

Heidorn, Thomas; Schmidt, Wolfgang M.

Working Paper

LIBOR in Arrears (Nachträgliche LIBOR-Feststellung)

Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft, No. 6

Provided in Cooperation with:

Frankfurt School of Finance and Management

Suggested Citation: Heidorn, Thomas; Schmidt, Wolfgang M. (1998) : LIBOR in Arrears (Nachträgliche LIBOR-Feststellung), Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft, No. 6, Hochschule für Bankwirtschaft (HfB), Frankfurt a. M., <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:101:1-20080702131>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/27830>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Nr. 6

LIBOR in Arrears
(Nachträgliche LIBOR-Feststellung)

Thomas Heidorn*
Wolfgang Schmidt

Mai 1998

Autoren:

Prof. Dr. Thomas Heidorn
Bankbetriebslehre
Hochschule für Bankwirtschaft
Frankfurt/M.
heidorn@hfb.de

Dr. Wolfgang Schmidt
Global Markets
OTC-Derivate
Deutsche Morgan Grenfell
Frankfurt/M.
W_Schmidt@compuserve.com

* Unserer besonderer Dank gilt Stephan Diekmann für wertvolle Kommentare

Herausgeber:

Hochschule für Bankwirtschaft
Private Fachhochschule der BANKAKADEMIE
Sternstraße 8 • 60318 Frankfurt/M.
Tel.: 069/95946-16 • Fax: 069/95946-28

LIBOR in Arrears

(Nachträgliche LIBOR-Feststellung)

Schlüsselbegriffe:

LIBOR in Arrears, Floater-Bewertung, Zinsswaps

Inhalt:

1	Einleitung.....	3
2	LIBOR in Arrears-Zahlungen.....	3
2.1	Bewertung eines Floaters.....	4
2.2	Bewertungsprobleme bei „unnatürlichen“ Zahlungszeitpunkten.....	6
3	Bewertung von Konvexitätsunterschieden.....	8
3.1	Adjustierung der Konvexität.....	9
3.2	Varianz einer Forward Rate	10
4	Beispielbewertung von LIBOR in Arrears-Zahlungen.....	12
	Anhang	14
	Literatur	15

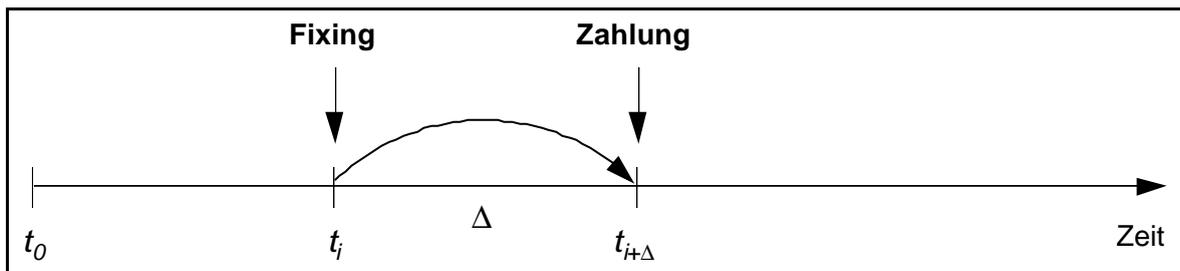
1 Einleitung

In den letzten Jahren hat sich eine Vielzahl von Produkten entwickelt, bei denen der Zahlungszeitpunkt und die Feststellung des Zinssatzes von den „natürlichen“ Gewohnheiten des Marktes abweichen. Ein typisches Instrument sind LIBOR-Zahlungen, deren Zinsfeststellung nicht am Anfang, sondern am Ende der Periode erfolgt. Dies kann für den Investor (Kreditnehmer) vorteilhaft sein, da sich die Zahlungen bei steigenden (fallenden) Zinsen schneller an die prognostizierte Entwicklung anpassen. Entsprechend gibt es inzwischen im Finanzmarkt viele variable Zahlungsreihen, z.B. Zinsswaps und Floater, die den LIBOR nachträglich für die vergangene Periode feststellen. Jedoch reichen die klassischen Methoden für symmetrische Instrumente bei der Bewertung nicht aus (Bohn; Meyer-Bullerdiek 1997). Im ersten Teil wird daher gezeigt, warum bei „unnatürlichen“ Zahlungsreihen eine Adjustierung (convexity adjustment) vorgenommen werden muß. Bisher sind Bewertungsansätze mit sehr komplexen Modellen entwickelt worden (Li; Raghava 1996; Schmidt 1996). In diesem Aufsatz wird stattdessen eine relativ einfache Lösungsformel entwickelt, für deren Herleitung nur Standardverfahren der Statistik notwendig sind.

2 LIBOR in Arrears-Zahlungen

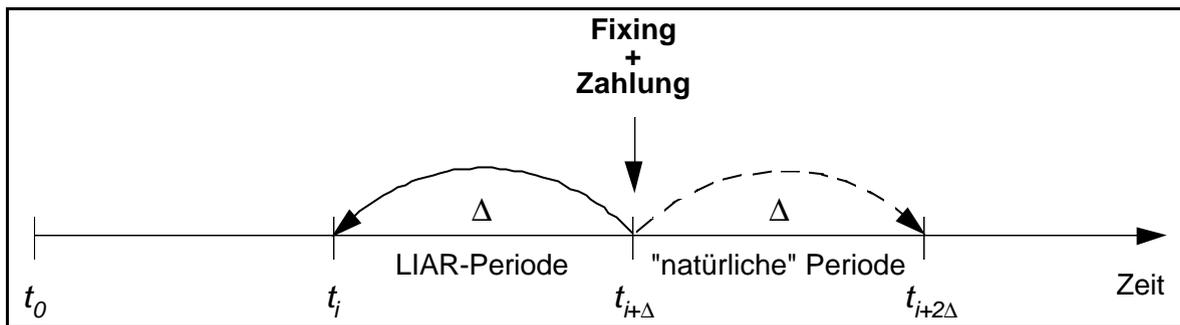
Betrachten wir zunächst einen normalen LIBOR-Strom. In jeder Periode wird zum Zeitpunkt t_i der Zinssatz festgestellt und nach einem Zeitraum Δ in $t_{i+\Delta}$ gezahlt.

Abbildung: Zahlung bei einem klassischen LIBOR



Bei einem LIBOR in Arrears- (LIAR-) Produkt verschiebt sich die Zinsfeststellung. Hier wird in $t_{i+\Delta}$ der Zinssatz für die folgende Periode festgestellt, aber für die vergangene Periode gezahlt:

Abbildung: LIBOR in Arrears-Cash Flow



2.1 Bewertung eines Floaters

Die Bewertung einer Floating Rate Note (FRN, Floater) kann nach dem Diskontierungs- oder dem Duplizierungsverfahren erfolgen. Beim zweiten Verfahren wird durch Aufnahme und Anlage am Geldmarkt die Cash Flow-Struktur des Floaters dupliziert. Diese Analyse führt zu der Erkenntnis, daß der Wert eines Floaters nur von dem zuletzt gefixten Kupon abhängt. Im folgenden werden Adressenrisiken ausgeschlossen, so daß ein Floater mit einem halbjährlichen Kupon des 6-Monats-LIBOR (ohne Spread) beim Fixing 100% wert sein muß.

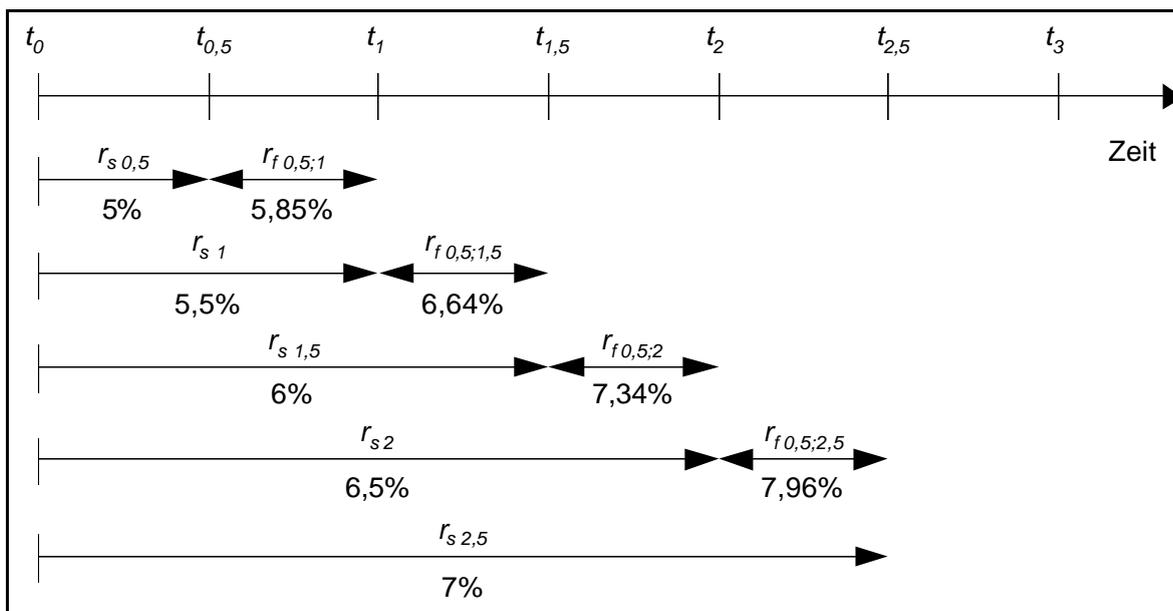
Im folgenden wird die Bewertung nach dem Diskontierungsverfahren vorgenommen. Dabei werden alle relevanten zukünftigen Kupons mit Hilfe der Forwardsätze festgestellt und dann auf heute abgezinst. Dafür werden die Spot Rates als Geldmarktzinssätze r_{si} definiert, die mit linearer Verzinsung von heute bis zum Zeitpunkt i laufen. (Im weiteren wird mit einer vereinfachten Geldmarktusance gearbeitet, so daß ein halbes Jahr mit 0,5 gerechnet werden kann.) Aus der Arbitragebedingung für den Forwardsatz folgt: Die Anlage zum Spotzins für eine lange Periode muß zum gleichen Ergebnis führen wie die Sequenz der Anlage in einen kürzeren Spotzins und der Verlängerung mit dem entsprechenden Forward. Dieser wird mit seinem Endzeitpunkt i und der Periodenlänge Δ als $r_{\Delta;i}$ bezeichnet.

$$(1 + r_{si} \cdot (t_i - t_0)) \cdot (1 + r_{\Delta;i+\Delta} \cdot \Delta) = (1 + r_{si+\Delta} \cdot (t_{i+\Delta} - t_0))$$

$$r_{\Delta;i+\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left(\frac{(1 + r_{si+\Delta} \cdot (t_{i+\Delta} - t_0))}{(1 + r_{si} \cdot (t_{i+\Delta} - t_0))} - 1 \right)$$

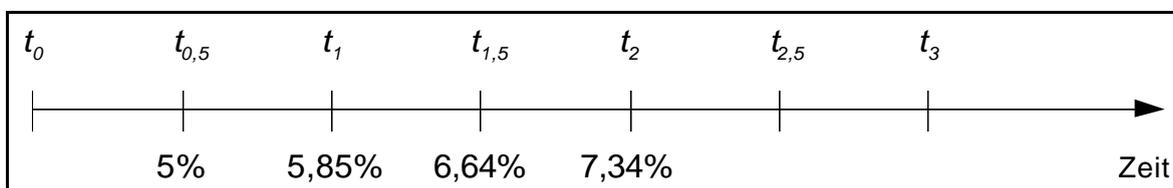
Als Beispiel werden aus vorgegebenen Spots einer normalen Zinsstrukturkurve die Forwards für ein Δ von 0,5 berechnet.

Abbildung: Zinsstruktur



Die Bewertung eines zweijährigen Floaters mit einem halbjährigen LIBOR-Kupon wird dadurch einfach. Mit Hilfe der Forwards werden die zukünftigen Kupons für die Bewertung festgestellt und dann mit den Spotsätzen auf heute abdiskontiert.

Abbildung: Forward-Kupons bei LIBOR-Cash Flow

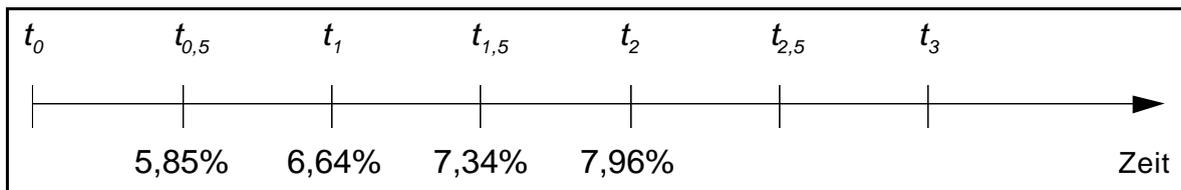


$$\text{Preis}_{\text{Floater}} = \frac{0,5 \cdot 5}{1 + 5\% \cdot 0,5} + \frac{0,5 \cdot 5,85}{1 + 5,5\% \cdot 1} + \frac{0,5 \cdot 6,64}{1 + 6\% \cdot 1,5} + \frac{0,5 \cdot 7,34 + 100}{1 + 6,5\% \cdot 2} = 100$$

Wie erwartet liegt der Preis bei 100. Da die Forwards aus der Zinsstrukturkurve errechnet wurden und diese den Marktpreisen entsprechen, muß auch der daraus resultierende Floater zu par notieren.

Im folgenden soll nun die LIBOR in Arrears-Struktur berücksichtigt werden. Dabei werden die Zinsen am Ende der Periode für den zurückliegenden Zeitraum festgestellt. Um das Diskontierungsverfahren anwenden zu können, müssen zunächst alle Forward-Zinsen um eine Periode nach vorn verschoben werden. Zusätzlich muß später die Phasenverschiebung an einem unnatürlichen Zeitpunkt bewertet werden.

Abbildung: LIBOR in Arrears ohne Convexity-Adjustierung



$$\text{Preis}_{\text{LIAR_Floater}} = \frac{0,5 \cdot 5,85}{1 + 5\% \cdot 0,5} + \frac{0,5 \cdot 6,64}{1 + 5,5\% \cdot 1} + \frac{0,5 \cdot 7,34}{1 + 6\% \cdot 1,5} + \frac{0,5 \cdot 7,96 + 100}{1 + 6,5\% \cdot 2} = 101,39$$

Aufgrund der Phasenverschiebung erhöht sich der Preis des Papiers also um 1,39 DM. Jedoch hat beim Übergang zur LIAR-Struktur eine Veränderung der „natürlichen“ Modalitäten des Zinssatzes stattgefunden. Diese Wertänderung wird im folgenden genauer beschrieben und bewertet.

2.2 Bewertungsprobleme bei „unnatürlichen“ Zahlungszeitpunkten

Um das Problem unnatürlicher Zahlungszeitpunkte zu erklären, soll mit Hilfe des Forward Rate Agreements (FRA) und eines Geldmarktfutures der Konvexitätsunterschied erläutert werden. Führen wir dazu jeweils einen „künstlichen“ Geldmarktfuture und FRA ein, deren Konstruktion, nicht aber deren Usancen (act/act statt act/360, kein Margining bei beiden Produkten) dem Markt entsprechen. Beim Future erwirbt der Käufer ein Produkt, das am Ende der Laufzeit mit 100 minus LIBOR abgerechnet wird. Bei einem FRA wird ein Kreditzins erworben, der am Ende der Vorlaufzeit mit der abdiskontierten Zinsdifferenz ausgezahlt wird. Bei Erwartung steigender Zinsen ergibt sich daraus, daß ein Spekulant den FRA kaufen muß, da ein Forward-Kreditzins von steigenden Zinsen profitiert, und den Future verkaufen muß, da dessen Kurs bei steigenden Zinsen fällt.

Tabelle		
FUTURE VS FRA		
Zinsprognose	Future	FRA
steigt	Verkauf	Kauf
fällt	Kauf	Verkauf

Die Auszahlung nach Feststellung des LIBORs ergibt sich mit:

$$\text{Auszahlung Future} = \Delta \cdot ([100 - \text{LIBOR}] - [100 - \text{Kaufzins_Future}])$$

$$\Leftrightarrow \text{Auszahlung Future} = \Delta \cdot (\text{Kaufzins_Future} - \text{LIBOR})$$

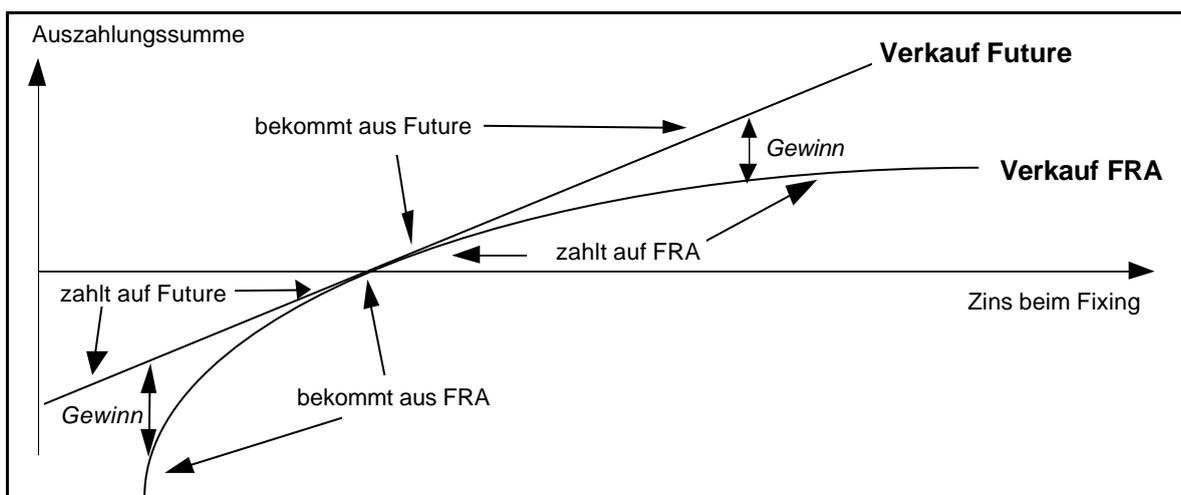
$$\text{Auszahlung FRA} = \frac{\Delta \cdot (\text{LIBOR} - \text{Kaufzins}_{\text{FRA}})}{1 + \text{LIBOR} \cdot \Delta}$$

Zu beachten ist, daß der Kaufzins der beiden Produkte unterschiedlich sein muß. Dies soll an folgendem Beispiel erklärt werden. Geht ein Spekulant davon aus, daß eine Zinserhöhung genauso wahrscheinlich wie eine Zinssenkung ist, wird er diese Hypothese durch Verkauf eines FRA umsetzen. Fällt der Zins, wird aufgrund der Abdiskontierung der Auszahlungsbetrag größer als bei einem entsprechenden Zinsanstieg sein. Diesen Vorteil hat er beim Future aufgrund der linearen Berechnung nicht.

Tabelle		
AUSZAHLUNG FUTURE VS FRA		
Kaufzins 10%; 6-Monats-LIBOR, 1 Mio DM		
LIBOR-Fixing	Auszahlung Future	Auszahlung FRA
12%	$0,5 \cdot (10\% - 12\%) \cdot 1 \text{ Mio} = -0,01 \text{ Mio}$	$0,5 \cdot \frac{(12\% - 10\%)}{1 + 12\% \cdot 0,5} \cdot 1 \text{ Mio} = 0,0094 \text{ Mio}$
8%	$0,5 \cdot (10\% - 8\%) \cdot 1 \text{ Mio} = 0,01 \text{ Mio}$	$0,5 \cdot \frac{(8\% - 10\%)}{1 + 8\% \cdot 0,5} \cdot 1 \text{ Mio} = -0,0096 \text{ Mio}$

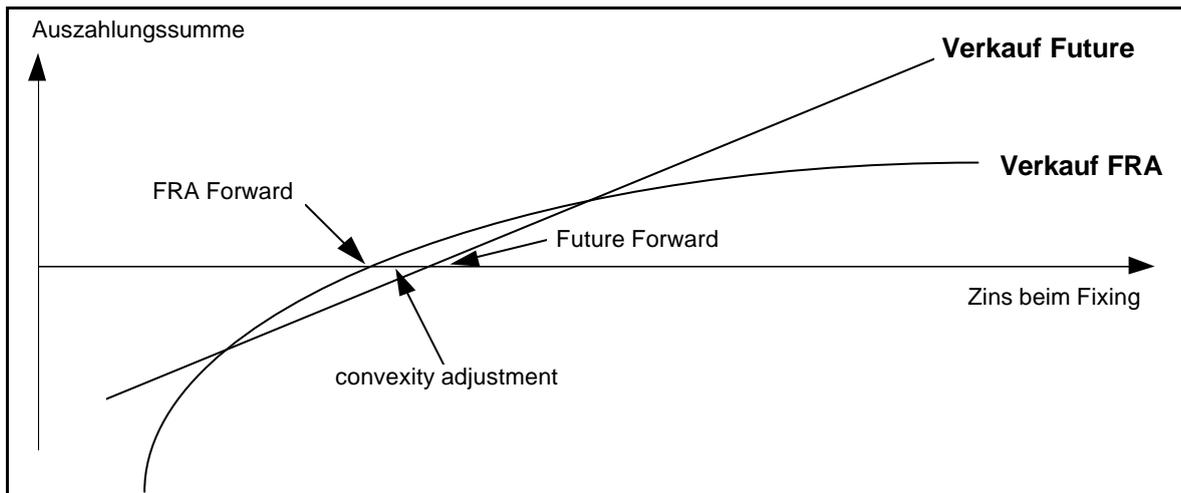
Der Unterschied der Instrumente wird deutlich, wenn man die Auszahlungsfunktionen in Abhängigkeit des realisierten Zinssatzes darstellt. Das Profil des Futures ist eine Gerade, während die Auszahlung des FRA gebogen ist. Hedged man den Verkauf eines FRA durch den Verkauf eines Futures, ergibt sich folgendes Bild:

Abbildung: FRA vs Future bei gleichem Kaufzins



Ein identischer Kaufzins von FRA und Future ergäbe also bei Verkauf der beiden Instrumente einen sicheren Gewinn, da die Auszahlung für den FRA auf einer konvexen Kurve und die des Futures auf einer Geraden verläuft. Damit ein fairer Preis erzielt wird, muß daher der Forwardkaufzins des Futures über dem FRA-Satz liegen. Diese Adjustierung muß um so größer sein, je höher die Volatilität des Zinses ist, da dann die „Gebogenheit“ des FRA um so wertvoller ist.

Abbildung: Convexity adjustment-FRA vs Future



Somit ist das Underlying eines Geldmarktfutures ein In Arrears-Zinssatz. Die Convexity-Adjustierung eines LIBOR in Arrears-Cash Flows ist also identisch mit der Adjustierung bei einem FRA im Vergleich zu einem Geldmarktfuture. Der LIBOR wird am Ende der Periode festgestellt und müßte jetzt eigentlich abdiskontiert werden. Da die Abdiskontierung jedoch fehlt, gilt hier der gleiche Unterschied. Während der FRA einfach mit dem Forward bewertet werden kann (normale LIBOR-Zahlung), muß der Zins des Future (LIBOR in Arrears) nach oben korrigiert werden. Meist werden für diese Konvexitätsadjustierung sehr komplexe Zinsstrukturmodelle benutzt. Jedoch kann auch eine relativ einfache geschlossene Lösungsform erarbeitet werden, die im Regelfall den praktischen Anforderungen genügt.

3 Bewertung von Konvexitätsunterschieden

Die Bewertung von unsicheren Zahlungen beruht auf der Duplizierung des Instruments (z.B. Baxter; Rennie 1996). Der reguläre Forward kann aus einer Kombination der Spotzinsen risikolos dargestellt werden. Bei risikoneutraler Bewertung wird der Erwartungswert des Forwardzinses aus der Arbitrage bestimmt. Für die allgemeine Notation gilt:

$$r_{f\Delta; \text{Endzeitpunkt; Fixing}}$$

Beispiel: $r_{f\Delta; i+\Delta; i}$ ist die Forward Rate für die Periodenlänge Δ mit dem Endzeitpunkt $t_{i+\Delta}$ und der Zinsfeststellung in t_i

Somit ergibt sich als Erwartungswert für den „klassischen“ Forward:

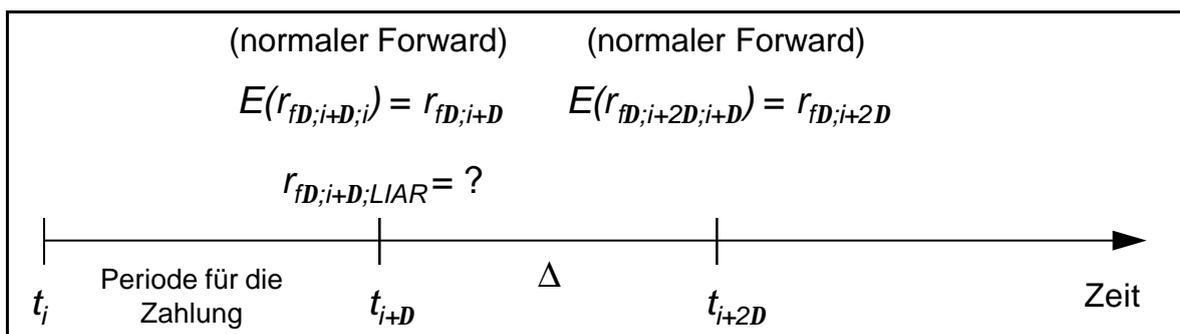
$$E(r_{f\Delta; \text{Endzeitpunkt}; \text{Fixing}}) = E(r_{f\Delta; i+\Delta; i}) = r_{f\Delta; i+\Delta}$$

3.1 Adjustierung der Konvexität

Bei einem LIAR verschiebt sich das Fixing, die Zinsfeststellung erfolgt also am gleichen Zeitpunkt wie die Zahlung. Somit wird folgender Zins gesucht:

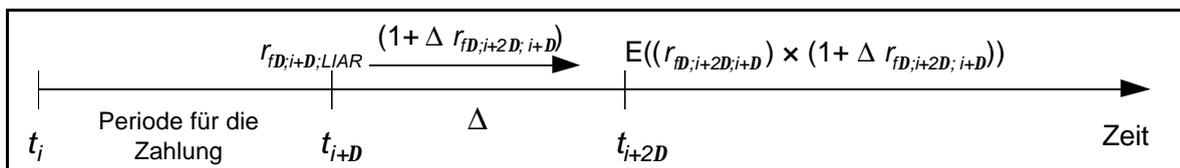
$$r_{f\Delta; i+\Delta; \text{LIAR}} = ?$$

Abbildung: Erwartungswert eines Forwardzinses



Aufgrund der fehlenden Abdiskontierung ist es zunächst nicht möglich, den LIAR-Forward durch eine einfache Kombination von Spotsätzen abzubilden. Um dieses Problem zu lösen, wird die Zahlung mit dem bekannten Forward zunächst wieder auf den Zeitpunkt aufgezinst, zu dem sie eigentlich gehört.

Abbildung: LIAR aufgezinst



Um den LIAR zu bewerten, muß zuerst der mit sich selbst aufgezinste Forwardsatz zum Zeitpunkt $t_{i+2\Delta}$ bestimmt werden:

$$(1) E\left((r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}) \cdot (1 + \Delta \cdot r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta})\right) = E\left(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta} + \Delta \cdot r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}^2\right) = E\left(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}\right) + E\left(\Delta \cdot r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}^2\right) = r_{f\Delta;j+2\Delta} + \Delta \cdot E\left(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}^2\right)$$

Aus der allgemeinen Statistik ist der Verschiebungssatz für die Varianz bekannt:

$$\text{Varianz}(r_{f;t_i}) = E(r_{f;t_i}^2) - E(r_{f;t_i})^2$$

$$\Leftrightarrow E(r_{f;t_i}^2) = \text{Varianz}(r_{f;t_i}) + E(r_{f;t_i})^2$$

Der unbekannte Erwartungswert der quadrierten Forward Rate kann nun substituiert werden.

$$(2) E(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}^2) = \text{Varianz}(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}) + (E(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}))^2 = \text{Varianz}(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}) + r_{f\Delta;j+\Delta}^2$$

$$(2 \text{ in } 1) r_{f\Delta;j+2\Delta} + \Delta \cdot E(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}^2) = r_{f\Delta;j+2\Delta} + \Delta \cdot [\text{Varianz}(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta}) + r_{f\Delta;j+\Delta}^2]$$

$$= r_{f\Delta;j+2\Delta} \cdot (1 + \Delta \cdot r_{f\Delta;j+2\Delta}) + \Delta \cdot \text{Varianz}(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta})$$

Um jetzt den Forward bewerten zu können, muß die Zahlung durch Diskontierung mit dem klassischen Forward wieder an den Bewertungszeitpunkt $t_{i+\Delta}$ verschoben werden.

$$r_{f\Delta;i+\Delta;LIAR} = \frac{r_{f\Delta;i+2\Delta} \cdot (1 + \Delta \cdot r_{f\Delta;i+2\Delta}) + \Delta \cdot \text{Varianz}(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta})}{1 + \Delta \cdot r_{f\Delta;j+2\Delta}}$$

$$\Leftrightarrow r_{f\Delta;i+\Delta;LIAR} = r_{f\Delta;j+2\Delta} + \underbrace{\frac{\Delta \cdot \text{Varianz}(r_{f\Delta;i+2\Delta;j+\Delta})}{1 + \Delta \cdot r_{f\Delta;j+2\Delta}}}_{\text{convexity adjustment}}$$

3.2 Varianz einer Forward Rate

Um das convexity adjustment berechnen zu können, muß ein Marktpreis für die Varianz der Forward Rates gefunden werden. Theoretisch können dazu unterschiedliche Zinsmodelle benutzt werden. Im Regelfall wird bei Caps und Floors im DM-Bereich das Black-Modell (Black 1976) benutzt. Da für diese Produkte liquide Märkte vorhanden sind, erscheint es sinnvoll, die gesuchten Volatilitäten daraus abzuleiten.

Dem Black-Modell liegt die Annahme zugrunde, daß die Forward-Zinssätze logarithmisch normalverteilt sind. Als Zinsprozeß werden die Entwicklung der Forward-

Zinsen mit Hilfe ihrer Volatilität σ , einem Wienerprozeß z und dem Zeitablauf von jetzt t_0 bis zum betrachteten Zeitpunkt t_i beschrieben. Es ergibt sich also:

$$r_{fi} = r_{f0} \cdot e^{s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 0,5s^2 \cdot (t_i - t_0)}$$

Auf dieser Basis kann die gesuchte Varianz ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \text{Varianz}(r_{fi}) &= E(r_{fi}^2) - E(r_{fi})^2 \\ &= E\left(r_{f0}^2 \cdot e^{2(s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 0,5s^2 \cdot (t_i - t_0))}\right) - r_{f0}^2 \\ &= E\left(r_{f0}^2 \cdot e^{2s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 2s^2 \cdot (t_i - t_0) + s^2 \cdot (t_i - t_0)}\right) - r_{f0}^2 \\ &= r_{f0}^2 \cdot E\left(e^{2s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 2s^2 \cdot (t_i - t_0)} \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)}\right) - r_{f0}^2 \\ &= r_{f0}^2 \cdot E\left(e^{2(s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 0,5s^2 \cdot (t_i - t_0))} \cdot e^{-s^2 \cdot (t_i - t_0)} \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)}\right) - r_{f0}^2 \\ &= r_{f0}^2 \cdot E\left(e^{2(s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 0,5s^2 \cdot (t_i - t_0))}\right) \cdot e^{-s^2 \cdot (t_i - t_0)} \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)} - r_{f0}^2 \end{aligned}$$

Im Anhang wird der Erwartungswert des stochastischen Prozesses ermittelt. Es ergibt sich:

$$E\left(e^{2(s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 0,5s^2 \cdot (t_i - t_0))}\right) = e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)}$$

Entsprechend vereinfacht sich der Varianzausdruck zu:

$$\text{Varianz}(r_{fi}) = r_{f0}^2 \cdot \underbrace{E\left(e^{2(s \cdot \sqrt{(t_i - t_0)} \cdot z - 0,5s^2 \cdot (t_i - t_0))}\right)}_{e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)}} \cdot e^{-s^2 \cdot (t_i - t_0)} \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)} - r_{f0}^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Varianz}(r_{fi}) = r_{f0}^2 \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)} \cdot e^{-s^2 \cdot (t_i - t_0)} \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)} - r_{f0}^2 = r_{f0}^2 \cdot e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)} - r_{f0}^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Varianz}(r_{fi}) = r_{f0}^2 \cdot \left(e^{s^2 \cdot (t_i - t_0)} - 1\right)$$

Für den Praktiker kann dies mit Hilfe einer Taylerschen Reihe erster Ordnung weiter vereinfacht werden. Dies ergibt in der Notation des LIAR:

$$\text{Varianz}(r_{f_{\Delta; i+\Delta}}) \approx r_{f_{i+\Delta}}^2 \cdot s_{\Delta; i+\Delta}^2 \cdot (t_i - t_0)$$

Ein Cap setzt sich aus einer Summe von Einzeloptionen, den Caplets, zusammen. Der hier gesuchte Parameter entspricht also den impliziten Volatilitäten der Caplets für die entsprechende Forward-Periode. Damit können alle Parameter marktmäßig bewertet werden. Für die Adjustierung mit Hilfe von Black ergibt sich also:

$$r_{f_{\Delta};i+\Delta;LIAR} = r_{f_{\Delta};j+2\Delta} + \frac{\Delta \cdot \text{Varianz}(r_{f_{\Delta};j+2\Delta;i+\Delta})}{1 + \Delta \cdot r_{f_{\Delta};j+2\Delta}}$$

$$\Leftrightarrow r_{f_{\Delta};i+\Delta;LIAR} = r_{f_{\Delta};j+2\Delta} + \underbrace{\frac{\Delta \cdot r_{f_{\Delta};j+2\Delta}^2 \cdot s_{f_{\Delta};j+2\Delta}^2 \cdot (t_{i+\Delta} - t_0)}{1 + \Delta \cdot r_{f_{\Delta};j+2\Delta}}}_{\text{convexity adjustment}}$$

4 Beispielbewertung von LIBOR in Arrears-Zahlungen

Bezogen auf die Periodenlänge Δ wird mit Hilfe des korrigierten Forwards der Cash Flow festgelegt und abdiskontiert. Für den letzten Kupon des zweijährigen Floaters ergibt sich dann bei einer Volatilität von 20% neben der Verschiebung eine zusätzliche Adjustierung von

$$\text{Convexity } r_{f_{\Delta};i+\Delta;LIAR} = \frac{\Delta \cdot r_{f_{\Delta};j+2\Delta}^2 \cdot s_{f_{\Delta};j+2\Delta}^2 \cdot t_{i+\Delta}}{1 + \Delta \cdot r_{f_{\Delta};j+2\Delta}} = \frac{0,5 \cdot 0,0796^2 \cdot 0,2^2 \cdot 2}{1 + 0,5 \cdot 0,0796} = 0,024\%$$

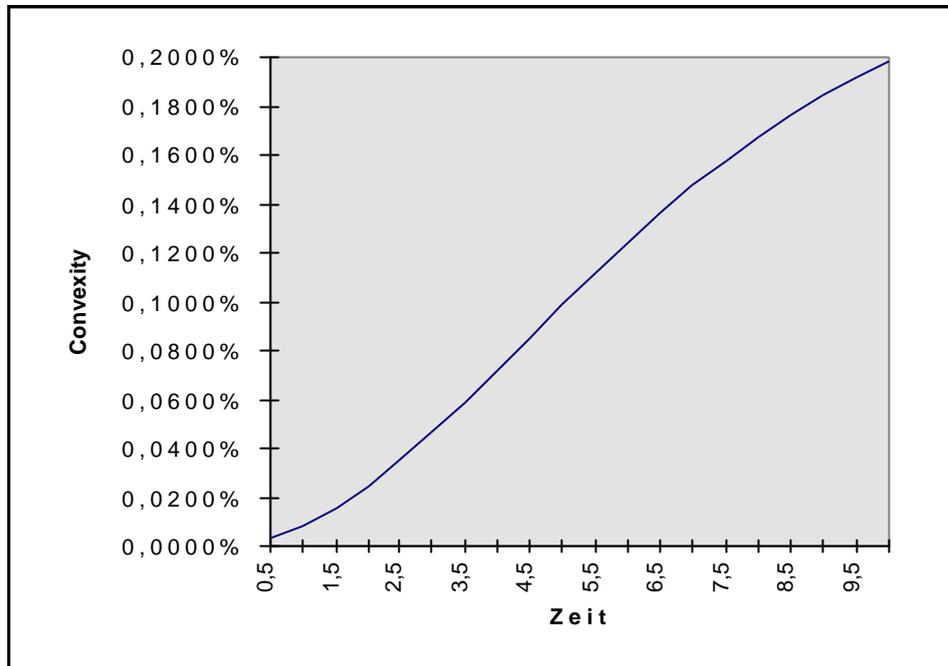
Wird der LIAR-Floater korrekt bewertet, müssen bei den vier Zinszahlungen neben der Phasenverschiebung auch Konvexitätsadjustierungen vorgenommen werden, um sie dann für den Preiseffekt entsprechend zu diskontieren. Da sich die Adjustierung auf den Zinssatz bezieht, muß das Ergebnis noch auf die Periodenlänge des Kupons (hier 0,5) bezogen werden.

$$PV_{\text{Adjustierung}} = 0,5 \cdot \left[\frac{\left(\frac{0,5 \cdot 0,0585^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,5}{1 + 0,5 \cdot 0,0585} \right)}{1 + 0,05 \cdot 0,5} + \frac{\left(\frac{0,5 \cdot 0,0664^2 \cdot 0,2^2 \cdot 1}{1 + 0,5 \cdot 0,0664} \right)}{1 + 0,055 \cdot 1} + \frac{\left(\frac{0,5 \cdot 0,0734^2 \cdot 0,2^2 \cdot 1,5}{1 + 0,5 \cdot 0,0734} \right)}{1 + 0,06 \cdot 1,5} + \frac{\left(\frac{0,5 \cdot 0,0796^2 \cdot 0,2^2 \cdot 2}{1 + 0,5 \cdot 0,0796} \right)}{1 + 0,0655 \cdot 2} \right] = 0,024\%$$

Der gesamte Effekt auf den Preis liegt hier bei ca. 2 Pfennigen. Während der normale Floater einen Preis von 100 hätte, müßte der LIAR-Floater bei $101,39 + 0,02 = 101,41$ handeln. Bei längeren Laufzeiten wird die Adjustierung noch

wichtiger, da sie im Zeitablauf zunimmt. Die Entwicklung bei 20% Volatilität und einem Zinsniveau von 5% ist im folgenden Bild dargestellt.

Abbildung: Konvexitätsadjustierung in Abhängigkeit von der Restlaufzeit



Mit der in der Arbeit vorgestellten Methode ist eine schneller und marktgerechter Weg zur Bewertung von LIBOR in Arrears-Zahlungen entwickelt worden. Da es bei längeren Laufzeiten zu deutlichen Preisunterschieden kommt, ist eine Korrektur für die Konvexität auch in der Praxis unbedingt notwendig.

Anhang

Definiert man $T = t_i - t_0$, ergibt sich der gesuchte Erwartungswert $E(e^{s\sqrt{T}\cdot z})$ des Wiener Prozesses z mit:

$$\begin{aligned} E(e^{s\sqrt{T}\cdot z}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\sqrt{T}\cdot z} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\sqrt{T}\cdot z - \frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\overbrace{s^2\frac{T}{2} - s^2\frac{T}{2} + s\sqrt{T}\cdot z - \frac{z^2}{2}}^0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} dz \\ &= e^{s^2\frac{T}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2\frac{T}{2} + s\sqrt{T}\cdot z - \frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} dz = e^{s^2\frac{T}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\overbrace{s^2\frac{T}{2} - s\sqrt{T}\cdot z + \frac{z^2}{2}}^{(s\sqrt{T}-z)^2}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} dz \\ &= e^{s^2\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

Arbeitsberichte der Hochschule für Bankwirtschaft

Bisher sind erschienen:

Nr.	Autor/Titel	Jahr
1	Moormann, Jürgen Lean Reporting und Führungsinformationssysteme bei deutschen Finanzdienstleistern	1995
2	Cremers, Heinz; Schwarz, Willi Interpolation of Discount Factors	1996
3	Jahresbericht 1996	1997
4	Ecker, Thomas; Moormann, Jürgen Die Bank als Betreiberin einer elektronischen Shopping-Mall	1997
5	Jahresbericht 1997	1998
6	Heidorn, Thomas; Schmidt, Wolfgang LIBOR in Arrears (Nachträgliche LIBOR-Feststellung)	1998

Bestelladresse:

Hochschule für Bankwirtschaft
z. Hd. Frau Glatzer
Sternstraße 8
60318 Frankfurt/M.

Tel.: 069/95946-16

Fax: 069/95946-28

**Weitere Informationen über die Hochschule für Bankwirtschaft
erhalten Sie im Internet unter www.hfb.de**