

Scholtz, Hellmut D.

**Article — Digitized Version**

## Grundeinführung in die Lineare Programmierung - aufgezeigt am Beispiel optimaler Verkaufsmengenplanung

Der Betrieb

*Suggested Citation:* Scholtz, Hellmut D. (1969) : Grundeinführung in die Lineare Programmierung - aufgezeigt am Beispiel optimaler Verkaufsmengenplanung, Der Betrieb, ISSN 0005-9935, Handelsblatt, Düsseldorf, Vol. 22, Iss. 47, pp. 2093-2097

This Version is available at:

<http://hdl.handle.net/10419/93132>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

Dipl.-Kfm. Hellmut D. Scholtz, Aalen

## Grundeinführung in die Lineare Programmierung

Aufgezeigt am Beispiel optimaler Verkaufsmengenplanung

### 0. Einführung

Die Methoden der Linearen Programmierung werden für viele Wissensgebiete immer bedeutungsvoller. Angefangen von der Anwendung in der Medizin bis hin zu optimalen Fertigungsverfahren, kaufmännischen Entscheidungen usw. findet die Lineare Programmierung ein weites Feld.

Während sich in der Medizin optimale Therapiekombinationen (z. B. bei Krebsbehandlung, Rheuma, HNO-Probleme, Innere Medizin, Anästhesie, Diätplänen etc.) errechnen lassen, sind im wirtschaftlichen und fertigungstechnischen Bereich optimale Produktionsmengen (Verkaufsmengenzusammensetzung) Investitionspläne, Mischungsprobleme, Aufteilungspläne (bei Blechen, Papierbahnen etc.), Kostenminimierungen etc. als zu optimierende Anwendungsgebiete der LP interessant.

In der Zwischenzeit gibt es zu dem Thema Lineare Programmierung eine sehr reichhaltige Literatur. Trotzdem trifft man eine Vielzahl von interessierten Lesern, denen diese Schriften unzugänglich bleiben. Diese Arbeiten setzen schon zu viel voraus. Im folgenden soll versucht werden, eine gewisse Grundlage zu schaffen, die es dem Laien gestattet, der Lösungssystematik mit Verständnis entgegenzusehen sowie einfache Probleme selbst zu lösen.

Dabei wird zum Anfang ein konkretes Problem nach bestimmten Prinzipien konventionell gelöst, dann mit einem sehr einfachen Beispiel die Methodik der Matrizenrechnung erklärt und schließlich das erste Problem mit Hilfe Linearer Programmierung optimiert.

### 1. Grundprinzipien bei der Lösung eines Maximierungsproblems

#### 1.1 Aufgabe

Als Aufgabe steht z. B. das Problem an, die optimalen Verkaufsmengen einer Fabrik zu bestimmen. Die Erzeugnisse<sup>1)</sup> A, B, C und D können jedes für sich am Markt in unbeschränkter Menge abgesetzt werden. Alle Erzeugnisse durchlaufen in der Fabrik aber die Engpässe<sup>2)</sup> K, L, M und N. Daher muß ermittelt werden, wieviele Mengen von den einzelnen Erzeugnissen hergestellt werden sollen, damit ein maximaler Gesamt-Gewinn entsteht.

Für diese Rechnung braucht man den Gewinn jedes einzelnen Produktes, damit man den Gesamt-Gewinn errechnen kann. Außerdem werden die Stunden benötigt, die jedes einzelne Produkt von den Engpaßkapazitäten verbraucht. In Tab. 1 sind diese Werte angegeben:

Tabelle 1:

Gesamtkapazität		Erzeugnis			
Bezeichnung	verfügbare Stunden	A	B	C	D
		Stunden	Stunden	Stunden	Stunden
K	120	2	6	6	2
L	144	3	4	3	6
M	180	4	3	2	4
N	108	6	2	4	3
Gewinn DM		DM 6,—	DM 8,—	DM 4,—	DM 5,—

Nach der obigen Tabelle können in der Kapazität K insgesamt 120 Stunden produziert werden, in L 144 usw.

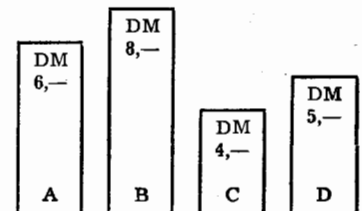
Das Erzeugnis A verbraucht für ein Stück 2 Stunden in Kapazität K, 3 Stunden in L usw. und erbringt pro Stück einen Gewinn von 6,—. Die Werte der anderen Erzeugnisse ergeben sich entsprechend aus der Tabelle.

### 1.2 Gewinn je Erzeugnis als Auswahlgegenstand

Will man nun auf konventionelle Weise den Gewinn möglichst groß haben, wird man sich an den Gewinnen (Deckungsbeitrag<sup>3)</sup> bzw. Rohgewinn) der einzelnen Erzeugnisse orientieren.

Tabelle 2:

Gewinn pro Erzeugnis	
Das Erzeugnis A bringt	DM 6,— Gewinn
Das Erzeugnis B bringt	DM 8,— Gewinn
Das Erzeugnis C bringt	DM 4,— Gewinn
Das Erzeugnis D bringt	DM 5,— Gewinn

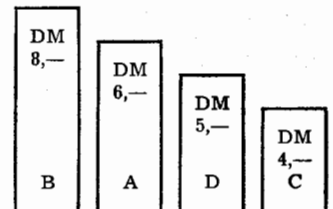


Die Reihenfolge der Erzeugnisse nach der Gewinnhöhe wäre somit

Tabelle 3:

#### Rangfolge Gewinn pro Erzeugnis

	DM
Erzeugnis B =	8,—
Erzeugnis A =	6,—
Erzeugnis D =	5,—
Erzeugnis C =	4,—



Es scheint demnach günstig, nur das Gut B zu fertigen, da dann möglicherweise der größte Gewinn entsteht. Das kann aber zu schweren Irrtümern führen.

Zuerst muß geprüft werden, welchen Gesamtgewinn jedes Produkt unter Berücksichtigung der durch das Produkt beanspruchten Fertigungskapazität bringt.

Tabelle 4:

#### Fertigungstechnische Höchstmenge eines Erzeugnisses (s. Tab. 1)

	In Kapazität	Verbraucht Erzeugnis B	daraus erfolgt höchstmögliche Menge B
			Stck.
→ K = 120 Gesamtstunden	6 Stunden	20	←
L = 144 Gesamtstunden	4 Stunden	36	
M = 180 Gesamtstunden	3 Stunden	60	
N = 108 Gesamtstunden	2 Stunden	54	

<sup>1)</sup> In der Medizin z. B. Therapien (Medikament A, Bestrahlung B, Behandlung C usw.)

<sup>2)</sup> In der Medizin z. B. Leber, Niere, Herz, Kreislauf, Blutbild, Wohlbefinden etc.)

<sup>3)</sup> Erlös ./ variable Kosten

In Kapazität K können höchstens 20 Einheiten B, in Kapazität L können höchstens 36 Einheiten B usf. gefertigt werden. Engpaß für Erzeugnis B ist offenbar die Kapazität K; dort kann die geringste Menge, 20 B, gefertigt werden. Eine höhere Produktion von B ist trotz der guten Möglichkeiten in den Kapazitäten L, M und N nicht möglich.

Es ergibt sich also (nach gleicher Methode auch für die Erzeugnisse A, D, C, gerechnet):

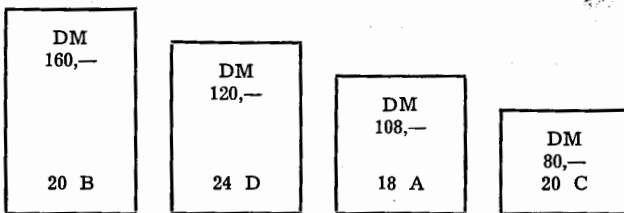
**Tabelle 5:**

**Möglicher Höchstgewinn eines Erzeugnisses**

Höchstmenge	erreichbarer Höchstgewinn
B = 20 Erzeugnis-Einheiten x 8,— DM Gewinn	= 160,— DM
A = 18 Erzeugnis-Einheiten x 6,— DM Gewinn	= 108,— DM
D = 24 Erzeugnis-Einheiten x 5,— DM Gewinn	= 120,— DM
C = 20 Erzeugnis-Einheiten x 4,— DM Gewinn	= 80,— DM

**Tabelle 5a:**

**Höchstgewinn je Erzeugnis, der Höhe nach sortiert**



Beachtenswert ist die geänderte Reihenfolge — der Einzelgewinne (Tabelle 3) B, A, D, C — der möglichen Höchstgewinne je Erzeugnis (Tabelle 5a) B, D, A, C

Man könnte nun immer noch der Ansicht sein, dieser Schritt wäre überflüssig gewesen, da B ohnehin den größten Gewinn erbringt. Der Wert der Untersuchung in Tab. 5 ist aber schon dadurch erkennbar, daß der mögliche Gesamtgewinn z. B. bei Erzeugnis D = DM 120,— beträgt und bei Erzeugnis A = DM 108,—, obwohl die Einzelgewinne der Erzeugnisse sich umgekehrt verhalten. Nämlich bei A = DM 6,— und bei D = DM 5,—. Dies erklärt sich dadurch, daß D einen Engpaß bei der Kapazität L hat, der insgesamt zu D eine günstigere Relation ausweist (24 Einheiten D können gefertigt werden; Tab. 5) als bei Erzeugnis A in Kapazität N (nur 18 Einheiten A können gefertigt werden; Tab. 5). Hieraus kann man das Fazit ziehen, daß es bei einer Programmvereinbarung nicht auf den Einzelgewinn eines Erzeugnisses, sondern auf dessen möglichen Gesamtgewinn ankommt<sup>4)</sup>.

Mit der Erstellung dieses möglichen Gesamtgewinnes pro Erzeugnis ist die Rechnung noch nicht abgeschlossen. Der mögliche Gesamtgewinn von B in Höhe von DM 160,— (Tab. 5) kann noch erhöht werden, wenn man auf einige Mengen von B verzichtet und statt dessen einige Einheiten D, dann A usf. herstellt:

**1.3 Konventionelle Lösung eines Maximumproblems**

In Tab. 6 wurden die einzelnen Erzeugnisse in der Reihenfolge der größten Einzelgewinne nach Tab. 5 gegeneinander ausgetauscht. Beginnend mit 20 Einheiten B und einem (vorerst maximal erscheinendem) Gesamtgewinn von DM 160,— wurden zusätzlich 13,7 Einheiten D mit einem Zusatzgewinn von DM 68,5 gefertigt. Dafür konnten 4,55 Einheiten B nicht gefertigt werden. Es ging ein Gewinn von DM 36,5 bei B verloren. Der Nutzen des Austausches von D und B machte immerhin einen Differenzgewinn von DM 32,— aus und erhöhte den Gesamtgewinn auf DM 192,—. Es blieben 15,45 Einheiten B und 13,7 Einheiten D (daher Querstrich hinter der Erzeugnismenge von 20 B). Gegen 12,2 D wurden 12,2 eingetauscht. Differenzgewinn DM 12,2 bzw. „maximaler“ Gesamtgewinn DM 204,2 (gegenüber zuerst maximal erscheinendem Maximalgewinn von DM 160,—). Die Austauschmengen (13,7 Einheiten D gegen 4,55 Einheiten B usf.) lassen sich durch Probieren bzw. mit Hilfe einer einfachen Formel errechnen.

Diese Methode, die jeweils ein Erzeugnis gegen das andere austauscht, ist relativ einfach und schnell zu handhaben, führt aber bei vielen Problemen nicht zu der optimalen Mengenkombination im mathematischen Sinne. Dafür ist die Matrizenrechnung erforderlich. Im folgenden Kapitel sollen daher einige kurze Hinweise zu der Matrizenrechnung gegeben werden.

**2. Grundlage der Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten mit Hilfe der Matrizenrechnung**

**2.1 Rechnen mit Gleichungen**

**2.1.1. Kapazitätsbeanspruchung**

In diesem Abschnitt soll von bekannten Unbekannten ausgegangen werden. Mit Hilfe zweier Beispiele wird die Rechenmethode erklärt.

Bekannt ist z. B.:

**Tabelle 7:**

(s. Tab. 1) **Kapazitätsbeanspruchung M durch C, B**  
 Erzeugnis C verbraucht in Kapazität M 2 Stunden  
 Erzeugnis B verbraucht in Kapazität M 3 Stunden

Um Eingang in die Matrizenrechnung zu finden, wird im folgenden angenommen, Tab. 7 mit dem Kapazitätsbedarf je Erzeugnis sei unbekannt. Es liegen nur folgende Erzeugnismengen und Gesamtkapazitäten vor:

**Tab. 8: Es benötigte die Produktion:**

im Jahr 1967 von 2 C + 4 B = 16\*) Stunden in Kapazität M  
 im Jahr 1968 von 3 C + 2 B = 12\*) Stunden in Kapazität M

\*) 1967:  $2 \times 2 + 4 \times 3 = 16$   
 1968:  $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

**Tabelle 6:**

**Konventionelle Errechnung dieser „gewinnmaximalen“ Erzeugniszusammensetzung**

Erzeugnis	Kapazität (h)				Gewinn		
	K	L	M	N	Einzel-	Differenz-	Gesamt-
+ 20 B /	120	144	180	108			
= Restkapazität	= -120	= -80	= -60	= -40	+160	+160	+160
+ 13,7 D /	= -27,4	= -82,2	= -54,8	= -41,1	+68,5)		
= Restkapazität	= -27,4	= -18,2	= +65,2	= +26,9	)	+32	+192
- 4,55 B	= +27,4	= +18,2	= +13,7	= +9,1	-36,5)		
= +15,45 B							
= Restkapazität	= 0	= 0	= 78,9	= 36,0			
+ 12,2 A	= -24,4	= -36,6	= -48,8	= -73,2	+73,2)		
= Restkapazität	= -24,4	= -36,6	= +30,1	= -37,2	)	+12,2	=204,2
- 12,2 D	= +24,4	= +73,2	= +48,8	= +36,6	-61)		
= +1,5 D							
= Restkapazität	= 0	= +36,6	= +78,9	= 0 <sup>5)</sup>			

**Ergebnis:**  
 15,45 B à Gewinn 8,— = 123,5  
 12,20 A à Gewinn 6,— = 73,2  
 1,50 D à Gewinn 5,— = 7,5  
 = Gesamt-Gewinn 204,2

<sup>4)</sup> Siehe hierzu Scholtz, H. D.: „Kann Kooperation mit weniger rentablen Unternehmen Vorteile bringen?“ In „Der Betrieb“ Nr. 41/1968.

<sup>5)</sup> Durch Rundungen hier nicht genau 0.

Es würde dann die (uns bereits klare) Frage auftauchen:

Wieviel Stunden in M verbraucht die Produktion von C?

Wieviel Stunden in M verbraucht die Produktion von B?

Diese Frage kann ohne weiteres mit Hilfe der Auflösung der beiden Gleichungen auf der Basis der in der Schule gelernten Wege beantwortet werden. Einfacher ist nach einer gewissen Übung die Lösung mit Hilfe einer Matrize:

**Tabelle 9:**

(Tab. 8 in Matrizenform); Gefragt wird: Wieviele Std. benötigen je eine Einheit C und B in Kapazität M?)

	C	B	M
Gleichung 1	2	4	= 16
Gleichung 2	3	2	= 12
<hr/>			
Gleichung 3 (Gl. 1 durch 2 geteilt)	1	2	= 8
Gleichung 4 (Gl. 2 - 3 mal Gl. 3)	0	4	= -12
<hr/>			
Gleichung 5 (Gl. 4 geteilt durch 4)	0	1	= + 3
Gleichung 6 (Gl. 3 - 2 mal Gl. 5)	1	0	= 2

Es wird oben eine Gleichung durch eine Zahl geteilt, so daß mindestens ein Wert in der Gleichung die Zahl 1 annimmt (hier durch Einkreisung gekennzeichnet). Hier bietet sich an, die Gleichung 1 durch die Zahl 2 zu teilen; bei C nimmt die Zahl 2 den Wert 1 an (s. Einkreisung Gl. 3). Von den übrigen Gleichungen (Gl. 2) wird diese neue Gl. 3 sooft abgezogen, bis der Wert für C in allen übrigen Gleichungen 0 wird (s. viereckige Umrandungen Gl. 4). Jetzt soll in Gl. 4 eine 1 bei B erscheinen (s. Einkreisung Gl. 5). Dazu muß diese Gl. 4 durch die Zahl - 4 geteilt werden. Diese neue Gl. 5 muß von Gl. 3 2 mal abgezogen werden, damit dort in der Spalte für B eine 0 entsteht (s. viereckige Umrandung Gl. 6). Das Gleichungssystem ist gelöst, wenn in jeder Zeile (waagerecht) und Spalte (senkrecht) eine 1 steht. Aus der letzten Matrize ist zu erkennen, 1 C = 2 M, d. h. 1 C benötigt eine Kapazität von 2 Stunden; 1 B = 3, d. h. 1 B braucht in M eine Kapazität von 3 Stunden. Das ist auch das Ergebnis, von dem wir in Tab. 7 ausgegangen sind.

Ein weiteres Beispiel soll die Methodik erhärten:

**Tabelle 10:**

(Kapazitäts-Zahlen von Tab. 7); Frage: Wieviel Std. benötigen je eine Einheit B und C in Kapazität M?

Produktion Jahr 1965: Gl. 1:	4	8	= 32 M*
Produktion Jahr 1966: Gl. 2:	6	2	= 18 M
<hr/>			
Gl. 3 (Gl. 1 geteilt durch 4)	1	2	= 8 M
Gl. 4 (Gl. 2 - 6 mal Gl. 3)	0	10	= -30 M
<hr/>			
Gl. 5 (Gl. 4 geteilt durch 10)	0	1	= 3 M
Gl. 6 (Gl. 3 - 2 mal Gl. 5)	1	0	= 2 M

\*) Diese Darstellungen stimmen mit der mathematischen Symbolik aus didaktischen Gründen nicht überein.

Es zeigt sich das bereits bekannte Ergebnis:

für C = 2 Stunden Kapazitätsbeanspruchung in M

für B = 3 Stunden Kapazitätsbeanspruchung in M

Die Einkreisungen und viereckigen Umrandungen sind im allgemeinen nicht erforderlich. Hier sollen sie nur ein Hilfsmittel für das leichtere Durchdringen der nicht ganz einfachen Materie sein.

**2.1.2 Beste Fertigungsmenge**

Das Problem wird in Angleichung an Kapitel 1 eher darin liegen, herauszufinden, wieviel Produkte von z. B. C und B bei gegebener Kapazität gefertigt werden können. Dabei werden im allgemeinen die benötigten Stundenzahlen für die Herstellung eines Produktes in einer bestimmten Kapazität bekannt sein.

In Tab. 11 soll daher einmal errechnet werden, wieviel Produkte B und wieviel Produkte C gefertigt werden können, wenn in Kapazität M 40 Stunden und in Kapazität K 90 Stunden für diese beiden Erzeugnisse zur Verfügung stehen:

**Tabelle 11:**

(Werte aus Tabelle 1)

Gefragt wird: Wieviel B und C können gefertigt werden?

B braucht pro Stück 3 Std. in M, 6 Std. in K  
C braucht pro Stück 2 Std. in M, 6 Std. in K

Gl. 1	3 B + 2 C	= 40	: 2
Gl. 2	6 B + 6 C	= 90	
<hr/>			
Gl. 3 (Gl. 1 : 2)	1,5 B + 1 C	= 20	. 6
Gl. 4 (Gl. 2 - 6 Gl. 3)	-3 B + 0 C	= -30	:-3
<hr/>			
Gl. 5 (Gl. 4 : -3)	1 B + 0 C	= 10	. 1,5
Gl. 6 (Gl. 3 - 1,5 Gl. 5)	0 B + 1 C	= 5	

Ergebnis: Um die

40 Stunden Kapazität M auszufüllen

90 Stunden Kapazität K auszufüllen

fertigt man am besten

10 Einheiten B

5 Einheiten C

**2.2 Rechnen mit Ungleichungen**

Die zur Verfügung stehenden Kapazitäten M und K werden nun nicht immer so schön aufeinander abgestimmt sein, daß jeweils glatte Erzeugniszahlen von B und C diese Kapazität ausfüllen können. Nehmen wir an, daß in M statt der o. a. 40 Stunden 44 Stunden für die Produktion von B und C verfügbar seien.

Gleichung 1 von Tab 11 müßte dann lauten:

3 B + 2 C ergeben zusammen 44 M oder etwas weniger bzw.

3 B + 2 C ≤ 44 M. (Lies: 3 B + 2 C kleiner/gleich 44 M).

Um nun dennoch eine Gleichung daraus zu machen, führt man eine Zwischengröße, die sogenannte „Schlupfvariable“ ein, die bei Bedarf diesen „Schlupf“ zwischen der tatsächlich benötigten Stundenzahl in M von 40 und der zur Verfügung stehenden Stundenzahl in M von 44 ausfüllen kann.

Aus der Ungleichung

3 B + 2 C ≤ 44 M wird

3 B + 2 C + y<sub>1</sub> = 44 M

Das Gleichungssystem aus Tab. 11 kann jetzt für die Lösung mit der erhöhten Stundenzahl in M mit 44 Stunden ebenfalls angewandt werden.

Da es bei dieser Kapazität von 44 Std. in M denkbar ist, daß die 90 Std. in K evtl. nicht voll durch die Produktion von B und C ausgenutzt wird, wird auch bei dieser Gleichung eine Schlupfvariable, und zwar y<sub>2</sub>, eingefügt.

Aus 6 B + 6 C ≤ 90 K

wird 6 B + 6 C + y<sub>2</sub> = 90 K

Dieses neue Gleichungssystem soll jetzt in Tab. 12 gelöst werden:

**Tabelle 12:**

**Lösung:** Tabelle 11 mit erhöhter Stundenzahl von + 4 in M sowie mit Schlupfvariablen in den Gleichungen

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{cccc|c}
 3 & B & + & (2) & C & + & y_1 & + & 0 & = & 44 & \parallel & : & 2 \\
 6 & B & + & 6 & C & + & 0 & + & y_2 & = & 90 & \parallel & \\
 \hline
 1,5 & & & (1) & & & 1/2 & & 0 & = & 22 & \parallel & \cdot & 6 \\
 (-3) & & & (0) & & & -3 & & 0 & = & -42 & \parallel & : & -3 \\
 \hline
 (1) & & & & & & 0 & & 1 & = & 14 & \parallel & \cdot & 1,5 \\
 (0) & & & & & & 1 & & -1 & = & 1 & \parallel & \\
 \hline
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Bei der Lösung der LP<sup>9)</sup>-Matrix werden die Gleichungen üblicherweise in der Reihenfolge von Tab. 3 (Gewinn pro Erzeugnis als Rangfolge) gelöst. Bei einer Vielzahl von Problemen ist die nach Tab. 5 ermittelte Reihenfolge (möglicher Höchstgewinn je Erzeugnis, wenn nur ein Erzeugnis hergestellt wird) günstiger und einleuchtender.

Prinzipiell wird jetzt nach den gleichen Grundsätzen wie in Kapitel 1 vorgegangen.

Nach Tab. 3 bringt B den höchsten Gewinn (in der Zielgleichung Tab 13, Gl. 5). Nach Tab 4 ist zu entscheiden, wo der Engpaß für die Produktion von B liegt. Dies ist der Fall bei Kapazität K (höchstmögliche Produktionsmenge: 20 Einheiten von B). Die ganze Zeile von K wird nun durch 6 geteilt, weil man in der Spalte für B dort eine 1 haben will (Beispiel Tab. 9).

**Ergebnis:**

	Kapazitätsbedarf	
14 B ≙ <sup>9)</sup>	42 M;	84 K
1 C ≙ <sup>9)</sup>	2 M;	6 K
Summe	44 M	90 K

(Zufällig waren bei dieser Konstellation der beiden Kapazitäten M und K die Schlupfvariablen y<sub>1</sub> und y<sub>2</sub> nicht für eventuelle Überkapazitäten erforderlich.)

**3. Lineare Programmierung (Simplex-Methode)**

Auf der Basis der in Kapitel 1 und 2 erläuterten Grundsätze ist es relativ einfach, das Beispiel aus

**Tabelle 14:**

	Kap. opt. Menge	A	B	C	D	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>
<b>Gl. 6 (Gl. 1 : 6)</b>	(K) Höchstmenge B	20	0,333	(1)	1	0,333	0,167	0	0
<b>Gl. 7 (Gl. 2 - 4 Gl. 6)</b>	L	64	1,67	(0)	-1	4,67	-0,66	1	0
<b>Gl. 8 (Gl. 3 - 3 Gl. 6)</b>	M	120	3	(0)	-1	3	-0,5	0	1
<b>Gl. 9 (Gl. 4 - 2 Gl. 6)</b>	N	68	(5,33)	(0)	2	2,33	-0,33	0	0
<b>Gl. 10 (Gl. 5 - 8 Gl. 6)</b>	G	-160 → 3,33 ←	(0)	(0)	-4	2,33	-1,33	0	0

Diese neue Gleichung (K, Tab. 14) wird nach bewährtem Muster 4 mal von Gl. 2 (Tab. 13), 3 mal von Gl. 3 (Tab. 13), 2 mal von Gl. 4 (Tab. 13), 8 mal von Gl. 5 („Rohgewinn“ Tab. 13) abgezogen. Aus rein technischen Gründen weist der Rohgewinn in Tab. 14 ein negatives Vorzeichen aus. Dies kann vermieden werden, wenn die einzelnen Vorzeichen der Zielgleichung von Anfang an negativ eingesetzt werden. In Tab. 14 ist der größte Einzelgewinn G in Spalte A mit → 3,33 -. Um nun wieder den Engpaß für A zu ermitteln (wie Tab. 4), werden die Kapazitäten durch die Spalte A geteilt:

**Tabelle 15:**

Engpaßbestimmung für Erzeugnis A	Kapazität:	Erz. A	= ca.
L 64 :	1,67	=	39
M 120 :	3	=	40
→ N 68 :	5,33	=	12,75 ← Engpaß

Tab. 1 (Ermittlung der optimalen Verkaufsmengen) mit Hilfe Linearer Programmierung zu lösen.

Es wird Tab. 1 unter Ergänzung der Schlupfvariablen als Tab. 13 dargestellt.

**Tabelle 13: Matrix für LP<sup>9)</sup>-Lösung**

	Gesamtkapazität	Bezeich- verfügbare				Erzeugnis				Schlupfvariable			
		nung	Stunden	A	B	C	D	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>		
<b>Gl. 1</b>	K	120	2	6	6	2	1	0	0	0	0		
<b>Gl. 2</b>	L	144	3	4	3	6	0	1	0	0	0		
<b>Gl. 3</b>	M	180	4	3	2	4	0	0	1	0	0		
<b>Gl. 4</b>	N	108	6	2	4	3	0	0	0	1	0		
<b>Gl. 5</b>	Rohgewinn	DM 0	6,-	-8,-	-4,-	-5,-	0	0	0	0	0		

Die Erklärung der Matrix ist bei Tab. 1 zu finden. Neu ist lediglich, daß die waagerechte Zeile „Rohgewinn“ als sogenannte „Zielgleichung“ bezeichnet wird. Denn A mal der Gewinn 6,- plus B mal der Gewinn 8,- plus C mal der Gewinn 4,- plus D mal der Gewinn 5,- ergeben bei optimaler Mengenkombination der Fertigung den maximalen Gesamtgewinn.

<sup>9)</sup> Zeichen für „entspricht“.  
<sup>9)</sup> Lineare Programmierung

Engpaß ist also offenbar Kapazität N. Diese Gleichung N muß demnach (auf Grund des Wertes in Spalte A = 5, 33, Gl. 9, Tab. 14) durch 5, 33 geteilt werden:

Tabelle 16:

		Kap. opt. Menge	A	B	C	D	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>
<b>Gl. 11</b> (Gl. 9 : 5,33)	(N) = Höchstmenge A	12,75	1	0	0,375	0,4375	-0,062	0	0	0,187
<b>Gl. 12</b> (Gl. 6 — 0,33 Gl. 11)	(K) = Höchstmenge B	15,75	0	1	0,875	0,188	0,188	0	0	-0,06
<b>Gl. 13</b> (Gl. 7 — 1,67 Gl. 11)	L	42,7	0	0	-1,62	3,94	-0,562	1	0	-0,31
<b>Gl. 14</b> (Gl. 8 — 3 Gl. 11)	M	81,75	0	0	-2,12	1,69	-0,314	0	1	-0,56
<b>Gl. 15</b> (Gl. 10 — 3,33 Gl. 11)	G	-202,5	0	0	-5,25	0,88	-1,12	0	0	-0,62

Von den 4 Produkten A, B, C, D hat in der letzten Zeile von Tab. 16 nur noch D einen Gewinn  $\rightarrow 0,88 \leftarrow$ . Der Engpaß nach o. a. Methode (Tab. 15 für D) errechnet ist L. Gl. 12 muß demnach durch 3,94 geteilt werden und das Ergebnis von den übrigen Gleichungen abgezogen werden. Es errechnet sich dann:

Tabelle 17:

		Kap. / Erzeugnis	Kap. / Opt. Menge	A	B	C	D	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>
<b>Gl. 16</b> (Gl. 13 : 3,94)	(L) = D	$\sim 10,86 \leftarrow$		0	0	-0,41	1	-0,143	0,25	0	-0,08
<b>Gl. 17</b> (Gl. 11 — 0,4375 Gl. 16)	(N) = A	$\sim 8,00 \leftarrow$		1	0	0,556	0	0	-0,111	0	0,222
<b>Gl. 18</b> (Gl. 12 — 0,188 Gl. 16)	(K) = B	$\sim 13,73 \leftarrow$		0	1	0,95	0	0,215	-0,05	0	-0,05
<b>Gl. 19</b> (Gl. 14 — 1,69 Gl. 16)	M	$\sim 63,4 \leftarrow$		0	0	-1,4	0	-0,07	-0,43	1	-0,427
<b>Gl. 20</b> (Gl. 15 — 0,88 Gl. 16)	G	$\sim 212, \sim \leftarrow$		0	0	-5	0	-1	-0,222	0	-0,55

Mit einem Rechenschieber errechnet, ergibt sich also für dieses Problem:

Tabelle 18:   
 Optimale Produktionszusammensetzung

LP-Lösung	ca.	8,00 A	konventionelle Lösung	ca.	12,20 A
(Tab. 17)	ca.	13,73 B	(Tab. 6)	ca.	15,45 B
	ca.	10,86 D		ca.	1,50 D
Gesamtgewinn	ca.	212,—	Gesamtgewinn	ca.	204,20

Es zeigt sich, daß die LP-Lösung fast 4% günstiger ist als die schon weitgehend mit spitzem Bleistift berechnete konventionelle Lösung.

4. Besonderheiten

Oben wurde ein relativ einfaches Problem dargestellt. Auch hier empfiehlt es sich, schon sehr genau zu rechnen. In der Literatur trifft man deshalb häufig den Fall an, daß statt mit Dezimalstellen mit Brüchen gerechnet wird, da sich diese höhere Genauigkeit in vielen Fällen durch ein wesentlich günstigeres Ergebnis lohnt.

In der Praxis treten weiterhin neben den in diesem Fall von allen 4 Erzeugnissen A, B, C, D beanspruchten Kapazitäten K, L, M, N weitere Beschränkungen auf, die nur für einzelne Erzeugnisse, bzw. einige Erzeugnisgruppen gelten: z. B. Kapazität P mit 60 Std. in der höchstens 6 D hergestellt werden können. Die Einbeziehung dieses Problems in die Gesamtmatrix erfolgt nach dem gleichen Prinzip wie bei Tab. 1 In der zusätzlichen Zeile für Kapazität P würde nur bei den Erzeugnissen A, B, C je eine 0 und bei D eine 10 stehen. Die Rechnung würde im übrigen nach den o. a. beschriebenen Methoden ablaufen.

Weiterhin kommt es vor, daß das Ergebnis der Rechnung ganzzahlig sein soll z. B. 10 anstatt 10,86 D wie in Tab. 17/18 usf., sowie ebenfalls für die anderen Produkte auch. Hier behilft man sich in der Praxis mit ungenauen, nicht optimalen, ganzzahligen Lösungen, da die Methoden für die Errechnung ganzzahliger optimaler Lösungen sehr aufwendig sind.

Ebenfalls sollen nicht die Lösungsmethoden unerwähnt bleiben, die für den Fall entwickelt wurden, daß die Eingabedaten wahrscheinlichkeitsverteilt sind.

Andere Probleme fordern keine Maximallösung sondern eine Minimumlösung. Auch Mischungen beider Probleme kommen vor. Minimumlösungen werden durch sogenanntes Stürzen der Matrix gelöst und bei den Schlupfvariablen abgelesen.

Da in dieser Einführung nur die einfachsten Grundlagen dargestellt werden sollen, wird für diese Besonderheiten sowie alle übrigen Fragen auf die reichhaltige Spezialliteratur verwiesen<sup>10)</sup>.

Auf jeden Fall ist es günstig, wenn zum besseren Verständnis die o. a. Beispiele in Kapitel 2 und 3 selbständig gelöst werden und nur bei Zweifelsfragen auf die oben dargelegten Lösungswege zurückgegriffen wird.

<sup>10)</sup> Für Einführung u. a. geeignet: Angermann A.: Industrielle Planungsrechnung Bd. 1: Entscheidungsmodelle Nowak, Ffm. 1963.. Hürlimann: Lineare Programmierung, Schilling, Ddf., 1965.

Tabelle 19:

Beispiel einer LP-Matrix (Tab. 1) mit Beschränkungen (Kapazität P mit 60 Std., die höchstens 6 Erzeugniseinheiten D herstellen kann. P = 60 : 6 D = eine Einheit. D verbraucht in P = 10 Stunden).

Bezeichnung	Kapazitäten (bzw. Erzeugnis) Stunden (bzw. opt. Menge)	Erzeugnis				Schlupfvariable				
		A	B	C	D	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	y <sub>4</sub>	y <sub>5</sub>
K	120	2	6	6	2	1	0	0	0	0
L	144	3	4	3	6	0	1	0	0	0
M	180	4	3	2	4	0	0	1	0	0
N	108	6	2	4	3	0	0	0	1	0
P	$\rightarrow 60 \leftarrow$	0	0	0	$\rightarrow 10 \leftarrow$	0	0	0	0	1
Rohgewinn DM	0	6,—	8,—	4,—	5,—	0	0	0	0	0