ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Kohn, Wolfgang

Working Paper

Kapitalwertmethode bei nicht-flacher Zinsstrukturkurve

Suggested Citation: Kohn, Wolfgang (2013) : Kapitalwertmethode bei nicht-flacher Zinsstrukturkurve, ZBW - Deutsche Zentralbibliothek für Wirtschaftswissenschaften, Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft, Kiel und Hamburg

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/97147

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Kapitalwertmethode bei nicht-flacher Zinsstrukturkurve

Net Present Value in Case of Non Flat Interest Term Structure

überarbeitete Version

Prof. Dr. Wolfgang Kohn*
University of Applied Sciences, Bielefeld

21. Mai 2014

Abstract

The simple financial world assumes a constant interest rate over time (flat yield curve). If this restriction is released for a non constant interest rate (non-flat yield curve) the compounded interest should be neutralized for this interest payments. The net present value with neutralized interest payments (bootstraping method) leads towards net present values which takes better increasing and decreasing interest terms structures into account which results in lower or higher net present values. Therefore the investment decisions are more in line with the interest term structure. Further on a net present value margin is introduced, which shows for a given interest term structure the margin when the net present value is zero. It is an extension of the internal return of investment. All calculations are in line with a flat interest term structure.

Zusammenfassung

In der einfachen finanzmathematischen Welt herrscht ein konstanter Zinssatz. Wird die Modellwelt hinsichtlich einer nicht flachen Zinssatzstruktur abgeändert, so sollten die Barwertfaktoren um zwischenzeitliche Zinszahlungen (Zinseszinsen) neutralisiert werden. Die Berechnung der Barwertfaktoren mittels der Duplizierung von Zahlungsströmen (Bootstrapping) führt zu Kapitalwerten, die steigende bzw. fallende Finanzierungskosten der Investition besser im Kapitalwert berücksichtigen. Die Kapitalwerte der Investitionen fallen bzw. steigen gegenüber der herkömmlichen Berechnung und berücksichtigen damit besser die Markterwartungen aus der Zinsstrukturkurve. Die Unternehmensentscheidungen wirken damit stabilisierender auf die konjunkturelle Entwicklung. Ferner wird gezeigt, dass eine Barwertmarge bzw. Rentabilitätsmarge berechnet werden kann, die die Differenz

*wolfgang.kohn@fh-bielefeld.de
Für Diskussion und Ideen bedanke ich mich bei Dr. Tamm, Prof. Dr. Uphaus
JEL Klassifikation: E43, E44, G11, G31

zur gegebenen Zinssatzstruktur angibt, bei der der Kapitalwert Null wird. Alle Ergebnisse entsprechen dem traditionellen Ansatz, wenn die Zinssatzstruktur flach ist.

1 Einführung

In der herkömmlichen Kapitalwertberechnung werden zukünftige Zahlung (am Ende der Periode) mit der Markteffizienzhypothese (Fama) diskontiert. Mit dieser Hypothese werden die zukünftigen Zahlungen mit den einperiodigen Terminzinssätzen diskontiert. Sie impliziert, dass eine Zahlung über t Perioden mit dem Kassazinssatz i_t verzinst wird.

$$(1+i_t)^t = \prod_{\tau=1}^{t}(1+{}_{\tau-1}i_\tau) \tag{1}$$

${}_{\tau-1}i_\tau$ bezeichnet einperiodige Terminzinssätze und i_t Kassazinssätze. Aus der Kapitalwertberechnung mit einer flachen Zinssatzstruktur wird so eine verallgemeinerte Kapitalwertberechnung abgeleitet.

$$C_0^*(i) = \sum_{t=0}^{n}\frac{Z_t}{(1+i)^t} \rightarrow C_0^*(i_1,\ldots,i_n) = Z_0 + \sum_{t=1}^{n}\frac{Z_t}{(1+i_t)^t} \tag{2}$$

Eine nicht-flache Zinssatzstruktur für die Kalkulationszinssätze in der Kapitalwertberechnung unterstellt aber, dass es sich um zukünftige Kassazinssätze handelt.

Die Barwertfaktoren aus (2)

$$c_t = (1+i_t)^{-t} \tag{3}$$

können auch mit einem linearen Gleichungssystem berechnet werden (vgl. [1, Kap. 6.3]).

$$\begin{aligned} B_1 &= c_1 Z_1 \\ B_2 &= c_1 Z_{1,2} + c_2 Z_2 \\ B_3 &= c_1 Z_{1,3} + c_2 Z_{2,3} + c_3 Z_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{Z}\,\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{b} \tag{5}$$

Werden für die zukünftigen Zahlungen $Z_{t,n}$ in der Periode t (bei einer Periodenanzahl von n) die Terminzinssätze ${}_{\tau-1}i_\tau$ bzw. für $Z_n = 1 + {}_{n-1}i_n$ und der Einfachheit wegen für die Barwerte $B_t = 1$ eingesetzt, erhält man mit der Lösung $\mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{b}$ die Bartwertfaktoren (3).

$$\begin{aligned} 1 &= c_1\,(1+{}_0i_1) \\ 1 &= c_1\,{}_0i_1 + c_2\,(1+{}_1i_2) \\ 1 &= c_1\,{}_0i_1 + c_2\,{}_1i_2 + c_3(1+{}_1i_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel 1. *Es werden die Kassazinssätze von i_1 =3%, i_2 =4% angenommen. Die impliziten Terminzinssätze können aus den Kassazinssätzen mit Gleichung (1) berechnet werden:*

$$
\begin{aligned}
{}_0i_1 &= i_1 \\
{}_1i_2 &= \frac{(1+i_2)^2}{(1+i_1)} - 1 = \frac{1.04^2}{1.03} - 1 = 0.05009
\end{aligned}
$$

Die Kapitalwertberechnung mittels der Markteffizienzhypothese unterstellt also implizit für die zweite Periode den Terminzinssatz ${}_1i_2$, so dass eine Zahlung in $t = 2$ mit einem Zinssatz von $i_2 = 0.04$ über 2 Perioden verzinst wird: $1.03 \times 1.05009 = 1.04^2$. *Dies zeigt sich auch in den Bartwertfaktoren, die aus dem linearen Gleichungssystem*

$$
\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1.03 & \\ 0.03 & 1.05009 \end{bmatrix} \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1.03 & \\ 0.03 & 1.05009 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1.03} \\ \frac{1}{1.04^2} \end{bmatrix}
$$

berechnet werden.

Die Berechnung nach (2) unterstellt aufgrund des verwendeten synthetischen Terminzinssatzes also, dass zwischenzeitliche Zinszahlungen in Höhe des Kassazinssatzes anfallen. Diese Prämisse trifft bei zukünftigen Erträgen aus Investitionen jedoch nicht zu, da für die zukünftigen Zahlungen wie bei Nullkuponanleihen keinerlei Zahlungen in den dazwischen liegenden Zeiträumen anfallen (vgl. [6, Kap. 6.2.2.2]).

2 Berechnung von Barwerten bei nicht-flachen Zinsstrukturkurven

Bei einer einperiodigen (jährigen) Betrachtung tritt kein Problem auf, da keine Zwischenzahlungen auftreten. Die Berechnung des Kapitalwerts unterstellt, dass die Zahlung Z_2 auch zum Zeitpunkt $t = 1$ verzinst wird. Bei einer Investition fällt jedoch für Z_2 in $t = 1$ kein Ertrag an, da sie noch gar nicht erwirtschaftet wurde. Daher ist die Verzinsung einer Nullkuponanleihe für die Diskontierung der Zahlung Z_t angemessener. Die Berechnung von Nullkuponzinssätzen ist in der Literatur unter den Namen Duplizierung von Zahlungsströmen oder Bootstrap-Verfahren bekannt (vgl. [7]).

Das lineare Gleichungssystem (4) hat damit eine andere Zahlungsstruktur. Für die Zahlungen wird nun $Z_{t,n} = i_n$ sowie für $Z_n = 1 + i_n$ angenommen. Mit den eingesetzten Kassazinssätzen wird die Zahlungsstruktur einer Kuponanleihe abgebildet.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= c_1 Z_1 \\
B_2 &= c_1 Z_{1,2} + c_2 Z_2 \\
B_3 &= c_1 Z_{1,3} + c_2 Z_{2,3} + c_3 Z_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\mathbf{b} = \mathbf{Z}\,\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{b} \tag{7}
$$

Mit dem Barwertfaktor c_n wird – sofern keine Zahlungen zwischen $0 < t < n$ erfolgen – der Barwert einer Nullkuponanleihe für n Perioden berechnet: $B_n = c_n \times Z_n$.

Beispiel 2. *Es werden 2 Perioden mit der Kassazinsstruktur i_1 =3%, i_2 =4% betrachtet. Das zu lösende System ist*

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1.03 & \\ 0.04 & 1.04 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 0.97087 \\ 0.92419 \end{bmatrix}$$

Der Barwert einer Zahlung in Höhe von 1 € in $t = 2$ ist mit $c_2 = 0.92419$ zu diskontieren und eine Zahlung in Höhe von 1 € in 3 Perioden besitzt einen Barwert von 0.86213 €.

Anmerkung 1. *Die Dreiecksstruktur zur Berechnung der Barwertfaktoren ist nicht erforderlich (vgl. [3]) und kann auch mit einer anderen entsprechenden Anleihenstruktur berechnet werden, die mit einer vollbesetzten Matrix $\tilde{\mathbf{Z}}$ verbunden ist. Jedoch kann die Matrix $\tilde{\mathbf{Z}}$ bei bestimmten Anleihenstrukturen nahezu singulär sein.*

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_{1,1} & \tilde{Z}_{2,1} & \dots \\ \tilde{Z}_{1,2} & \tilde{Z}_{2,2} & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{b}}$$

Beispiel 3. *Eine Anleihenstruktur von zum Beispiel*

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.03 & 1.03 \\ 0.04 & 1.04 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.98104 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.97087 \\ 0.92419 \end{bmatrix}$$

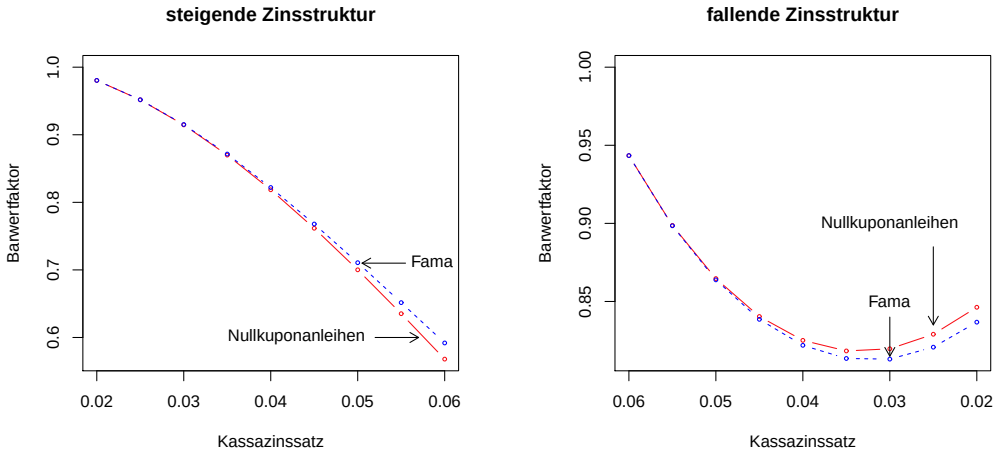
liefert die selben Barwertfaktoren.

Interessant ist, dass bei einer steigenden Zinssatzstruktur die Barwertfaktoren c_t negativ werden können. Geht $t \to \infty$ für eine gegebene Zinssatzstruktur (bzw. die Zinssatzabstände gehen gegen Null), so kann c_t negativ werden. Ebenfalls negativ werden kann c_t, wenn die Zinssatzstruktur extrem ansteigt, z. B. von 1% auf 30%. Ökonomisch müsste das bedeuten, dass die Finanzierung der Zahlung Z_t mit der gegebenen Zinssatzstruktur mit einem Verlust verbunden ist. Jedoch sind beide Fälle eher unrealistisch. Im Fall einer fallenden Zinssatzstruktur treten keine negativen Barwertfaktoren auf.

In Abb. 1 sind für die Zinssätze von 2% bis 6% (linear steigende Zinssatzstruktur) mit einem halben Prozentpunkt Abstand pro Jahr (entspricht 9 Jahren) die Barwertfaktoren nach beiden Verfahren abgetragen. Es ist in Abb. 1 (links) deutlich zu erkennen, dass bei einer monoton steigenden Zinssatzstruktur die Nullkupon-Barwertfaktoren kleinere Faktoren liefert. Damit fallen die Kapitalwerte bei einer steigenden Zinssatzstruktur niedriger aus und die Investition ist weniger rentabel.

Bei einer fallenden Zinssatzstruktur (von 6% auf 2% über 9 Jahre) liegen die Nullkupon-Barwertfaktoren stets oberhalb der herkömmlichen Faktoren (Markteffizienzhypothese) (siehe Abb. 1, rechts). Die niedrigeren Finanzierungskosten machen die Investition rentabler. Insgesamt sind die Barwertfaktoren zuerst fallend, da die höheren Zinssätze die Barwertberechnung dominieren, dann aber bestimmt der exponentielle Einfluss der Zeit (das Produkt der Zinssätze) die Berechnung und die Barwertfaktoren steigen. Die Barwertfaktoren mit der Markteffizienzhypothese (Fama) berechnet liegen stets unterhalb denen der Nullkuponanleihen.

Abbildung 1: Markteffizienz- und Nullkupon-Barwertfaktoren



Liegt eine flache Zinssatzstruktur (i konstant) vor gilt

$$c_t = (1+i)^{-t} \tag{8}$$

und die Barwertberechnung ist dann identisch mit der Diskontierung bei flacher Zinssatzstruktur (siehe Anhang 1).

Die Rendite r_t einer Nullkuponanleihen ist die herkömmliche exponentielle Verzinsung über t Perioden: $1 € = c_t\,(1+r_t)^t$.

$$r_t = \sqrt[t]{c_t^{-1}} - 1 \tag{9}$$

Beispiel 4. *Die Rendite einer einjährigen Zahlung beträgt aufgrund der fehlenden Zinszahlungen (der Zinssatz besitzt die gleiche Periodizität wie die Zahlungen Z_t) $r_1 = i_1 = 3\%$. Die Rendite einer Zahlungen in 2 Jahren ohne zwischenzeitliche Zahlungen liegt bei*

$$r_2 = \sqrt[2]{0.92419^{-1}} - 1 = 4.0202\%$$

3 Kapitalwertmethode bei nicht-flacher Zinssatzstruktur

Der Kapitalwert einer Investition mit einer nicht-flachen Zinssatzstruktur ist folglich besser mit den Barwertfaktoren c_t zu berechnen. In der Literatur wird dieser Ansatz als Marktzinsmodell bezeichnet (vgl. [4], [5]).

$$\begin{aligned} C_0(i_1,\ldots,i_n) &= Z_0 + \sum_{t=1}^{n} c_t\, Z_t \quad \text{mit } c_t = c(i_t) \\ &= -Z_0 + \mathbf{z}'\,\mathbf{Z}^{-1}\,\mathbf{b} \quad \text{mit } \mathbf{z}' = [Z_1,\ldots,Z_n] \end{aligned} \tag{10}$$

Beispiel 5. *Für $t = 1,2$ werden Zahlungen von Z_0 =-12 €, Z_1 =6 € und Z_2 =7 € und Kassazinssätze von i_1 =3%, i_2 =4% angenommen. Der Kapitalwert der Investition beträgt mit der Markteffizienzhypothese (2)*

$$C_0^*(0.03,0.04) = -12 + \frac{6}{1.03} + \frac{7}{1.04^2} = 0.2971$$

und mit den Nullkupon-Barwertfaktoren berechnet

$$C_0(0.03,0.04) = -12 + 6 \times 0.97087 + 7 \times 0.92419 = 0.2946 < C_0^*$$

Der Kapitalwert C_0 ist gegenüber C_0^* gefallen.

Im Kapitalwert C_0 werden stärker die höheren Finanzierungskosten der Investition im 2-ten Jahr berücksichtigt, sofern eine fristenkongurente Finanzierung mit der Investition verbunden ist. Dies führt zu einem Fallen der Barwerte gegenüber der herkömmlichen Berechnungsweise. In der Zinssatzstruktur spiegeln sich die Erwartungen der Marktteilnehmer bzgl. Inflation, Kreditrisiken und Zinsänderungsrisiken wider. Die Erwartungen bzw. die Risikoprämien der Marktteilnehmer sind im Wesentlichen von der Konjunktur bestimmt. Sind diese korrekt, so werden Unternehmen ihre Investitionsentscheidung konjunkturgerecht treffen. Bei verbesserten Konjunkturaussichten nehmen die Risikoprämien zu und die Zinsstrukturkurve steigt stärker an. Die Kapitalwerte C_0 sinken stärker als C_0^* und Investitionen werden stärker eingeschränkt. In einer Rezessionsphase hingegen verläuft die Zinsstrukturkurve flacher oder wird gar invers (fallende Zinssatzstruktur). Die Kapitalwerte C_0 der Investitionen steigen stärker als C_0^* und Investitionen werden lukrativer und können daher einen stärkeren positiven Effekt auf die Konjunktur haben. Eine Fehlallokation von Kapital wird vermieden. Entscheiden sich Unternehmen bewusst gegen eine fristenkongurente Finanzierung (z. B. durch eine Folge von einjährigen Finanzierung) so wird zusätzlich ein Finanzierungsrisiko eingegangen, das jedoch nicht inhärent mit der Investition verbunden ist (vgl. [5, Seite 707]).

Beispiel 6. *Es wird eine fallende Zinssatzstruktur mit i_1 =4%, i_2 =3% angenommen. Die Barwertfaktoren für die 2-periodige Betrachtung sind nun*

$$c_1 = \frac{1}{1.04} = 0.96154$$
$$c_2 = \frac{1}{1.03} - \frac{0.03}{1.03}\frac{1}{1.04} = 0.94286$$

Die Kapitalwerte der Investition nach den beiden Verfahren sind

$$C_0(0.04,0.03) = 0.3693 > C_0^*(0.04,0.03) = -12 + \frac{6}{1.04} + \frac{7}{1.03^2} = 0.3674$$

Die Investition ist gegenüber dem herkömmlichen Ansatz (Markteffizienzhypothese) rentabler, da die fallenden Kalkulationszinssätze stärker in die Berechnung eingehen.

Werden in C_0^* die Nullkuponrenditen synthetische Nullkuponterminzinssätze eingesetzt, so sind die Ergebnisse gleich C_0.

Beispiel 7. *Aus den Nullkuponrenditen lassen sich mit (1) synthetische Terminzinssätze der Nullkuponanleihen ${}_{\tau-1}r_\tau$ berechnen. Für das Beispiel mit $i_1 = r_1 = 0.03$ und $i_2 = 0.04$ ($r_2 = 0.0402$) erhält man folgende Werte.*

$$
\begin{aligned}
{}_0r_1 &= 0.03 \\
{}_1r_2 &= \frac{1.0402^2}{1.03} - 1 = 0.0505
\end{aligned}
$$

Aufgrund der angenommen Markteffizienzhypothese (1) ist dann der Kapitalwert $C_0(i_1 = 0.03, i_2 = 0.04)$ gleich $C_0^*({}_0r_1, {}_1r_2)$ bzw. $C_0^*(r_1, r_2)$.

$$
\begin{aligned}
C_0^*({}_0r_1, {}_1r_2) &= Z_0 + \sum_{t=1}^{2} \frac{Z_t}{\prod_{\tau=1}^{t}(1 + {}_{\tau-1}r_\tau)} = -12 + \frac{6}{1.03} + \frac{7}{1.03 \times 1.0505} = 0.2946 \\
C_0^*(r_1, r_2) &= Z_0 + \sum_{t=1}^{2} \frac{Z_t}{(1 + r_t)^t} = -12 + \frac{6}{1.03} + \frac{7}{1.0402^2} = 0.2946
\end{aligned}
$$

Werden hingegen die Terminzinssätze ${}_{\tau-1}i_\tau$ verwendet, die die Zwischenzahlungen nicht neutralisieren, sind die Kapitalwerte C_0 und C_0^* verschieden: $C_0(i_1, i_2) \neq C_0^*({}_0i_1, {}_1i_2) = C_0^*(i_1, i_2)$.

4 Barwertmarge bei nicht-flacher Zinssatzstruktur

Ein interner Kapitalzinssatz ist bei einer nicht-flachen Zinssatzstruktur nicht definiert. Man kann aber eine Barwertmarge m definieren, die einen Kapitalwert von Null bei gegebener Zinssatzstruktur erzeugt. Es werden die Nullstellen der Kapitalwertfunktion für gegebene c_t in Abhängigkeit von m berechnet: $C_0(m) \stackrel{!}{=} 0$. Wir unterstellen für die Barwertmarge m ein polynomiales Verhalten. Dies hat den Vorteil, dass sie die Zinssatzstruktur der Nullkuponrenditen erhält.

$$
C_0(m) = Z_0 + c_1 Z_1 m + c_2 Z_2 m^2 + \ldots + c_n Z_n m^n \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}
$$

Eine positive reelle Lösung für m ist die Barwertmarge, die den Kapitalwert für gegebene c_t bzw. i_t Null werden lässt.

Beispiel 8. *Für das Beispiel 5 ist folgendes Nullstellenproblem zu lösen, um einen Kapitalwert von Null zu erhalten.*

$$
C_0(m) = -12 + 5.8252\, m + 6.4693\, m^2 \stackrel{!}{=} 0
$$

Die Lösungen für m sind 0.9842 und -1.8846. Ökonomisch sinnvoll ist nur die Barwertmarge 0.9842.

Eine Zinssatzstruktur von $\hat{r}_1 = \frac{1}{c_1 m} - 1 = 0.04652$ und $\hat{r}_2 = \sqrt{\frac{1}{c_2 m^2}} - 1 = 0.05688$ erzeugt einen Kapitalwert von Null. Dies ist die Rentabilitätsgrenze für die gegebene Investition und die gegebene Zinssatzstruktur. Liegen die Zinssätze der Finanzierung r_t darunter ist die Investition rentabel.

Aus dem obigen Beispiel wird die Beziehung zwischen der Nullkuponrenditen r_t (bzw. Barwertfaktoren c_t) und der Zinssatzstruktur für einen Kapitalwert von Null $\hat{r}_t$ deutlich.

$$(1+\hat{r}_t)\,m = \frac{1}{c_t} = (1+r_t)$$

Die Barwertmarge m kann auch als Rentabilitätssmarge formuliert werden. Das Verhältnis der Zinssatzstruktur $1+\hat{r}_t$, die einen Kapitalwert von Null erzeugt und der Nullkuponrenditen $1+r_t$ ist aufgrund des Ansatzes (11) konstant und kann als Rentabilitätsmarge k festgelegt werden.

$$1+k = \frac{1+\hat{r}_t}{1+r_t} \Rightarrow k = \frac{1+\hat{r}_t}{1+r_t} - 1 = \frac{1}{m} - 1$$

Beispiel 9. *Im obigen Beispiel beträgt die Rentabilitätsmarge rd. 1.6%.*

$$k = \frac{1}{0.9842} - 1 = 0.01604$$

Dies ist die Nettorendite der Investition, wenn eine zeitunabhängige Marge m unterstellt wird. Die Investition ist um 1.6% rentabler als eine Geldanlage zur gegebenen Zinssatzstruktur.

Ist die Zinssatzstruktur flach ($i = i_t$), so ist $\hat{r}$ identisch mit dem internen Kapitalzinsfuß. Es gilt dann (8) und man erhält aus (11) die Beziehung für den internen Kapitalzinssatz

$$\frac{1}{(1+\hat{r})^t} \stackrel{!}{=} \left(\frac{m}{1+i}\right)^t \rightarrow \hat{r} = \frac{1+i}{m} - 1$$

5 Fazit

Den Kapitalwert mit Barwertfaktoren der Nullkuponanleihen zu berechnen ermöglicht adäquat die Diskontierung der Zahlungsströme bei einer nicht-flachen Zinssatzstruktur zu berücksichtigen. Die Kapitalwerte sinken/steigen bei steigender/fallender Zinssatzstruktur. Die Investitionen sind weniger/mehr rentabel, da die steigenden/fallenden Finanzierungskosten stärker berücksichtigt werden. Ein Äquivalent zum internen Kapitalzinssatz ist mit der Barwertmarge bzw. Rentabilitätsmarge berechenbar. Für eine flache Zinssatzstruktur sind die Ergebnisse des Kapitalwerts und des internen Kapitalzinssatzes identisch mit der herkömmlichen Verfahren. Neben der betriebswirtschaftlichen Betrachtung besitzt die korrekte Berücksichtigung der Zinssatzstruktur in der Kapitalwertberechnung auch eine makroökonomische Implikation: Sie wirkt stabilisierend auf die Konjunktur.

Anhang

1. Das lineare Gleichungssystem (6) kann auch rekursive gelöst werden (vgl. [2]).

$$c_t = \begin{cases} \frac{1}{1+i_1} & \text{für } t = 1 \\ \frac{1}{1+i_t} - \frac{i_t}{1+i_t} \sum_{k=1}^{t-1} \prod_{\tau=k}^{t-1} (1+i_\tau)^{-1} & \text{für } t = 2,3,\ldots \end{cases} \tag{12}$$

Aus (12) folgt für $i_t = i$

$$
\begin{aligned}
c_t &= \frac{1}{1+i} - \frac{i}{1+i}\left(\frac{1}{(1+i)} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{t-1}}\right) \\
&= \frac{1}{(1+i)} - \frac{i}{(1+i)}\left[\left(1 + w + \ldots + w^{t-1}\right) - 1\right] \quad \text{mit } w = \frac{1}{(1+i)} \\
&= \frac{1}{(1+i)} - \frac{i}{(1+i)}\left[\frac{w^t - 1}{w - 1} - 1\right] \\
&= \frac{1}{(1+i)} - \frac{i}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)\,(1-(1+i)^t)}{(1+i)^t\,(1-(1+i))} - 1\right] \\
&= \frac{1}{(1+i)} + \frac{1-(1+i)^t}{(1+i)^t} + \frac{i}{(1+i)} = 1 + \frac{1-(1+i)^t}{(1+i)^t} \\
&= \frac{(1+i)^t + 1 - (1+i)^t}{(1+i)^t} = \frac{1}{(1+i)^t}
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] Marek Capiński, Ekkehard Kopp. Discrete Models of Financial Markets. Cambridge University Press. Cambridge, New York, Melbourne. 2012.

[2] Wolfgang Kohn, Riza Öztürk. Mathematik für Ökonomen. Ökonomische Anwendungen der linearen Algebra und Analysis mit Scilab. 2. Auflage. Springer Gabler. Berlin, Heidelberg. 2012.

[3] Lutz Kruschwitz, Michael Röhrs. Debreu, Arrow und die marktzinsorientierte Investitionsrechnung. in: Zeitschrift fr Betriebswirtschaft (ZfB). Seite 655-665. 64. Jg. Heft 5. 1994.

[4] Louis Perridon, Manfred Steiner, Andreas Rathgeber. Finanzwirtschaft der Unternehmung. 16. Auflage. Verlag Vahlen. München. 2012.

[5] Bernd Rolfes. Marktzinsorientierte Investitionsrechnung. in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (ZfB). Seite 691-713. 63. Jg. Heft 7. 1993.

[6] Henner Schierenbeck, Claudia B. Wöhle. Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre. Dozentenausgabe. 17. Auflage. Oldenbourg Verlag. München. 2008.

[7] Arnd Wiedemann. Financial Engineering. Bewertung von Finanzinstrumenten. 6. Auflage. Frankfurt School Verlag. Frankfurt. 2013.