

Härdle, Wolfgang Karl; Hlávka, Zdeněk; Stahl, G.

**Working Paper**

## Wann sind falsche VaR-Modelle dennoch adäquat?

SFB 373 Discussion Paper, No. 2003,14

**Provided in Cooperation with:**

Collaborative Research Center 373: Quantification and Simulation of Economic Processes,  
Humboldt University Berlin

*Suggested Citation:* Härdle, Wolfgang Karl; Hlávka, Zdeněk; Stahl, G. (2003) : Wann sind falsche VaR-Modelle dennoch adäquat?, SFB 373 Discussion Paper, No. 2003,14, Humboldt University of Berlin, Interdisciplinary Research Project 373: Quantification and Simulation of Economic Processes, Berlin, <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:kobv:11-10049977>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/22229>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# Wann sind falsche VaR-Modelle dennoch adäquat? \*

W. Härdle<sup>†</sup>, Z. Hlávka<sup>†</sup> und G. Stahl<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Humboldt-Universität zu Berlin, C.A.S.E.

<sup>‡</sup> Bundesaufsichtsamt für Finanzdienstleistungen, Bonn

23. Januar 2003

## Zusammenfassung

Die Berechnung des VaR führt zur Reduktion der Dimension des Raumes der Risikofaktoren. Die vorzunehmenden Vereinfachungen resultieren aus unterschiedlichen Beweggründen, z.B. technische Effizienz, Sachlogik der Ergebnisse und statistische Adäquanz des Modells.

Im Kapitel 2 stellen wir drei gängige Mappingverfahren vor: das Marktindexmodell, das Hauptkomponentenmodell und das Modell mit gleichkorrelierten Risikofaktoren. Impulse für Methoden zum Vergleich dieser Modelle im Kapitel 3 kamen vor allem aus der Literatur zur Praxis der Beurteilung von Wetterprognosen (Murphy und Winkler 1992, Murphy 1997).

Umfangreiche Überlegungen zu einer quantitativen Analyse werden im vierten Kapitel dieser Arbeit vorgestellt. Die empirische Analyse der DAX Daten wird abschließend mit XploRe durchgeführt.

## 1 Problemstellung

Das bekannte Zitat von G.E.P. Box *All models are wrong, but some are useful* zielt auf ein zentrales Problem, das es bei jeder Umsetzung von VaR-Modellen zu lösen gilt, ab: nämlich dem Ideal einer sparsamen Modellierung zu genügen. Dieses Prinzip stochastischer Modellierung bedeutet so viele Variablen wie nötig und so wenig als möglich zu verwenden, also eine simultane Minimierung von Modellbias und Residualvarianz zu erzielen.

---

\*Wir bedanken uns für die finanzielle Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Sonderforschungsbereich 373 “Quantification and Simulation of Economic Processes”

Die Berechnung des VaR auf ein möglichst einfaches Modell zu gründen, führt meist zur Reduktion der Dimension des Raumes der Risikofaktoren bzw. der des Parameterraumes zugrunde liegender Verteilungen. Für beide Fälle hat sich in der Praxis die aus RiskMetrics stammende Bezeichnung des *Mappings* etabliert. Die Bedeutung von Mappingverfahren kann für die Praxis kaum überschätzt werden. Um so mehr überrascht, dass es bisher nur wenige Arbeiten gibt, die sich diesem Thema explizit widmen. Eine Vielzahl von VaR-Artikeln fokussiert auf eindimensionale, unabhängig identisch verteilte Zufallsfolgen mit geringer Perspektive auf die praxisrelevante multivariate Situation. Die Frage einer Dimensions- und Modellreduktion wird zuwenig gestellt und daher nicht befriedigend beantwortet.

Entsprechend dem multifunktionalen Charakter von VaR Modellen resultieren die vorzunehmenden Vereinfachungen aus unterschiedlichen Beweggründen. Die wichtigsten sind: technische Effizienz, Sachlogik der Ergebnisse und hinreichende statistische Adäquanz des Modells.

Zumeist steht eine hinreichende technische Performanz des implementierten Modells im Zentrum. Diesem Zweck dient ein niedrig dimensioniertes Modell, indem es eine einfachere und präzisere Behandlung der Numerik gewährleistet und Hinweise auf wesentliche treibende Faktoren in einem dynamischen Kontext geben kann. Weiterhin kann die Auswahl von Risikofaktoren auch von der zeitnahen Verfügbarkeit von qualitätsgeprüften Inputparametern, wie Marktdaten abhängen. So verwenden viele Institute die von der RiskMetrics Group gelieferte Datenmatrix, die etwa 400 Risikofaktoren unterstützt.

Wenngleich ein reduziertes System die inhärenten Rangdefekte nicht ablegen kann, so kann es jedoch in zumindest statistischer Weise die Kovarianzstrukturen abbilden. Ein sparsam parametrisiertes Modell reduziert Rangdefekte in der geschätzten Kovarianzmatrix der gemeinsamen Verteilung der Risikofaktoren (Davé und Stahl 1998). Dies ist insbesondere der Fall bei hoher Multikollinearität, d.h., in dem in der Praxis üblicherweise eintretenden Fall hoher Anzahl von Variablen gegenüber einen geringen Beobachtungszeitraum. Reduktionstechniken vermeiden weiterhin Scheinkorrelationen und können vorteilhaft zur übersichtlichen Gestaltung von Risikoreports verwendet werden (Reimers und Zerbs 1998).

Dienen VaR-Modelle nicht nur zur Risikomessung und -steuerung, sondern finden darüberhinaus zur Erfüllung regulatorischer Anforderungen Verwendung, kommt der Bestimmung der Eigenmittelunterlegung offener Marktrisikopositionen eine besondere Bedeutung zu, da diese modellabhängig ist. Dies tritt besonders bei der Modellierung des allgemeinen und spezifischen Marktrisikos zutage (Huschens 1998).

Liegt der Risikomessung etwa der Maximum Loss - also eine kohärente Risikomaßzahl - zugrunde, so hängt diese wesentlich von der Dimension des konkret spezifizierten Raumes der Risikovariablen ab (Studer 1997). In diesem Fall steht die Höhe der Dimension in nichtlinearem Zusammenhang mit der Höhe des be-

rechneten Risikos.

Den folgendem Beispielen liegen Aktienportfolios aus Long- oder Shortpositionen zugrunde. Der Marktwert  $\nu_s$  zum Zeitpunkt  $s$  des Portfolios  $\Pi_t$  ergibt sich aus

$$\nu_s(\Lambda_t) = \Lambda_t^\top \mathbf{P}_s$$

wobei der Vektor  $\Lambda_t \in \mathbb{R}^n$  die jeweiligen Nominalvolumina des Engagements zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet und  $\mathbf{P}_s$  den assoziierten Preisvektor. Ein Portfolio wie etwa  $\{VW, DC\}$  mit  $\Lambda_t = (100, 200)^\top$  und  $p_s = (40, 60)^\top$  hätte für  $s = 16.6.2000$  etwa den Wert  $\nu_s = 16000$ . Zur stochastischen Modellierung des Risikos der Wertänderungen bei gegebenen  $\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_t$  zum Zeitpunkt  $t$ :

$$\nu_{t+h}(\Lambda_t) - \nu_t(\Lambda_t) = \Lambda_t^\top (\mathbf{P}_{t+h} - \mathbf{p}_t) = (\Lambda_t \mathbf{p}_t)^\top \frac{(\mathbf{P}_{t+h} - \mathbf{p}_t)}{\mathbf{p}_t} \quad (1)$$

$$= w_t^\top \mathbf{R}_{t+h} \quad (2)$$

werden jedoch nicht die Preisprozesse, sondern der Vektor  $\mathbf{R}_t$ , aus (diskreten) Aktienrenditen verwendet. Der Vektor aus dem komponentenweise gebildeten Produkt aus  $\Lambda_t$  und  $\mathbf{p}_t$  wird als Exposure,  $w_t = (w_{1t}, \dots, w_{nt})^\top$ , bezeichnet. Im obigen Beispiel ist das Exposure  $w_t = (4000, 12000)^\top$ .

Die *bedingte Prognoseverteilung*

$$\mathcal{L}(L_{t+h} \mid \mathcal{H}_t) \quad (3)$$

möglicher Portfolioverluste  $L_{t+h} = -w_t^\top \mathbf{R}_{t+h}$  über einen Horizont  $h$ , wobei im folgenden  $h = 1$  (ein Handelstag) betrachtet wird, stellt das interessierende mathematische Objekt dar. Die bedingende Informationsmenge  $\mathcal{H}_t$ , - gegeben wird meist ein rollierendes Fenster fester Länge  $N$  - besteht im einfachsten Fall aus Marktpreisen.

Vorausgesetzt, die Verteilung von  $\mathbf{R}_{t+h}$  ist bekannt, so kann die Bestimmung von (3) durch Monte Carlo Simulationen erfolgen, da die Portfoliowertänderungen eine bekannte Funktion  $\Psi$  des Vektors

$$L_{t+h} = \Psi_t(\mathbf{R}_{t+h}) \quad (4)$$

sind. Gegebenfalls sind auch analytische Lösungen denkbar. Damit ist die Bestimmung des VaR aus theoretischer Sicht nicht schwieriger als die Berechnung eines bestimmten Integrals.

Ist  $\Psi_t$  in (4) eine lineare Funktion, so heisst das dazugehörige Portfolio ebenfalls linear. Für solche Portfolios ist es gängige Praxis,  $\mathbf{R}_t$ , durch elliptische Verteilungsmodelle mit

$$E(\mathbf{R}_t) = 0$$

zu parametrisieren (RiskMetrics 1996, Litterman und Winkelmann 1998) Die Entscheidung, gerade diese Verteilungsklasse als Basismodell zu verwenden, liegt darin begründet, dass die Prognoseverteilung (3) für lineare Portfolios analytisch bestimmt werden kann. Zur Abbildung der Dynamik verwendet man meist (I)GARCH- oder White Noise Modelle (Gouriéroux 1997).

Der VaR zum Niveau  $\alpha$  des  $i$ -ten Assets ist im Gauss'schen Modell durch

$$VaR_i(\alpha, h, t) = w_{it} q_\alpha \sigma_{ith},$$

bestimmt, wobei  $\sigma_{ith}^2 = E(R_{i,t+h}^2)$  ist und  $q_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnen. Bezeichnet

$$\mathbf{VaR} = (VaR_1, \dots, VaR_n)$$

den VaR-Vektor (zum Niveau  $\alpha$  und Prognosehorizont  $h$ ), ergibt sich der VaR des Portfolios  $\Pi_t$  durch:

$$VaR(\Pi_t) = VaR(\Pi_t, \alpha, h) = \sqrt{\mathbf{VaR}^\top C_t \mathbf{VaR}} \quad (5)$$

wobei  $C_t$  die um die Vorzeichen der Position adjustierte *Korrelationsmatrix* von  $\mathbf{R}_{t+h}$  bezeichnet, also  $c_{ijt} = \rho_{ijt} \text{sign}(w_{it}) \text{sign}(w_{jt})$ . Der Vektor  $\mathbf{VaR}$  gibt Aufschlüsse über eventuelle Konzentrationen in einzelnen Risikofaktoren, deshalb wird die Darstellung (5) der naheliegenden Darstellung

$$VaR(\Pi_t) = \sqrt{w_t^\top \Sigma_t w_t}$$

vorgezogen.

Im nächsten Kapitel stellen wir drei gängigen Mappingverfahren vor. Das dritte Kapitel ist Diagnoseverfahren gewidmet. Umfangreiche Überlegungen zu einer quantitativen Analyse werden im vierten Kapitel dieser Arbeit vorgestellt. Die empirische Analyse wird abschließend mit XploRe durchgeführt.

## 2 Mappingverfahren

Mappingverfahren, derer sich die Praxis bedient, beziehen sich zumeist auf den Raum der Portfoliovariablen und beruhen auf Projektions- (Hauptkomponentenanalyse) oder Regressionsmethoden. Das prominenteste Beispiel liefert das Mapping eines Aktienportfolios auf einen Marktindex. Anwendungen von Mappingverfahren, die auf eine Vereinfachung des Parameterraumes abzielen, sind dagegen seltener anzutreffen. Auch in diesem Fall liefert RiskMetrics ein wichtiges Beispiel: die sparsame Modellierung von IGARCH Modellen, die nur einen Glättungsparameter für alle Risikofaktoren verwendet.

Basierte ein VaR-Modell eines linearen Portfolios auf (5), so wären insgesamt  $n(n+1)/2$  Parameter zur Bestimmung der Kovarianzmatrix zu schätzen. Die Anzahl,  $n$ , der Portfoliovariablen ist - unter verschiedenen Aspekten - meist zu groß, um jede Variable als Risikofaktor im VaR-Modell zur Abbildung des allgemeinen Marktrisikos zu berücksichtigen. Hält man sich vor Augen, dass realistische Werte für  $n$  die Marke von 5000 leicht überschreiten, ja in Einzelfällen derzeit bis zu 500000 annehmen können, liegt es auf der Hand, die Anzahl der Risikofaktoren  $\tilde{R}$  möglichst klein zu halten, also

$$\dim(\tilde{R}) = d \ll n.$$

Im Falle der bereits erwähnten Datenmatrix von RiskMetrics liegt  $d$ , die Anzahl der Risikofaktoren, bei etwa 400. In der Praxis sind Modelle mit  $d > 5000$  sehr selten anzutreffen.

Zur praktischen Durchführung des Mappings ist ein Vektor von Risikofaktoren zu bestimmen:

$$\tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_d)^\top. \quad (6)$$

Die konkrete Auswahl geschieht an Hand der empirischen Prognosegüte. Formal kann diese Auswahl durch eine Funktion  $\mathcal{M}$  beschrieben werden:

$$\mathcal{M} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}) = \tilde{R}$$

Für gegebenes  $\tilde{\mathbf{R}}$  ist eine Funktion  $\psi$  zu bestimmen, so dass die Verteilung der Variablen  $\tilde{L}_t = \psi(\tilde{\mathbf{R}})$  die Verteilung der Portfolioverlusten  $L_t = \Psi(\mathbf{R})$  möglichst gut approximiert. Die Angabe von  $\psi$  mappt die Exposures  $w_t$  implizit auf die Risikofaktoren. Im Idealfall gelte mit einem analog definierten  $\tilde{\mathcal{H}}_t$ :

$$\mathcal{L}(L_{t+h} | \mathcal{H}_t) = \mathcal{L}(\tilde{L}_{t+h} | \tilde{\mathcal{H}}_t)$$

bzw.

$$VaR(\Pi_t) = VaR(\tilde{\Pi}_t).$$

Im einfachsten Fall ist  $\mathcal{M}$  eine Inklusionsabbildung oder die Risikofaktoren  $\tilde{R}_i$  sind Funktionen der  $\mathbf{R}$ .

Entsprechend dem universellen Charakter von Risikofaktoren beziehen sich gängige Mappingverfahren meist nur auf ein Metaportfolio, das durch die Menge aller zum Handel autorisierten Instrumente charakterisiert ist, ohne den konkreten Portfoliokontext – etwa durch Verwendung von  $w_t$  beim Mapping – zu berücksichtigen. Die folgenden Gedanken untersuchen das – von RiskMetrics (1996) propagierte – Indexmodell, das Mapping auf synthetische Indices (Hauptkomponenten) und geben einen neuen Vorschlag, auf einer vereinfachten Korrelationsmatrix beruhend.

## 2.1 Reduktion durch Regression: Indexmodell

Innerhalb der Kategorie der Mappingverfahren findet das Marktindexmodell breite Anwendung in der Praxis, Jorion (1997). Cuthbertson (1996) gibt einen Überblick zu gängigen Varianten des CAPM Modells sowie Faktormodelle, insbesondere finden die jeweiligen Modellannahmen eine kritische Würdigung. Die Verwendung von Betafaktoren basiert auf der Idee eine unterstellte Beziehung zwischen den Returns der Assets und denen eines Indexes - wie dem DAX - zu verwenden. Das Risiko einer offenen Position in einem Asset wird durch das Risiko des Index erklärt, in dem die Aktienposition auf den Index gemappt wird.

Sei  $R_{it}$  der Return des  $i$ -ten Assets und  $R_m$  der Return des Index, dann spezifizieren folgende Gleichungen das Indexmodell:

$$R_{it} = \beta_i R_{mt} + \epsilon_{it}, \quad (7)$$

$$E(\epsilon_{it}) = 0 \quad E(\epsilon_{it}^2) = \sigma_{\epsilon, it}^2 \quad (8)$$

$$E(\epsilon_{it} R_{mt}) = 0 \quad E(\epsilon_{it} \epsilon_{jt}) = 0 \quad (9)$$

Diese Gleichungen gelten über einen Zeitraum  $t = 1, \dots, T$  und  $\epsilon_{it}$  wird als residual- bzw. idiosynkratische Variable bezeichnet. Das so spezifizierte Modell definiert scheinbar unverbundene Regressionsgleichungen. Diese Tatsache ist für die Schätzungen bedeutsam, da in diesem Fall die Schätzung der Parameter nicht gemeinsam erfolgen muss.

Die Varianz von  $R_{it}$  besitzt damit folgende Zerlegung

$$\sigma_{it}^2 = \beta_i^2 \sigma_{mt}^2 + \sigma_{\epsilon, it}^2 \quad (10)$$

und für die Kovarianz gilt

$$\sigma_{ijt}^2 = \beta_i \beta_j \sigma_{mt}^2. \quad (11)$$

Unter der Annahme von (7) bis (9) sowie unter der Verwendung von (10) und (11) gilt für die Varianz von (3)

$$\begin{aligned} w_t^\top \Sigma_t w_t &= \sum_{j,i=1}^n \sigma_{it} \sigma_{jt} \rho_{ijt} w_{it} w_{jt} \\ &= \sum_{j,i=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{mt}^2 w_{it} w_{jt} + \sum_{i=1}^n \sigma_{\epsilon, it}^2 w_{it}^2 \\ &= \sigma_{mt}^2 w_t^\top \beta \beta^\top w_t + w_t^\top D_{\epsilon_t} w_t \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^\top$  den Vektor der Betas bezeichnet. Die Diagonalmatrix  $D_{\epsilon_t} = \text{diag}(\sigma_{\epsilon, 1}^2, \dots, \sigma_{\epsilon, n}^2)$  bezeichnet die Kovarianzmatrix des Vektors  $\epsilon$ . Die Gleichung (12) motiviert folgende Approximationen der Kovarianzmatrix  $\Sigma_t$ :

$$\Sigma_{\mathcal{D}} = \sigma_m^2 \beta \beta^\top + D_{\epsilon} \quad (13)$$

$$\Sigma_{\beta} = \sigma_m^2 \beta \beta^\top. \quad (14)$$

Die Güte der Approximation hängt wesentlich von der Gültigkeit von (9) ab. Der erste Summand in (12) rechtfertigt, die Approximation (14) als Mapping auf einen Index zu interpretieren. Im vorliegenden Fall eines Mappings auf einen Index nimmt (7) folgende Form an:

$$\mathcal{M}(w_t) = \beta^\top w_t \quad \text{und} \quad \mathcal{M}(\mathbf{R}) = \{R_m\},$$

$$\sigma_{mt}^2 w_t^\top \beta \beta^\top w_t + w_t^\top \mathcal{D}_{\epsilon_t} w_t = \sigma_{mt}^2 \mathcal{M}^2(w_t) + w_t^\top \mathcal{D}_{\epsilon_t} w_t.$$

Der Vorteil dieses Mappingverfahrens ist evident: zum einen sind nur  $n + 1$  bzw.  $2n + 1$  Parameter ( $\dim(\beta) = n$ ,  $\dim(\epsilon) = n$  sowie  $\sigma_m^2$ ) zur Bestimmung von  $\Sigma_\beta$  bzw.  $\Sigma_{\mathcal{D}}$  zu schätzen (statt  $n(n + 1)/2$  für  $\Sigma_t$ ) und zum anderen führt die Verwendung eines Risikofaktors  $R_m$  zu einer deutlichen Reduktion der Dimension eines VaR-Modells. Diese Mappingverfahren benutzen Approximationen von  $VaR(\Pi_t)$  die auf (13) und (14) beruhen.

$$\begin{aligned} VaR_{\mathcal{D}}\{\mathcal{M}(\Pi_t)\} &= q_\alpha \sqrt{w_t^\top \Sigma_{\mathcal{D}} w_t} \\ &= \sqrt{\mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}^\top (\mathbf{1}_{(n \times n)} + B^{-1} D_{\epsilon_t} B^{-1}) \mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}} \end{aligned} \quad (15)$$

$$VaR_{\beta}\{\mathcal{M}(\Pi_t)\} = q_\alpha \sqrt{w_t^\top \Sigma_{\beta} w_t} = \sqrt{\mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}^\top \mathbf{1}_{(n \times n)} \mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}} \quad (16)$$

Wobei die  $i$ -te Komponente von  $\mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}$  den VaR des auf den Index  $R_m$  gemappten  $i$ -ten Assets bezeichnet:

$$\mathbf{VaR}_{\mathcal{M}} = VaR_m \beta.$$

$B$  bezeichnet die Diagonalmatrix  $\text{diag}(|\beta_1|, \dots, |\beta_n|)$  und  $\mathbf{1}_{(n \times n)}$  ist diejenige Matrix, welche nur aus Einsen besteht. Aus (15) und (16) wird deutlich, welche Simplifikationen die Mappingverfahren (13) und (14) vornehmen:

1. in (15) wird  $C$  in (5) durch  $\mathbf{1}_{(n \times n)} + B^{-1} D_{\epsilon_t} B^{-1}$
2. in (16) wird  $C$  in (5) durch  $\mathbf{1}_{(n \times n)}$
3. in (15) und (16) wird  $\mathbf{VaR}$  in (5) durch  $\mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}$  ersetzt.

Offensichtlich sind diese Vereinfachungen von unterschiedlicher Wirkung, die insgesamt nicht allgemeingültig abgeschätzt werden kann. Der  $VaR$  eines linearen Portfolios im Quadrat ist eine quadratische Form von  $w_t$  und  $\Sigma_t$ :

$$VaR^2 = w_t^\top \Sigma_t w_t = \mathbf{VaR}^\top C_t \mathbf{VaR}.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathbf{VaR}_{\mathcal{M}}^\top C_t \mathbf{VaR}_{\mathcal{M}} \leq \mathbf{VaR}^\top C_t \mathbf{VaR} \leq \mathbf{VaR}^\top \mathbf{1}_{(n \times n)} \mathbf{VaR}.$$



Selbst für Portfolios, die ausschließlich Long-Positionen ausweisen, lässt sich die Auswirkung des Mappings nicht allgemein bestimmen. Für Portfolios, die aus Long und Short Positionen bestehen, ist es unmöglich. Die Substitution von  $C_t$  durch  $\mathbf{1}_{(n \times n)}$  in (5) wirkt meist konservativ, wohingegen die Substitution von **VaR** durch **VaR** <sub>$\mathcal{M}$</sub>  meist zu einer Risiko Unterschätzung führt. Die Verrechnung von von Long und Short Positionen, die auf einen Index gemappt werden (quasi ein stochastisches Netting), führt zu Problemen, die bei der Verwendung singularer Kovarianzmatrizen entstehen können (Davé und Stahl 1998). So impliziert  $\text{rang}(\mathbf{1}_{(n \times n)}) = 1$ , dass es Portfolios mit Exposure  $\tilde{w}$  gibt, für die

$$\tilde{w}^\top \mathbf{1}_{(n \times n)} \tilde{w} = 0$$

gilt. Dies hat zur Folge, dass die zu den  $\tilde{w}$  assoziierten VaRs den Wert Null besitzen. Somit sind empirische Analysen zur Validität des Betafaktoren mappings unumgänglich.

## 2.2 Mapping auf Hauptkomponenten

Die Verwendung von Hauptkomponenten ist ein wohlbekanntes Verfahren (Jolliffe 1986, Christensen 1991). Die Orthogonalisierung der Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Sigma$  des Vektors **R** liefert

$$\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma^\top$$

mit  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  als Diagonalmatrix der Eigenwerte und  $\Gamma$  als Matrix der Eigenvektoren von  $\Sigma$ . Unter den üblichen Regularitätsannahmen ( $\lambda_i > 0$ ) lässt sich **R** darstellen als

$$\mathbf{R} = \Gamma Y.$$

Die Komponenten  $(Y_1, \dots, Y_n)$  von  $Y$  sind nach Konstruktion unkorreliert und werden als Hauptkomponenten von **R** bezeichnet. Die Gesamtvarianz von **R** ist gleich der Spur von  $\Sigma$ , so daß gilt

$$\text{sp}(\Sigma) = \text{sp}(\Gamma \Lambda \Gamma^\top) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Die Hauptkomponenten mit den größten Varianzen (Eigenwerten) liefern also den größten Beitrag zur Gesamtvarianz von **R** und können in diesem Sinne als die wichtigsten Einflussfaktoren bezeichnet werden. Gilt  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  und stellt  $\Gamma_{(i)}$  die  $i$ -te Spalte von  $\Gamma$  dar, wird durch die Approximation

$$\mathbf{R} \approx \sum_{i=1}^k \Gamma_{(i)} Y_i \tag{17}$$

mit  $k < n$  die Gesamtvarianz von  $\mathbf{R}$  zu einem Anteil von

$$\xi_k = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (18)$$

erfaßt. Typischerweise wird  $k$  als die minimale Anzahl von Hauptkomponenten bestimmt, die sicherstellt, dass  $\xi_k > 1 - \xi^*$  wobei  $0 < \xi^* < 1$ . Im linearen, normal-verteilten Fall ergibt sich unmittelbar für den Value-at-Risk des gemappeten Portfolios zum Niveau  $\alpha$

$$VaR = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{w_t^\top [\Gamma_{(1)} \cdots \Gamma_{(k)}] \Lambda [\Gamma_{(1)} \cdots \Gamma_{(k)}]^\top w_t} \quad (19)$$

### 2.3 Mapping des Parameterraumes: Gleichkorrelierte Risikofaktoren

Das Mappingverfahren dieses Abschnitts vereinfacht die Struktur des Parameter-raums des stochastischen Modells der Risikofaktoren

$$\Sigma_t = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) C_t \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$$

durch folgende Restriktion:

$$C_t = (\rho_{ijt})_{i,j=1,\dots,n} \text{ mit konstanten } \rho_{ijt} = \rho \in [-1, 1]. \quad (20)$$

Die Verwendung solcher Modelle findet aktuell bei Kreditrisikomodellen Verwendung, doch sind solche Ideen aus der Portfoliotheorie wohlbekannt (Elton and Gruber 1995).

Der Schätzung der restringierten Korrelationsmatrix liegt das folgende Modell mit zufälligen Effekten zugrunde:

$$R_{it}/\sigma_i = \alpha_t + \varepsilon_{it},$$

wobei  $E\alpha_t = E\varepsilon_{it} = ER_{it} = 0$ ,  $ER_{it}^2 = \sigma_i^2$ ,  $E\alpha_t^2 = \sigma_\alpha^2$ ,  $E\varepsilon_{it}^2 = \sigma_\varepsilon^2$ ,  $E\alpha_s \varepsilon_{it} = 0$ . Für die Varianz und Kovarianz der Aktienrenditen gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_{it}) &= \sigma_i^2(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\varepsilon^2) = \sigma_i^2 \\ \text{Cov}(R_{it}, R_{jt}) &= \sigma_i \sigma_j \sigma_\alpha^2. \end{aligned}$$

Wir definieren  $R_{it}^* = R_{it}/\sigma_i$ . Ein Schätzer von  $\sigma_i^2$  ist, z.B., die empirische Varianz der Renditen  $R_{it}$ ,  $t = 1, \dots, T$ . Zunächst definieren wir  $\bar{R}_t^* = \sum_{i=1}^n R_{it}^*$  und  $\bar{\varepsilon}_t = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{it}$ . Offensichtlich gilt

$$R_{it}^* - \bar{R}_t^* = \varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_t$$

und wir benutzen die folgenden Schätzer:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T (R_{it}^* - \bar{R}_t^*)^2}{n(T-1)}, \\ \hat{\sigma}_\alpha^2 &= 1 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Die Standardabweichung im Zähler von  $R_{it}^*$  ist mit der empirischen Standardabweichung geschätzt worden.

Die Korrelationsmatrix der Aktienrenditen ist dann approximiert durch

$$\hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \begin{pmatrix} 1 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & 1 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ & & \ddots & \\ \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p).$$

Vergleicht man die Vor- und Nachteile sämtlicher Mappingverfahren dieses Abschnittes, so wird deutlich, dass jedes Mappingverfahren einen Kompromiss zwischen der Genauigkeit der VaR-Schätzung, der Interpretierbarkeit des Mappingverfahrens, dem Komplexitätsgrad im Hinblick auf die Verwendung der Ergebnisse der Risikomessung zur Steuerung und einer Vereinfachung der Rechen-technik aus einer bestimmten Perspektive sucht.

### 3 Diagnoseverfahren

VaR Modelle gehören zur Kategorie statistischer Prognosemodelle, da die geschätzten Verteilungen der Risikofaktoren,  $\mathbf{R}_{t+h}$ , welche die Unsicherheit über zukünftige Zustände der Umwelt abbilden, den wesentlichen Baustein zur Erstellung der bedingten Prognoseverteilung

$$\mathcal{L}(L_{t+h} \mid \mathcal{H}_t)$$

möglicher Portfolioverluste über einen Horizont  $h$  bildet. Eine Folge von Paaren, bestehend aus einer Prognose,  $P_t$ , und einer dazugehörigen Realisation,  $\nu_t$ ,

$$\{P_t, \nu_t\}_{t=1}^N \tag{21}$$

bildet die empirische Basis zur Beurteilung der Prognosegüte eines VaR-Modells.

Die Kurzschreibweise  $P_t$  bezeichnet entweder die gesamte geschätzte Prognoseverteilung oder aus ihr abgeleitete Parameter (z. B.: VaR, Tail-VaR, Standardabweichung), hierbei steht  $P$  für Prognose. Soll der Aspekt, dass die Verteilung geschätzt wurde, betont werden, so geschieht dies durch Verwendung von  $\hat{P}_t$ .  $\nu_t$

bezeichnet die assoziierten Wertänderungen des Portfolios  $\Pi_t$  über einen fixen Prognosehorizont, hier ein Tag,  $h = 1$ . Die zu den Beobachtungen  $\nu_t$  assoziierten Zufallsvariablen werden mit  $N_t$  bezeichnet. Die Unterscheidung zwischen  $\nu_t$  und  $l_t$  ist geboten, da sich die Variable  $L_t$  auf den Raum der Risikofaktoren, – also  $\mathcal{M}(\mathbf{R})$  bezieht, – wohingegen  $N_t$  auf den Raum der Portfoliovariablen rekurriert. Grundsätzlich werden im folgenden Zufallsvariablen immer mit Großbuchstaben bezeichnet, die dazugehörigen Realisationen mit Kleinbuchstaben.

### 3.1 Analysetools

Das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsprognosen zählt zu den weniger erforschten Gebieten der mathematischen Statistik. Wesentliche theoretische Grundlagen dieses Gebietes stammen von Dawid – seine Überblicksartikel (Dawid 1986, Dawid 1997) geben eine prägnante Zusammenfassung. Die Impulse hierfür kamen aus der Literatur zur Praxis der Beurteilung von Wetterprognosen. Wenngleich die erste Publikation aus dem Jahre 1884 stammt, beginnt die relevante Literatur mit Briers Arbeit aus 50er Jahren und sie erhielt seit den 60ern eine stete Fortentwicklung vor allem durch Murphy und Winkler (1992) und Murphy (1997).

Im Mittelpunkt dieser praktischer Arbeiten stehen diskrete Variablen. Zum einen wird die Wahrscheinlichkeitsskala  $[0, 1]$  in  $k$  Kategorien partitioniert, zum anderen bezeichne  $l$  die Anzahl der Ereignisse – etwa  $l = 2$  für  $E = \{\text{Regen, kein Regen}\}$ . Gegeben seien  $N$  Wahrscheinlichkeitsprognosen  $\{P_{ti}\}_{t=1}^N$  sowie die dazugehörigen Ereignisse  $\{\nu_t\}_{t=1}^N$ . Bezeichnet  $P_{ti}$ ,  $i = 1, \dots, l$  die für  $t$  prognostizierten Wahrscheinlichkeiten und bezeichnet  $E_{ti}$  eine Indikatorvariable, die den Wert Eins annimmt, wenn zum Zeitpunkt  $t$  ein Ereignis der Kategorie  $i$  beobachtet wurde ( $\nu_t = i$ ) und sonst Null. Mit diesen Bezeichnungen ist das Brier Score eines Prognosesystems durch

$$\text{BS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^l \sum_{t=1}^N (P_{ti} - E_{ti})^2 \quad (22)$$

definiert. Um detaillierte Güteeigenschaften eines Prognosesystems zu definieren, starten Murphy und Winkler (1992), ebenfalls im Kontext diskreter Variablen, auf der Basis von (21) unter Vernachlässigung der Information aus der zeitlichen Abfolge, indem sie die gemeinsame Häufigkeitsfunktion

$$h(p_i, e_j) = \frac{N_{ij}}{N} \quad (23)$$

zum Ausgangspunkt ihrer Untersuchungen machen;  $N_{ij}$  bezeichnet die absolute Häufigkeit, wie oft das Ereignis  $e_i$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p_j$  prognostiziert wurde.

Die Faktorisierung von (23)

$$h(p, e) = h(e | p) h(p) \quad (24)$$

$$= h(p | e) h(e) \quad (25)$$

in bedingte und marginale Häufigkeitsfunktionen liefert den Schlüssel zur Definition weiterer Maßzahlen und Graphiken.

## Wichtige Maßzahlen und graphische Darstellungen

Das Brier Score kann als MSE interpretiert werden, wie die Darstellung

$$\text{BS} = \sum_e \sum_p h(p, e)(p - e)^2 \quad (26)$$

$$= (\mu_p - \mu_e)^2 + \sigma_p^2 + \sigma_e^2 - 2\sigma_p\sigma_e\rho_{pe} \quad (27)$$

zeigt. Eine weitere Differenzierung der Prognosegüte ergibt der Vergleich von

$$p_i \text{ mit } \frac{1}{N} \sum_{j=1}^k N_{ij}. \quad (28)$$

Für ein perfektes Prognosesystem stimmten die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  mit den beobachteten relativen Häufigkeiten überein. In diesem Fall heissen die Prognosen gut kalibriert.

Für adäquate VaR Prognosen sollten die Realisationen der Variablen  $F_{L_t}(N_t)$  von unabhängigen Ziehungen aus einer Gleichverteilung auf  $[0, 1]$  nicht zu unterscheiden sein, wobei  $F_{L_t}(x)$  die zu  $P_t$  gehörende Verteilungsfunktion bezeichnet. Der P-P-Plot der transformierten Beobachtungen

$$\{\hat{F}_{L_t}(\nu_t)\}_{t=1}^N \quad (29)$$

heißt (absolute) empirische Kalibrationskurve.

Wetter- und VaR-Prognosen unterscheiden sich meist nur in einem kleinen Detail: bei VaR-Modellen stehen Prognosen unterschiedlicher Ereignisse (Quantile bzw. Prognoseintervalle) mit festen Wahrscheinlichkeiten – also Ereignisprognosen – in Zentrum, wohingegen bei Wetterprognosen Wahrscheinlichkeitsprognosen fixierter Ereignisse im Mittelpunkt stehen.

Die folgenden Maßzahlen und Graphiken tragen diesem Umstand Rechnung, indem sie auf Ereignisse, nämlich die Intervalle  $(-\infty, VaR]$ , fokussieren. Hierzu ist (21) analog umzuformen. Beruht die Intervallprognose auf (5), so liegt ein gut kalibriertes Modell sicher dann vor, wenn die Folge

$$\{s_t^\alpha = \frac{\nu_t}{\sigma_t}\}_{t=1}^N \quad (30)$$

von einem Gauss'schen White Noise Prozeß nicht zu unterscheiden ist. Als graphische Darstellung finden Quantil-Plots (Q-Q-Plots) Verwendung. Als wichtiger Parameter dient

$$\kappa = \hat{\sigma}_{S_\alpha} \quad (31)$$

quantifiziert das Ausmaß der Über- oder Unterschätzung des Risikos durch das Modell.

Die empirische Kalibrationskurve – also der P-P-Plot der Zeitreihe (29) – ist ein Diagnoseplot zur Überprüfung, ob die Gleichverteilung  $U[0, 1]$  ein adäquater Data Generating Process (DGP) für die Marginalverteilungen des Prozesses  $\{F_{L_t}(N_t)\}_{t=1}^N$  darstellt. Im Falle eines gut kalibrierten Modells streut die Punktwolke eng um die Diagonale des Einheitsquadrats. Weiterhin sind Symmetrieeigenschaften involvierter Verteilungen gut zu erkennen. Im Kontext von VaR-Modellen birgt dieser Plot den Nachteil, auf Abweichungen im Zentrum der Verteilung zu fokussieren, siehe Wilk und Gnanadesikan (1968). Die Verwendung des Q-Q-Plots als Diagnose-Check der Kalibration ist insoweit *relativ* als hier keine universelle Referenzgröße (wie Einheitsdiagonale im Falle des P-P-Plots) existiert. Zwar können Rückschlüsse über Symmetrie und die Verteilungsklasse des Prozesses ohne weiteres gezogen werden, doch ist die Beantwortung der eigentlichen Frage nach der Kalibration ohne Angabe einer modellbezogenen Referenzgröße - etwa (37) - nicht möglich. Ein Vorteil des Q-Q-Plots liegt in seiner Fokussierung auf Abweichungen in den Verteilungsenden, siehe Wilk und Gnanadesikan (1968). Absolute und relative empirische Kalibrationskurven rekurren lediglich auf die Adäquanz der Marginalverteilungen des Prozesses  $L_t$ . Sie bilden Indikatoren in Bezug auf die richtige Auswahl der Risikofaktoren. Da diese Plots auf Rangstatistiken beruhen, lassen sie keine Aussagen über temporale Abhängigkeitsstrukturen zu. Die Heterogenitäts- und Unabhängigkeitseigenschaften werden anhand von Timeplots untersucht. Die Zeitreihe der Indikatorfunktion der VaR-Überschreitungen zum Niveau  $\alpha$

$$\{t, I\{N_t > VaR_{t-1}(\alpha)\}\}_{t=1}^N \quad (32)$$

dient als graphisches Mittel zur Beurteilung, ob Cluster erkennbar, welche die Abhängigkeit der Realisationen  $s^\alpha$  indizieren. An Hand der Zeitreihe

$$\{t, \hat{P}_t, \nu_t\}_{t=1}^N \quad (33)$$

lassen sich Inhomogenitäten visuell erkennen.  $\chi^2$  Statistiken dienen als exploratives Mittel, um diejenige Perioden zu identifizieren, in welchen die Prognosen nicht unabhängig waren.

## 4 Überlegungen zu einer quantitativen Analyse

Die folgende empirische Analyse vergleicht die vorgestellten Modelle bzw. Mappingverfahren an Hand von Aktienportfolios mittels der Diagnoseverfahren des vorangegangenen Abschnittes im Hinblick auf deren Prognosegüte. Hierzu erfolgt zuerst eine Beschreibung der Daten sowie des Simulationsdesigns.

### 4.1 Design der Studie

#### Die Daten

Empirische Grundlage der folgenden Studie bilden die täglichen diskreten Returns

$$r_t = \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t} \quad (34)$$

die aus den Preiszeitreihen der folgenden 18 deutschen Aktien sowie dem deutschen Aktienindex gebildet wurden:

Allianz, BASF, Bayer, BMW, Commerzbank, DAX, Deutsche Bank, Degussa-Huels, Dresdner Bank, Hoechst, Hypovereinsbank, Karstadt, Lufthansa, Linde, MAN, Mannesmann, Münchner Rück, Preussag und RWE.

Entsprechend des jeweiligen nationalen Feiertagskalenders weisen Finanzzeitreihen typischerweise Lücken auf. Es ist nun gängige Praxis von Datenlieferanten, fehlende Werte durch Vortageswerte zu substituieren. Diese Vorgehensweise ergibt für entsprechende Returns in (34) aber einen Wert von Null. Im vorliegenden Fall betrifft dies etwa 5% der Daten. Somit läge den Daten ein Mischungsmodell, etwa

$$0.95 N(0, \Sigma) + 0.05 \delta_0,$$

wobei  $\delta_0$  eine Einpunktverteilung in Null bezeichnet, zugrunde. Um die Beurteilung der Prognosegüte durch diese Art der Fehlspezifikation des stochastischen Modells nicht zu beeinträchtigen, wurden diese Werte aus der Datenreihe entfernt. Auf fortgeschrittene Alternativen, wie die Verwendung des EM-Algorithmus, die NIPALS-Technik oder von Brownsche Brücken zur Ersetzung fehlender Werte, wurde verzichtet.

Die Datenreihe beginnt mit dem 1.1.1997 und endet am 18.6.1999.

#### Simulation der Portfoliogewichte

Um ein möglichst realistisches Simulationsverfahren für die Bestimmung der Portfoliogewichte,  $w_t$ , zu erhalten, wurden Grenzen - analog zu Auslastungsquoten von

VaR-Limiten - definiert, die das Simulationsdesign wesentlich bestimmen:

$$w_{t+1}^\top = \frac{w_t^\top}{\sigma_{\Pi_t}} \{600 \operatorname{diag}(1/6 + U_1, \dots, 1/6 + U_n)\}$$

wobei  $U_n$  eine  $n$ -dimensionale Gleichverteilung und  $\sigma_{\Pi_t}$  die Volatilität des Portfolios bezeichnet.

Um diese Ausgangssituation zu erreichen, wird ein zeitunabhängige Wertebereich für die Wertänderungen des Portfolios unterstellt:

$$N_t \in [-50000, 50000].$$

Dieses Intervall wird in disjunkte Mengen  $A_i$  zerlegt:

$$[-50000, 50000] = \cup_{i=1}^5 A_i,$$

konkret verwenden wir:

$$A_1 = [-50000, -500), A_2 = [-500, -320), A_3 = [-320, 320),$$

$$A_4 = [320, 500) \text{ und } A_5 = [500, 50000].$$

Diese Vorgehensweise ist dadurch gerechtfertigt, dass VaR-Modelle in der Praxis nicht nur zur Risikomessung, sondern auch zur -steuerung eingesetzt werden. Zu diesem Zweck wird meist ein VaR-basiertes Limitsystem implementiert. In der Praxis hat sich nun gezeigt, dass diese Limite eine konstante Auslastung innerhalb gewisser Grenzen über die Zeit aufweisen; dies motiviert und rechtfertigt obige Annahme.

## Die Modelle

Wie in den Abschnitten 1 und 2 dargelegt, kann die Prognoseverteilung

$$\mathcal{L}(L_{t+h} \mid \mathcal{H}_t)$$

der Wertänderungen eines Portfolios innerhalb eines Modellansatzes, wie dem hier im Zentrum stehenden Varianz-Kovarianz Ansatz, unterschiedlich – nämlich in Abhängigkeit des jeweiligen Mappingverfahrens – bestimmt werden. Die folgende empirische Analyse beurteilt und vergleicht die Prognosegüte der Modelle  $M_1$  bis  $M_6$ , die wie folgt definiert sind.

1. Das Modell  $M_1$  benützt alle 18 Risikovariablen:

$$\mathcal{L}(\mathbf{R}_{t+1} \mid \mathcal{H}_t) = N_{18}(0, \Sigma_t). \quad (35)$$

Die Bestimmung des VaR erfolgt gemäß (5).



2. Das Modell  $M_2$  beruht auf dem klassischen Betafaktoren-Mapping gemäß (14). Zur Bestimmung des VaR wird (16) herangezogen.
3. Das erweiterte Betafaktoren Modell,  $M_3$ , verwendet (13). Die VaR-Berechnung erfolgt durch (15).
4. Modell  $M_4$  basiert auf der Hauptkomponentenanalyse (17), der Parameter  $\xi_k$ , in (18) beträgt 80%. Die Bestimmung des VaR erfolgte gemäß (19).
5. Modell  $M_5$  modifiziert  $M_4$  insoweit, als es die gewichteten Aktienrenditen  $(w_{1t}R_{1t}, \dots, w_{nt}R_{nt})$  und nicht  $\mathbf{R}_t$  verwendet.
6. Modell  $M_6$  benutzt – wie in (20) dargelegt – eine sparsame Parametrisierung. Alle Elemente der Korrelationsmatrix sind identisch,  $\rho_{ij} = \rho$  für alle  $i \neq j$ .

## 5 Empirische Analyse

Im Zentrum unserer Untersuchungen steht die Beurteilung der Prognosegüte der Modelle  $M1 - M6$ . Den VaR Prognosen dieser Modelle liegt ein multivariater Gausscher White Noise Prozess als stochastisches Modell für die Returns  $\mathbf{R}_t$  der Risikofaktoren zugrunde. Dieser Prozess ist bekanntlich nicht in der Lage die stilisierten Fakten von Finanzzeitreihen (Fat-tails, Leptokurtosis, variierende Volatilität) adäquat abzubilden. Da nationale wie internationale aufsichtliche Normen (z. B. 34 Abs. 3 Grundsatz I) die Verwendung von exponentiell gewichteten Beobachtungen, wie sie bei der Verwendung von GARCH oder IGARCH Modellen einfließen, praktisch ausschließen, haben wir diese Modelle auch in dieser Studie nicht berücksichtigt. Daher erfolgt hier auch keine Analyse inwieweit dieses stochastische Modell die Dynamik des zugrunde liegenden Prozesses abbildet.

Die Überprüfung, ob die Beobachtungen  $\{\mathbf{r}_t\}_{t=1}^T$  aus einer Verteilung  $N(0, \Sigma)$  stammen, erfolgt anhand eines Q-Q-Plots. Stammen die Daten aus  $N(0, \Sigma)$ , so ist

$$\sum_{i=1}^T \mathbf{r}_i^\top \Sigma^{-1} \mathbf{r}_i \sim \chi^2(T).$$

Der Q-Q-Plot in Abbildung 5 weicht deutlich von der Referenzlinie ab, die Daten stammen kaum aus einer multivariaten Normalverteilung. Es ist nun von grundsätzlicher Bedeutung, ob diese Tatsache auf die Prognosegüte vererbt oder nicht.

Abbildung 2 zeigt die Zeitreihe

$$\{P_t, \nu_t\}_{t=1}^T$$

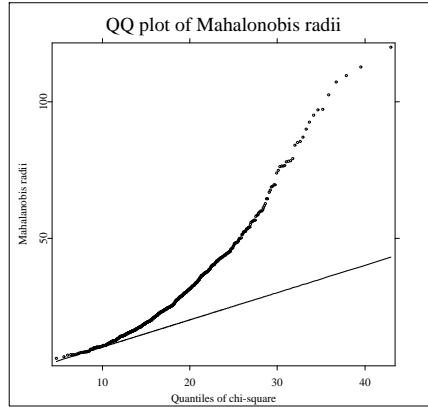


Abbildung 1: Q-Q Diagramm der quadrierten Mahalanobis-Radien für die beobachteten Returns  $\mathbf{r}_t$  der Risikofaktoren

der VaR-Prognosen zum Signifikanzniveau  $\alpha = 80\%$  bzw.  $20\%$  und der Portfoliowertänderungen für einen Beobachtungszeitraum von  $T = 249$  Handelstagen für die Modelle  $M1 - M6$ . Offensichtlich ist die Prognosegüte des Modelles M1 unzureichend. Die Performance der anderen Modelle unterscheiden sich nur unwesentlich.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
$\kappa$	2.32	1.07	1.06	1.13	1.07	1.07
Brier Score	0.21	0.15	0.15	0.16	0.15	0.16
Skill Score	0.15	0.35	0.35	0.34	0.35	0.35

Tabelle 1: Statistische Maßzahlen zur Prognosegüte der Modelle  $M1 - M6$ .

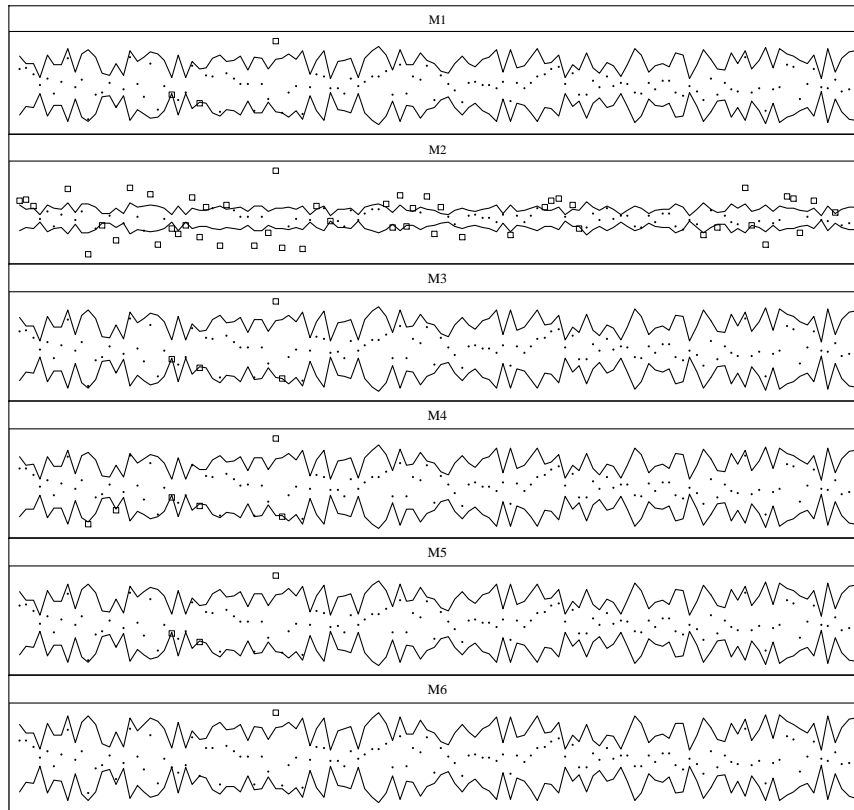


Abbildung 2: Zeitreihe der VaR-Prognosen zum Signifikanzniveau von 80% und 20% sowie der assoziierten Wertänderungen der Portfolios für die Modelle  $M1 - M6$ . Überschreitungen dieser VaR-Prognosen sind durch Quadrate gekennzeichnet.

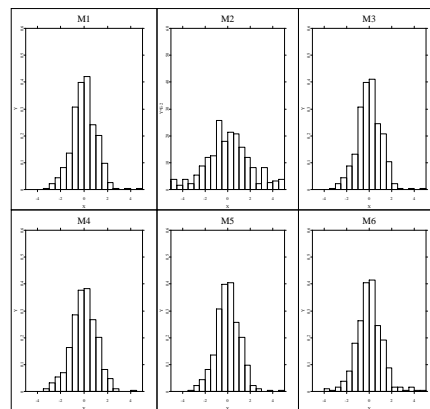


Abbildung 3: Histogramme für die Variable  $s^\alpha$  für die Modelle  $M1 - M6$ .

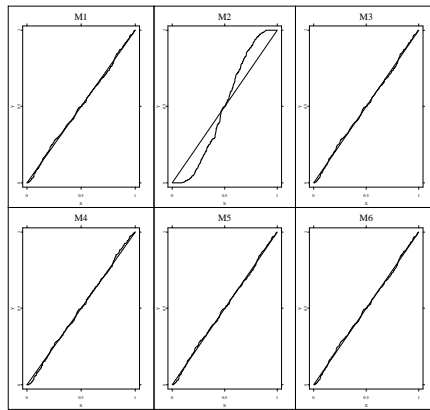


Abbildung 4: P-P-Plots für die Variable  $s^\alpha$  für die Modelle M1 – M6.

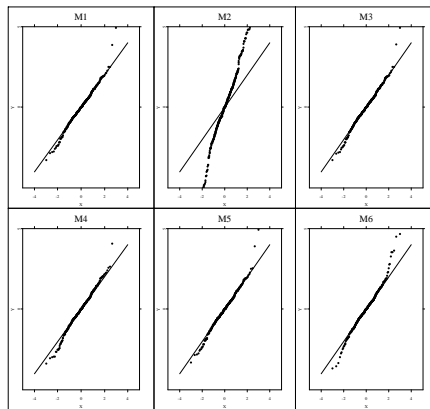


Abbildung 5: Q-Q-Plots für die Variable  $s^\alpha$  für die Modelle M1 – M6.

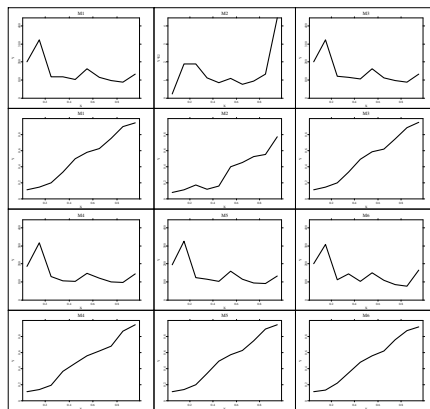


Abbildung 6: Diskrete Kalibrationskurven der Modelle M1 – M6.

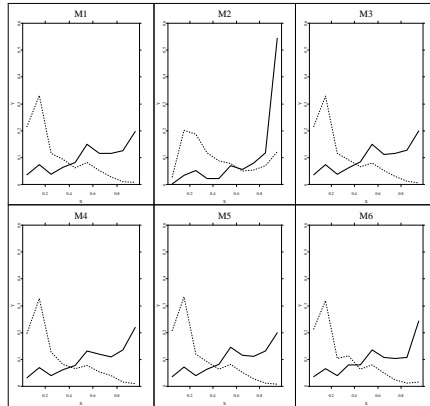


Abbildung 7: Diskriminationskurven für die Modelle M1 – M6.

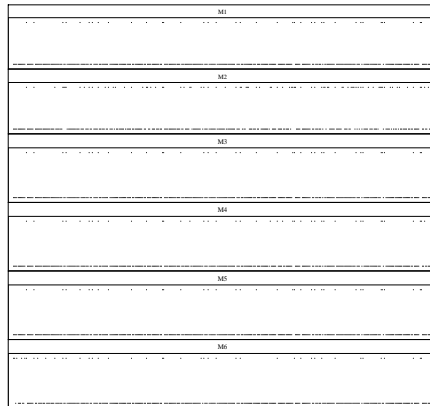


Abbildung 8: Zeitreihe der VaR-Überschreitungen zum Niveau  $\alpha = 0.8$  der Variablen für die Modelle M1 – M6.

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Q1 98	0.22	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
Q2 98	0.37	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17
Q3 98	0.52	0.26	0.24	0.26	0.26	0.26
Q4 98	0.44	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
Q1 99	0.7	0.39	0.39	0.39	0.39	0.39
Q2 99	0.63	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17

Tabelle 2: Relative Häufigkeiten der Überschreitungen des VaR zum Niveau  $\alpha = 80\%$  für die Modelle  $M1 - M6$ .

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Q1 98	0.4	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
Q2 98	2.97	0.52	0.52	0.52	0.52	0.52
Q3 98	5.73	1.05	0.78	1.05	1.05	1.05
Q4 98	4.34	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
Q1 99	8.85	3.21	3.21	3.21	3.21	3.21
Q2 99	7	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
$\chi^2$	188	13.9	13.4	13.9	13.9	13.9
SN	0 %	1.99 %	2.63 %	1.99 %	1.99 %	1.99 %

Tabelle 3: In den Spalten 1 – 6 sind die Beiträge je Quartal zur  $\chi^2$  Statistik. Spalte 7 enthält den Wert der  $\chi^2$  Statistik. Spalte 8 gibt das Signifikanzniveau des Wertes der Teststatistik unter der Nullhypothese  $p = 0.2$  wieder.

Die Praxis der VaR-Modelle hat gezeigt, dass explorative Diagnoseverfahren zur Beurteilung der Prognosequalität von VaR-Modellen sowohl auf der Ebene von Teilportfolios als auch der des gesamten Handelsbuches ausreichend sind, daher soll auch hier auf die Anwendung inferentieller Verfahren, die man etwa in Davé und Stahl (1998) dargelegt findet, verzichtet werden. Im folgenden dient eine Kombination graphischer Verfahren und deskriptiver Maßzahlen dazu, verschiedene Güteeigenschaften zu betonen.

Zur graphischen Analyse der Prognosequalität eines VaR-Modells kommen neben dem *Timeplot* der Zeitreihe (21) vor allem verschiedene graphische Darstellungen *empirischer Kalibrationskurven* in Betracht, Dawid (1984). Im Rahmen eines Delta-Normal Modells gilt

$$\hat{P}_t \in \{N(0, \hat{\sigma}_{t-1}^2) \mid \hat{\sigma}_{t-1}^2 \in [0, \infty)\}.$$

Somit kommt neben der Transformation von  $P_t$  auf eine Gleichverteilung auch die Standardisierung von  $L_t$  in Betracht. Da die Variable

$$S_t^\alpha = \frac{L_t}{VaR_{t-1}} \quad (36)$$

normalverteilt ist, gilt approximativ (für große  $n$ )

$$\mathcal{L}(L_t / \widehat{VaR}_{t-1}) \approx N(0, 2.33^{-2}), \quad (37)$$

da  $\widehat{VaR}_{t-1}$  im Delta-Normal Modell durch  $2.33 \hat{\sigma}_{t-1}$  definiert ist. Offensichtlich charakterisiert die Relation  $S_t^\alpha < -1$  gerade Überschreitungen von VaR-Prognosen zum Niveau  $\alpha$ , die dann in entsprechenden Graphiken leicht zu identifizieren sind. Eine adäquate Modellierung der Stochastik eines VaR-Modells liegt sicherlich dann vor, wenn  $\{F_{L_t}(N_t)\}_{t=1}^T$  bzw.  $\{S_t^\alpha\}_{t=1}^T$  qualifizierte *White Noise* Prozesse sind.

Hierzu werden über einen Zeitraum von 8 Jahren täglich Portfolios simuliert, d.h.  $w_t$  bestimmt, und auf täglicher Basis die dazugehörige VaR-Prognose erstellt. Die Qualität des jeweiligen Prognosemodells erfolgt im Lichte der beobachteten Portfoliowertänderungen. Die in vorigem Unterabschnitt dargelegten Methoden, die sowohl aus der Praxis der VaR-Modelle als auch aus der der Wetterprognosen bekannt sind, dienen als Qualitätskriterien.

## Literatur

Bank of International Settlements (1996). *Specific Risk*.

Chatfield, C. (1995). Model uncertainty, data mining and statistical inference, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* **158**: 419–466.

- Chatfield, C. (1996). Model uncertainty and forecast accuracy, *Journal of Forecasting* **15**: 495-466.
- Christensen, R. (1991). *Linear Models for Multivariate Time Series and Spatial Data*, Springer.
- Cuthbertson, K. (1996). *Quantitative Financial Economics*, Wiley.
- Davé, R. D. and G. Stahl (1998). On the Accuracy of VaR Estimates Based on the Variance-Covariance Approach, in: Bol, Nakhaeizadeh, Vollmer (Eds), *Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks*, Heidelberg: Physica, S. 189–232.
- Dawid, A. P. (1984). The Prequential Approach, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* **147**: 278–292.
- Dawid, A. P. (1986). Probability Forecasting. *Encyclopedia of Statistical Sciences* **7**: 210–218.
- Dawid, A. P. (1999). Prequential Analysis. *Encyclopedia of Statistical Sciences Update* **1**: 464–470
- Elton, E. J. and M. J. Gruber (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5th Ed, Wiley, New York
- Gouriéroux, C. (1997). *ARCH Models and Financial Applications*, Springer.
- Hendry, D. F. (1995). *Dynamic Econometrics*, Oxford.
- Hsiao, C. (1986). *Analysis of Panel Data*, Cambridge Univ. Press.
- Huschens, S. (1998). Messung des besonderen Kursrisikos durch Varianzzerlegung, *Kredit und Kapital* **4**: 567–591.
- Jolliffe, I. T. (1986). *Principal Component Analysis*, Springer.
- Jorion, P. (1997). *Value At Risk*, IRWIN, Chicago.
- Kreinin, A., Merkoulouitch, L., Rosen, D. and Zerbs, M. (1998). Principal Component Analysis in Quasi Monte Carlo Simulation, *ALGO Research Quarterly* **1/2**: 21–29.
- Litterman, R. and Winkelmann, K. (1998). *Estimating Covariance Matrices*, Risk Management Series, Goldman Sachs.
- Murphy, A. H. (1997). Forecast Verification. In: *Economic Value of Weather and Climate Forecasts*, ed. by R. W. Katz and A. H. Murphy, Cambridge University Press



- Murphy, A. H. and Winkler, R. L. (1992). Diagnostic verification of probability forecasts, *International Journal of Forecasting* **7**: 435–455.
- Morgan Guaranty Trust Company Reuters Ltd. (1996). *RiskMetrics—Technical Document, 4th Edition*.
- Reimers, M. and Zerbs, M. (1998). Dimension Reduction by Asset Blocks, *ALGO Research Quarterly* **1/2**: 43–55.
- Ridder, T. (1998). Basics of Statistical VaR-Estimation, in: Bol, Nakhaeizadeh, Vollmer (Eds), *Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks*, Heidelberg: Physica, S. 161–188.
- Ridder, T. and Stahl, G. (2000). Flexibles oder starres Cash-Flow Mapping?
- Stahl, G. and Traber, U. (2000). Backtesting in Action. In: *Kreditrisikomanagement*, Hrsg.: A. Oehler, Schäffer-Poeschl Verlag, Stuttgart.
- Studer, G. (1997). *Maximum Loss for Measurement of Market Risk*, PhD Thesis, ETH Zürich.
- Wilk, M. B. and R. Gnanadesikan (1968). Probability Plotting for the Analysis of Data, *Biometrika* **55**: 1–17.