

Geyer, Hannah

**Working Paper**

## Theoretische Analyse der Strategiewahl unter der Zwei- und Drei-Punkte-Regel im Fußball

IÖB-Diskussionspapier, No. 1/08

**Provided in Cooperation with:**

Institute for Economic Education, University of Münster

*Suggested Citation:* Geyer, Hannah (2008) : Theoretische Analyse der Strategiewahl unter der Zwei- und Drei-Punkte-Regel im Fußball, IÖB-Diskussionspapier, No. 1/08, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Ökonomische Bildung (IÖB), Münster

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/25573>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



**Institut für  
Ökonomische Bildung**



**Fachbereich 04: Wirtschaftswissenschaften**

# **IÖB-Diskussionspapier**

**Nr. 1/08**

**Theoretische Analyse der Strategiewahl unter  
der Zwei- und Drei-Punkte-Regel im Fußball**

*Hannah Geyer*

# **IÖB-Diskussionspapier Nr. 1/08**

Januar 2008

ISSN 1860-8159

## **Theoretische Analyse der Strategiewahl unter der Zwei- und Drei-Punkte-Regel im Fußball\***

*Hannah Geyer*

### **Theoretical analysis of strategies under the two- and three-point- rule in soccer**

#### **Abstract:**

The paper theoretically analyses the effect of the introduction of the three-point-rule on the strategies in a soccer match. Therefore the expectation values for the goal difference at the end of the game under different strategies both for matches between equally strong teams and (more realistically) for matches between teams with varying quality levels are simulated. It can be shown that the rule change in tied games between equally strong teams leads to a more offensive manner of play, while in matches between teams with varying quality levels the weaker team plays in any case more offensive, while the stronger team only plays more offensive if the gap between the quality of the teams is not too big. If one team leads in matches with homogenous teams the leading team now changes later from an offensive manner of play to a defensive manner. In matches with heterogeneous teams with the better team in lead this team changes its manner of play earlier from offense to defence and if the weaker team leads it changes its strategy earlier.

JEL Codes: C72, L83

---

\* Für wertvolle Anregungen und Hinweise danke ich Prof. Dr. Alexander Dilger sowie Benjamin Balsmeier.

# Theoretische Analyse der Strategiewahl unter der Zwei- und Drei-Punkte-Regel im Fußball

## Zusammenfassung:

Der Beitrag analysiert theoretisch die Auswirkungen der Einführung der Drei-Punkte-Regel auf die Strategiewahl im Fußball. Dazu werden die Erwartungswerte für den Ausgang des Spiels unter den verschiedenen Strategien sowohl für Spiele zwischen gleich starken Mannschaften als auch unter der (realistischeren) Annahme verschieden starker Teams simuliert. Es zeigt sich, dass die Regeländerung bei unentschiedenem Spielstand in Spielen zwischen gleich starken Mannschaften zu einer offensiveren Spielweise führt. Während in Spielen zwischen Mannschaften mit unterschiedlichem Leistungsniveau nur die schwächere Mannschaft auf jeden Fall offensiver spielt, spielt hingegen die stärkere Mannschaft nur offensiv, wenn der Leistungsunterschied nicht zu groß ist und auch in diesem Fall erst gegen Ende des Spiels. Bei Führung einer Mannschaft wechselt diese in einem Spiel gegen eine Mannschaft mit dem gleichen Leistungsniveau unter der neuen Punkte-Regel später von Angriff zu Verteidigung, während in einem Spiel mit unterschiedlich starken Mannschaften bei einer Führung der stärkeren Mannschaft diese früher von einer offensiven zu einer defensiven Strategie wechselt und bei Führung der schwächeren Mannschaft diese nun länger offensiv spielt.

Im Internet unter:

[http://www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb/downloads/forschen/paper/IOEB\\_DP\\_01\\_2008.pdf](http://www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb/downloads/forschen/paper/IOEB_DP_01_2008.pdf)

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät  
Institut für Ökonomische Bildung  
Scharnhorststraße 100  
48151 Münster

Tel: 0251/ 83-24303 (Sekretariat)  
E-Mail: [iob2@uni-muenster.de](mailto:iob2@uni-muenster.de)  
Internet: [www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb](http://www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Modell</b> .....	<b>3</b>
2.1 Nash-Gleichgewicht des Spiels .....	6
2.2 Modell für homogene Mannschaften .....	7
2.2.1 Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand .....	9
2.2.2 Gleichgewicht bei Führung eines Teams .....	18
2.3 Modell für heterogene Mannschaften .....	22
2.3.1 Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand und Parallelverschiebung der Leistungsniveaus .....	23
2.3.2 Gleichgewicht bei Führung einer Mannschaft und Parallelverschiebung der Leistungsniveaus .....	26
2.3.3 Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand ohne Parallelverschiebung der Leistungsniveaus .....	30
2.3.4 Gleichgewicht bei Führung einer Mannschaft ohne Parallelverschiebung der Leistungsniveaus .....	31
<b>3. Fazit</b> .....	<b>34</b>
<b>Anhang</b> .....	<b>36</b>
A1. Beweise .....	36
A2. Erläuterung der Vorgehensweise in der Simulation.....	37
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>38</b>

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Durchschnittliche Toranzahl pro Minute. ....	13
Abb. 2: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand. ....	14
Abb. 3: Änderung der Differenzen der Erwartungswerte für verschiedene Werte von $A$ . ....	15
Abb. 4: Änderung der Differenzen der Erwartungswerte für verschiedene Werte von $\alpha$ ....	16
Abb. 5: Änderung der Differenzen der Erwartungswerte für verschiedene Werte von $\delta$ ....	16
Abb. 6: Differenz der Erwartungswerte für $A=0,8$ . ....	17
Abb. 7: Differenz der Erwartungswerte bei Tordifferenz 1. ....	20
Abb. 8: Differenz der Erwartungswerte bei Tordifferenz 2. ....	21
Abb. 9: Differenz der Erwartungswerte bei Tordifferenz 3. ....	22
Abb. 10: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, heterogenen Mannschaften und angreifendem Gegner. ....	24
Abb. 11: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, heterogenen Mannschaften und verteidigendem Gegner. ....	25
Abb. 12: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand und verschiedenen Werten für $c$ . ....	26
Abb. 13: Differenz der Erwartungswerte der stärkeren Mannschaft bei Tordifferenz 1. ....	28
Abb. 14: Differenz der Erwartungswerte der schwächeren Mannschaft bei Tordifferenz 1. .	29
Abb. 15: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, Mannschaft mit schwachem Offensivspiel und angreifendem Gegner. ....	30
Abb. 16: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, Mannschaft mit starker Offensivspiel und angreifendem Gegner. ....	31
Abb. 17: Differenz der Erwartungswerte bei Führung einer Mannschaft mit unterschiedlicher Offensiv- und Defensivleistung. ....	32
Abb. 18: Differenz der Erwartungswerte bei Führung einer Mannschaft mit gleicher Offensiv- und Defensivleistung. ....	33

## 1. Einleitung

Während in den letzten Jahren zahlreiche empirische Studien die Auswirkungen der Einführung der Drei-Punkte-Regel auf die Spielweise in verschiedenen Fußball-Ligen untersuchten,<sup>2</sup> gibt es bisher nur wenige Arbeiten, die den Effekt der neuen Regel anhand theoretischer Modelle zu erklären versuchen. Guedes/Machado (2002) vergleichen in ihrem Modell die Auswirkungen der Drei-Punkte-Regel auf Spiele zwischen gleich starken und unterschiedlich starken Mannschaften. Im Modell wählen die beiden Teams einmalig die Höhe ihrer Offensivanstrengungen und legen damit automatisch auch die Höhe der jeweiligen Defensivanstrengung fest. Das Fußballspiel wird dann in Form eines „Sudden-Death-Spieles“ modelliert: Per Münzwurf entscheidet eines der beiden Teams (welches zufällig ausgewählt wurde), ob es ein Tor gegen seinen Gegner schießt. Wenn ja, hat dieses Team das Spiel gewonnen. Wenn nicht, entscheidet die andere Mannschaft, ob sie ein Tor schießt und hat im Falle eines Tores das Spiel gewonnen. Andernfalls endet das Spiel unentschieden. Anhand dieser Modellierung des Spiels stellen Guedes/Machado (2002) Funktionen auf, die die Wahrscheinlichkeiten eines Torerfolgs für beide Mannschaften charakterisieren. Die Teams versuchen nun, diese Funktionen zu maximieren, was zu einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien führt. Beim Vergleich der Höhe der Offensivanstrengungen unter den beiden Punkte-Regeln zeigt sich, dass in Spielen mit gleich starken Mannschaften beide Mannschaften unter der Drei-Punkte-Regel offensiver spielen werden als unter der Zwei-Punkte-Regel. Bei Spielen zwischen unterschiedlich starken Mannschaften spielt hingegen nur die stärkere Mannschaft auf jeden Fall offensiver, während es bei der schwächeren Mannschaft davon abhängt, wie groß der Unterschied zwischen den beiden Mannschaften ist. Ist die schwächere Mannschaft wesentlich schlechter als die stärkere Mannschaft, wird die schlechtere Mannschaft unter der neuen Punkte-Regel defensiver spielen als unter der alten Regelung. Aufgrund der Modellierung des Spiels anhand zweier Münzwürfe gibt das Modell keine Auskunft über mögliche Änderungen der Offensivanstrengungen im Spielverlauf oder bei Änderungen der Tordifferenz.

Auch bei dem Modell von Brocas/Carrillo (2004) wählen die Mannschaften die Höhe ihrer Offensivanstrengung. Diese Wahl findet zu Beginn des Spiels statt und die Teams haben nur in der Halbzeit die Möglichkeit, ihre Strategie zu ändern. Strategieänderungen innerhalb der beiden Halbzeiten, z.B. als Reaktion auf eine Änderung des Spielstandes, sind nicht möglich.

---

<sup>2</sup> Siehe z.B. Amann, Dewenter & Namini (2004), Shepotylo (2006) oder Dilger/Geyer (2007).

Die Herangehensweise in diesem Modell besteht nun darin, zuerst für beide Mannschaften von deren Strategien abhängige Wertefunktionen für die zweite Halbzeit in Abhängigkeit des Spielstandes nach 45 Minuten aufzustellen und daraus mit Hilfe von Rückwärtsinduktion Wertefunktionen für die erste Halbzeit zu erhalten. Brocas/Carrillo (2004) kommen zu dem Schluss, dass bei unentschiedenem Spielstand unter der neuen Regelung zu Beginn defensiver gespielt wird, während gegen Ende des Spiels bei noch immer unentschiedenem Spielstand eine offensivere Spielweise als unter der alten Regelung rational ist. Dies kann zum einen dadurch erklärt werden, dass die Teams bei einer frühen Führung nun einen Punkt mehr zu verlieren haben als noch unter der alten Regelung. Eine frühe Führung ist also nicht mehr so erstrebenswert, da dann zwei Punkte über einen längeren Zeitraum verteidigt werden müssen. Zum anderen ist ein Unentschieden nun im Vergleich zu einem Sieg weniger wert als noch unter der Zwei-Punkte-Regel. Steht es also gegen Ende des Spiels noch unentschieden, ist der Offensivanreiz nun wesentlich höher, da man bei einem Unentschieden nur noch ein Drittel der insgesamt zu vergebenden Punkte erhält, während unter der alten Regelung ein Unentschieden noch halb so viel wert war wie ein Sieg.

Im Gegensatz zu dem obigen zweiperiodischen Modell erlaubt das Modell von Palomino/Rigotti/Rustichini (2000) (im Folgenden PRR genannt) einen Strategiewechsel in einer zwar diskreten aber häufigeren Anzahl von Zeitpunkten  $t \in \{0, \dots, T\}$  innerhalb des Spiels. Da jedoch das Hauptaugenmerk dieser Arbeit nicht in einem Vergleich der beiden Punkte-Regelungen liegt, wird mit dem dort dargestellten Modell nur das Spiel unter der Zwei-Punkte-Regel analysiert. Anhand des Modells beweisen PRR, dass (bei Annahme gleich starker Mannschaften) bei unentschiedenem Spielstand Angriff immer besser als Verteidigung ist, während ein in Führung liegendes Team zu einem Zeitpunkt, der vom momentanen Spielstand abhängt, auf Verteidigung umschaltet und diese Strategie auch bis zum Ende des Spiels, bzw. bis sich etwas am momentanen Spielstand ändert, beibehält. Ein zurückliegendes Team wird hingegen immer angreifen, da es schon in Rückstand ist und somit nichts mehr zu verlieren hat.

Das Modell von PRR soll nun so weiter entwickelt werden, dass sowohl Strategien unter der Zwei- als auch der Drei-Punkte-Regel bei unentschiedenem und nicht unentschiedenem Spielstand sowohl für Spiele zwischen gleich starken Mannschaften als auch für Spiele zwischen Teams mit unterschiedlichem Leistungsniveau modelliert werden können. Das Hauptproblem liegt dabei darin, dass das Spiel mit Einführung der Drei-Punkte-Regel seinen Kon-



stansummenspielcharakter verliert. Ein Gleichgewicht der Strategien der beiden Mannschaften kann daher nicht mehr, wie bei PRR, anhand der Maximin-Regel gefunden werden. Stattdessen werden zur Berechnung der optimalen Strategien Nash-Gleichgewichte gesucht. Da eine exakte Berechnung nicht möglich ist, werden für verschiedene Fälle Simulationen durchgeführt. Ein weiterer Unterschied zu dem Modell von PRR liegt in der Interpretation der Dreipunkte-Regel. Hier soll die neue Punkte-Regel nicht als Aufwertung eines Sieges, sondern als Abwertung eines Unentschiedens interpretiert werden.

## 2. Modell

In einem Fußballspiel treten jeweils zwei Teams  $i = 1, 2$  gegeneinander an. Das Spiel wird in diskreter Zeit  $t \in \{0, \dots, T\}$  gespielt, wobei  $T$  der Endpunkt des Spieles ist. Wie in dem Modell von PRR können die beiden Teams zu jedem Zeitpunkt  $t$  aus der Strategiemenge  $\{d, a\}$  ihre Strategie wählen.  $a$  steht hierbei für eine Angriffsstrategie, d.h. eine offensiv ausgerichtete Strategie, und  $d$  für eine Verteidigungs- also Defensivstrategie.  $\Delta(\{d, a\})$  beschreibt die zugehörige Menge der gemischten Strategien. Es wird angenommen, dass die Wahl einer reinen Strategie von dem jeweils gegnerischen Team beobachtet werden kann, und es gelte  $a \succ d$ . Außerdem seien  $s := (s_1, s_2) \in \{d, a\}^2$  die Strategien der beiden Mannschaften.

Zu jedem Zeitpunkt  $t$  des Spiels kann eine der beiden Mannschaften ein Tor erzielen, wobei sowohl die Wahrscheinlichkeit für einen eigenen als auch einen Torerfolg des Gegners durch die Strategiewahl der Teams beeinflusst wird.<sup>3</sup> Zu jedem gewählten Strategienpaar existiert eine zugehörige Wahrscheinlichkeit  $p_i(s) \in [0, 1]$ , mit der Team  $i$  ein Tor schießt.

Da in einem Fußballspiel nur wenige Tore erzielt werden, sind die Wahrscheinlichkeiten für einen Torerfolg durch eine der beiden Mannschaften in jedem Zeitpunkt  $t$  typischerweise sehr gering.

Als erstes nehmen PRR nun an, dass bei steigender Intensität des Offensivspiels sowohl die Wahrscheinlichkeit für einen eigenen als auch für einen Torerfolg des Gegners steigt:

---

<sup>3</sup> Neben der Wahl der Strategie werden die Torwahrscheinlichkeiten natürlich auch durch weitere Faktoren beeinflusst. PRR nennen hier zum Beispiel den Heimvorteil oder die Spielstärke der Mannschaften (vgl. Palomino/Rigotti/Rustichini (2000, S. 9)).

**1. Annahme (Monotonie):** Für  $i=1,2$  ist  $p_i$  steigend (d.h. für  $s \succ s'$  gilt  $p(s) > p(s')$ ).

Aufgrund dieser Annahme gelten folgende Beziehungen:

$$p_1(a,d) > p_1(d,d), p_1(d,a) > p_1(d,d), p_1(a,a) > p_1(a,d). \quad (2.1)$$

Die erste Beziehung gilt trivialerweise, bei gleichbleibender Strategie des Gegners steigt die Wahrscheinlichkeit für einen eigenen Torerfolg beim Umschalten von Verteidigung auf Angriff. Analog steigt die Wahrscheinlichkeit für einen eigenen Torerfolg, wenn der Gegner von einer Verteidigungsstrategie zu einer Angriffsstrategie wechselt, da er damit seine Abwehr schwächt. Dies gilt sowohl bei einer eigenen Angriffsstrategie als auch bei einer eigenen Verteidigungsstrategie, wie die Beziehungen zwei und drei in (2.1) zeigen. Es ist jeweils einfacher, ein Tor gegen eine angreifende als gegen eine verteidigende Mannschaft zu erzielen. Die noch fehlende Relation zwischen  $p_1(a,d)$  und  $p_1(d,a)$  wird weiter unten präzisiert.

Die Punktzahl, die die beiden Teams am Ende des Spiels jeweils erhalten, kann durch zwei Funktionen  $P_1$  und  $P_2$  ausgedrückt werden, die (wie die Punktzahl selbst) nur von der Tordifferenz in  $T$  abhängen:

$$(P_1(n_T^1 - n_T^2), P_2(n_T^1 - n_T^2)),$$

wobei  $n_T^i \geq 0$  die im Spiel von Mannschaft  $i$  erzielten Tore darstellt. Sei in diesem Zusammenhang  $n_T$  der Torvorsprung von Team 1 in  $T$ :  $n_T := n_T^1 - n_T^2$ .

Im Unterschied zu den Modellen von PRR oder auch Brocas/Carrillo (2004) wird hier  $P_1(n_T)$  definiert als

$$P_1(n_T) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \\ x, & \text{falls } n = 0. \\ 0, & \text{falls } n < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Im Falle der Zwei-Punkte-Regel soll dann  $x = 0,5$  gelten; es handelt sich also um ein Konstantsummenspiel, die Punktzahl der beiden Mannschaften ergeben zusammengenommen

immer den Wert eins. Für die Drei-Punkte-Regel gilt entsprechend  $x = 0, \bar{3}$ ; es liegt also ein Nicht-Konstantsummenspiel vor, was die Modellbildung, wie bereits erwähnt, etwas erschwert. Formel (2.2) verdeutlicht die angesprochene Interpretation der Drei-Punkte-Regel. Während durch ein Unentschieden unter der alten Regel die Hälfte der Siegpunktzahl erzielt werden konnten, erhält man unter der neuen Regel bei unentschiedenem Ergebnis nur ein Drittel der möglichen Punkte.<sup>4</sup>

Ausgehend von (2.2) kann nun für jeden Zeitpunkt und jeden Spielstand eine Wertefunktion aufgestellt werden, da für jeden Zeitpunkt  $t$  und jedes Paar  $(n_t^1, n_t^2)$  erzielter Tore ein Teilspiel  $\Gamma(t, n_t^1, n_t^2)$  beginnend im Zeitpunkt  $t$  mit diesem Spielstand existiert. Dabei können die Strategien in jedem Teilspiel aus dem Mischen reiner Strategien entstehen. Die gemischten Strategien der beiden Teams in Teilspiel  $\Gamma(t, n_t^1, n_t^2)$  werden mit  $(\sigma_1(t, n_t^1), \sigma_2(t, n_t^2))$  bezeichnet. Im Zusammenhang mit  $\Gamma(t, n_t^1, n_t^2)$  existiert jeweils ein Wert für die beiden Teams bei einer Tordifferenz von  $n_t = n_t^1 - n_t^2$  und  $T - t$  verbleibender Spielminuten.<sup>5</sup> Da die einzige Determinante für den Payoff der Endstand ist, hängt dieser Wert wiederum nur von  $n_t$  und  $t$  ab und wird daher mit  $(v_1(t, n), v_2(t, n))$  bezeichnet. Trivialerweise gilt dabei:

$$(v_1(T, n), v_2(T, n)) = (P_1(n), P_2(n)). \quad (2.3)$$

---

<sup>4</sup> Der Unterschied zwischen Modell und tatsächlicher Punkteverteilung in Fußballspielen liegt darin, dass sich in der Realität durch Einführung der Drei-Punkte-Regel am Punkteabstand zwischen einem Unentschieden und einer Niederlage nichts geändert hat, unter beiden Regeln liegt der Unterschied bei einem Punkt. Die Wahl des unterschiedlichen Abstandes von einem halben auf einen drittel Punkt im Modell verdeutlicht noch einmal die Interpretation der Drei-Punkte-Regel als Abwertung des Unentschiedens, ändert aber nichts an der Übertragbarkeit der Simulationsergebnisse auf die Realität.

<sup>5</sup> Vgl. Palomino/Rigotti/Rustichini (2000, S. 11).

## 2.1 Nash-Gleichgewicht des Spiels

Für jede Tordifferenz  $n$  ist der Wert des Spieles  $\Gamma(t, n)$  für Team 1 gegeben durch<sup>6</sup>

$$v_1(t, n) = \max_{\sigma_1} E_{(\sigma_1, \sigma_2^*)} v_1(T, N), \text{ wobei } \sigma_2 \leq \sigma_2^*, \text{ für alle } \sigma_2 \in \Delta(\{a, d\}). \quad (2.4)$$

Analog berechnet sich der Wert für Team 2 bei gegebener optimaler Strategie  $\sigma_1^*$  für Team 1 durch

$$v_2(t, n) = \max_{\sigma_2} E_{(\sigma_1^*, \sigma_2)} v_2(T, N). \quad (2.5)$$

Die Strategien der beiden Teams beeinflussen dabei die Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Endstand  $N$ .

Zur Unterscheidung der Wertefunktionen sei im Folgenden  $v_i^2(t, n)$  die Wertefunktion unter der Zwei-Punkte-Regel und  $v_i^3(t, n)$  die Wertefunktion unter der Drei-Punkte-Regel. Ist eine Unterscheidung zwischen den Regeln nicht notwendig, wird weiterhin die Notation ohne Exponent verwendet. Außerdem gelte zur Unterscheidung  $(P_1^2(n), P_2^2(n)) := (v_1^2(T, n), v_2^2(T, n))$  und  $(P_1^3(n), P_2^3(n)) := (v_1^3(T, n), v_2^3(T, n))$ . Für die Wertefunktion unter der Zwei-Punkte-Regel gilt dann für alle  $t$  und alle  $n$ :

$$v^2(t, n) := v_1^2(t, n) = 1 - v_2^2(t, n), \quad (2.6)$$

während es unter der Drei-Punkte-Regel nicht mehr so leicht möglich ist, die Wertefunktion einer Mannschaft in Abhängigkeit der Wertefunktion ihres Gegners darzustellen.

---

<sup>6</sup> Es wird davon ausgegangen, dass die Mannschaften versuchen, die Punktzahl am Ende des Spiels zu maximieren. Dabei wird außer Acht gelassen, dass vor allem gegen Ende der Saison die Situation eintreten kann, dass zum Beispiel einer Mannschaft ein Unentschieden (oder sogar eine Niederlage) genügt, um Meister zu werden, nicht abzustiegen oder ein anderes gesetztes Ziel zu erreichen.

## 2.2 Modell für homogene Mannschaften

Zur Vereinfachung des Modells wird zunächst angenommen, dass beide Mannschaften identisch stark sind, d.h. die Wahrscheinlichkeit ein Tor zu schießen, ist für beide Mannschaften (bei gleicher Strategie) gleich hoch.

**2. Annahme (Symmetrie):**  $p_1(s_1, s_2) = p_2(s_2, s_1)$  für alle  $(s_1, s_2)$ .

Analog zu den Ausführungen in PRR werden daher folgende Notationen verwendet:

$$\begin{aligned} \alpha &:= p_1(a, d) = p_2(d, a), \quad \delta := p_1(d, a) = p_2(a, d), \\ A &:= p_1(a, a) = p_2(a, a), \quad D := p_1(d, d) = p_2(d, d). \end{aligned} \tag{2.7}$$

In Kapitel 2.3 wird die Annahme homogener Mannschaften dann aufgehoben und Spiele zwischen unterschiedlich starken Teams betrachtet.

Als erste Eigenschaft der Wertefunktion sowohl unter der Zwei- als auch unter der Drei-Punkte-Regel gilt nun, dass  $v(t, \cdot)$  für alle  $t$  monoton steigend ist. Zum Beweis einiger weiterer Eigenschaften der Wertefunktion der Zwei-Punkte-Regel sei  $\pi$  eine Permutation  $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1$  und  $f$  die Permutation der Strategiemenge:

$$f(\sigma) := f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_2, \sigma_1), \quad p_i(s) = p_{\pi(i)}(f(s)) \quad \forall i, \quad \forall s.$$

Sei zusätzlich  $\hat{\sigma}(t, n) := (\hat{\sigma}_1(t, n), \hat{\sigma}_2(t, n))$  das Gleichgewicht des Teilspiels beginnend bei  $(t, n)$ . Dann folgt aus der Annahme der gleich starken Mannschaften (2. Annahme):

$$\hat{\sigma}(t, -n) = f(\hat{\sigma}(t, n)).$$

Sei nun  $N$  die Anzahl der Tore, die eine der Mannschaft in der Zeit von  $t$  bis  $T$  schießt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
v^2(t, -n) &= E_{\hat{\sigma}(t, -n)} G^2(-n + N) \\
&= E_{f(\hat{\sigma}(t, n))} G^2(-n + N) \\
&= E_{\hat{\sigma}(t, n)} G^2(-n - N) \\
&= E_{\hat{\sigma}(t, n)} (1 - G^2(n + N)) \\
&= 1 - v^2(t, n)
\end{aligned}$$

und damit für alle  $t$  und alle  $n$  :

$$v^2(t, n) = 1 - v^2(t, -n) \quad (2.8)$$

Speziell gilt für alle  $t$  :

$$v^2(t, 0) = 0,5, \quad (2.9)$$

sowie  $\forall n$  :

$$v^3(t, n) \leq v^2(t, n) \quad (2.10)$$

und

$$v^2(i, T - i + 1) = v^3(i, T - i + 1) = 1 \quad \forall i \leq T, \quad (2.11)$$

da pro Zeitpunkt nicht mehr als ein Tor erzielt werden kann.

Aus (2.2) folgt:

$$v^2(T, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \\ 0,5, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{falls } n < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad v^3(T, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \\ 0, \bar{3}, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

und daraus schließlich folgende Wertefunktion zum Zeitpunkt  $t-1 \quad \forall t, \forall n$  :

$$v(t-1, n) := \max_{\sigma_1 \in \Delta(\{d, a\})} E_{(\sigma_1, \sigma_2^*)} [p_1 v(t, n+1) + p_2 v(t, n-1) + (1-p_1-p_2)v(t, n)]. \quad (2.12)$$

Mit Hilfe dieser Wertefunktion sollen nun zuerst die optimalen Strategien homogener Mannschaften bei unentschiedenem sowie nicht unentschiedenem Spielstand berechnet werden und dann die jeweiligen Strategien für Teams mit unterschiedlicher Spielstärke.

### 2.2.1 Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand

Bevor ein Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand berechnet werden kann, muss eine weitere Annahme bezüglich der Relationen zwischen den Wahrscheinlichkeiten für einen Torerfolg bei unterschiedlichen Strategien getroffen werden:

**3. Annahme (Angreifen ist effektiv):**  $p_1(a, d) > p_1(d, a)$ .

Diese Annahme besagt, dass unter der Symmetrievoraussetzung die Wahrscheinlichkeit eines Torerfolgs für ein Team, das gegen ein verteidigendes Team angreift, höher ist als die Torwahrscheinlichkeit für ein verteidigendes Team gegen ein angreifendes Team.

Anhand der Wertefunktion sowie der getroffenen Annahmen bezüglich der Wahrscheinlichkeiten für einen Torerfolg kann nun für jeden Zeitpunkt im Spiel die optimale Strategie bei gegebener Strategie des gegnerischen Teams berechnet werden.

Für jedes  $t$  bei unentschiedenem Spielstand gilt für den Erwartungswert unter der Zweipunkte-Regel:

$$\begin{aligned} v^2(t, 0) &= \max_{\sigma_1} p_1 v^2(t+1, 1) + p_2 v^2(t+1, -1) + (1-p_1-p_2)v^2(t+1, 0) \\ &= \max_{\sigma_1} p_1 v^2(t+1, 1) + p_2 (1-v^2(t+1, 1)) + (1-p_1-p_2)v^2(t+1, 0) \\ &= \max_{\sigma_1} \underbrace{v^2(t+1, 1)}_{>0} (p_1 - p_2) + 0,5(1-p_1+p_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Eine Mannschaft sollte daher bei angreifendem Gegner nur dann eine Angriffsstrategie wählen, wenn

$$(A-\delta)v^2(t+1, 1) + (A-\alpha)v^2(t+1, -1) - (2A-\alpha-\delta)v^2(t+1, 0) > 0 \quad (2.14)$$

erfüllt ist. (2.14) gilt aber für alle  $t \in \{0, \dots, T\}$ , da

$$\begin{aligned} & (A - \delta)v^2(t+1,1) + (A - \alpha)v^2(t+1,-1) - (2A - \alpha - \delta)v^2(t+1,0) \\ &= (A - \delta)v^2(t+1,1) + (A - \alpha)(1 - v^2(t+1,1)) - \frac{1}{2}(2A - \alpha - \delta) \\ &= \underbrace{(\alpha - \delta)}_{>0} \underbrace{v^2(t+1,1)}_{>1/2} + \frac{1}{2} \underbrace{(\delta - \alpha)}_{<0} > 0. \end{aligned}$$

Spielt die Mannschaft gegen ein verteidigendes Team gilt entsprechend

$$(\alpha - D)v^2(t+1,1) + (\delta - D)v^2(t+1,-1) + (2D - \alpha - \delta)v^2(t+1,0) = (\alpha - \delta)v^2(t+1,1) + \frac{1}{2}(\delta - \alpha) > 0.$$

Es zeigt sich also, dass für alle  $t \in \{0, \dots, T\}$  „Angriff“ die dominante Strategie ist, da der Erwartungswert bei einer Angriffsstrategie unabhängig von der Strategiewahl des Gegners immer größer ist als der Erwartungswert einer Verteidigungsstrategie.

Für den Erwartungswert unter der Drei-Punkte-Regel gilt analog:

$$v^3(t,0) = \max_{\sigma_1} p_1 v^3(t+1,1) + p_2 v^3(t+1,-1) + (1 - p_1 - p_2) v^3(t+1,0). \quad (2.15)$$

Der Nachteil des Nichtkonstantsummenspiels unter der Drei-Punkte-Regel liegt darin, dass dieser Erwartungswert nicht weiter zusammengefasst werden kann. Es gilt aber auch hier, dass eine Mannschaft nur eine Angriffsstrategie wählt, wenn bei angreifendem Gegner

$$(A - \delta)v^3(t+1,1) + (A - \alpha)v^3(t+1,-1) - (2A - \alpha - \delta)v^3(t+1,0) > 0 \quad (2.16)$$

und bei verteidigendem Gegner

$$(\alpha - D)v^3(t+1,1) + (\delta - D)v^3(t+1,-1) + (2D - \alpha - \delta)v^3(t+1,0) > 0 \quad (2.17)$$

erfüllt ist.



Ob (2.16) bzw. (2.17) erfüllt sind, hängt zum einen vom Zeitpunkt im Spiel und zum anderen von der Höhe der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für einen Torerfolg bei den verschiedenen Strategiemöglichkeiten ab.<sup>7</sup>

Zur Veranschaulichung soll zunächst die Situation eines unentschiedenen Spielstandes in der Schlussminute betrachtet werden. Geht man davon aus, dass die gegnerische Mannschaft die Strategie „Angriff“ wählt, ist die Differenz der Erwartungswerte unter der Zwei-Punkte-Regel

$$(A - \delta)v^2(T, 1) - (2A - \alpha - \delta)v^2(T, 0) = \frac{1}{2}(\alpha - \delta) > 0$$

und unter der Drei-Punkte-Regel

$$(A - \delta)v^3(T, 1) - (2A - \alpha - \delta)v^3(T, 0) > \frac{2}{3}(\alpha - \delta) > 0.$$

Nimmt man stattdessen an, dass der Gegner defensiv spielt, erhält man die Differenzen:

$$(\alpha - D)v^2(T, 1) + (2D - \alpha - \delta)v^2(T, 0) = \frac{1}{2}(\alpha - \delta) > 0 \quad [2PR]$$

bzw.

$$(\alpha - D)v^3(T, 1) + (2D - \alpha - \delta)v^3(T, 0) = \frac{2}{3}(\alpha - \delta) > 0 \quad [3PR].$$

Für beide Regeln zeigt sich, dass unabhängig von der Strategiewahl des Gegners die Strategie „Angriff“ in dieser Spielsituation einen höheren Erwartungswert hat als die Strategie „Verteidigung“. Aufgrund der Annahme gleich starker Mannschaften gilt dies auch für die gegnerische Mannschaft. Die Strategie  $s = (a, a)$  ist also bei unentschiedenem Spielstand in der Schlussminute ein Nash-Gleichgewicht. Beide Mannschaften sollten demnach in dieser Situation angreifen. Theoretisch müsste allerdings der Anreiz für einen Angriff unter der Drei-Punkte-Regel stärker sein, da hier in der letzten Minute die Punktzahl von einem Drittel

---

<sup>7</sup> Wie später gezeigt wird, sind (2.16) und (2.17) unter realistischen Torwahrscheinlichkeiten zwar immer erfüllt, ein formaler Beweis ist jedoch nicht möglich, da die Gleichungen nicht für alle möglichen Torwahrscheinlichkeiten erfüllt sind.

Punkt auf einen Punkt erhöht werden kann, während unter der Zwei-Punkte-Regel nur eine Verbesserung um einen halben Punkt bei einem Torerfolg möglich ist. Zusätzlich hat man unter der Drei-Punkte-Regel bei einem Gegentor weniger zu verlieren. Tatsächlich ist die Differenz zwischen den Erwartungswerten der Angriffs- und Verteidigungsstrategie bei gegebener Angriffsstrategie des Gegners unter der Drei-Punkte-Regel größer als unter der Zwei-Punkte-Regel, da

$$\frac{2}{3}(\alpha - \delta) > \frac{1}{2}(\alpha - \delta).$$

Da eine Berechnung der Nullstellen der Erwartungswertdifferenzen und damit die Berechnung einer möglicherweise dominanten Strategie wie unter der Zwei-Punkte-Regel in allgemeiner Form aufgrund der rekursiven Darstellung der Wertefunktionen unter der Drei-Punkte-Regel nicht möglich ist, werden nun beispielhaft Werte für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten angenommen. Wie oben dargestellt, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Torerfolg in einer Minute des Spiels sehr gering und zusätzlich von den gewählten Strategien der beiden Mannschaften abhängig.

Erhobene Daten der 1. Fußball-Bundesliga<sup>8</sup> zeigen, dass durchschnittlich zwischen 0,005 und 0,03 Tore pro Minute erzielt werden. Zusätzlich lässt sich feststellen, dass die durchschnittliche Toranzahl pro Minute im Laufe des Spiels ansteigt, wie Abbildung 1 zeigt. Der starke Anstieg der erzielten Tore in der 45. und 90. Minute entsteht dabei durch in der Nachspielzeit der ersten bzw. zweiten Halbzeit erzielte Tore.

---

<sup>8</sup> Es wurden Daten aus zehn Saisons vor und seit der Einführung der Drei-Punkte-Regel (6.194 Spiele) erhoben.

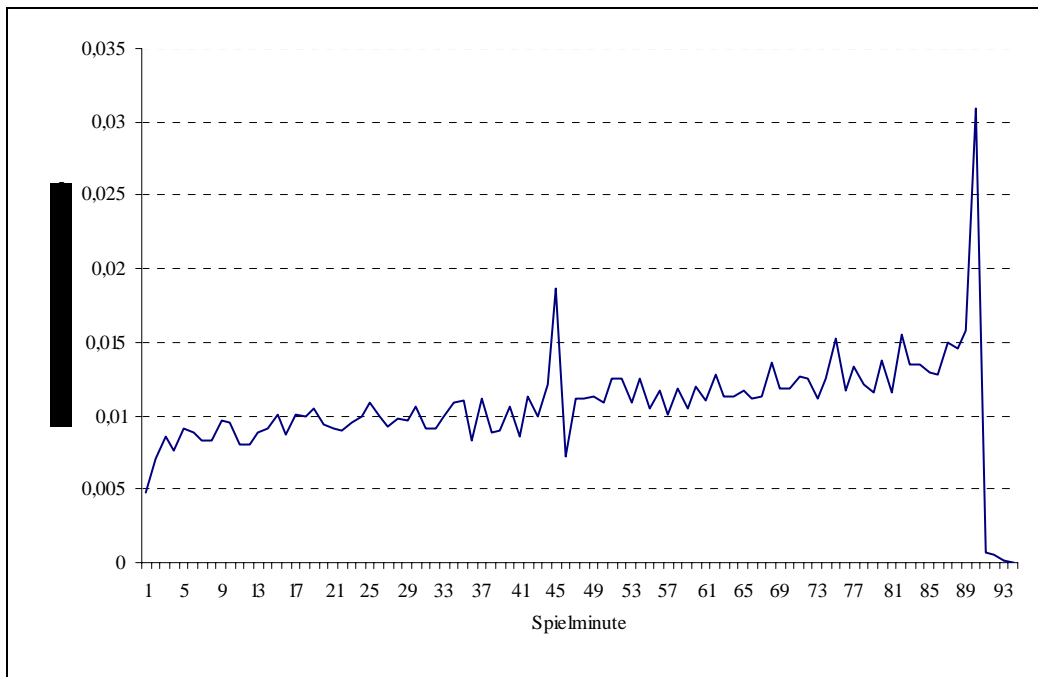


Abb. 1: Durchschnittliche Toranzahl pro Minute.

Zunächst werden daher für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten die Werte

$$A = 0,035; a = 0,02; d = 0,01 \text{ und } D = 0,005$$

angenommen und weiterhin davon ausgegangen, dass die beiden Mannschaften identische Spielstärken haben, die Wahrscheinlichkeiten für einen Torerfolg (bei gleicher Strategie) also für beide Mannschaften gleich hoch sind.<sup>9</sup>

Abbildung 2 stellt den Verlauf der Erwartungswertdifferenzen für die Zwei- und Drei-Punkte-Regel bei unentschiedenem Spielstand dar.<sup>10</sup> Für die Zwei-Punkte-Regel ist eine Angriffsstrategie für den Gegner unabhängig von der eigenen Strategiewahl und den angenommenen Werten für die einzelnen Torwahrscheinlichkeiten in jeder Minute dominant. Für die Drei-Punkte-Regel lässt sich zeigen, dass die Erwartungswertdifferenzen sowohl bei angreifendem als auch verteidigendem Gegner im gesamten Spielverlauf positiv sind, für die gewählten Tor-

<sup>9</sup> Bei der Simulation wird davon ausgegangen, dass eine Mannschaft, die mit vier oder mehr Toren führt, das Spiel gewinnt. Diese Annahme vereinfacht die Simulation der Punkte-Erwartungswerte bei unterschiedlichen Strategien und lässt sich anhand von Daten der 1. Fußball-Bundesliga empirisch bestätigen. In keinem Ligaspiel zehn Saisons vor und seit der Einführung der Drei-Punkte-Regel (6.194 Spiele) gelang einer Mannschaft, die im Laufe des Spiels mit vier oder mehr Toren in Rückstand geriet, noch der Ausgleich oder sogar ein Sieg. Außerdem wird davon ausgegangen, dass ein Spiel 90 Minuten dauert. Eine mögliche Nachspielzeit vor der Halbzeitpause und vor Ende des Spiels wird nicht berücksichtigt.

<sup>10</sup> Für eine genauere Beschreibung der Vorgehensweise in der Simulation siehe Anhang A2.

wahrscheinlichkeiten ist also auch unter der Drei-Punkte-Regel „Angriff“ die dominante Strategie und es werden daher hier nur die Differenzen bei gegebener Angriffsstrategie der gegnerischen Mannschaft dargestellt. Es zeigt sich zum einen, dass die Differenz der Erwartungswerte unter der Drei-Punkte-Regel unabhängig vom Zeitpunkt im Spiel stets größer ist als die Erwartungswertdifferenz unter der Zwei-Punkte-Regel, und zum anderen, dass der Anreiz für eine offensive Spielweise unter der neuen Regel im Laufe des Spiels sehr viel stärker ansteigt als unter der alten Regel. Während der Unterschied in der erwarteten Punktzahl unter der Zwei-Punkte-Regel nur von 0,0017 auf 0,005 ansteigt, beträgt der Unterschied in den Erwartungswerten zu Beginn des Spiels unter der Drei-Punkte-Regel 0,0018 und am Ende des Spiels 0,0117.

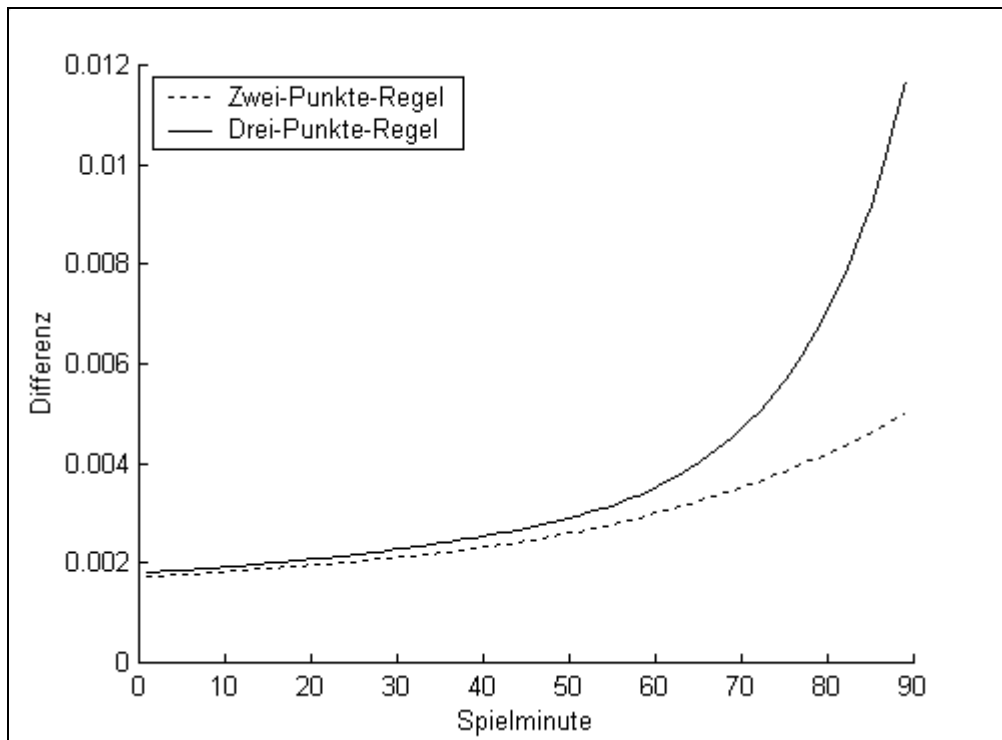


Abb. 2: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand.

Eine Änderung der Werte für die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zeigt, dass sich der Verlauf der Differenzen nur geringfügig ändert. Abbildung 3 zeigt zunächst den Einfluss der Torwahrscheinlichkeit bei beiderseitigem Angriffsspiel auf die Erwartungswertdifferenz. Während die anderen Torwahrscheinlichkeiten konstant bleiben ( $a = 0,02$ ;  $d = 0,01$  und  $D = 0,005$ ), wird  $A$  von 0,025 schrittweise jeweils um 0,005 auf 0,06 erhöht. Auffällig ist, dass diese Änderung der Torwahrscheinlichkeit nur zu Beginn des Spiels einen Einfluss auf

die Erwartungswertdifferenzen unter der Zwei-Punkte-Regel hat.<sup>11</sup> Unter der Drei-Punkte-Regel wird der Verlauf der Erwartungswertkurve mit steigendem  $A$  hingegen steiler.

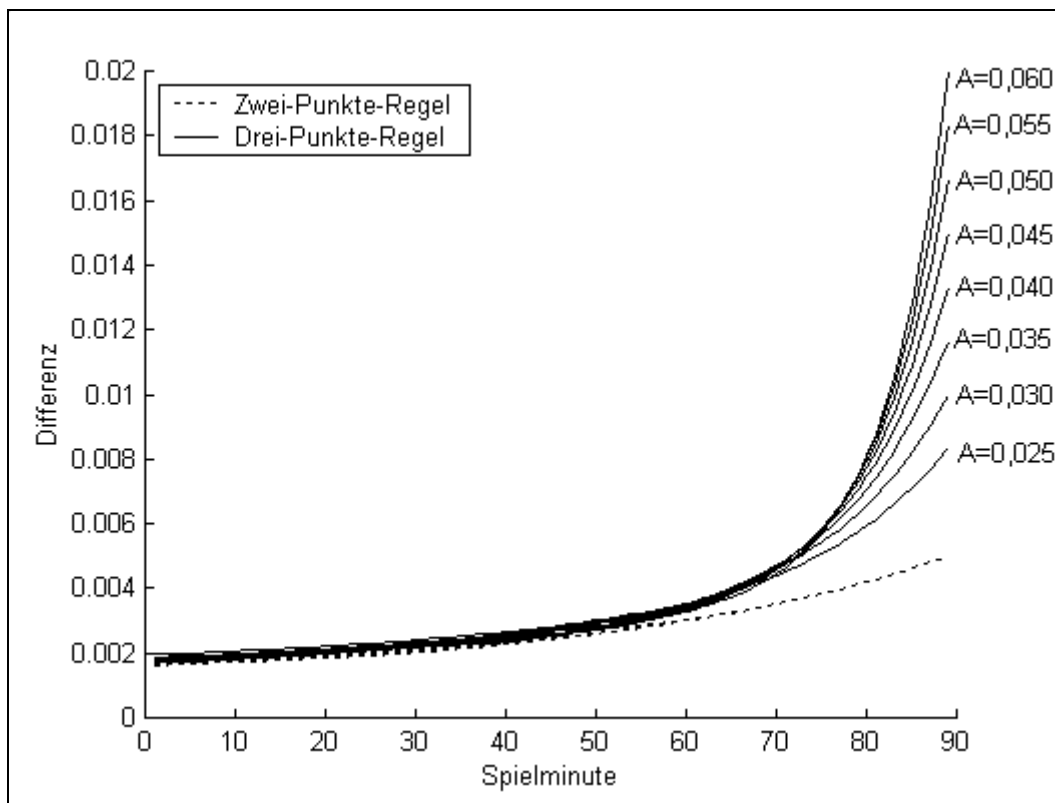


Abb. 3: Änderung der Differenzen der Erwartungswerte für verschiedene Werte von  $A$ .

Größeren Einfluss hat eine Änderung der Torwahrscheinlichkeiten bei einer angreifenden und einer verteidigenden Mannschaft. Abbildung 4 (konstante Werte für  $A$ ,  $\delta$  und  $D$  mit  $A = 0,06$ ;  $\delta = 0,01$  und  $D = 0,005$ ) zeigt die Änderung der Torwahrscheinlichkeit  $\alpha$  von 0,02 bis 0,055 (gleiche Schrittweite wie bei  $A$ ) und Abbildung 5 (konstante Werte für  $A$ ,  $\alpha$  und  $D$  mit  $A = 0,06$ ;  $\alpha = 0,055$  und  $D = 0,005$ ) die Änderung von  $\delta$  von 0,01 auf 0,05.

<sup>11</sup> Dieser Einfluss ist jedoch so gering, dass er in der Abbildung kaum sichtbar ist.

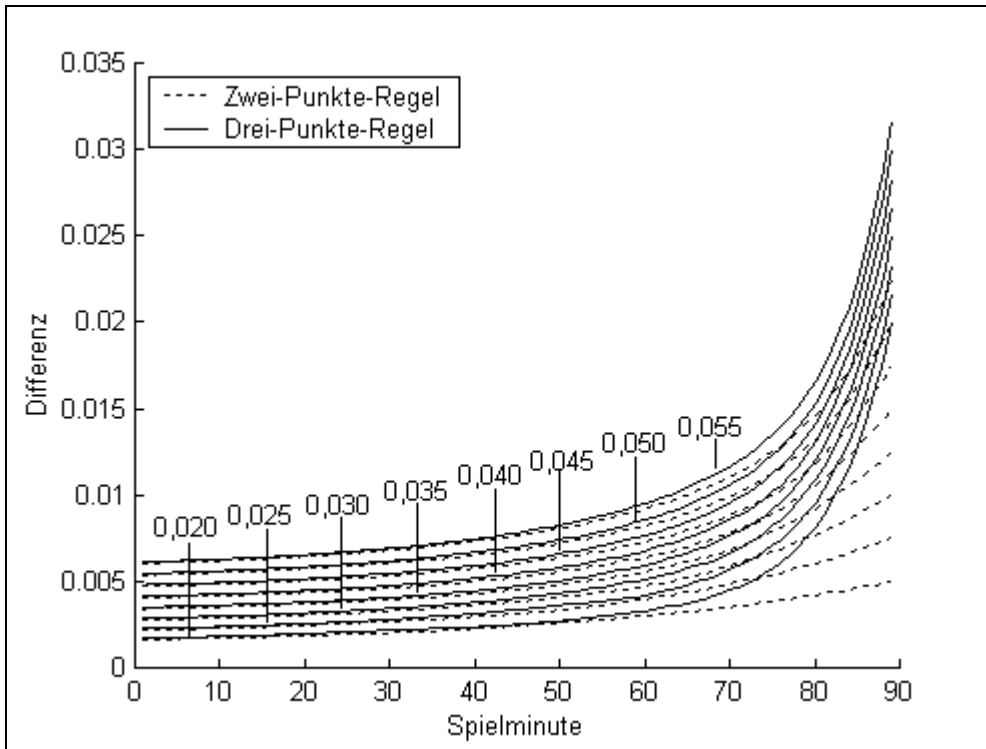


Abb. 4: Änderung der Differenzen der Erwartungswerte für verschiedene Werte von  $\alpha$ .

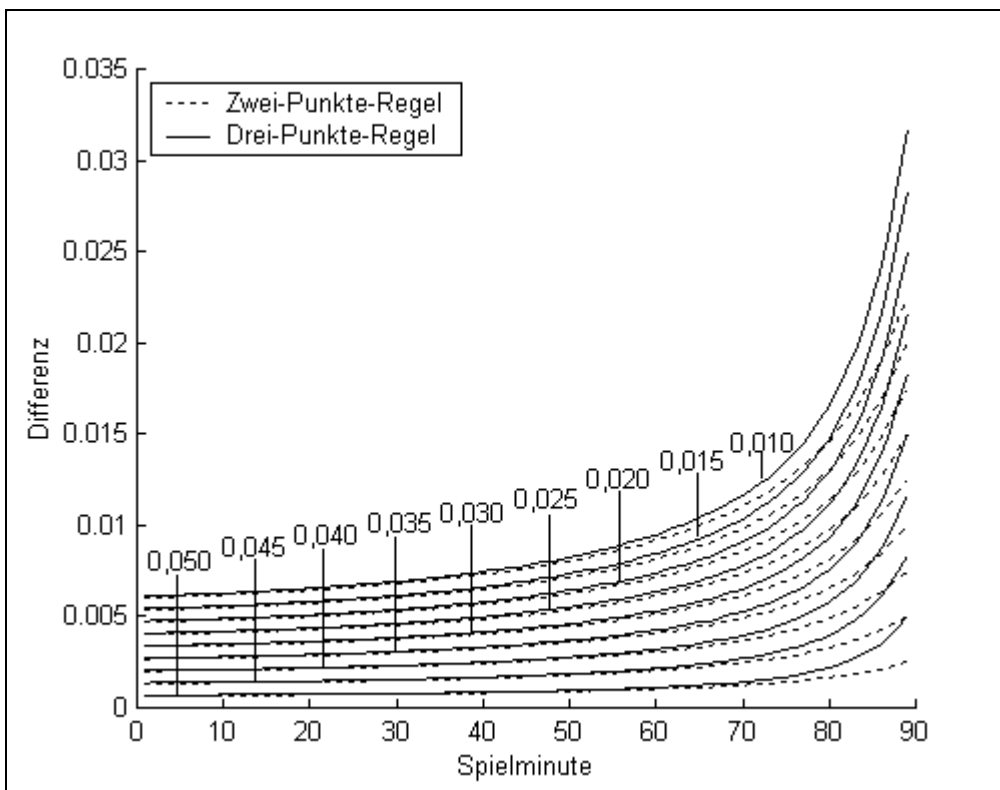


Abb. 5: Änderung der Differenzen der Erwartungswerte für verschiedene Werte von  $\delta$ .

Trotz ähnlich aussehender Verläufe in Abbildung 4 und 5 liegt der entscheidende Unterschied darin, dass bei einer Erhöhung der Torwahrscheinlichkeit  $\alpha$  die Erwartungswertkurven steiler verlaufen, während eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit  $\delta$  zu flacheren Verläufen führt. Die abschließende Änderung der Torwahrscheinlichkeit  $D$  lässt die Erwartungswertverläufe unverändert. In allen Fällen führt jedoch unabhängig von der Strategie des Gegners eine Angriffsstrategie zu höheren Erwartungswerten als eine Verteidigungsstrategie. Es lässt sich also festhalten, dass die Einführung der Drei-Punkte-Regel wie erhofft, zumindest theoretisch, bei realistischen Torwahrscheinlichkeiten zu einer offensiveren Spielweise beider beteiligter Mannschaften schon zu Beginn des Spiels führt und dieser erhöhte Offensivanreiz im Laufe des Spiels noch stärker ansteigt. Wie in Fußnote 6 bereits angedeutet, sind (2.16) und (2.17) unter der Drei-Punkte-Regel nicht für alle Torwahrscheinlichkeiten erfüllt. Geht man bei beiderseitiger Angriffsstrategie von einer Torwahrscheinlichkeit von 0,8 aus, ergeben sich die in Abbildung 6 dargestellten Erwartungswertdifferenzen:

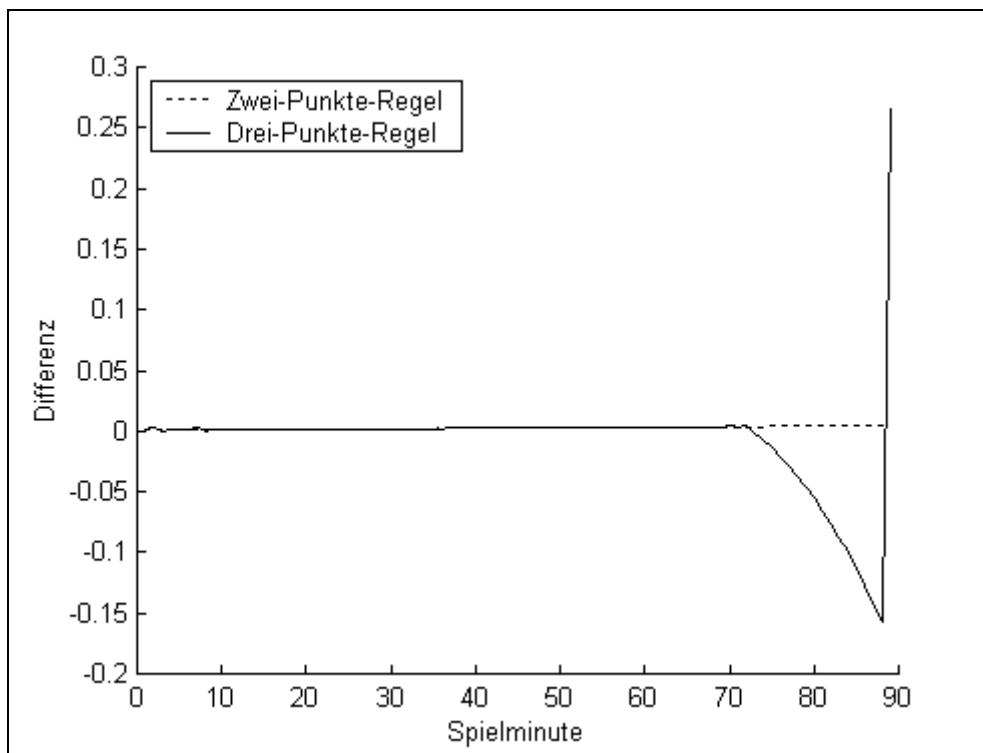


Abb. 6: Differenz der Erwartungswerte für  $A=0,8$ .

Während die Erwartungswertdifferenz unter der Zwei-Punkte-Regel weiterhin nicht negativ ist, verläuft die Erwartungswertdifferenz unter der neuen Punkte-Regel im Verlaufe des Spiels teilweise im negativen Bereich. Hier sollte also trotz eines unentschiedenen Spielstandes zu einer Verteidigungsstrategie übergegangen werden. Obwohl eine Torwahrscheinlichkeit von 80% pro Minute und Team natürlich nicht realistisch ist, verhindert dieses Ergebnis einen

formalen Beweis der Dominanz der Angriffsstrategie bei unentschiedenem Spielstand wie er für die Zwei-Punkte-Regel durchgeführt werden kann.<sup>12</sup>

Als nächstes soll nun der Fall der Führung eines Teams betrachtet werden.

### 2.2.2 Gleichgewicht bei Führung eines Teams

PRR nehmen für den Fall der Zwei-Punkte-Regel an, dass die in einem Spiel zurückliegende Mannschaft unabhängig von der Restspielzeit immer angreift, da sie bereits in Rückstand liegt und damit nichts mehr zu verlieren hat. Unter dieser Bedingung zeigt das Modell von PRR, dass die führende Mannschaft zu einem Zeitpunkt, der vom jeweiligen Spielstand abhängig ist, von einer offensiven zu einer defensiven Spielweise wechselt und diese bis zu einer erneuten Änderung des Spielstandes, bzw. wenn diese Änderung nicht eintritt, bis zum Ende des Spiels beibehält.

Wegen (2.11) ist im Zeitpunkt  $t$  mit einer Tordifferenz von  $n \geq T - i + 1$  jedes Strategienpaar ein Gleichgewicht, da das Spiel bei einer Tordifferenz größer  $T - i + 1$  zu diesem Zeitpunkt bereits entschieden ist. Es kann aber davon ausgegangen werden, dass eine Mannschaft, die mit  $n \geq T - i + 1$  Toren in Führung liegt, eher defensiv spielen wird, um Kräfte für die nächsten Spiele zu sparen. Es kann daher angenommen werden:

**4. Annahme (Sicherung des Sieges):**  $\hat{\sigma}(t, n) = (d, a)$  für alle  $n \geq T - t + 1$ .

Die führende Mannschaft greift unter der Zwei-Punkte-Regel nur an, wenn der Erwartungswert einer offensiven Strategie größer als der Erwartungswert einer defensiven Strategie ist, d.h. wenn zum Zeitpunkt  $t - 1$  bei einer Tordifferenz von  $n > 0$  (und einem angreifenden Gegner)

$$(A - \alpha)v^2(t, n - 1) + (A - \delta)v^2(t, n + 1) - (2A - \alpha - \delta)v^2(t, n) > 0 \quad (2.18)$$

---

<sup>12</sup> Betrachtet man statt 90 Perioden nur zwei Perioden (in Abbildung 6 dann nur die letzten zwei Perioden), ist eine Torwahrscheinlichkeit von 80% pro Periode realistisch und man erhält das Ergebnis von Brocas/Carrillo (2004). In diesem Fall wäre im Vergleich zur Zwei-Punkte-Regel eine defensivere Spielweise in der ersten Periode (erste Halbzeit) unter der Drei-Punkte-Regel rational und in der zweiten Periode (zweite Halbzeit) eine offensivere Spielweise.



erfüllt ist.

Ab dem Zeitpunkt, in dem (2.18) nicht mehr erfüllt ist, spielt die führende Mannschaft defensiv. Führt also zum Beispiel eine Mannschaft in der vorletzten Spielminute mit einem Tor, wird sie eine Verteidigungsstrategie spielen, da

$$(A - \alpha)v^2(T, 0) + (A - \delta)v^2(T, 2) - (2A - \alpha - \delta)v^2(T, 1) = \frac{1}{2}(\alpha - A) < 0$$

Zusätzlich zu der Höhe der Führung hängt der Zeitpunkt für das Umschalten von Angriff auf Verteidigung natürlich auch von den gewählten Parametern  $A, \alpha, \delta$  und  $D$  ab.<sup>13</sup> Allgemein gilt, dass für  $(T - i, i)$  (2.18) aufgrund von (2.11) nicht mehr erfüllt ist.<sup>14</sup> PRR zeigen weiterhin, dass im Intervall zwischen  $(T - i, i - 1)$  und  $(T - i, i)$  sowohl eine Angriffs- als auch eine Verteidigungsstrategie der führenden Mannschaft zu einem Gleichgewicht führen und dass die führende Mannschaft sobald sie zu einer Verteidigungsstrategie wechselt, diese auch beibehält, solange sie ihre Führung nicht verliert.

Sei dazu  $C(t, n)$  die Menge der optimalen Strategien in  $(t, n)$  für die führende Mannschaft, dann heißt  $d \in C(t, n)$ , dass Verteidigung die beste Strategie in  $(t, n)$  ist. Damit gilt:

**Satz:** Man nehme an, für ein  $t$  und ein  $n$  gelte:  $d \in C(t, n)$  impliziert  $d \in C(t', n) \forall t' \geq t$ , dann gilt auch  $d \in C(t, n)$  impliziert  $d \in C(t, m) \forall m \geq n$ .<sup>15</sup>

Unter der Drei-Punkte-Regel gilt analog, dass eine in Führung liegende Mannschaft im Zeitpunkt  $(t - 1, n)$  mit  $n > 0$  nur dann angreift, wenn

$$(A - \alpha)v^3(t, n - 1) + (A - \delta)v^3(t, n + 1) - (2A - \alpha - \delta)v^3(t, n) > 0. \quad (2.19)$$

Auch unter der Drei-Punkte-Regel ist die Differenz zwischen dem Erwartungswert einer Angriffsstrategie und dem Erwartungswert einer Verteidigungsstrategie zum Zeitpunkt  $(T - i, i)$  nicht mehr positiv.<sup>16</sup>

<sup>13</sup> Siehe dazu auch Palomino/Rigotti/Rustichini (2000).

<sup>14</sup> Beweis siehe Anhang A1.

<sup>15</sup> Siehe Palomino/Rigotti/Rustichini (2000, S. 33) für einen Beweis zur Zwei-Punkte-Regel. Dieser Beweis lässt sich auch leicht für die Drei-Punkte-Regel durchführen.

<sup>16</sup> Für einen Beweis dazu siehe ebenfalls Anhang A1.

In Abbildung 7 wird mit den Werten  $A = 0,035$ ,  $a = 0,02$ ,  $d = 0,01$ ,  $D = 0,005$  zuerst eine Führung mit einem Tor bei gleich starken Mannschaften simuliert. Hier kann dabei angenommen werden, dass die zurückliegende Mannschaft die Strategie „Angriff“ spielt, da sie in Rückstand liegt und damit nichts mehr zu verlieren hat.<sup>17</sup>

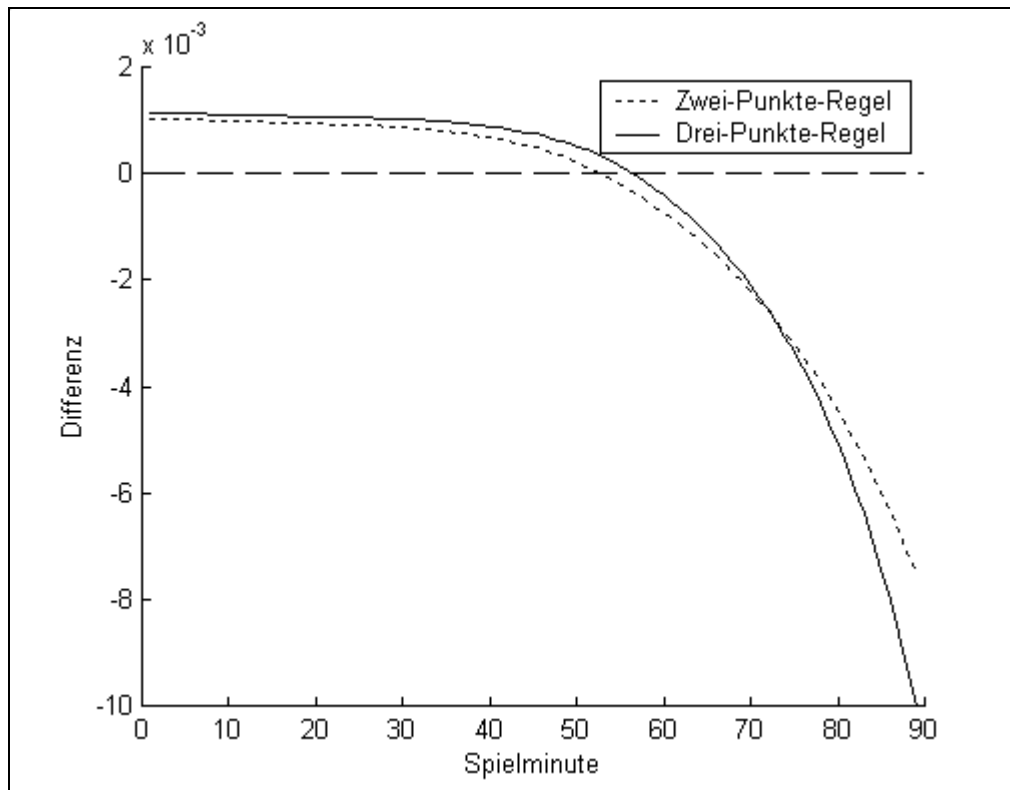


Abb. 7: Differenz der Erwartungswerte bei Tordifferenz 1.

Die Simulation zeigt, dass unter der Drei-Punkte-Regel später von einer Angriffsstrategie zu einer Verteidigungsstrategie gewechselt wird, die Differenz der Erwartungswerte dann aber deutlich schneller negativ wird. Auch hier lässt sich also wie bei unentschiedenem Spielstand ein Effekt der Drei-Punkte-Regel erkennen: Die Aussicht auf eine höhere Punktzahl bei einem Sieg lässt die führende Mannschaft länger offensiv spielen, da dies die Chancen auf ein weiteres Tor und damit auf einen Ausbau der Führung erhöht. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gegnerische Mannschaft den Ausgleich erzielt, ist zwar bei beiderseitiger Angriffsstrategie auch höher als bei einer defensiven Strategie der führenden Mannschaft, aber da auch  $p_2(d, a) > p_1(d, a)$  gilt, wird die führende Mannschaft noch weiter offensiv spielen. Ab dem Zeitpunkt, ab dem die Wahrscheinlichkeit für einen Ausgleich durch die zurückliegende Mannschaft einen bestimmten Wert unterschreitet, wechselt die führende Mannschaft dann

<sup>17</sup> Die Annahme einer verteidigenden zurückliegenden Mannschaft führt zu vergleichbaren Ergebnissen.

von Angriff auf Verteidigung und behält diese Strategie bei bis eine Änderung im Spielstand auftritt oder das Spiel beendet ist.

Bei einem Zwei-Tore-Vorsprung ergibt sich mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten für die Erwartungswertdifferenzen der führenden Mannschaft der in Abbildung 8 dargestellte Verlauf. Im Vergleich zu der Führung mit einem Tor wechselt die führende Mannschaft hier früher zu einer defensiven Strategie. Der Anstieg in den Differenzen gegen Ende des Spiels und vor allem der Differenz von null in der letzten Minute zeigt, dass der Erwartungswert hier unabhängig von der gewählten Strategie ist.<sup>18</sup>

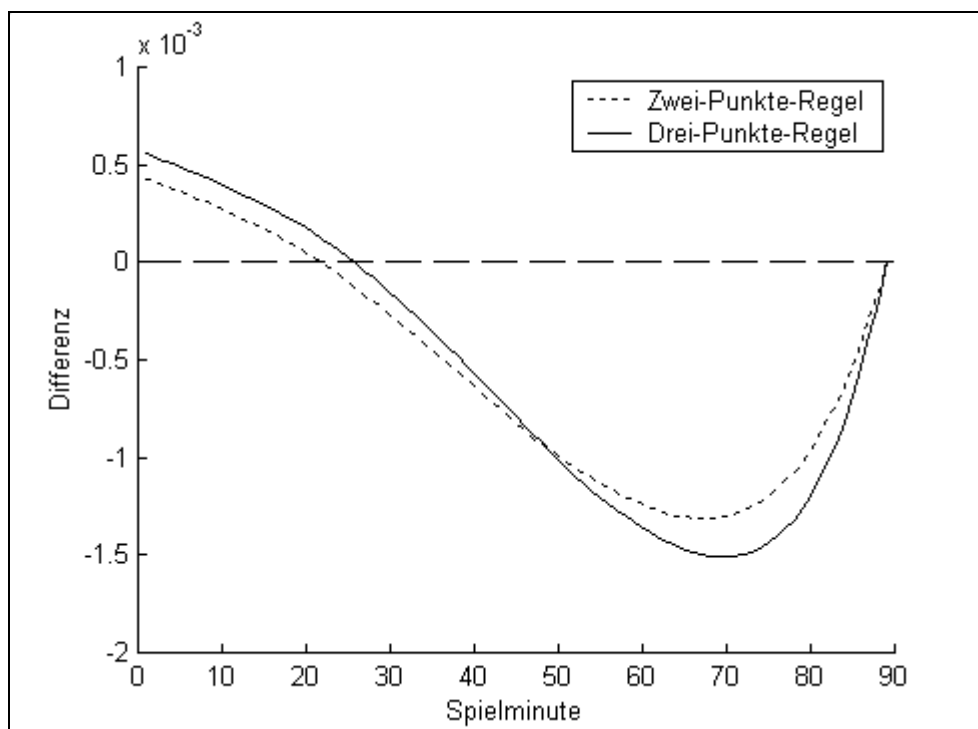


Abb. 8: Differenz der Erwartungswerte bei Tordifferenz 2.

Abschließend zeigt Abbildung 9 den Verlauf der Erwartungswertdifferenzen einer mit drei Toren führenden Mannschaft. Bei einer Tordifferenz von drei findet das Umschalten auf die Verteidigungsstrategie bei der führenden Mannschaft noch früher statt, und wie auch bei einer Führung mit ein bzw. zwei Toren Unterschied behält die führende Mannschaft diese Verteidigungsstrategie bei gleichbleibender Punktedifferenz dann auch bis zum Ende des Spiels bei.

<sup>18</sup> Eine mit zwei Toren in Rückstand liegende Mannschaft kann den Rückstand in einer Minute nur um ein Tor verkürzen.

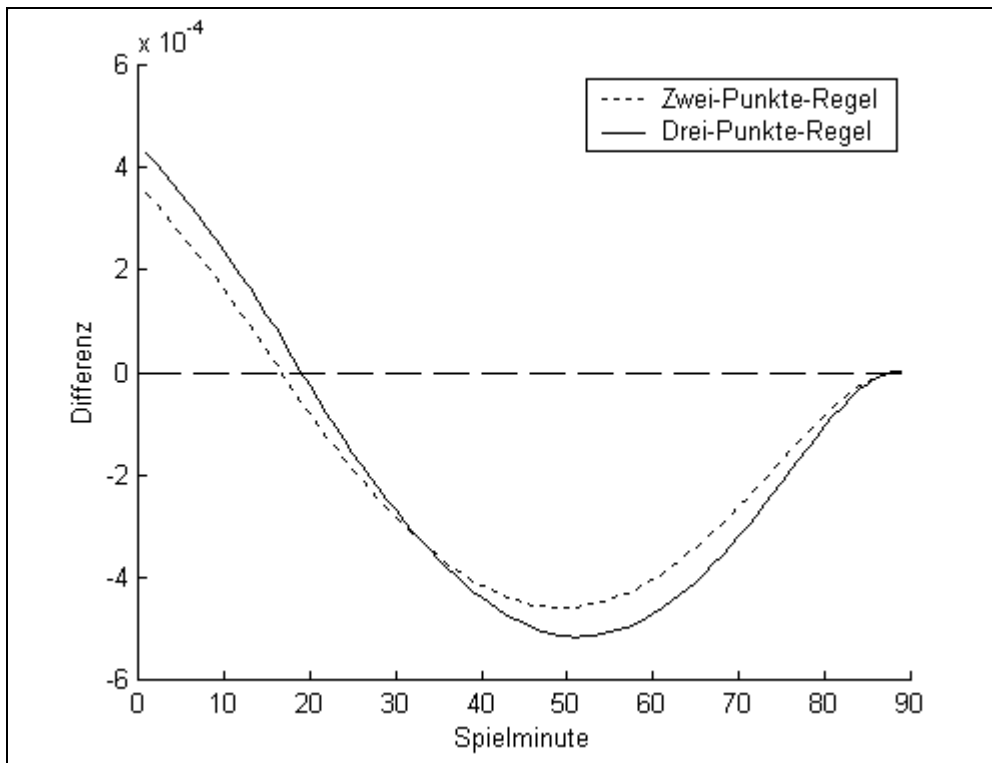


Abb. 9: Differenz der Erwartungswerte bei Tordifferenz 3.

Eine Erhöhung der Torwahrscheinlichkeit bei beiderseitigem Angriffspiel (Erhöhung von  $A$  bei konstanten Werten für  $\alpha$ ,  $\delta$  und  $D$ ) sowie eine Erhöhung der Torwahrscheinlichkeit bei eigener Verteidigungs- und gegnerischer Angriffsstrategie (Erhöhung von  $\delta$  bei konstanten Werten für  $A$ ,  $\alpha$  und  $D$ ) führt unabhängig von der Tordifferenz unter beiden Regeln zu einem früheren Wechsel von Angriff zu Verteidigung. Eine Erhöhung von  $\alpha$  führt hingegen zu einer Verschiebung des Wechsels auf einen späteren Zeitpunkt im Spiel. Analog zu den Ergebnissen bei unentschiedenem Spielstand führt eine Änderung der Torwahrscheinlichkeit  $D$  zu keiner Änderung in den Erwartungswertdifferenzen.

### 2.3 Modell für heterogene Mannschaften

In einem nächsten Schritt soll nun untersucht werden, ob sich die optimalen Strategien ändern, wenn die Annahme identischer Teams aufgehoben wird. Basierend auf dem Modell von PRR<sup>19</sup> wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Torerfolges für die erste Mannschaft höher ist. Es sei daher

<sup>19</sup> PRR behandeln den Fall heterogener Mannschaften nur für einen unentschiedenen Spielstand bzw. eine Führung mit einem Tor in der letzten Minute und nur unter der unten dargestellten Annahme der Parallelverschiebung der Leistungsniveaus.

$$p_1(a, d) := \alpha_1, p_1(d, a) := \delta_1, p_2(d, a) := \alpha_2, p_2(a, d) := \delta_2$$

$$p_i(d, d) := D_i, p_i(a, a) := A_i \text{ für } i = 1, 2$$

und es gelte  $A_i > \alpha_i > D_i$ ,  $i = 1, 2$ . Zusätzlich wird zunächst angenommen, dass

**5. Annahme (Parallelverschiebung):**  $\exists c > 0$  so, dass  $\forall s p_1(s) = p_2(\pi(s)) + c$ .

### 2.3.1 Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand und Parallelverschiebung der Leistungsniveaus

Für die Erwartungswerte der Zwei-Punkte-Regel bei unentschiedenem Spielstand zum Zeitpunkt  $t$  gelten die unter (2.13) dargestellten Berechnungen nicht mehr, da ohne die Symmetrieannahme (2.8) nicht mehr erfüllt ist. Da die Mannschaften nicht mehr homogen sind, erhält man nun außerdem verschiedene Erwartungswerte für die beiden Mannschaften.

Für die stärkere Mannschaft lässt sich festhalten, dass sie bei angreifendem Gegner nur dann eine Angriffsstrategie spielen sollte, wenn

$$(A_1 - \delta_1)v(t+1, 1) + (A_2 - \alpha_2)v(t+1, -1) - (A_1 + A_2 - \alpha_2 - \delta_1)v(t+1, 0) > 0$$

erfüllt ist und bei verteidigendem Gegner, falls

$$(\alpha_1 - D_1)v(t+1, 1) + (\delta_2 - D_2)v(t+1, -1) + (D_1 + D_2 - \alpha_1 - \delta_2)v(t+1, 0) > 0$$

gilt. Analog ist für die schwächere Mannschaft eine Angriffsstrategie dann sinnvoll, wenn bei angreifender starker Mannschaft

$$(A_2 - \delta_2)v(t+1, 1) + (A_1 - \alpha_1)v(t+1, -1) - (A_1 + A_2 - \alpha_1 - \delta_2)v(t+1, 0) > 0$$

und bei verteidigender starker Mannschaft

$$(\alpha_2 - D_2)v(t+1, 1) + (\delta_1 - D_1)v(t+1, -1) + (D_1 + D_2 - \alpha_2 - \delta_1)v(t+1, 0) > 0$$

erfüllt sind.

Auch hier soll nun eine Simulation die optimalen Strategien bei folgenden Torwahrscheinlichkeiten zeigen:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,035; \alpha_1 = 0,02; \delta_1 = 0,01 \text{ und } D_1 = 0,005; \\ A_2 &= 0,03; \alpha_2 = 0,015; \delta_2 = 0,005 \text{ und } D_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Im Gegensatz zu dem Fall eines unentschiedenen Spielstands in einem Spiel gleich starker Mannschaft ist in diesem Fall „Angriff“ für die stärkere Mannschaft nicht mehr die dominante Strategie im gesamten Spielverlauf. Es muss daher (für die schwächere Mannschaft) zwischen der Strategiewahl bei angreifendem und verteidigendem Gegner unterschieden werden. Abbildung 10 zeigt den Verlauf der Erwartungswertdifferenzen bei einem angreifenden Gegner:

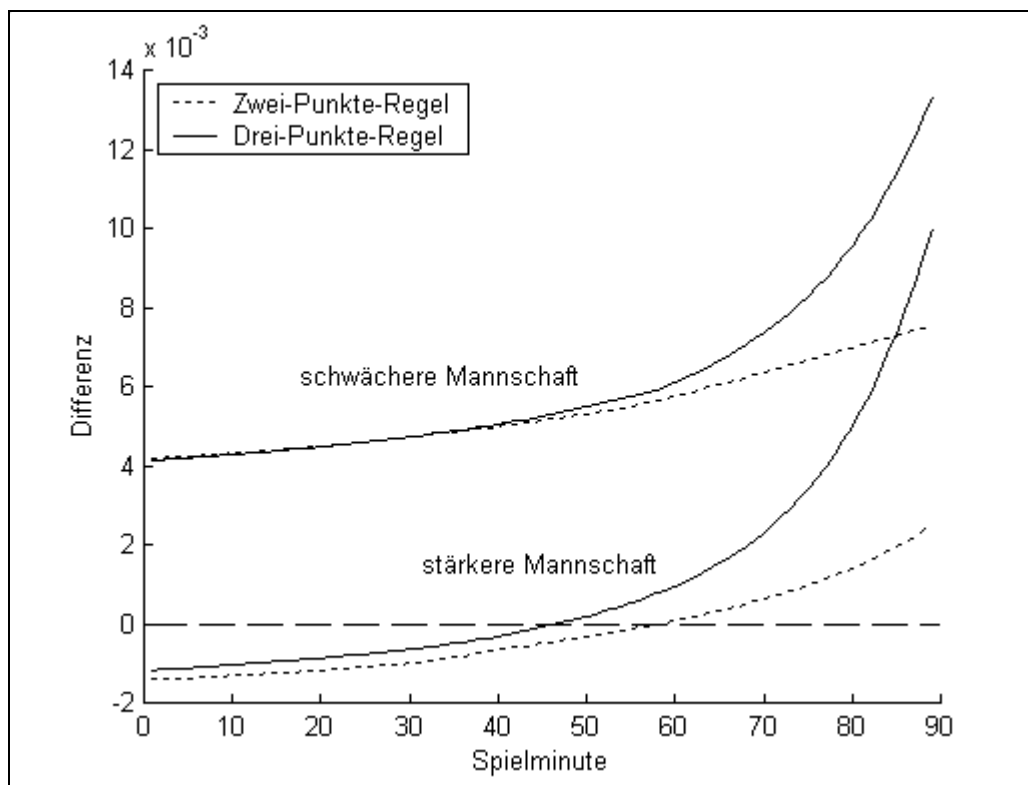


Abb. 10: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, heterogenen Mannschaften und angreifendem Gegner.

Im Fall unterschiedlich starker Mannschaften gibt es nur noch für die schwache Mannschaft eine dominante Strategie für das gesamte Spiel. Für die stärkere Mannschaft sind die Erwartungswertdifferenzen zu Beginn unter beiden Regeln negativ, d.h. es sollte eine Verteidi-

gangsstrategie gespielt werden und erst in der 50. Minute unter der Drei-Punkte-Regel und unter der Zwei-Punkte-Regel sogar erst in der 59. Minute zu einer Angriffsstrategie gewechselt werden.

Für einen verteidigenden starken Gegner ergeben sich für die schwächere Mannschaft die in Abbildung 11 dargestellten Erwartungswertverläufe:

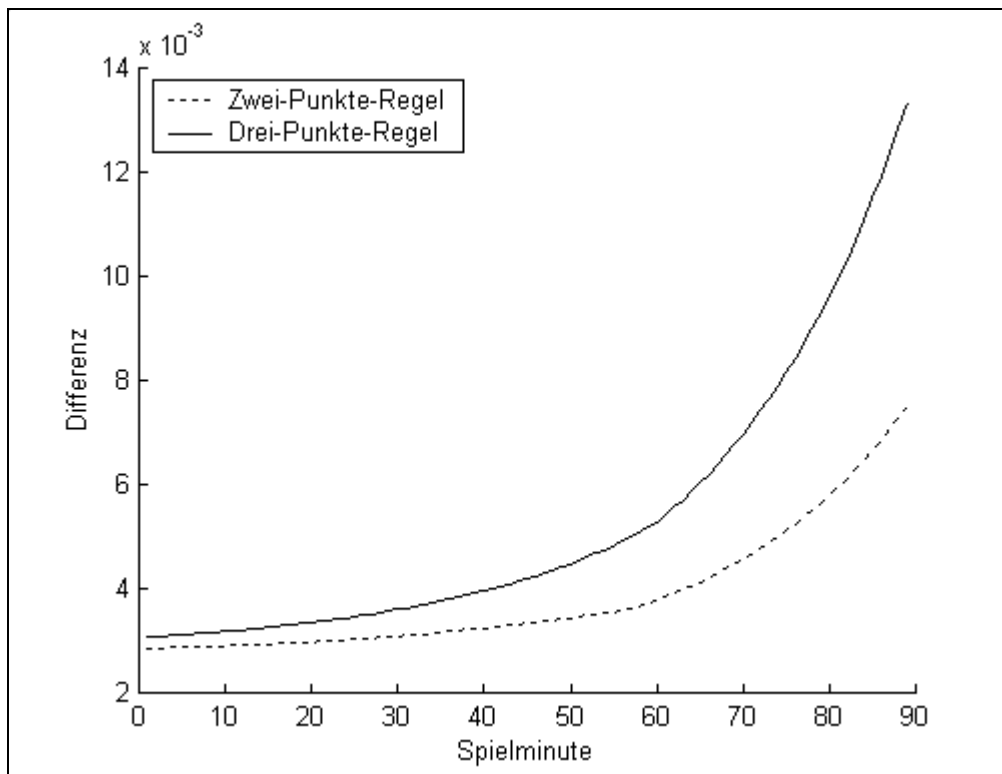


Abb. 11: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, heterogenen Mannschaften und verteidigendem Gegner.

Auch hier dominiert für die schwächere Mannschaft im gesamten Spielverlauf die Angriffs- die Verteidigungsstrategie.

Im Gegensatz zu den Ergebnissen bei homogenen Mannschaften hat hier die Annahme verschiedener Torwahrscheinlichkeiten einen größeren Einfluss auf die Verläufe der Erwartungswertdifferenzen. Entscheidend ist der Unterschied in den Spielstärken, hier dargestellt durch den Faktor  $c$ . Während sich für die schwächere Mannschaft an der Dominanz der Angriffsstrategie im gesamten Spielverlauf unabhängig von  $c$  nichts ändert, hängt die Strategie der stärkeren Mannschaft von der Höhe von  $c$  ab, wie Abbildung 12 ( $A = 0,08$ ;  $\alpha_1 = 0,07$ ;  $\delta_1 = 0,06$  und  $D = 0,05$ ) zeigt.

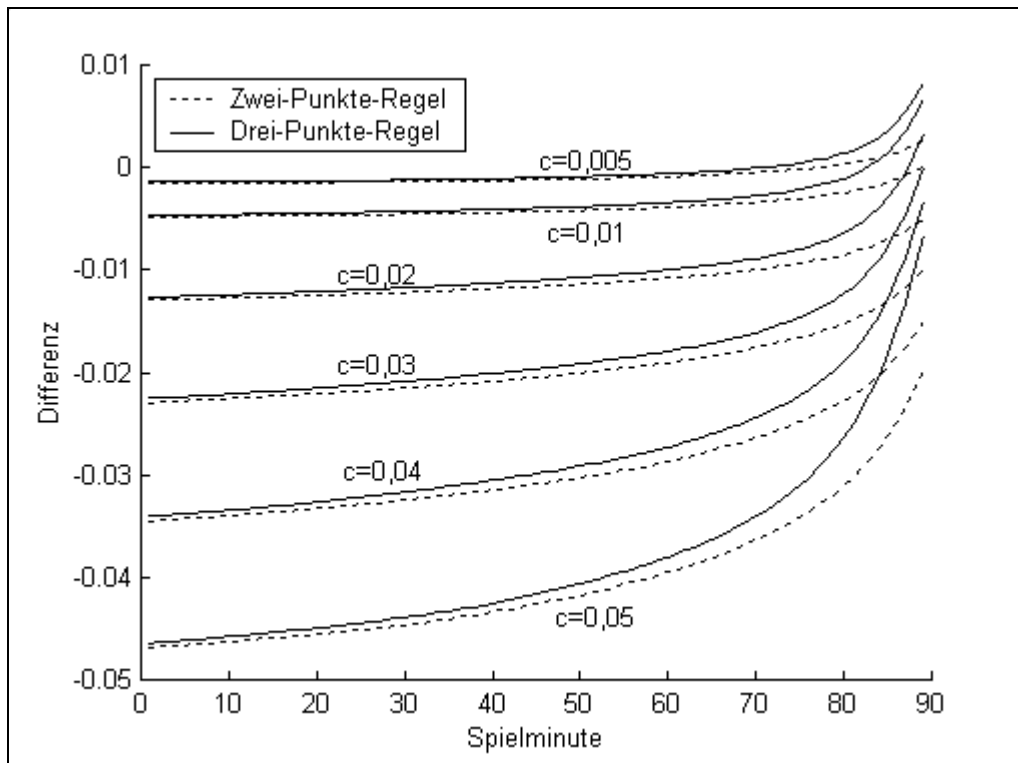


Abb. 12: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand und verschiedenen Werten für  $c$ .

Geht man von sehr heterogenen Mannschaften aus (zum Beispiel  $c=0,05$ ) ist die Wahrscheinlichkeit eines Torerfolgs der stärkeren Mannschaft bei einer Verteidigungsstrategie unabhängig von der Strategie des Gegners größer als die Wahrscheinlichkeit eines Torerfolgs der schwächeren angreifenden Mannschaft. Die stärkere Mannschaft muss hier also gar keine Angriffsstrategie (und damit auch größere Gefahr eines Gegentores) riskieren.

### 2.3.2 Gleichgewicht bei Führung einer Mannschaft und Parallelverschiebung der Leistungsniveaus

Analog zu dem Fall gleich starker Mannschaften sollen nun auch für den Fall eines Spiels einer stärkeren gegen eine schwächere Mannschaft die optimalen Strategien für die beiden Mannschaften bei Führung eines Teams dargestellt werden. Hierzu muss zwischen einer Führung der schwächeren und einer Führung der stärkeren Mannschaft unterschieden werden. In beiden Fällen wird jedoch angenommen, dass die zurückliegende Mannschaft unabhängig von ihrer Spielstärke immer angreift, da sie, wie bereits erwähnt, nichts mehr zu verlieren hat.

Zunächst soll nun der wahrscheinlichere Fall einer Führung des stärkeren Teams betrachtet werden.



Analog zu der Vorgehensweise bei homogenen Mannschaften ergibt sich, dass die in Führung liegende stärkere Mannschaft nur angreift, wenn zum Zeitpunkt  $t-1$  bei einer Tordifferenz von  $n > 0$  unter der Zwei-Punkte-Regel

$$(A_2 - \alpha_2)v^2(t, n-1) + (A_1 - \delta_1)v^2(t, n+1) - (A_1 + A_2 - \alpha_2 - \delta_1)v^2(t, n) > 0 \quad (2.21)$$

und unter der Drei-Punkte-Regel

$$(A_2 - \alpha_2)v^3(t, n-1) + (A_1 - \delta_1)v^3(t, n+1) - (A_1 + A_2 - \alpha_2 - \delta_1)v^3(t, n) > 0 \quad (2.22)$$

gilt.

Wie unter der Annahme gleich starker Mannschaften gibt es also auch hier einen Zeitpunkt im Spiel, der vom jeweiligen Spielstand abhängt, ab dem die führende Mannschaft von Angriff auf Verteidigung umschaltet. Auch hier sind (2.21) und (2.22) für  $(T-i, i)$  nicht mehr erfüllt.<sup>20</sup>

Für die Führung mit einem Tor durch das stärkere Team ergeben sich mit den Torwahrscheinlichkeiten aus (2.20) die in Abbildung 13 dargestellten Kurvenverläufe:

---

<sup>20</sup> Beweis siehe Anhang A1.

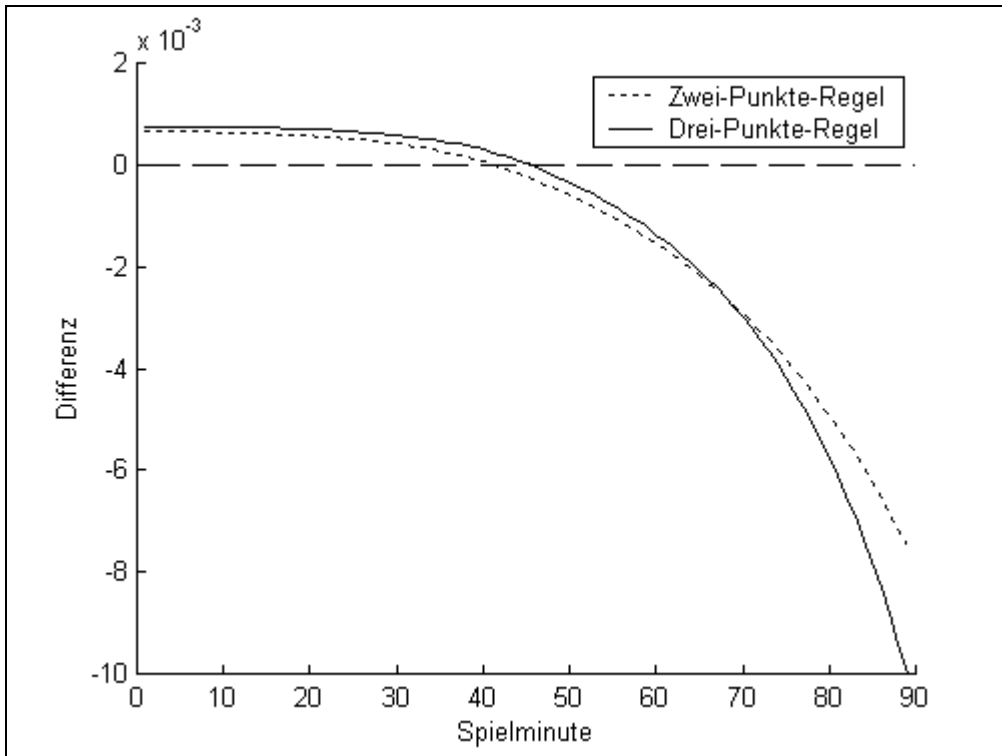


Abb. 13: Differenz der Erwartungswerte der stärkeren Mannschaft bei Tordifferenz 1.

Ein Vergleich mit den Kurvenverläufen bei Führung mit einem Tor unter der Annahme gleich starker Mannschaften zeigt, dass das Umschalten von Angriff auf Verteidigung bei Führung einer starken gegen eine schwache Mannschaft früher durchgeführt wird. Der Wechsel wird, wie auch unter der Annahme gleich starker Mannschaften, unter der alten Regel früher durchgeführt (40. Minute) als unter der neuen Regel (45. Minute).

Umgekehrt sieht es im Fall einer Führung der schwächeren Mannschaft aus. Diese Mannschaft spielt unter der Zwei-Punkte-Regel nur eine offensive Strategie, wenn

$$(A_1 - \alpha_1)v^2(t, n-1) + (A_2 - \delta_2)v^2(t, n+1) - (A_1 + A_2 - \alpha_1 - \delta_1)v^2(t, n) > 0 \quad (2.23)$$

und unter der Drei-Punkte-Regel, wenn

$$(A_1 - \alpha_1)v^3(t, n-1) + (A_2 - \delta_2)v^3(t, n+1) - (A_1 + A_2 - \alpha_1 - \delta_2)v^3(t, n) > 0. \quad (2.24)$$

Die Simulation zeigt, dass die schwächere Mannschaft bei einer Führung im Vergleich zu einem Spiel homogener Mannschaften erst später von Angriff auf Verteidigung umschaltet (Abbildung 14).

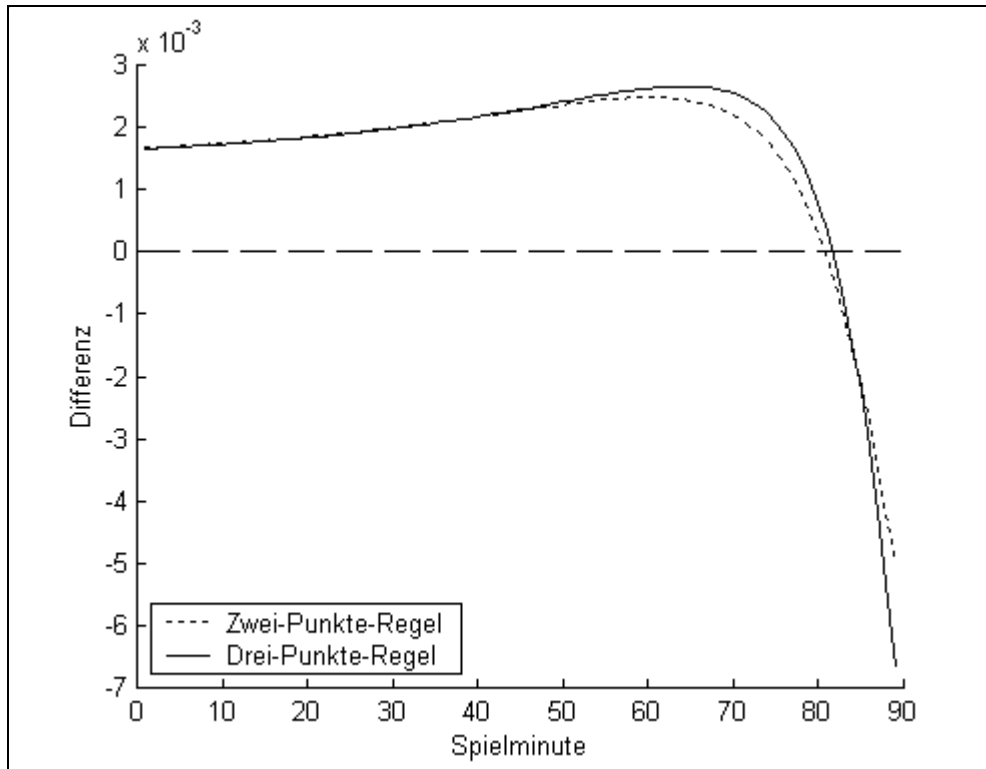


Abb. 14: Differenz der Erwartungswerte der schwächeren Mannschaft bei Tordifferenz 1.

Außerdem steigen die Erwartungswertdifferenzen für beide Regeln sogar zu Beginn des Spiels an. Ähnliche Ergebnisse erhält man bei Führung einer der beiden Mannschaften mit zwei oder drei Toren. Hier spielt die stärkere Mannschaft bei einer Führung von Beginn an defensiv, während die schwächere Mannschaft auch bei einer Führung mit zwei Toren zu Beginn noch offensiv spielt, aber früher von Angriff zu Verteidigung umschaltet als bei einer Führung mit nur einem Tor.

Als letztes soll nun der Fall untersucht werden, in dem Annahme 5 nicht mehr gilt. Eine denkbare Konstellation wäre dann, dass eine Mannschaft zwar offensiv schwach dafür aber defensiv stark spielt oder umgekehrt. Es werden daher Simulationen mit den Werten

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0,03; \alpha_1 = 0,015; \delta_1 = 0,01; D_1 = 0,005 \\
 A_2 &= 0,04; \alpha_2 = 0,02; \delta_2 = 0,015; D_2 = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

sowie den Werten

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0,05; \alpha_1 = 0,045; \delta_1 = 0,015; D_1 = 0,01 \\
 A_2 &= 0,045; \alpha_2 = 0,03; \delta_2 = 0,025; D_2 = 0,02
 \end{aligned}
 \tag{2.26}$$

betrachtet. In (2.25) spielt Mannschaft 1 offensiv schlecht, dafür aber defensiv gut, in (2.26) verhält es sich umgekehrt. Für Mannschaft 2 wird in beiden Fällen eine gleich gute Offensiv- und Defensivleistung angenommen.

### 2.3.3 Gleichgewicht bei unentschiedenem Spielstand ohne Parallelverschiebung der Leistungsniveaus

Die Simulation zeigt im ersten Fall für Mannschaft 1 die in Abbildung 15 dargestellten Erwartungswertdifferenzverläufe.

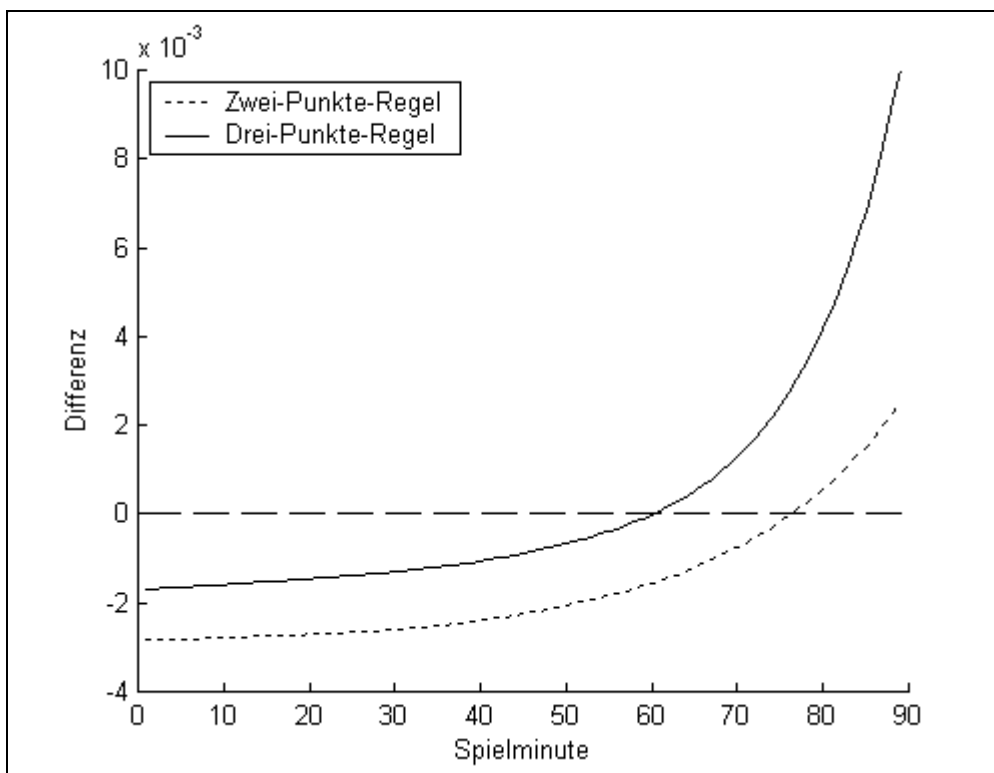


Abb. 15: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, Mannschaft mit schwachem Offensivspiel und angreifendem Gegner.

Aufgrund der guten Defensivleistung ist es für diese Mannschaft sinnvoll, zunächst defensiv zu spielen und erst im Verlaufe des Spiels zu einer offensiven Strategie zu wechseln. Der Wechsel findet dabei unter der neuen Regel (deutlich) früher statt als unter der alten (61. Mi-

nute gegenüber 77. Minute). Für den Fall eines verteidigenden Gegners ergeben sich ähnliche Kurvenverläufe. Anders sieht es im Fall einer Mannschaft mit starker Offensiv- und schwacher Defensivleistung aus (Abbildung 16).

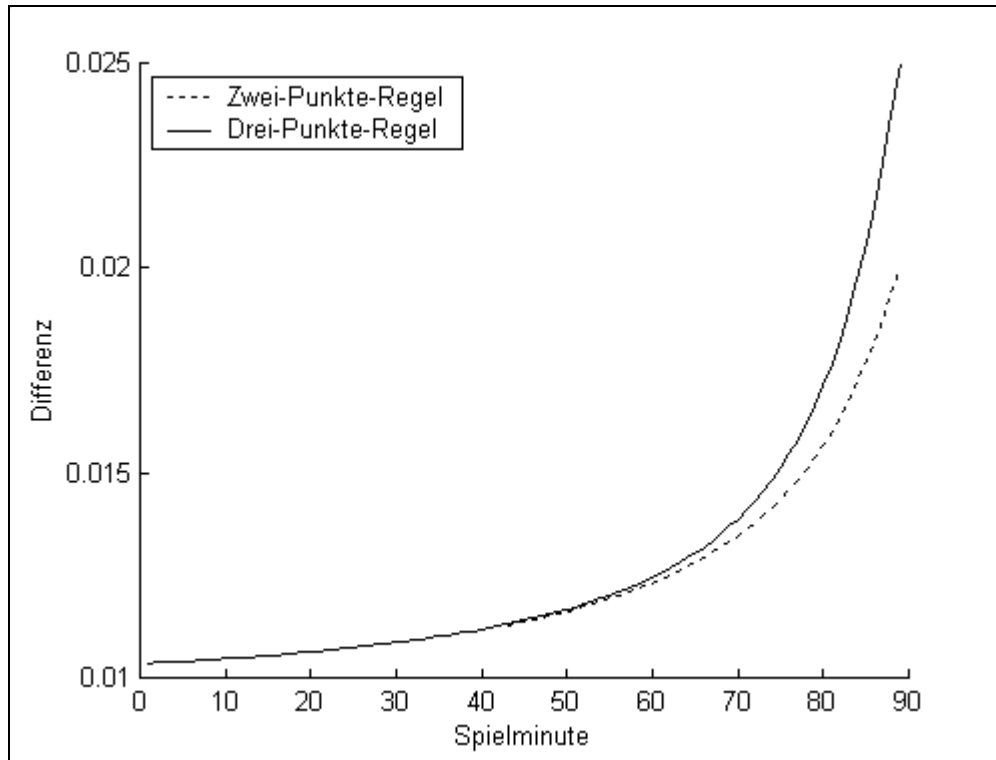


Abb. 16: Differenz der Erwartungswerte bei unentschiedenem Spielstand, Mannschaft mit starker Offensivspiel und angreifendem Gegner.

Spielt eine Mannschaft eine starke Offensive und eine schwächere Defensive, sollte sie von Beginn an eine Angriffsstrategie spielen unabhängig von der Punkteregel unter der dieses Spiel ausgetragen wird. Auch hier ändert ein verteidigender Gegner die Kurvenverläufe nur geringfügig.

### 2.3.4 Gleichgewicht bei Führung einer Mannschaft ohne Parallelverschiebung der Leistungsniveaus

Für den Fall der Führung einer Mannschaft muss analog zu 2.3.2 unterschieden werden, ob die Mannschaft mit den unterschiedlichen Offensiv- und Defensivleistungen oder die Mannschaft mit gleich starker Offensive und Defensive führt. Zunächst wird angenommen, dass eine Mannschaft mit unterschiedlicher Offensiv- und Defensivleistung mit einem Tor Vorsprung in Führung liegt.

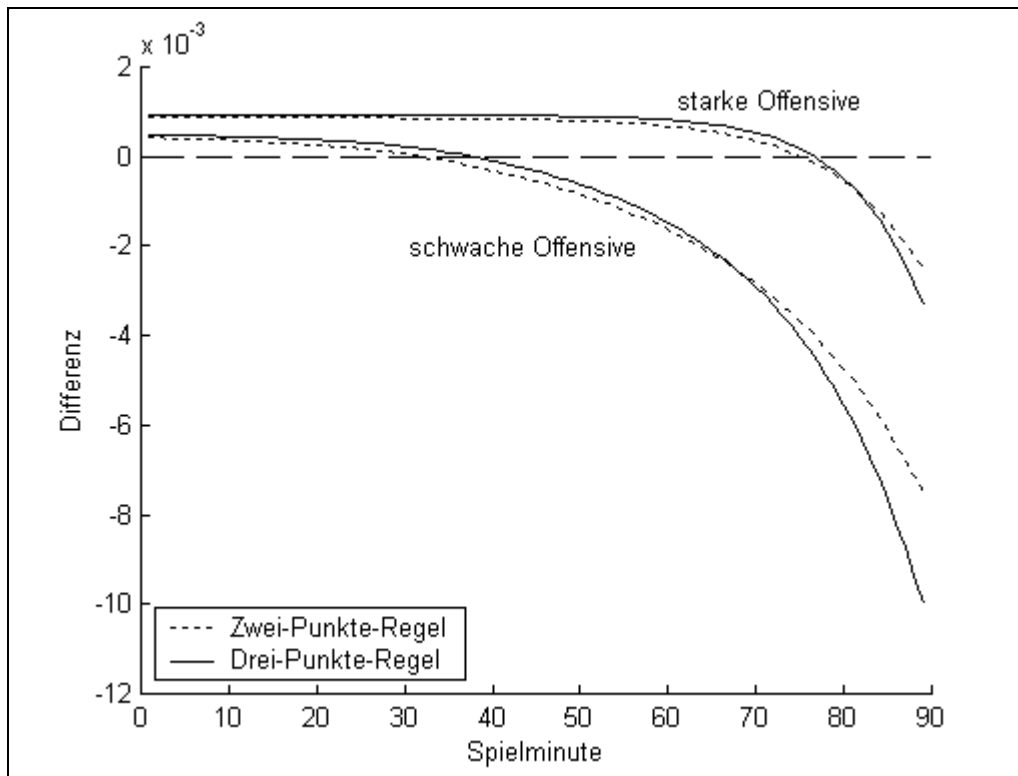


Abb. 17: Differenz der Erwartungswerte bei Führung einer Mannschaft mit unterschiedlicher Offensiv- und Defensivleistung.

Wie zu erwarten, sollte der Wechsel von einer Angriffs- zu einer Verteidigungsstrategie bei einer Mannschaft mit starker Offensivleistung (wesentlich) später im Spiel stattfinden als bei einer Mannschaft mit schwacher Offensive. Die Einführung der Drei-Punkte-Regel bringt hier kaum Unterschiede im Zeitpunkt des Wechsels.

Auch der Fall der Führung einer Mannschaft mit vergleichbarer Offensiv- und Defensivleistung gegen eine Mannschaft mit unterschiedlicher Leistung in Verteidigung und Angriff zeigt wenig überraschende Ergebnisse (Abbildung 18).

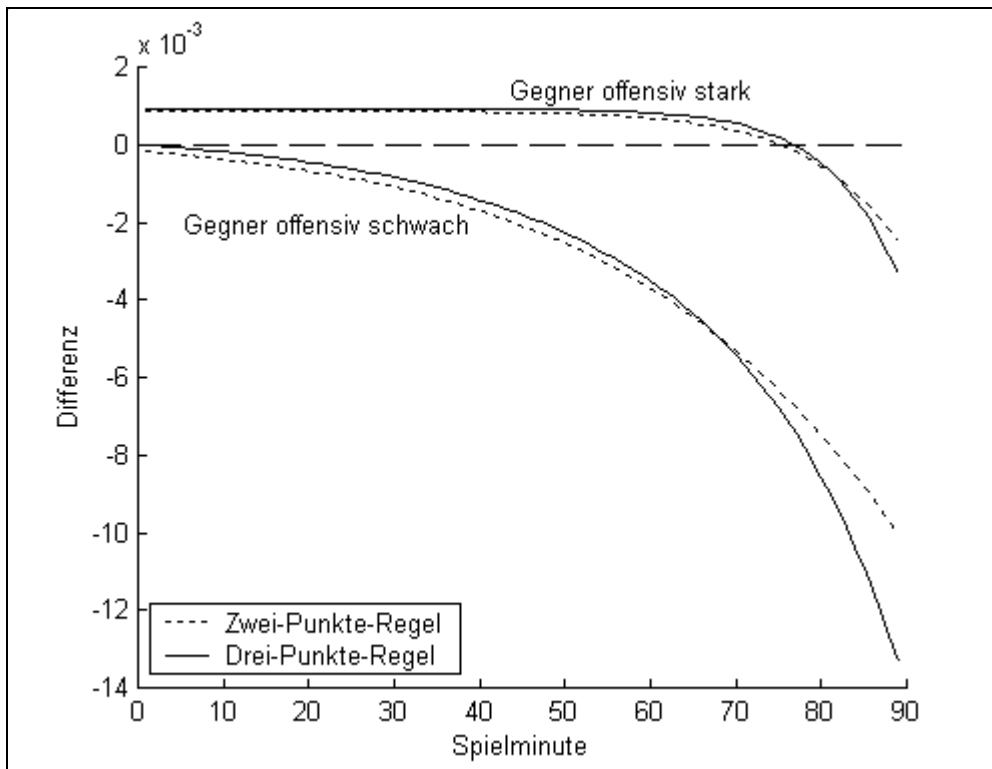


Abb. 18: Differenz der Erwartungswerte bei Führung einer Mannschaft mit gleicher Offensiv- und Defensivleistung..

Liegt eine Mannschaft gegen einen Gegner mit schwacher Offensive in Führung, so sollte sie unabhängig vom Zeitpunkt im Spiel nur noch defensiv spielen, während ein offensiv starker Gegner dazu führt, dass trotz der Führung erst ab der 76. (Zwei-Punkte-Regel) bzw. 77. (Drei-Punkte-Regel) Minute zu einer Verteidigungsstrategie übergegangen werden sollte. Auch hier führt die unterschiedliche Bepunktung nicht zu einer Änderung der Strategie.

### 3. Fazit

Tabelle 1 fasst noch einmal die Ergebnisse der einzelnen Simulationen zusammen.

	Unentschiedener Spielstand	Führung einer Mannschaft
Homogene Mannschaften	In beiden Regeln ist Angriff (für realistische Torwahrscheinlichkeiten) die dominante Strategie, unter der Drei-Punkte-Regel ist die Differenz der Erwartungswerte höher und steigt schneller und stärker an.	Unter der Drei-Punkte-Regel wird später von einer offensiven auf eine defensive Strategie umgeschaltet.
Heterogene Mannschaften und Parallelverschiebung der Leistungsniveaus	Die schwächere Mannschaft spielt immer offensiv, die stärkere Mannschaft nur gegen Ende des Spiels und wenn der Unterschied in den Leistungsniveaus nicht zu hoch ist. Der Wechsel von defensiver zu offensiver Spielweise erfolgt unter der Drei-Punkte-Regel früher.	Bei Führung der stärkeren Mannschaft wechselt diese früher von Angriff auf Verteidigung als bei homogenen Mannschaften. Der Wechsel findet unter der neuen Regel etwas später statt. Bei Führung der schwächeren Mannschaft wechselt diese im Vergleich zum Spiel zwischen homogenen Teams später von Angriffs- zu Verteidigungsstrategie.
Heterogene Mannschaften ohne Parallelverschiebung der Leistungsniveaus	Spielt eine Mannschaft im Angriff schwach und in der Verteidigung stark, spielt sie zunächst defensiv und später offensiv, wobei der Wechsel unter der Drei-Punkte-Regel deutlich früher stattfindet. Im umgekehrten Fall einer starken Offensive und schwachen Defensive spielt die Mannschaft nur die Angriffsstrategie, wobei nur ein geringfügiger Unterschied zwischen den beiden Punkte-Regeln besteht.	Führt ein Team mit schwachem Offensiv- und starkem Defensivspiel, wechselt es früh von Angriff auf Verteidigung (unabhängig von der Punkte-Regel), ein Team mit starker Offensive und schwacher Defensive wechselt hingegen sehr spät von Angriff zu Verteidigung. Führt eine Mannschaft mit gleich starker Offensiv- und Defensivleistung gegen ein Team mit schwacher Offensive, so spielt sie nur defensiv, führt sie jedoch gegen ein Team mit starker Offensive, spielt sie auch länger offensiv.



Die theoretische Modellierung der Auswirkungen der Drei-Punkte-Regel zeigt, dass die Einführung in den meisten der vorgestellten Fälle die erhoffte Wirkung hin zu einer offensiveren und damit verbunden einer torreicheren und interessanteren Spielweise hat. Die Änderung der Anreizstruktur hat zwar abhängig von Spielstand und Leistungsstärke der beteiligten Mannschaften unterschiedlich starken Einfluss auf die Strategien der beiden Teams, aber es konnte anhand der Simulationen gezeigt werden, dass diese Anreizänderung (zumindest theoretisch) tatsächlich einen Einfluss auf die Strategiewahl hat.

Das vorgestellte Modell vereinfacht insofern, als es nur die Wahl zwischen den beiden Strategien „Angriff“ und „Verteidigung“ zulässt. Eine mögliche Erweiterung wäre daher, kontinuierliche Strategien zuzulassen. Die Mannschaften würden dann analog zu dem Modell von Brocas/Carrillo (2004) die Höhe ihrer Offensivanstrengung aus einer kontinuierlichen Menge möglicher Strategien wählen. Die jeweiligen Nash-Gleichgewichte müssten dann anhand von Reaktionsfunktionen der beiden Teams auf die Strategiewahl des Gegners berechnet werden.

## Anhang

### A1. Beweise

Beweis zu (2.18) und (2.19):

Für  $(T-i, i)$  sind (2.18) und (2.19) nicht mehr erfüllt, da

$$\begin{aligned} & (A-\alpha)\underbrace{v(T-i+1, i-1)}_{\leq 1} + (A-\delta)\underbrace{v(T-i+1, i+1)}_{=1} - (2A-\alpha-\delta)\underbrace{v(T-i+1, i)}_{=1} \\ &= (A-\alpha)\underbrace{v(T-i+1, i-1)}_{\leq 1} + \alpha - A \\ &= \underbrace{(A-\alpha)}_{>0} \underbrace{(v(T-i+1, i-1)-1)}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Beweis zu (2.21) und (2.22):

Für  $(T-i, i)$  sind (2.21) und (2.22) nicht mehr erfüllt, da

$$\begin{aligned} & (A_2-\alpha_2)\underbrace{v(T-i+1, i-1)}_{\leq 1} + (A_1-\delta_1)\underbrace{v(T-i+1, i+1)}_{=1} - (A_1+A_2-\alpha_2-\delta_1)\underbrace{v(T-i+1, i)}_{=1} \\ &= (A_2-\alpha_2)\underbrace{v(T-i+1, i-1)}_{\leq 1} + \alpha_2 - A_2 \\ &= \underbrace{(A_2-\alpha_2)}_{>0} \underbrace{(v(T-i+1, i-1)-1)}_{\leq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

## A2. Erläuterung der Vorgehensweise in der Simulation

Zunächst wird sowohl für die Zwei- als auch für die Drei-Punkte-Regel für alle  $t = 1, \dots, 90$   $v(t, n)$  für  $n = -4, \dots, 4$  berechnet. Dabei gilt nach (2.2)

$$v^2(90, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \\ 0,5, & \text{falls } n = 0 \\ 0, & \text{falls } n < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad v^3(90, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n > 0 \\ 0, \bar{3}, & \text{falls } n = 0. \\ 0, & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

Daraus resultierend werden dann nacheinander für  $t = 89, 88, \dots, 1$  die Werte  $v(t, n)$  ausgerechnet. Dabei wird angenommen, dass der Gegner bei Gleichstand und bei Rückstand immer angreift und bei einer Führung nur angreift, wenn der Erwartungswert eines Angriffs größer als der einer Verteidigungsstrategie ist.

Anschließend können dann für beide Regeln und für alle  $t$  die Erwartungswertdifferenzen  $EWD(t, n)$  eines Teams, das mit  $n \geq 0$  Toren führt, anhand der Formel

$$EWD(t, n) := (A - \delta)v(t+1, n+1) + (A - \alpha)v(t+1, n-1) - (2A - \alpha - \delta)v(t+1, n)$$

berechnet werden. Auch bei der Berechnung der Erwartungswertdifferenzen wird angenommen, dass die (mit  $n \geq 0$  in Rückstand liegende) gegnerische Mannschaft eine Angriffsstrategie spielt.

## Literaturverzeichnis

**Amann, E., Dewenter, R. & Namini, J.E. (2004):** “The home-bias paradox in Football”, Diskussionspapier, Universität Essen-Duisburg.

**Brocas, I., Carrillo, J. D. (2004):** “Do the ‘three-point victory’ and ‘golden goal’ rules make soccer more exciting? A theoretical analysis of a simple game”, *Journal of Sports Economics* 5, pp. 169-185.

**Dilger, A., Geyer, H. (2007):** „Theoretische und empirische Analyse der Drei-Punkte-Regel”, *Sport und Gesellschaft* 5(3), S.265-277.

**Guedes, J. C., Machado, F. S. (2002):** “Changing rewards in contests: Has the three-point-rule brought more offense to soccer?” *Empirical Economics* 27, pp. 607-630.

**Palomino, F., Rigotti, L., Rustichini, A. (2000):** “Skill, Strategy, and Passion: an Empirical Analysis of Soccer”, mimeo, Tilburg University. Abrufbar im Internet unter <http://faculty.fuqua.duke.edu/~rigotti/bio/soccer.pdf> (Letzter Abruf 18.01.2008)

**Shepotylo, O. (2006):** “Three-Point-for-Win in Soccer Rule: Are There Incentives for Match Fixing?” in: derselbe: *Three Essays on Institutions and Economic Development*. Dissertation (S. 1-32), University of Maryland, Department of Economics.

# Diskussionsbeiträge des Institutes für Ökonomische Bildung

(bisher erschienen)

## Diskussionsreihe Ökonomische Bildung

- Diskussionsbeitrag Nr. 1:** Der sozialökonomische Beitrag zur Umweltbildung  
*Gerd-Jan Krol/ Jan Karpe/ Andreas Zoerner*  
Februar 1998
- Diskussionsbeitrag Nr. 2:** Moderne Ökonomik und Moderne Kunst – Ein Beitrag zur ökonomischen und ästhetischen Werteentwicklung moderner Kunst  
*Jan Karpe/ Mirco Derpmann*  
Mai 1998
- Diskussionsbeitrag Nr. 3:** Der sozialökonomische Ansatz der Umweltbildung – Grundlagen und Praxis der Umsetzung im Unterricht  
*Gerd-Jan Krol/ Thomas Hönemann*  
(Mit Unterrichtsbeispielen für die Sekundarstufen I und II von Anne Zumkley und Thomas Hönemann)  
November 1998
- Diskussionsbeitrag Nr. 4:** Freiwilligkeit – Zwang – Anreize. Bemerkungen zu strategischen Ansatzpunkten der Umweltpolitik  
*Gerd-Jan Krol*  
November 1998
- Diskussionsbeitrag Nr. 5:** Environmental Problems, Morals and Incentives in Modern Societies  
*Gerd-Jan Krol*  
Januar 2000
- Diskussionsbeitrag Nr. 6** Ökonomische Bildung in der modernen Gesellschaft  
*Gerd-Jan Krol/ Jan Karpe/ Andreas Zoerner*  
August 2001
- Diskussionsbeitrag Nr. 7** Eine ökonomische Analyse des Marktes für Klima- und Lüftungstechnik – Aktueller Stand und Zukunftsperspektiven in der Baubranche  
*Alexander Herrmann*  
März 2002

**Ab 2005:**

## IÖB-Diskussionspapiere

- IÖB-Diskussionspapier Nr. 1/05:** Eliteuniversität Münster?!  
*Alexander Dilger*  
März 2005
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 2/05:** Macro-Analysis of Transfer Fees and Investments in Sports  
*Alexander Dilger*  
Dezember 2005
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 1/06:** Standards für die Lehrerbildung in der ökonomischen Bildung  
*Gerd-Jan Krol / Dirk Loerwald / Andreas Zoerner.*  
April 2006
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 2/06:** Jugend – Ernährungsstil – Bildung: Zu den Perspektiven einer lebensstilorientierten Didaktik  
*Konstantin v. Norman*  
April 2006

- IÖB-Diskussionspapier Nr. 3/06:** Taschengeld und Sparverhalten bei Grundschulkindern  
*Nicole Dubbert / Rainer Hufnagel*  
Juli 2006
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 4/06:** Theorie optimaler Währungsräume vor dem Hintergrund der EU-Erweiterung  
*Heiko Peters*  
Juli 2006
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 5/06:** Höhere Geburtenraten in Deutschland – Die Rolle des Systems frühkindlicher Bildung und Betreuung  
*Antje Funcke*  
Juli 2006
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 6/06:** Geldpolitische Strategien der neuen EU-Mitgliedsländer bis zur Euroeinführung  
*Heiko Peters*  
August 2006
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 1/07:** German Universities as State-sponsored Co-operatives  
*Alexander Dilger*  
Januar 2007
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 2/07:** Why Brennan and Buchanan are wrong (after all)  
*Thomas Apolte*  
März 2007
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 3/07:** Empirische Ermittlung von Haushaltsführungstilen mit Daten der Zeitbudgeterhebung 1991/92  
*Stéphanie Grossmann*  
Mai 2007
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 4/07:** Managerverschanzung durch spezifische Investitionen  
*Benjamin Balsmeier*  
Mai 2007
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 5/07:** Münsteraner Ernährungsmuster- und Lebensstilstudie bei Schulkindern „MEALS“ 2006  
*Konstantin von Normann*  
August 2007
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 6/07:** Personelle Unternehmensverflechtung und Vorstandsgehälter  
*Benjamin Balsmeier / Heiko Peters*  
Dezember 2007
- IÖB-Diskussionspapier Nr. 1/08:** Theoretische Analyse der Strategiewahl unter der Zwei- und Drei-Punkte-Regel im Fußball  
*Hannah Geyer*  
Januar 2008

Herausgeber:  
**Institut für Ökonomische Bildung**  
Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Scharnhorststraße 100  
48151 Münster  
Tel: 0251/ 83-24303  
Fax: 0251/ 83-28429

[www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb](http://www.wiwi.uni-muenster.de/ioeb)

