ausgeht, in seiner jetzigen Form nicht zwingend zu einer eindeutigen Lösung führt und mehr die Richtung einer möglichen Lösung aufzeigt als die Lösung selbst gibt, müßte vor einer empirischen Anwendung erheblich verbessert werden. Einmal müßte sichergestellt sein, daß die Lösung nicht von der anfänglichen, u. U. willkürlichen Auswahl einer „vorläufigen“ Region abhängt. Zum anderen sollte nicht die Anzahl der Interdependenzen, sondern ihre Intensität das entscheidende Kriterium sein. Die Stärke der Abhängigkeiten kann jedoch berücksichtigt werden, indem die Kanten des Graphen mit Kapazitäten versehen

werden, sie also z.B. die Güterströme einer Periode als Gewichte erhalten. Die der Darstellung 4 entsprechende Matrix verzeichnet dann die Güterströme — nicht wie die Input-Output-Tabelle zwischen verschiedenen Sektoren — sondern zwischen verschiedenen Raumstellen¹⁰.

Bei empirischen Analysen wird die Regionsabgrenzung dadurch erleichtert, daß neben dem Interdependenzkriterium als Nebenbedingung eine Höchstgröße der räumlichen Entfernung eingeführt wird. Denn die Anwendung des Interdependenzkriteriums allein könnte möglicherweise den Fall eintreten lassen, daß eine Raumstelle a , die geographisch im Zentrum der Region B liegt, durch eine stärkere Verknüpfung mit der Region C gekennzeichnet ist als mit den Raumstellen der Region B . Eine Nebenbedingung der oben genannten Form schließt diese Möglichkeit aus.

6. Es ist hier der Versuch unternommen worden, einige sehr einfache Sätze der Mengenlehre auf das Problem der Abgrenzung von Regionen anzuwenden. Die Mathematik stellt dem Ökonomen in dem axiomatisierten Zermelo-Fraenkel-System eine Fülle anderer, aus wenigen Axiomen abgeleiteter Theoreme zur Verfügung, deren Anwendung zusätzliche Erkenntnisse über ökonomische Probleme ermöglichen kann. So ist die Standortbestimmung als Durchschnitt zweier Mengen aufzufassen, und zwar der Menge S aller Standorterfordernisse, für eine Reihe von Sektoren oder Unternehmen, und der räumlichen Verteilung (T) der Standorteigenschaften einzelner Regionen oder Raumstellen¹¹.

Die Menge der Standorterfordernisse S ist die Gesamtheit aller Standorterfordernisse der Unternehmen u_1, u_2, \dots, u_n . Die Elemente der Menge S sind selbst wieder Mengen, die die Standorterfordernisse $z_1^+, z_2^+ \dots z_m^+$ für ein einzelnes Unternehmen wiedergeben:

$$(13) \quad S = \{(z_1^+, \dots, z_m^+)_{u_1}, (z_1^+, \dots, z_m^+)_{u_2}, \dots, (z_1^+, \dots, z_m^+)_{u_n}\}$$

Das Subskript $u_1 \dots u_n$ kennzeichnet, daß sich die Standorterfordernisse auf die einzelnen Unternehmen beziehen.

Die Menge der Standorteigenschaften T ist die Gesamtheit aller gegebenen Standortqualitäten der einzelnen Raumstellen $a_1 \dots a_n$ ¹². Die Menge T enthält als Elemente also die Standorteigenschaften der einzelnen Raumstellen. Dies wird durch die Subskripte $a_1 \dots a_n$ gekennzeichnet.

$$(14) \quad T = \{(z_1 \dots z_m)_{a_1}, (z_1 \dots z_m)_{a_2}, \dots, (z_1 \dots z_m)_{a_n}\}$$

¹⁰ Siebert, H., Zur Theorie des regionalen Wirtschaftswachstums, Tübingen 1967, S. 9 ff.

¹¹ Als eine Form der Durchschnittsoperation kann die von Schneider, H. K., durchgeführte Matrizenmultiplikation angesehen werden. Über einige Probleme und Methoden regionaler Analyse und Prognose. In: Regionalplanung, Beiträge und Untersuchungen, Institut für Siedlungs- und Wohnungswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster, S. 103 ff.

¹² Zur Vereinfachung sei unterstellt, daß die Anzahl der Raumstellen der Anzahl der Unternehmen entspricht.

Die Durchschnittsoperation¹³ von S und T ergibt:

$$(15) \quad S \cap T = W$$

W kennzeichnet den „possibility set“ der Standorte, die die Unternehmen $u_1 \dots u_n$ auswählen können. Durch die Aufnahme zusätzlicher Standorterfordernisse kann der Bereich der Standortwahl eingeschränkt werden.

Die Mengentheorie kann auch auf die Frage angewandt werden, wie sich neues technisches Wissen auf ein System von Regionen verteilt¹⁴. Die Mengenlehre ist aber nicht allein für die Untersuchung räumlicher Verteilungen oder für die Regionaltheorie¹⁵ anwendbar. Sie bietet in Verbindung mit der Graphentheorie ein wichtiges Analyseinstrument der Kommunikationstheorie, und ihre Anwendung auf Probleme der allgemeinen volkswirtschaftlichen Theorie, z.B. in Form der Relationentheorie bei den Wohlfahrts- und Nutzenfunktionen, kann zu neuen Ergebnissen vorstoßen¹⁶.

¹³ Falls die Menge der Standorterfordernisse sich auf mehr als ein Unternehmen bezieht, liegt die Problematik dieses Vorgehens darin, daß die Standortqualitäten eines Raumpunktes in bezug auf ein bestimmtes Unternehmen nicht unabhängig von der Standortwahl aller anderen Unternehmen sind, da räumliche Nähe oder Ferne zu bzw. von anderen Aktivitäten eine wichtige Standortvoraussetzung sein kann. Die Menge T ist dann in dieser einfachen Darstellung nicht unabhängig von der Durchschnittsoperation.

¹⁴ Vgl. Siebert, H., Zur interregionalen Verteilung neuen technischen Wissens. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, April 1967.

¹⁵ Teitz, M. B., Regional Theory and Regional Models, Papers and Proceedings of the Regional Science Association, Vol. IX, 1962, S. 39—50; vgl. auch die Anwendung der Mengentheorie auf den Prüfbarkeitsgrad von Aussagen bei Popper, K. R., Logik der Forschung, Tübingen 1966, S. 78ff.

¹⁶ Newman, P., The Theory of Exchange, Englewood Cliffs 1965.