

Dannenberg, Henry

**Working Paper**

## Schätzunsicherheit oder Korrelation, Welche Risikokomponente sollten Unternehmen bei der Bewertung von Kreditportfoliorisiken wann berücksichtigen?

IWH Discussion Papers, No. 5/2007

**Provided in Cooperation with:**

Halle Institute for Economic Research (IWH) – Member of the Leibniz Association

*Suggested Citation:* Dannenberg, Henry (2007) : Schätzunsicherheit oder Korrelation, Welche Risikokomponente sollten Unternehmen bei der Bewertung von Kreditportfoliorisiken wann berücksichtigen?, IWH Discussion Papers, No. 5/2007, Leibniz-Institut für Wirtschaftsforschung Halle (IWH), Halle (Saale), <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:3:2-1027>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/29957>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

**Schätzunsicherheit oder Korrelation  
Welche Risikokomponente sollten Unternehmen  
bei der Bewertung von Kreditportfoliorisiken  
wann berücksichtigen?**

*Henry Dannenberg*

Mai 2007

Nr. 5

**Schätzunsicherheit oder Korrelation  
Welche Risikokomponente sollten Unternehmen  
bei der Bewertung von Kreditportfoliorisiken  
wann berücksichtigen?**

*Henry Dannenberg*

Mai 2007

Nr. 5

Autor: Henry Dannenberg

Abteilung Industrieökonomik

Email: Henry.Danneberg@iwh-halle.de

Tel.: (0345) 77 53-871

The responsibility for discussion papers lies solely with the individual authors. The views expressed herein do not necessarily represent those of the IWH. The papers represent preliminary work and are circulated to encourage discussion with the author. Citation of the discussion papers should account for their provisional character; a revised version may be available directly from the author.

Comments and suggestions on the methods and results presented are wellcome.

IWH-Discussion Papers are indexed in RePEc-Econpapers.

Herausgeber:

INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSFORSCHUNG HALLE – IWH

Prof. Dr. Ulrich Blum (Präsident), Dr. Hubert Gabrisch (Forschungsdirektor)

Das IWH ist Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Hausanschrift: Kleine Märkerstraße 8, 06108 Halle (Saale)

Postanschrift: Postfach 11 03 61, 06017 Halle (Saale)

Telefon: (0345) 77 53-60

Telefax: (0345) 77 53-8 20

Internetadresse: <http://www.iwh-halle.de>

# **Schätzunsicherheit oder Korrelation**

## **Welche Risikokomponente sollten Unternehmen bei der Bewertung von Kreditportfoliorisiken wann berücksichtigen?**

### **Zusammenfassung**

Die Bewertung der Ausfallwahrscheinlichkeiten von Ratingklassen, basierend auf historischen Daten, ist mit Schätzunsicherheit verbunden. Zur Bewertung dieser Unsicherheit werden in der Literatur Konfidenzintervalle diskutiert. Diesen liegen allerdings Annahmen bezüglich der Abhängigkeiten zwischen einzelnen Forderungen zugrunde, die im Widerspruch zu den Annahmen der gängigen Kreditportfoliomodelle stehen. Im vorliegenden Beitrag wird anhand von Simulationsstudien gezeigt, dass eine Berücksichtigung von Schätzunsicherheit in kleinen Portfolios gerechtfertigt sein kann, auch wenn dafür Abhängigkeiten vernachlässigt werden müssen. Die Modellierung der Schätzunsicherheit beruht hier auf der Idee der Konfidenzintervalle und der ihnen zugrundeliegenden Verteilungen. Die Ergebnisse der Arbeit sind vor allem für die Modellierung von Forderungsportfolios in Unternehmen von Interesse.

Schlüsselwörter: Kreditausfallwahrscheinlichkeit, Schätzunsicherheit, Risikobewertung

JEL: C15, D81, G11

### **Abstract**

The use of probability of default estimates to assess the risks of a credit portfolio should not ignore estimation uncertainty. The latter can be quantified by confidence intervals. But assumptions about dependencies of these intervals are inconsistent with assumptions of conventional credit portfolio models. Based on simulation studies this paper shows, that a model which include estimation uncertainty but ignore default correlation might estimate the real credit risk more correctly than a model that implicates default correlation but ignore estimation uncertainty. The latter is a trait of conventional credit portfolio models. In this paper quantifying of estimation uncertainty based on the idea of confidence intervals and the underlying probability distributions of these intervals.

Keywords: Probability of Default, Estimation Uncertainty, Risk Assessment



---

# **Schätzunsicherheit oder Korrelation**

## **Welche Risikokomponente sollten Unternehmen bei der Bewertung von Kreditportfoliorisiken wann berücksichtigen?**

### **1. Einleitung**

Die Gewährung von Zahlungszielen ist für viele Unternehmen ein wichtiges Instrument der Absatzförderung. Mit der Gewährung von Zahlungszielen können jedoch auch zum Teil nicht unerhebliche Ausfallrisiken verbunden sein. Die Steuerung dieser Risiken sollte daher ein wichtiger Bestandteil des unternehmerischen Risikomanagements sein, um die Zukunftsfähigkeit eines Unternehmens zu sichern. Ein wichtiges Instrument des Risikomanagements stellt die Risikodeckung also die Bereitstellung von genügend Eigenkapital dar. Im vorliegenden Beitrag wird dieses Instrument zur Absicherung von Forderungsausfallrisiken betrachtet.

Während im Bankensektor bereits eine Vielzahl von Modellen zur quantitativen Bewertung von Kreditportfoliorisiken zur Anwendung kommt,<sup>1</sup> wurde bisher wenig untersucht, welche Art von Modellen geeignet sind, um das Forderungsportfoliorisiko eines Unternehmens intern zu bewerten. Prinzipiell könnten Unternehmen die selben Modelle nutzen wie Banken. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die im Bankensektor bisher nur wenig beachtete Schätzunsicherheit bei der Bewertung von Modellkomponenten<sup>2</sup> des Forderungsausfallrisikos in Unternehmen von wesentlich höherer Bedeutung sein könnte. Schätzunsicherheit ergibt sich aus dem Stichprobenfehler der Schätzung.<sup>3</sup> Zwar fordert der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht, dass im Bankenbereich für mit der Schätzung dieser Parameter verbundene Fehler Sicherheitszuschläge zu berücksichtigen sind, die in Beziehung zur möglichen Fehlerspannweite stehen,<sup>4</sup> der Ausschuss sagt aber wenig darüber, wie diese Sicherheitszuschläge zu bestimmen sind. Da Unternehmen in der Regel über deutlich kleinere Datenbestände zur Schätzung der Modellkomponenten verfügen als Banken, erscheint es erforderlich zu diskutieren, wie bei

---

1 Z. B. CreditMetrics, PortfolioManager, Portfolio Risk Tracker, CreditportfolioView.

2 Z. B. Ausfallwahrscheinlichkeit, Ausfallkorrelation, Exposure at default, Loss given Default.

3 Vgl. Löffler (2003), S. 1427 ff., Jorion (1996), S. 47 ff. diskutiert beispielhaft anhand des Value at Risk für Marktrisiken das Problem der Schätzunsicherheit.

4 Vgl. Basel Committee on Banking Supervision (2005) RN451.

der Bewertung von Forderungsportfolios diese Schätzunsicherheit zu berücksichtigen ist. Der vorliegende Beitrag konzentriert sich auf die Frage, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote eines Unternehmens modelliert werden sollte. Diese Verteilung gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Anteil der Kunden,<sup>5</sup> den Zahlungsziele gewährt wurden, ausfällt.

Besonders hinsichtlich der Ausfallwahrscheinlichkeit wird in der Literatur diskutiert, diese durch Konfidenzintervalle und nicht durch Punktschätzer zu beschreiben, um die Schätzunsicherheit bewerten zu können.<sup>6</sup> Die Bildung von Konfidenzintervallen setzt allerdings die Unabhängigkeit der Debitoren, also eine Ausfallkorrelation von Null, voraus. Zwar schlagen Miao und Gastwirth (2004) eine Modifikation von verschiedenen Konfidenzintervallen vor, wodurch eine Längsschnittabhängigkeit zwischen den Debitoren berücksichtigt werden kann.<sup>7</sup> Auch diese Intervalle lassen jedoch keine Abhängigkeiten im Querschnitt zu. Damit sind sie ebenfalls nicht mit den Annahmen vereinbar, die den im Bankensektor gängigen Kreditportfoliomodellen zugrunde liegen, welche explizit Querschnittabhängigkeiten, also Abhängigkeiten zwischen allen Kreditnehmern, berücksichtigen. Ausfallkorrelationen größer als Null führen in den Kreditportfoliomodellen zu einer Verbreiterung der Ränder der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote. Damit einher geht eine Erhöhung der unerwarteten Verluste und damit des zur Risikodeckung erforderlichen Eigenkapitalbedarfs der Unternehmen. Werden also Abhängigkeiten zwischen Debitoren vernachlässigt, erfolgt eine Unterschätzung des Eigenkapitalbedarfs. Andererseits ergeben sich aus der Schätzunsicherheit auch Risiken für Unternehmen, deren Vernachlässigung ebenfalls zu einer Unterbewertung des erforderlichen Eigenkapitalpuffers führt. Hieraus leitet sich die Frage ab, unter welchen Rahmenbedingungen ein Modell, welches Schätzunsicherheit berücksichtigt, den Eigenkapitalbedarf weniger unterschätzt als ein Modell, welches Abhängigkeiten zwischen den Debitoren einbezieht.

Zu erwarten ist, dass insbesondere bei kleinen Ratingklassen die Berücksichtigung von Schätzunsicherheit derjenigen von Korrelation überlegen ist. Im vorliegenden Beitrag wird deshalb mit einer Simulationsstudie unter Verwendung eines aus dem Bankenbereich übernommenen Schwellenwertmodells untersucht, ab welcher Größe einer Ratingklasse ein Wechsel zwischen den beiden Modellvarianten sinnvoll erscheint. Aus Gründen der einfacheren Veranschaulichung repräsentiert hier eine Ratingklasse das gesamte Forderungsportfolio eines Unternehmens. Es werden Szenarien gebildet und Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ausfallquote bestimmt, aus denen verschiedene

---

<sup>5</sup> Es wird unterstellt, dass bei einem Kundenausfall alle Forderungen gegen diesen Kunden betroffen sind.

<sup>6</sup> Vgl. *Hanson, Schuermann* (2006), S. 2281 ff.; *Christensen, Hansen, Lando* (2004), S. 2575 ff.; *Lawrenz* (2006), S. 1 ff.; *Pluto, Tasche* (2005), S. 72 ff.; *Stein* (2003), S. 1 ff.

<sup>7</sup> Vgl. *Miao, Gastwirth* (2004), S. 124 ff.

Value at Risks (VaR) abgeleitet werden, welche Rückschlüsse auf den Eigenkapitalbedarf zulassen. Diese Szenarien unterscheiden sich hinsichtlich der angenommenen Abhängigkeiten der historisch beobachteten Ausfallzahlen und der Größe der Ratingklassen. Die Schätzunsicherheit bei der Bewertung der Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch eine Verteilung beschrieben, die dem Jeffrey-Konfidenzintervall zugrunde liegt.<sup>8</sup>

Die Untersuchung zeigt, dass der Übergang von einem Modell, welches Schätzunsicherheit berücksichtigt, zu einem Modell, welches Abhängigkeiten einbezieht, je nach Höhe der Ausfallkorrelation bereits bei einer Ratingklassengröße von unter 100 Debitoren aber auch erst bei einer Größe von mehr als 1.000 Debitoren vorteilhaft sein kann. Damit kann gezeigt werden, dass die im Bankensektor übliche Nutzung von Modellen, die Ausfallkorrelationen einbeziehen und Schätzunsicherheiten vernachlässigen, für große Ratingklassen zu rechtfertigen ist.<sup>9</sup> Es zeigt sich aber auch, dass im Unternehmensbereich die Frage nach dem zu verwendenden Modell von hoher Relevanz ist, da hier auch kleine Kundenportfolios vorstellbar sind, die nur Ratingklassen mit wenigen hundert Kreditnehmern zulassen.

Der Artikel ist wie folgt gegliedert. In Abschnitt 2 werden zunächst die verwendeten theoretischen Grundlagen zu Modellierung des Forderungsausfalls dargestellt. Darüber hinaus wird diskutiert, wie die Verteilungsfunktion der Ausfallquote unter Berücksichtigung der Schätzunsicherheit ermittelt wird. In Abschnitt 3 erfolgt in Abhängigkeit von der Ratingklassengröße, der Ausfallkorrelation, der historisch beobachteten Ausfallquote und des Signifikanzniveaus des VaR für verschiedene Kreditportfolios ein Vergleich der Kreditausfallrisiken, welche sich ergeben, wenn Schätzunsicherheit oder Ausfallkorrelation bei der Bestimmung der Verteilung der Ausfallquote berücksichtigt werden. Abschließend werden die Ergebnisse der Arbeit in Abschnitt 4 zusammengefasst.

---

<sup>8</sup> Das Jeffrey-Konfidenzintervall wird z. B. bei *Brown, Cai, DasGupta* (2001), S. 108 ff. beschrieben.

<sup>9</sup> Vgl. beispielsweise *de Servigny, Renault* (2004), S. 213 ff., *Hamerle, Rösch* (2005b), S. 194.

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1. Modellierung der Ausfallquote

Zur Modellierung der Anzahl der innerhalb einer Periode auftretenden Kreditausfälle  $H$  eines Portfolios, welches  $n$  Schuldner mit derselben jährlichen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  umfasst, wird im Folgenden ein Ein-Faktor-Schwellenwertmodell verwendet. Dieses entspricht dem von Höse und Huchens (2003) beschriebenen Modell und wird implizit auch im IRB-Ansatz von Basel 2 verwendet. Die Bonität der Debitoren wird durch standardnormalverteilte Bonitätsvariablen  $B_1, B_2, \dots, B_n$  beschrieben, wobei alle Kredite eines Kreditnehmers zusammengefasst betrachtet werden. Ein Kreditnehmer  $i$  fällt dann aus, wenn die Bonitätsvariable  $B_i$  eine bestimmte Schranke  $c$  unterschreitet. Da die Bonitätsvariable als standardnormalverteilt angenommen wird, entspricht die Schranke  $c$  dem Wert der Umkehrfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle  $p$ :  $c = N^{-1}(p)$ , wobei  $N$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und  $N^{-1}$  die Umkehrfunktion dieser Verteilung beschreibt. Damit lässt sich eine bernoulliverteilte Zufallsvariable  $X_i$  definieren, die den Wert Eins annimmt, wenn der Kreditnehmer ausfällt und sonst Null ist:

$$X_i := 1 \{B_i \leq N^{-1}(p)\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

Die Abbildung von Abhängigkeiten zwischen einzelnen Kreditnehmern erfolgt über die Spezifikation einer gemeinsamen Verteilung der Bonitätsvariablen. Es wird angenommen, dass die Bonitätsvariablen einer  $n$ -dimensionalen Normalverteilung mit standardnormalverteilten Randverteilungen und gleicher nicht negativer Korrelation  $\rho < 1$  zwischen jeweils zwei Bonitätsvariablen folgen.<sup>10</sup> Unter dieser Annahme lassen sich die Bonitätsvariablen  $B_i$  in Abhängigkeit eines als standardnormalverteilt angenommen systematischen Risikofaktors  $F \sim N(0,1)$  und eines ebenfalls als standardnormalverteilt angenommenen unternehmensspezifischen Risikofaktors  $U_i \sim N(0,1)$  beschreiben. Das Gewicht, mit welcher der systematische Risikofaktor die Bonitätsvariable beeinflusst, ergibt sich aus der Ausfallkorrelation  $\rho$  zweier Variablen  $B_i$  und  $B_j$  ( $B_i \neq B_j$ ).

$$B_i = \sqrt{\rho} * F + \sqrt{1-\rho} * U_i \quad (2)$$

Höse und Huchens (2003)<sup>11</sup> geben basierend auf diesem Modell die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallhäufigkeit wie folgt an:

---

<sup>10</sup> Vgl. Höse, Huchens (2003), S. 142.

<sup>11</sup> Vgl. Höse, Huchens (2003): S. 145.

$$P(H = h) = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{n}{h} p_z^h (1 - p_z)^{n-h} \varphi(z) dz, \quad h = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

mit

$$p_z = N\left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}z}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (4)$$

In Gleichung (3) bezeichnet  $\varphi$  die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung und  $H$  beschreibt die zufällige Anzahl der Kreditausfälle, also der Fälle, in denen die Bonitätsvariable den Wert Eins annimmt:

$$H = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (5)$$

Aus der Anzahl der Kreditausfälle innerhalb einer Periode kann die Ausfallquote  $PD$  bestimmt werden:

$$PD = \frac{H}{n} \quad (6)$$

Für den Fall, dass die Bonitätsvariablen stochastisch unabhängig sind, also  $\rho = 0$ , folgt die zufällige Anzahl der Ausfälle einer Binomialverteilung,  $H \sim \text{Bin}(n, p)$ :

$$P(H = h) = \binom{n}{h} p^h (1 - p)^{n-h}, \quad h = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

wobei  $p_z = N(N^{-1}(p))$  der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  entspricht. Im Abhängigkeitsfall ergibt sich die Verteilung der Ausfallhäufigkeit entsprechend Gleichung (3) als eine Mischung von Binomialverteilungen. Die Mischung erfolgt über die Wahrscheinlichkeiten  $p_z$ , wobei die mischende Verteilung die Standardnormalverteilung  $\varphi(z)$  ist.

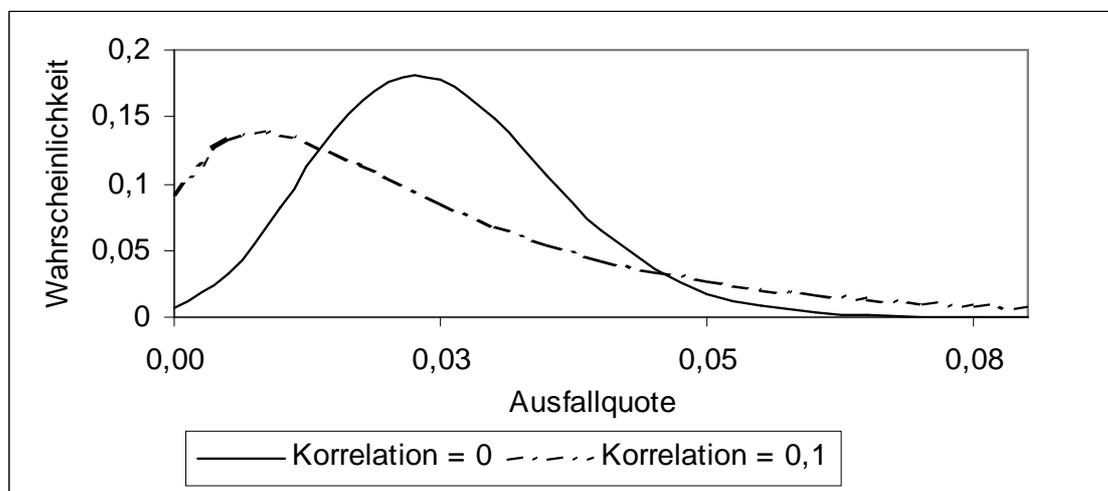
Basierend auf der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallhäufigkeit  $H$  in Gleichung (3) kann gemäß Gleichung (6) auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote bestimmt werden. In Abbildung 1 werden zwei mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ausfallquote dargestellt. Es wird jeweils angenommen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p = 2,5\%$  beträgt und 200 Kreditnehmer im Portfolio beobachtet werden. Im ersten Fall wird eine Ausfallkorrelation der Debitoren in Höhe von  $\rho = 0$  unterstellt. In diesem Fall entspricht die Verteilung der Ausfallquote einer Binomialverteilung  $\text{Bin}(200; 0,025)$ . Im zweiten Fall wird eine Ausfallkorrelation in Höhe von  $\rho = 0,1$  angenommen. Es wird deutlich, dass bei Vorliegen von Abhängigkeiten zwi-

schen den Debitoren sowohl hohe als auch niedrigere Ausfallquoten wahrscheinlicher werden.

Nachdem auf Grundlage eines Schwellenwertmodells gezeigt wurde, wie im vorliegenden Beitrag die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote eines Kreditportfolios in Abhängigkeit von Ausfallwahrscheinlichkeit und Korrelation bestimmt wird, wird im folgenden Abschnitt dargestellt, wie die Ausfallwahrscheinlichkeit bewertet werden kann.

Abbildung 1:

Verteilungen der Ausfallquote für  $p=2,5\%$ ,  $n = 200$  und  $\rho = 0$  bzw.  $\rho = 0,1$



## 2.1. Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten

Auf Grundlage von Bonitätsbewertungen können die Schuldner eines Unternehmens oder einer Bank einer Rating- oder Bonitätsklasse zugeordnet werden. Wird unterstellt, dass die Ausfälle innerhalb einer Ratingklasse unabhängig voneinander erfolgen, lässt sich die Anzahl der Ausfälle bei Kenntnis der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  wie oben dargestellt mit einer Binomialverteilung beschreiben. Ist die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Ratingklasse nicht bekannt, kann sie entsprechend Gleichung (6) auf Basis der historischen Anzahl der in dieser Klasse beobachteten Ausfälle  $H$  und der dieser Klasse zugeordneten Unternehmen  $n$  geschätzt werden.<sup>12</sup>

Diese Schätzung weist allerdings einen Stichprobenfehler auf. Das heißt, in Abhängigkeit vom Beobachtungszeitraum auf dessen Grundlage die Schätzung erfolgt, können unterschiedliche Parameterwerte ermittelt werden. Diese der Schätzung innewohnenden Unsicherheit kann durch Konfidenzintervalle zum Ausdruck gebracht werden. Ein Kon-

<sup>12</sup> Vgl. Hamerle, Rösch (2005a), S. 538, Hanson, Schuermann (2006), S. 2284, Höse, Huschens (2003), S. 144, Basel Committee on Banking Supervision RN: 447.

fidenzintervall beschreibt dabei das Intervall, welches den tatsächlichen aber unbekanntem Wert  $p$  mit einer Wahrscheinlichkeit  $1-\alpha$  abdeckt, wobei  $\alpha$  das Konfidenzniveau vorgibt (z. B. 5%).<sup>13</sup> In der Literatur werden verschiedene Konfidenzintervalle beschrieben. Als die verbreitetsten sind das Wald-, Agresti-Coull-, Clopper-Pearson-, und Jeffry-Konfidenzintervall zu nennen.<sup>14</sup> Es werden darüber hinaus Modifikationen dieser Konfidenzintervalle diskutiert, um bei ihrer Berechnung auch Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Beobachtungen berücksichtigen zu können.<sup>15</sup> Die diesen modifizierten Intervallberechnungen unterstellte Abhängigkeitsstruktur (Längsschnittabhängigkeit) entspricht allerdings nicht der im hier verwendeten Schwellenwertmodell unterstellten Querschnittabhängigkeit. Eine Verwendung dieser modifizierten Intervalle erscheint im Folgenden daher nicht sinnvoll.

*Höse und Huschens* (2003) weisen darauf hin, dass die Ausfallquote kein geeigneter Schätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  ist, wenn Abhängigkeiten vorliegen. Sie schlagen daher vor, die Ausfallwahrscheinlichkeit auf Grundlage einer Maximum-Likelihoodfunktion zu schätzen. Diese Funktion beruht auf der Mischung in Gleichung (3) und kann numerisch ermittelt werden.<sup>16</sup> Für die folgenden Untersuchungen wird daher für jede Ratingklassengröße in Abhängigkeit von der beobachteten Ausfallquote und der Korrelation zunächst die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$  für das Schwellenwertmodell numerisch bestimmt, wenn eine positive Ausfallkorrelation angenommen wird.

### 2.3. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote bei Berücksichtigung von Schätzunsicherheit

Wie in Abschnitt 2.1. dargestellt, entspricht die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote bei unabhängigen Ausfallereignissen einer Binomialverteilung, welche durch die Anzahl der Kreditnehmer in der Ratingklasse sowie der Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer parametrisiert wird. Im Folgenden wird diskutiert, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote unter Berücksichtigung der Unsicherheit bei der Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit abgeleitet werden kann.

Eine verbreitete Methode zur Quantifizierung von Unternehmensrisiken stellt die Monte-Carlo-Simulation dar.<sup>17</sup> Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode besteht darin, dass eine Risikoaggregation ohne restriktive Verteilungsannahmen erfolgen kann. Das heißt, die

---

<sup>13</sup> Vgl. *Hanson, Schuermann* (2006), S. 2285.

<sup>14</sup> Siehe zu den einzelnen Intervallen z. B. *Agresti, Coull* (1998), S. 120 ff., *Vollset* (1993), S. 809 ff., *Hanson, Schuermann* (2006), S. 2281 ff., *Brown, Cai, DasGupta* (2001), S. 101 ff.

<sup>15</sup> Vgl. z. B. *Miao, Gastwirth* (2004): S. 124 ff.

<sup>16</sup> Vgl. *Höse, Huschens* (2003): S. 145 f.

<sup>17</sup> Vgl. beispielsweise *Vose* (2005), S. 16 ff.

Bewertung des unternehmerischen Forderungsausfallrisikos unter Verwendung einer Monte-Carlo-Simulation ermöglicht es, Schätzunsicherheiten bei der Bewertung der einzelnen Risikokomponenten im Vergleich zu analytischen Lösungen verhältnismäßig einfach zu berücksichtigen. Hierfür ist es allerdings erforderlich, diese Schätzunsicherheiten durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu beschreiben. Für die Wahl solcher Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird hier auf die Idee der Konfidenzintervalle zurückgegriffen. Diesen Intervallen liegen Verteilungsannahmen zugrunde, auf deren Basis die Intervalle geschätzt werden. Im folgenden wird dargestellt, welche Verteilung hier genutzt wird, um die Unsicherheit bei der Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit einer Ratingklasse zu modellieren.

*Brown, Cai, DasGupta* (2001) empfehlen das Jeffrey-Intervall zur Schätzung von Konfidenzintervallen.<sup>18</sup> Aus diesem Grund wird hier die diesem Intervall zugrunde liegende Jeffrey-Verteilung zur Bewertung der Schätzunsicherheit gewählt. Sie weist die Dichtefunktion:

$$f_{\text{Jeffrey}}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1} dv} \quad (15)$$

auf.

Es gilt:  $\alpha = H + 1/2$  und  $\beta = n - H + 1/2$ .

Wird die Ausfallwahrscheinlichkeit durch eine Jeffrey-Verteilung beschrieben, kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallhäufigkeit durch eine gemischte Binomial-Beta-Verteilung  $Bin(n; Beta(H + 1/2; n - H + 1/2))$  modelliert werden.<sup>19</sup> Auf diese Weise fließt die Schätzunsicherheit bei der Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit in die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallhäufigkeit und damit auch in die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote ein. Abbildung 2 veranschaulicht die Wahrschein-

---

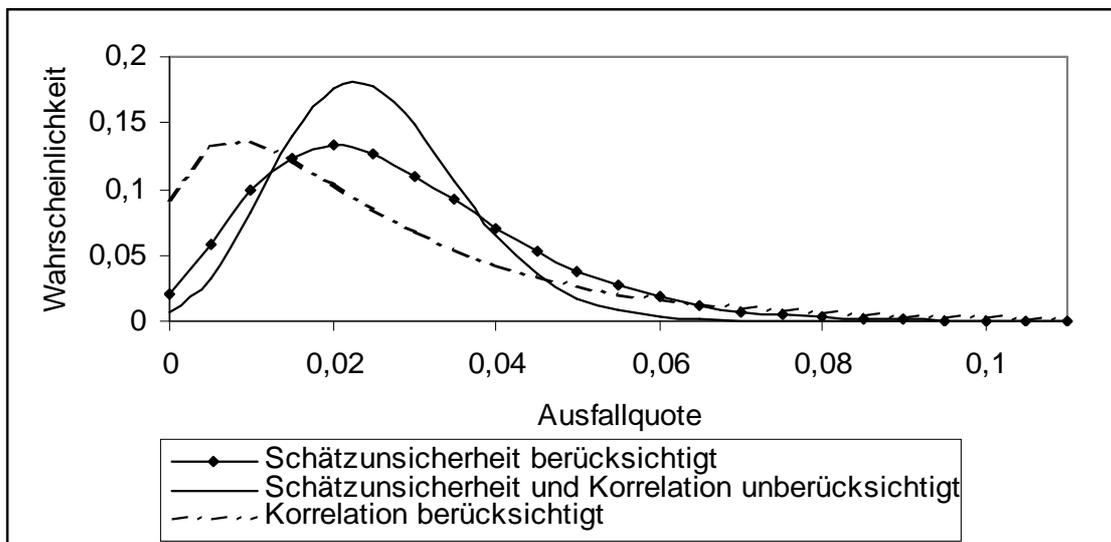
<sup>18</sup> *Brown, Cai, DasGupta* (2001), S. 101 ff. diskutieren verschiedene Konfidenzintervalle. Grundsätzlich ist festzuhalten, dass die Wahl einer geeigneten Methode zur Berechnung von Konfidenzintervallen stark von den Rahmenbedingungen abhängt. So kann eine Methode zur Intervallberechnung z. B. bei einer Stichprobengröße  $n$  und gegebenen  $p$  eine sehr hohe Abdeckwahrscheinlichkeit aufweisen. Wird die gleiche Methode auf eine Stichprobe vom Umfang  $n+1$  bei selben gegebenen  $p$  angewandt, kann sich die Abdeckwahrscheinlichkeit bereits signifikant ändern (*Brown, Cai, DasGupta* (2001), S. 102). Die Empfehlung von *Brown, Cai, DasGupta* (2001) für das Jeffrey-Intervall beruht unter anderem darauf, dass die Abdeckwahrscheinlichkeit auch für kleine  $n$  dicht am nominalen Konfidenzniveau liegt (S. 110). Als ein weitere Vorteil wird die Verbindung des Jeffrey-Intervalls zum „exakten“ Clopper-Pearson-Intervall (S.114 f.) genannt. Für weitere Diskussionen siehe auch *Agresti, A., Coull, B.A.* (1998), S. 119 ff. oder auch die Kommentare zu dem Papier von *Brown, Cai, DasGupta* (2001) von *Agresti, A., Coull, B. A.* (2001), S. 117 ff., *Casella, G.* (2001), S. 120 ff., *Corcoran, C., Mehta, C.* (2001): S. 122 ff., *Ghosh, M.* (2001): S. 124 f. und *Santner, T, J.* (2001): S. 128 ff.

<sup>19</sup> Eine solche Vorgehensweise empfiehlt beispielsweise *Vose*, S. 71.

lichkeitsverteilung der Ausfallquote eines Portfolios. Es wird angenommen, dass dem Portfolio 200 Kreditnehmer zugeordnet werden und dass in der Vergangenheit eine Ausfallquote von 2,5% (entspricht 5 Ausfällen) beobachtet wurde. Die empirische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote unter Berücksichtigung von Schätzunsicherheit wird durch eine Monte-Carlo-Simulation auf Grundlage der oben dargestellten gemischten Binomial-Betaverteilung ermittelt (100.000 Ziehungen). Zum Vergleich wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote ohne Berücksichtigung von Schätzunsicherheit und Korrelation sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote unter Vernachlässigung der Schätzunsicherheit aber unter Berücksichtigung einer Korrelation in Höhe von  $\rho = 0,1$  dargestellt. Es wird deutlich, dass eine Vernachlässigung sowohl von Schätzunsicherheit als auch von Korrelation zu einer verhältnismäßig schmalen Verteilung führt. Das heißt, sowohl Korrelation als auch Schätzunsicherheit erhöhen die Wahrscheinlichkeit einer hohen Ausfallquote dieses Portfolios. Im hier dargestellten Fall ist die Verteilung bei Berücksichtigung von Korrelation im oberen Bereich etwas breiter als die Verteilung bei Berücksichtigung von Schätzunsicherheit.

Abbildung 2:

Verteilungen der Ausfallquote für  $p=2,5\%$ ,  $n = 200$  unter Berücksichtigung von Schätzunsicherheit und Korrelation



### 3. Vergleich von Ausfallquoten in Abhängigkeit von Schätzunsicherheit und Korrelation

In Abschnitt 2 wurde dargestellt, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote unter Berücksichtigung von Korrelation beziehungsweise unter Berücksichtigung von Schätzunsicherheit bestimmt werden kann. Im Folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass die Schätzunsicherheit unter bestimmten Rahmenbedingungen das Forderungsausfallrisiko stärker bestimmt als die Korrelation.

Es wird im Folgenden angenommen, dass die Vernachlässigung der Schätzunsicherheit oder der Korrelation jeweils eine Unterschätzung des tatsächlichen Verlustpotentials des Portfolios zu Folge hat, da eine Risiko erhöhende Komponente vernachlässigt wird. Demnach unterschätzt der Ansatz, der zu einem kleineren VaR führt, den tatsächlichen Eigenkapitalbedarf stärker. Damit ist jeweils der Ansatz zu bevorzugen, der zu einem höheren VaR bei gegebenem Konfidenzniveau führt. Im Folgenden bezeichnet  $VaR_\alpha^K$  den Value at Risk der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote unter Berücksichtigung von Korrelation zum Konfidenzniveau  $\alpha$  (z. B. 99%).  $VaR_\alpha^{SU}$  bezeichnet den Value at Risk der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausfallquote unter Berücksichtigung von Schätzunsicherheit zum Konfidenzniveau  $\alpha$ . Zur einfacheren Darstellung wird für alle Kredite ein Loss given Default und ein Exposure at Default jeweils in Höhe von Eins angenommen. Damit entspricht der Quantilswert der Ausfallquote dem Value at Risk der Verlustverteilung des Kreditportfolios.

Empirische Untersuchungen zur Höhe der Abhängigkeiten zwischen Kreditnehmern legen eine geringe Korrelation  $\rho < 0,1$  nahe, wobei Abhängigkeiten von unter 4% am plausibelsten erscheinen.<sup>20</sup> Im Einzelfall kann die Korrelation im Forderungsportfolio eines Unternehmens natürlich auch höher sein. Hier soll allerdings eine Fokussierung auf eine Korrelation  $0,01 \leq \rho \leq 0,1$  erfolgen, da diese Größenordnung aufgrund der empirischen Untersuchungen im Bankensektor als relevant erscheint und damit vermutlich auch die relevante Größenordnung für Abhängigkeiten von Forderungen widerspiegelt. Der  $VaR_\alpha^K$  wird aus Gleichung (3) abgeleitet, indem die minimale Ausfallanzahl  $h^{VaR}$  bestimmt wird, für die gilt:

$$\sum_{h=0}^{h^{VaR}} \int_{-\infty}^{\infty} \binom{n}{h} p_z^h (1-p_z)^{n-h} \varphi(z) dz \geq \alpha \quad (16)$$

Die Bestimmung der minimalen Ausfallzahl  $h^{VaR}$  für welche Gleichung (16) gilt, erfolgt hier iterativ. Das heißt,  $h^{VaR}$  wird solange erhöht, bis obige Gleichung (16) erfüllt ist. Der  $VaR_\alpha^{SU}$  wird mittels Monte-Carlo-Simulation aus der in Abschnitt 2.3 dargestellten

<sup>20</sup> Vgl. Dietsch, Petey (2004): S. 780, Hamerle, Liebig, Rösch (2003): S. 79, de Servigny (2004): S. 186 ff.

gemischten Binomial-Beta-Verteilung  $Bin(n; Beta(H + 1/2; n - H + 1/2))$  abgeleitet. Hierfür erfolgen für jede Ratingklassengröße 100.000 Ziehungen. Ab einer Ratingklassengröße von 999 Kreditnehmer werden die Binomial- und die Beta-Verteilung aus Vereinfachungsgründen durch Normalverteilungen approximiert:<sup>21</sup>

$$Beta(\alpha, \beta) \square N\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}}\right) \quad (17)$$

$$Bin(n, PD) \square N(nPD, \sqrt{nPD(1 - PD)}) \quad (18)$$

Abbildung 3 veranschaulicht die Entwicklung von  $VaR_{\alpha}^{SU}$  und  $VaR_{\alpha}^K$  zum Signifikanzniveau  $\alpha = 95\%$ . Die Kurven geben jeweils die prognostizierte Ausfallquote des Portfolios an, die nur mit einer Restwahrscheinlichkeit  $\alpha$  noch überschritten wird. Für die Prognose der Verteilung der Ausfallquote wird unterstellt, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer einer Ratingklasse auf Grundlage historischer Beobachtungen geschätzt wird. Das heißt, die Ausfallwahrscheinlichkeit bei einer Berücksichtigung von Schätzunsicherheit wird durch die Beta-Verteilung aus Gleichung (15) simuliert, welche durch historische Beobachtungen parametrisiert wird. Bei einer Berücksichtigung von Ausfallkorrelationen wird die Ausfallwahrscheinlichkeit durch eine Maximum-Likelihoodfunktion numerisch bestimmt, in welche ebenfalls historische Beobachtungen einfließen (siehe Abschnitt 2.2.). In den einzelnen Simulationen werden demnach neben dem Signifikanzniveau auch die Ratingklassengröße  $n$  und die beobachtete Anzahl Ausfälle  $H$  vorgegeben. Die Anzahl der Ausfälle  $H$  wird berechnet, indem der maximale Wert für  $H$  in Abhängigkeit einer gegebenen Ausfallquote  $PD_{geg}$  bestimmt wird, für den gilt:  $\frac{H}{n} \leq PD_{geg}$ . Wegen der Ganzzahligkeitsrestriktion für  $H$  bleibt die beobachtete Anzahl von Ausfällen in einzelnen Intervallen konstant, während die berechnete Ausfallquote in diesen Intervallen kontinuierlich abnimmt und an den Intervallgrenzen (bei Erhöhung von  $H$ ) auf ein höheres Niveau springt.<sup>22</sup> Auf Grund dieser gewählten Vorgehensweise ergibt sich der „gezackte“ Verlauf der Kurve von  $VaR_{\alpha}^K$  und  $VaR_{\alpha}^{SU}$ .<sup>23</sup> Der Vorteil besteht darin, dass Ratingklassen gebildet werden kön-

21 Für die in dieser Arbeit untersuchten Fälle werden die Voraussetzungen für diese Approximationen ab einer Ratingklassengröße von 999 Debitoren als hinreichend erfüllt angesehen, siehe auch Vose (2005), S. 132, S.139.

22 Z. B. für  $PD_{geg} = 2,5\%$  beträgt die Intervalllänge 40 Debitoren.

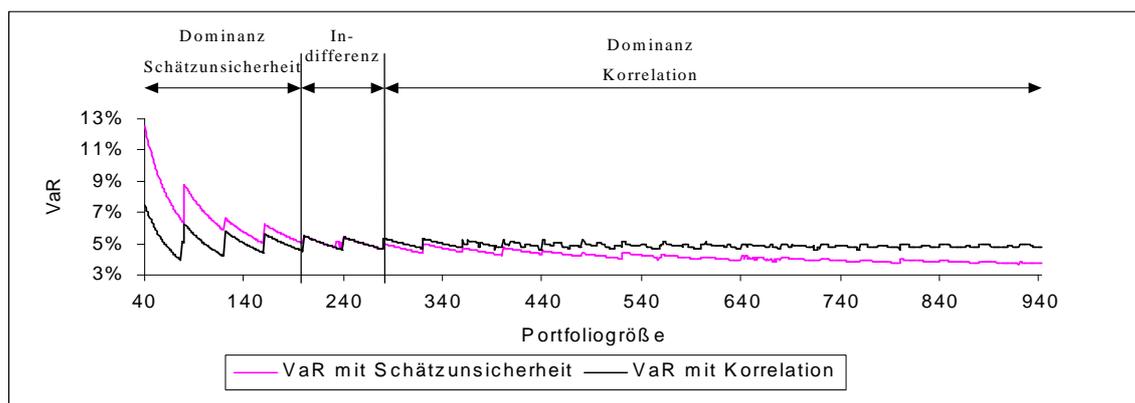
23 Die Binomialverteilung ist eine diskrete Verteilung und setzt eine Natürliche Zahl zur Beschreibung der Ausfälle  $H$  voraus. Das heißt, grundsätzlich ist nicht für jede Ratingklassengröße eine exakte Ausfallquote von z. B. 2,5% beobachtbar. Es liegen also verschiedenen Ratingklassengrößen identische Ausfallzahlen  $H$  zugrunde. Hieraus ergeben sich für einzelne Intervalle stetig abnehmende Ausfallquoten. Bei Erhöhung der Ausfallanzahl  $H$  zu Beginn eines solchen Intervalls, ergibt sich eine sprunghafte Erhöhung der berechneten Ausfallquote, wodurch sich der gezackte Verlauf der Kurve ergibt.

nen, die für alle Ratingklassengrößen eine annähernd identische Bonität aufweisen. In Abbildung 3 wird  $PD_{geg} = 2,5\%$  angenommen. Es wird weiter eine Ausfallkorrelation von  $\rho = 0,03$  angenommen.

Aufgrund des unstetigen Verlaufs der zwei Kurven ergeben sich mehrere Schnittpunkte. Erstmals schneiden sich beide Kurven bei einer Ratingklassengröße von 200 Kreditnehmern. Letztmals wird ein Schnittpunkt bei 280 Kreditnehmern ermittelt. Das heißt, bei einer Klassengröße bis zu 200 Kreditnehmern wird der tatsächliche Eigenkapitalbedarf bei Berücksichtigung von Schätzunsicherheit weniger unterschätzt als es bei einer Berücksichtigung von Korrelation der Fall wäre. Ab einer Ratingklassengröße von über 280 Kreditnehmern kommt hingegen der Korrelation eine höhere Bedeutung zu. Für den Bereich zwischen 200 und 280 Kreditnehmern ist keine eindeutige Aussage möglich. Um dennoch eine Entscheidung treffen zu können wird hier vorgeschlagen, die beiden Kurven mittels gleitendem Durchschnitt zu glätten.<sup>24</sup> Der Schnittpunkt der geglätteten Kurven könnte zur Bestimmung einer Abgrenzung zwischen den beiden Konzepten genutzt werden. Die Wahl der Anzahl der Nachbarn, die bei der Berechnung des gleitenden Durchschnittes berücksichtigt werden, ist allerdings willkürlich. Das heißt, der Schnittpunkt der geglätteten Kurven gibt nur eine Idee für eine Abgrenzung zwischen beiden Konzepten wieder.<sup>25</sup> Abbildung 4 zeigt die geglätteten Kurven aus Abbildung 3. Der Schnittpunkt liegt bei einer Ratingklassengröße von 247 Kreditnehmern. Das heißt, bis zu dieser Klassengröße ist bei den vorgegebenen Rahmenbedingungen und der definierten Entscheidungsheuristik eine Berücksichtigung der Schätzunsicherheit zu präferieren.

Abbildung 3:

Vergleich von  $VaR_{\alpha}^{SU}$  und  $VaR_{\alpha}^K$  der Verteilungen der Ausfallquote bei  $PD_{geg} = 2,5\%$ ,  $\rho = 0,03$  und  $\alpha = 95\%$



<sup>24</sup> Hier erfolgte die Glättung indem der gleitende Durchschnitt jeweils aus dem betrachteten Wert sowie 40 Vorgängern und 40 Nachfolgern bestimmt wird.

<sup>25</sup> Alternativ könnte beispielsweise auch der Mittelwert zwischen dem größten und dem kleinsten Schnittpunkt gewählt werden. Dabei würde allerdings vernachlässigt, dass der Anstieg der Kurve

Abbildung 4:

Vergleich von  $VaR_{\alpha}^{SU}$  und  $VaR_{\alpha}^K$  der Verteilungen der Ausfallquote (gleitender Durchschnitt) bei  $PD_{geg} = 2,5\%$ ,  $\rho = 0,03$  und  $\alpha = 95\%$

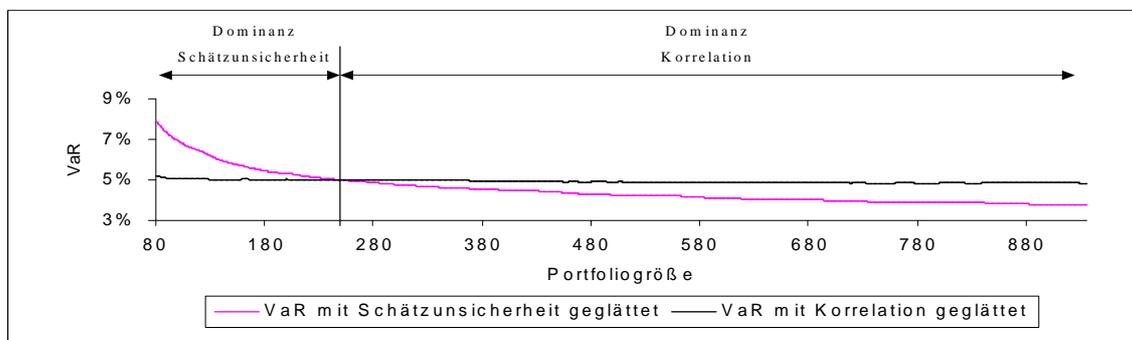


Tabelle 1 und Tabelle 2 zeigen für verschiedene Ausfallkorrelationen den kleinsten und größten Schnittpunkt als auch den Schnittpunkt<sup>26</sup> der geglätteten Kurven. Dabei wird zwischen den Konfidenzniveaus  $\alpha = 95\%$ ,  $\alpha = 97,5\%$ ,  $\alpha = 99\%$  und  $\alpha = 99,9\%$  unterschieden. In Tabelle 1 wird jeweils eine Ausfallquote in Höhe von  $PD_{geg} = 2,5\%$  und in Tabelle 2 in Höhe von  $PD_{geg} = 1\%$  vorgegeben. Die kleinsten untersuchten Portfolios weisen in Tabelle 1 eine Größe von 40 und in Tabelle 2 eine Größe von 100 Kreditnehmern auf.

Die Ergebnisse verdeutlichen, dass der Schnittpunkt der beiden Kurven sowohl von der Ausfallquote, also von der Bonität der untersuchten Ratingklasse, als auch von der Ausfallkorrelation abhängen. So sinkt mit steigender Ausfallkorrelation die Ratingklassengröße, bei der ein Wechsel von einem Modell, welches Schätzunsicherheit berücksichtigt, zu einem Modell, welches Ausfallkorrelation einbezieht, sinnvoll ist. Abbildung 5 veranschaulicht diesen Zusammenhang. Liegt in Abbildung 5 die tatsächliche Ratingklassengröße bei gegebener Ausfallkorrelation unterhalb der unteren Kurve (kleinster Schnittpunkt), so ist ein Modell, welches Schätzunsicherheit berücksichtigt, vorzuziehen. Liegt die tatsächliche Ratingklassengröße über der oberen Kurve (größter Schnittpunkt), dann ist eine Berücksichtigung der Ausfallkorrelation sinnvoll. Für Ratingklassengrößen, die zwischen den beiden äußeren Kurven liegen, ist keine eindeutige Aussage möglich. Als Anhaltspunkt könnte jedoch, wie hier dargestellt, die Kurve die-

$VaR_{\alpha}^{SU}$  mit zunehmender Ratingklassengröße abnimmt, daher wird hier die Verwendung von gleitenden Durchschnitten vorgeschlagen.

26 Da die Wahl der Anzahl der berücksichtigten Nachbarn (hier jeweils 80) bei der Bestimmung des gleitenden Durchschnitts rein willkürlich ist, lässt sich nicht ausschließen, dass auch die geglätteten Kurven mehrere Schnittpunkte aufweisen. In diesem Fall könnte die Anzahl der berücksichtigten Nachbarn erhöht werden, um die Anzahl der Schnittpunkte auf Eins zu reduzieren. Da der Schnittpunkt der Kurven der gleitenden Durchschnitte hier allerdings nur einen Eindruck für einen möglichen Wechsel zwischen den Modellen vermitteln soll, wird auf solche Anpassungen verzichtet.

Tabelle 1:

Schnittpunkte von  $VaR_{\alpha}^{SU}$  und  $VaR_{\alpha}^K$  für  $PD_{geg} = 2,5\%$ <sup>27</sup>

Korrelation	VaR für $\alpha = 95\%$			VaR für $\alpha = 97,5\%$		
	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt
0,01	556	970	744	560	920	747
0,02	230	474	398	282	440	387
0,03	200	280	247	164	277	244
0,04	123	239	166	160	222	188
0,05	122	200	159	139	199	157
0,06	122	145	137	120	158	136
0,07	120	120	126	92	131	117
0,08	86	120	111	80	120	100
0,09	80	120	99	80	108	97
0,1	80	120	99	80	80	88
Korrelation	VaR für $\alpha = 99\%$			VaR für $\alpha = 99,9\%$		
	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt
0,01	600	880	716	594	799	697
0,02	281	410	342	293	400	337
0,03	205	279	245	195	262	222
0,04	131	199	176	142	199	164
0,05	123	158	143	120	153	131
0,06	80	152	112	98	120	113
0,07	80	119	101	80	107	99
0,08	80	88	87	80	80	86
0,09	80	80	83	67	80	74
0,1	68	80	73	54	80	66

nen, welche die Schnittpunkte der gleitenden Durchschnitte abbildet. Das heißt, bei Vorliegen geringer Abhängigkeiten ist ein verhältnismäßig großes Portfolio erforderlich, um eine Berücksichtigung von Korrelation der Berücksichtigung von Schätzunsicherheit vorzuziehen. So wäre zum Beispiel für die Risikobewertung einer Ratingklasse mit bis zu von 744 Kreditnehmern ein Modell zu bevorzugen, welches Schätzunsicherheit berücksichtigt, wenn eine Ausfallquote von  $PD_{geg} = 2,5\%$  und eine Ausfallkorrelation von

<sup>27</sup> Durch die Glättung der Kurven bei der jeweils 40 Vorgänger und Nachfolger einbezogen werden, ergibt sich als kleinster möglicher Schnittpunkt der geglätteten Kurven jeweils eine Forderungsportfoliogröße von 80 Kreditnehmern. Um auch kleinere Schnittpunkte erfassen zu können, wurde in Kreditportfolios mit 60 bis 80 Kreditnehmern eine Glättung vorgenommen, bei der jeweils nur 20 Vorgänger und 20 Nachfolger berücksichtigt wurden.

$\rho = 0,01$  beobachtet sowie der Value at Risk zum Signifikanzniveau  $\alpha = 95\%$  betrachtet wird. Würde der selben Ratingklasse hingegen eine Ausfallkorrelation von  $\rho = 0,05$  zugrunde liegen, dann wäre ein Modell, welches Schätzunsicherheit einbezieht, nur bis zu einer Klassengröße von 159 Kreditnehmern zu bevorzugen.

Tabelle 2:

Schnittpunkte von  $VaR_{\alpha}^{SU}$  und  $VaR_{\alpha}^K$  für  $PD_{geg} = 1\%$

	VaR für $\alpha = 95\%$			VaR für $\alpha = 97,5\%$		
Korrelation	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt
0,01	944	1807	1241	961	1631	1246
0,02	622	1026	824	436	899	719
0,03	301	733	572	406	684	493
0,04	301	596	340	300	494	400
0,05	298	365	307	211	375	299
0,06	212	299	287	200	298	280
0,07	200	299	240	200	292	216
0,08	200	299	237	200	199	201
0,09	188	269	210	143	199	193
0,1	161	200	191	107	195	180
	VaR für $\alpha = 99\%$			VaR für $\alpha = 99,9\%$		
Korrelation	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt	Kleinster Schnittpunkt	Größter Schnittpunkt	Gleitender Durchschnitt
0,01	1011	1508	1145	1000	1225	1027
0,02	543	895	719	523	799	635
0,03	329	572	437	330	480	419
0,04	229	431	370	291	399	306
0,05	203	368	305	200	286	241
0,06	203	300	262	200	275	206
0,07	200	287	217	200	200	193
0,08	136	200	186	109	200	183
0,09	101	200	160	104	199	139
0,1	100	200	121	100	123	121

Weiterhin deuten die Ergebnisse darauf hin, dass das gewählte Konfidenzniveau des Value at Risk einen geringen Einfluss auf die Entscheidungsfindung hat. Abbildung 6 veranschaulicht die Schnittpunkte von  $VaR_{\alpha}^{SU}$  und  $VaR_{\alpha}^K$  in Abhängigkeit vom gewählten Konfidenzniveau  $\alpha$  für den Fall  $PD_{geg} = 2,5\%$  und  $\rho = 0,03$ . Sowohl Abbildung 6 als auch die Ergebnisse in den Tabellen 1 und 2 deuten darauf hin, dass die Schnittpunkte der beiden Kurven mit zunehmenden Konfidenzintervall geringfügig sinken. Das heißt, wird ein hohes Sicherheitsniveau angestrebt, kann ein Wechsel von einem Modell

mit Schätzunsicherheit zu einem Modell mit Korrelation bereits in etwas kleineren Ratingklassen erfolgen.

Abbildung 5:

Schnittpunkte von  $Var_{\alpha}^{SU}$  und  $Var_{\alpha}^K$  für  $PD_{geg} = 2,5\%$ ,  $\alpha = 95\%$

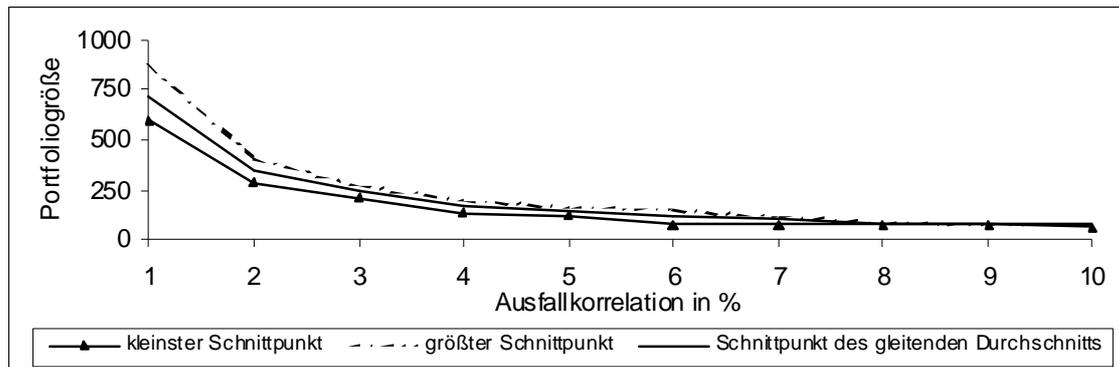
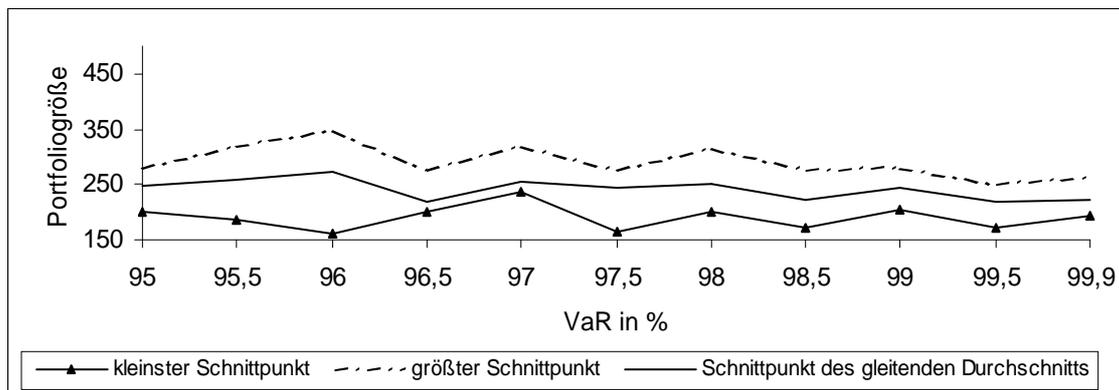


Abbildung 6:

Schnittpunkte von  $Var_{\alpha}^{SU}$  und  $Var_{\alpha}^K$  für  $PD_{geg} = 2,5\%$ ,  $\rho = 0,0328$



Der Schnittpunkt der beiden Kurven erhöht sich in den hier dargestellten Fällen außerdem, wenn die in einer Ratingklasse beobachtete Ausfallquote sinkt. Das weist darauf hin, dass in Risikoklassen mit Kreditnehmern guter Bonität größere Ratingklassen erforderlich sind, um die Korrelation der Schätzunsicherheit vorzuziehen, als in Risikoklassen mit geringerer Bonität. So schneiden sich zum Beispiel die gleitenden Durchschnitte der beiden Kurven bei einer unterstellten Abhängigkeit von  $\rho = 0,01$  und einem Signifikanzniveau  $\alpha = 95\%$  in Tabelle 1 bereits bei einer Klassengröße von 744 Kreditnehmern, während in Tabelle 2 dieser Schnittpunkt bei 1241 Kreditnehmern liegt.

28 Der nicht monotone Verlauf der Kurven ist auf den „gezackten“ Verlauf von  $Var_{\alpha}^{SU}$  und  $Var_{\alpha}^K$  zurückzuführen.

## 4. Zusammenfassung

Die Frage, ob Schätzunsicherheit oder Korrelation bei der Bewertung der Forderungs- bzw. Kreditausfallwahrscheinlichkeit berücksichtigt werden sollte, wird in den gängigen Kreditportfoliomodellen der Banken derzeit zu Gunsten der Korrelation beantwortet. Im vorliegenden Beitrag wurde anhand von Fallstudien gezeigt, dass bei Vorliegen einer hohen Korrelation (z.B.  $\rho = 0,1$ ) oder bei großen Ratingklassen ( $n > 1.500$ ) diese Entscheidung zu rechtfertigen ist. Empirische Studien deuten allerdings darauf hin, dass Ausfallkorrelationen von über 10% eher ungewöhnlich sind. Vielmehr scheinen deutlich geringere Abhängigkeiten in der Realität aufzutreten. Unternehmen können im Vergleich zu Banken auch über relativ kleine Ratingklassen verfügen ( $n < 500$ ). Für solche Ratingklassen kann durch eine bevorzugte Verwendung von Modellen, die eine Ausfallkorrelation einbeziehen, der tatsächliche Eigenkapitalbedarf stärker unterschätzt werden, als es bei einer Verwendung von Modellen, die Schätzunsicherheit berücksichtigen, der Fall wäre. Die Entscheidung für eine Modellvariante wird dabei maßgeblich durch die Höhe der Korrelation, der Ratingklassengröße, der Bonität der Ratingklasse und im geringen Umfang vom gewählten Konfidenzniveau des Value at Risk determiniert.

Da mit beiden Modellvarianten das tatsächliche Kreditportfoliorisiko unterschätzt wird, kann keine dieser beiden Varianten endgültig befriedigend sein. Ziel sollte es daher sein, Modelle zu entwickeln, welche sowohl Ausfallkorrelation als auch Schätzunsicherheit einbeziehen. Die derzeit diskutierten Verfahren zur Bewertung der Schätzunsicherheit, basierend auf Konfidenzintervallen, sind dafür allerdings nicht geeignet.

Hier konnte gezeigt werden, dass die Vernachlässigung der Schätzunsicherheit zugunsten der Korrelation in kleinen Ratingklassen nicht ungeprüft erfolgen sollte, besonders dann nicht, wenn diese Klassen Kunden guter Bonität zusammenfassen und nur geringe Abhängigkeiten angenommen werden können. In der praktischen Risikobewertung sollte daher zunächst überprüft werden, ob mit einem Modell zur Bewertung des Kreditausfallrisikos, welches Schätzunsicherheit berücksichtigt, der unerwartete Verlust und damit der Eigenkapitalbedarf eines Forderungsportfolios genauer eingeschätzt wird als mit einem Modell, welches Abhängigkeiten zwischen den Debitoren einbezieht.

## Literatur

- Agresti, A.; Coull, B. A.* (1998): „Approximate is Better than “Exakt” for Interval Estimation of Binomial Proportions“ in *The American Statistician*, Vol. 52, No. 2, 1998, S. 119-126.
- Agresti, A.; Coull, B. A.* (2001): „[Interval Estimation for a Binomial Proportion]: Comment“ in *Statistical Science*, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 117-120.
- Basel Committee on Banking Supervision* (2005): „International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards A Revised Framework“, Basel, 2005.
- Brown, L. D.; Cai, T. T.; DasGupta, A.* (2001): „Interval Estimation for a Binomial Proportion“ in *Statistical Science*, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 101-117.
- Casella, G.* (2001): „[Interval Estimation for a Binomial Proportion]: Comment“ in *Statistical Science*, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 120-122.
- Christensen, J. H. E.; Hansen, E.; Lando, D.* (2004): „Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities“ in *Journal of Banking & Finance* 28, 2004, S. 2575-2602.
- Corcoran, C.; Mehta, C.* (2001): „[Interval Estimation for a Binomial Proportion]: Comment“ in *Statistical Science*, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 122-124.
- de Servigny, A.; Renault, O.* (2004): „Measuring and Managing Credit risk“, New York, 2004, McGraw-Hill.
- Dietsch, M.; Petey, J.* (2004): „Should SME exposures be treated as retail or corporate exposure? A comparative analysis of default probabilities and asset correlations in French and German SMEs“ in *Journal of Banking & Finance* 28, 2004, S. 773-788.
- Ghosh, M.* (2001): „[Interval Estimation for a Binomial Proportion]: Comment“ in *Statistical Science*, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 124-125.
- Hamerle, A.; Liebig, T.; Rösch, D.* (2003): „Benchmarking asset correlations“ in *Risk*, Vol. 16, November 2003, S. 77-81.
- Hamerle, A.; Rösch, D.* (2005a): „Backtesting von Ausfallwahrscheinlichkeiten und «Risiko<sup>2</sup>»“ in *Die Unternehmung*, 59. Jg., Nr. 6, 2005, S. 535-546.
- Hamerle, A.; Rösch, D.* (2005b): „Bankinterne Parametrisierung und empirischer Vergleich von Kreditrisikomodellen“, in *Die Betriebswirtschaft*, 65. Jg., Nr. 2, 2005, S. 179-196.

- Hanson, S.; Schuermann, T.* (2006): „Confidence intervals for probabilities of default“ in *Journal of Banking & Finance* 30, 2006, S. 2281-2301.
- Höse, S.; Huschens, S.* (2003): „Sind interne Ratingsysteme im Rahmen von Basel II evaluierbar? Zur Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit durch Ausfallquoten“, in *ZfB*, 73. Jg. H. 2, 2003, S. 139-168.
- Jorion, P.* (1996): „Risk<sup>2</sup>: Measuring the Risk in Value at Risk“, in *Financial Analysts Journal*, Nov./Dec., 1996, S. 47-56.
- Lawrenz, J.* (2006): „Assessing in estimation uncertainty of default probabilities“, Innsbruck, 2006, S. 1-19.
- Löffler, G.* (2003): „The effects of estimation error on measures of portfolio credit risk“, in *Journal of Banking & Finance*, 27, 2003, 1427-1453.
- Miao, W.; Gastwirth, J. L.* (2004): „The Effect of Dependence on Confidence Intervals for a Population Proportion“, in *American Statistical Association*, Vol. 58, Nr. 2, 2004, S.124-130.
- Pluto, K.; Tasche, D.* (2005): „Thinking positively“ in *Risk*, August 2005, S. 72-78.
- Santner, T. J.* (2001): „[Interval Estimation for a Binomial Proportion]: Comment“ in *Statistical Science*, Vol. 16, No. 2, 2001, S. 126-128.
- Stein, R. M.* (2003) „Are the probabilities right?“ Technical report #030124, Moody's KMV
- Vollset, S. E.* (1993): „Confidence Intervals for a Binomial Proportion“ in *Statistics in Medicin*, Vol. 12, S. 809-824, 1993.
- Vose, D.* (2005): „Risk analysis A quantitative guide“, 2. korrigierte Auflage, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 2005, John Wiley and Sons, LTD.