

Krasnosselski, Nikolai; Cremers, Heinz; Sanddorf, Walter

Working Paper

Messung des Marktrisikos mit generalisierter autoregressiver bedingter heteroskedastischer Modellierung der Volatilität: Ein Vergleich univariater und multivariater Konzepte

Frankfurt School - Working Paper Series, No. 208

Provided in Cooperation with:

Frankfurt School of Finance and Management

Suggested Citation: Krasnosselski, Nikolai; Cremers, Heinz; Sanddorf, Walter (2014) : Messung des Marktrisikos mit generalisierter autoregressiver bedingter heteroskedastischer Modellierung der Volatilität: Ein Vergleich univariater und multivariater Konzepte, Frankfurt School - Working Paper Series, No. 208, Frankfurt School of Finance & Management, Frankfurt a. M.

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/91708>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Frankfurt School - Working Paper Series

No. 208

**Messung des Marktrisikos mit generalisierter
autoregressiver bedingter heteroskedastischer
Modellierung der Volatilität**

Ein Vergleich univariater und multivariater Konzepte

by

Nikolai Krasnosselski, Heinz Cremers & Walter Sanddorf-Köhle

January 2014



Frankfurt School of
Finance & Management
Bankakademie | HfB

Sonnemannstr. 9-11 60314 Frankfurt am Main, Germany
Phone: +49 (0)69 154 008 0 Fax: +49 (0)69 154 008 728
Internet: www.frankfurt-school.de

Abstract

The globalisation on financial markets and the development of financial derivatives has increased not only chances but also potential risk within the banking industry. Especially market risk has gained major significance since market price variation of interest rates, stocks or exchange rates can bear a substantial impact on the value of a position. Thus, a sound estimation of the volatility in the market plays a key role in quantifying market risk exposure correctly.

This paper presents GARCH models which capture volatility clustering and, therefore, are appropriate to analyse financial market data. Models with **Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity** are characterised by the ability to estimate and forecast time-varying volatility. In this paper, the estimation of conditional volatility is applied to Value at Risk measurement. Univariate as well as multivariate concepts are presented for the estimation of the conditional volatility.

Key words: ARCH, Backtesting, BEKK-GARCH, Bootstrapping, CCC-GARCH, Conditional Volatility, Constant Mean Model, DCC-GARCH, EWMA, GARCH, GJR-GARCH, Heteroskedasticity, IGARCH, Mandelbrot, Misspecification Test, Multivariate Volatility Model, Stylized Facts, Univariate Volatility Model, Value at Risk, Volatility Clustering

JEL classification: C01, C02, C12, C13, C14, C15, C22, C32, C51, C52, C53, G32, G38

ISSN: 14369753

Contact:

Nikolai Krasnosselski
Eschenheimer Anlage 23
60318 Frankfurt am Main
nikolai_krasnosselski@t-online.de

Prof. Dr. Heinz Cremers
Centre for Practical Quantitative Finance
Frankfurt School of Finance & Management
Sonnemannstraße 9-11
60314 Frankfurt am Main
h.cremers@fs.de

Dr. Walter Sanddorf-Köhle
w.sanddorf@das-wirtschaftsseminar.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der Value at Risk als Risikomaß	3
2.1	Definition des Value at Risk	3
2.2	Risikomapping für ein Portfolio	4
2.3	Delta-Normal-Verfahren zur Herleitung des Value at Risk	5
2.3.1	Diskrete Portfoliorendite als Modellvariable	6
2.3.2	Kontinuierliche Portfoliorendite als Modellvariable	8
2.4	Kritik am Value at Risk	9
3	Empirische Charakteristika von Finanzzeitreihen	11
3.1	Zufallsbewegung der Kurse und Stationarität der Rendite	11
3.2	Verteilung der kontinuierlichen Rendite	15
3.2.1	Defizite der Normalverteilungsannahme der Rendite	16
3.2.2	Die Klasse der stabilen Paretoverteilung	17
3.3	Abhängigkeitsstruktur der kontinuierlichen Rendite	19
3.3.1	Nichtlinearität der Rendite	19
3.3.2	Volatilitätsclustering und Abhängigkeit transformierter Renditen	21
3.4	Implikation der stilisierten Fakten für die Modellierung der Volatilität	22
4	Modellierung der bedingten Varianz	24
4.1	Definition der bedingten Varianz	24
4.2	Univariate Ansätze zur Modellierung der bedingten Varianz	26
4.2.1	Gleitende Varianzen	26
4.2.2	EWMA	27
4.2.3	ARCH	30
4.2.4	GARCH	33
4.2.5	IGARCH	38

4.2.6	GJR-GARCH	39
4.3	Multivariate Ansätze zur Modellierung der bedingten Varianz	42
4.3.1	Gleitende Varianz-Kovarianzmatrizen und exponentielles Glätten	44
4.3.2	Skalares GARCH Modell	45
4.3.3	Vektor GARCH	47
4.3.4	Diagonal-GARCH	47
4.3.5	BEKK-GARCH	48
4.3.6	CCC-GARCH	50
4.3.7	DCC-GARCH	51
5	Fallstudie: VaR eines Portfolios mit GARCH Prozessen für die Volatilität	55
5.1	Modellierung der bedingten Varianz mit GARCH Prozessen	56
5.1.1	Univariate Modellierung	56
5.1.2	Multivariate Modellierung	60
5.2	Berechnung des Value at Risk	62
5.2.1	Berechnung bei univariater Modellierung der Volatilität	63
5.2.2	Berechnung bei multivariater Modellierung der Volatilität	64
5.3	Validierung des Value at Risk	65
5.3.1	Binomialtest	67
6	Fazit	69
	Literatur	71
	Anhang	75
A	Deskriptive Übersicht zur Fallstudie	75
A.1	Deskriptive Statistiken	75
A.2	Tagesschlusskurs und kontinuierliche Tagesrendite der Einzelpositionen und des Portfolios	76
B	Parameterschätzung der GARCH Modelle zur Fallstudie	77
B.1	GARCH(1,1) und GJR-GARCH(1,1) Modell	77
B.2	BEKK-GARCH(1,1) Modell	78
B.3	CCC-GARCH(1,1) und DCC-GARCH(1,1) Modell	79

C	Spezifikationstests der GARCH Modelle zur Fallstudie	80
C.1	GARCH(1,1) und GJR-GARCH(1,1) Modell	80
C.2	BEKK-GARCH(1,1) Modell	81
C.3	CCC-GARCH(1,1) Modell	82
C.4	DCC-GARCH(1,1) Modell	83
D	Bootstrap Verfahren am Beispiel eines GARCH(1,1) Prozesses	84

Symbolverzeichnis

Die Symbole sind entsprechend ihres Auftretens im Text nach Kapiteln geordnet.

Kapitel 2

Q_p	Quantil einer Verteilung zur Wahrscheinlichkeit p
\mathbb{P}, p	Wahrscheinlichkeit
V	Vermögenswert
ΔV	Vermögenswertänderung
VaR	Value at Risk
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$F(\cdot)$	Verteilungsfunktion
G	gehaltene Position aus Handelsprodukten
h	Haltedauer der Position G
S_G	Gesamtwert der Position G
S_j	Preis des Handelsproduktes j
a_j	Anteile des Handelsproduktes j
J	Anzahl der Handelsprodukte im Portfolio
R^c	kontinuierliche Rendite
R^d	diskrete Rendite
$\mathbb{N}(\cdot)$	Normalverteilung
$\boldsymbol{\mu}$	Erwartungswertvektor
$\boldsymbol{\Sigma}$	Varianz-Kovarianzmatrix
$f(\cdot)$	Dichtefunktion
$f'(\cdot)$	erste Ableitung der Funktion $f(\cdot)$
$T_1(\cdot)$	Taylorpolynom erster Ordnung
μ_G	Erwartungswert der Position G
σ_G^2	Varianz der Position G
w_j	Portfoliogewichtungsfaktor
\boldsymbol{w}	Vektor der Portfoliogewichte

\mathbf{w}'	Transponierte des Vektors \mathbf{w}
N_p	Quantil der Standardnormalverteilung zur Wahrscheinlichkeit p

Kapitel 3

t	Zeitindex
P_t	Kurs
ε_t	Residuum
μ	Driftparameter, Erwartungswert
σ^2	unbedingte Varianz
$E(\cdot)$	Erwartungswert
$E_{t-1}(\cdot)$	bedingter Erwartungswert, gegeben der Prozess bis $t - 1$
$\text{Var}(\cdot)$	Varianz
$\text{Cov}(\cdot)$	Kovarianz
$\phi, \alpha, \beta, \gamma, \delta$	Parameter
t	t-Statistik
S	Schiefe
κ	Kurtosis
T	Anzahl der Beobachtungen
$\chi^2(\cdot)$	Chi-Quadrat-Verteilung
$\varphi(\cdot)$	charakteristische Funktion
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
i	imaginäre Einheit
$\text{sign}(\cdot)$	Signumfunktion
π	Kreiszahl
$\rho(k)$	Autokorrelation zum Zeitabstand k
$\text{Corr}(\cdot)$	Korrelation
$Q(m)$	Ljung-Box Teststatistik zur Ordnung m
v_t	standardisiertes Residuum
σ_t	bedingte Standardabweichung/Volatilität

Kapitel 4

σ_t^2	bedingte Varianz
λ, ω	Parameter
p, q	Ordnung für ARCH(p) bzw. GARCH(p,q) Prozesse

$\sigma_{t+k t}^2$	bedingte Varianz im Zeitpunkt $t + k$, gegeben der Prozess bis t
u_t, η_t	Residuum
$L(\cdot)$	Likelihoodfunktion
θ	Parametervektor
\mathbf{R}^c	Vektor der kontinuierlichen Renditen
I	Indikatorvariable
S_{t-1}^-, S_{t-1}^+	Dummyvariable
ζ	Teststatistik
R^2	Bestimmtheitsmaß
ε_t	Vektor der Residuen
\mathbf{v}_t	Vektor der standardisierten Residuen
Σ_t	bedingte Varianz-Kovarianzmatrix
$\mathbf{0}$	Nullvektor
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
$\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}_t$	Parametermatrix
$\text{vech}(\cdot)$	vech Operator
$\text{diag}(\cdot)$	Diagonalmatrix
\det	Determinante
\mathbf{R}_t	bedingte Korrelationsmatrix
\mathbf{R}	Korrelationsmatrix
\mathbf{D}_t^{-1}	Diagonalmatrix der bedingten Standardabweichungen
$\tilde{\varepsilon}_t$	Vektor der normalisierten Residuen
$\bar{\mathbf{Q}}$	unbedingte Varianz-Kovarianzmatrix der normalisierten Residuen

Kapitel 5

SC	Schwarz Informationskriterium
$\text{BE}(\cdot)$	Bernoulliverteilung
$\text{B}(\cdot)$	Binomialverteilung
α	Vertrauenswahrscheinlichkeit
β	Ausnahmewahrscheinlichkeit
c_u, c_o	kritische Schranken

Abkürzungsverzeichnis

Die Abkürzungen sind alphabetisch geordnet.

ADF	Augmented Dickey Fuller
AR	AutoRegressive
ARCH	AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity
ARMA	AutoRegressive Moving Average
BEKK	Baba Engle Kraft Kroner
CCC	Constant Conditional Correlation
CMM	Constant Mean Modell
DAX	Deutscher Aktien Index
DCC	Dynamic Conditional Correlation
EWMA	Exponentially Weighted Moving Average
GARCH	Generalized ARCH
GJR	Glosten Jagannathan Runkle
HAD	Hauptabschnittsdeterminante
IGARCH	Integrated GARCH
ML	Maximum Likelihood
RMSE	Root Mean Squared Error
SolvV	Solvabilitätsverordnung
STS	Smoothly Truncated Stable
VaR	Value at Risk

Diese Seite wurde absichtlich freigelassen.

1 Einleitung

Welche Bedeutung einer quantitativen Herangehensweise zukommt, stellt Joseph Schumpeter (1933) unmissverständlich in der Erstausgabe der Fachzeitschrift *Econometrica* dar. Der Mensch sei für Argumente und Behauptungen immun, solange sie nicht durch Zahlen gestützt werden. Innerhalb eines Risikomanagement-Prozesses spiegelt sich dieser Gedanke in der Quantifizierung und Messung des Risikos als Bestandteil der Risikoanalyse wider. Das Ziel ist, einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Risikofaktoren und ihren Auswirkungen herzustellen und das Risiko schließlich auf eine Zahl zu komprimieren. Ohne diese quantitative Einschätzung des Risikos ist eine Risikosteuerung unmöglich. Zudem ist beispielsweise die Absicherung einer Position nicht durchführbar. Erst recht ist die bloße Feststellung, einem gewissen Risiko ausgesetzt zu sein, wenig zufriedenstellend. Die Herausforderung besteht darin, die Risikofaktoren möglichst präzise zu quantifizieren.

Dieser Arbeit liegt das Marktrisiko, das die Gefahr der negativen Wertänderung einer Position aufgrund von Änderungen bestimmter Marktgrößen wie Zinsen oder Kursen beschreibt, zugrunde. Besonders die Volatilität im Markt hat einen entscheidenden Einfluss auf das eben erwähnte Risikomaß bei der Risikomessung. Im weitesten Sinne beschreibt die Volatilität einer Marktvariablen ihre Schwankung und impliziert dadurch, dass der Wert dieser Variablen in der Zukunft ungewiss ist. Es sei vorweggenommen, dass Volatilitäten auf Finanzmärkten dazu neigen, sogenannte Cluster zu bilden, was bedeutet, dass auf große Preisänderungen tendenziell eher große Preisänderungen folgen und vice versa. Veranschaulichen lässt sich diese einfache Feststellung bei Betrachtung eines Renditediagramms. Modelle, die eine konstante Varianz einer Variablen unterstellen sind somit für eine adäquate Modellierung einer Finanzzeitreihe nicht geeignet.

Gegenstand dieser Arbeit ist dementsprechend, Modelle vorzustellen, die das Volatilitätsclustering von Renditen abbilden können. Modelltypen mit generalisierter autoregressiver bedingter Heteroskedastie (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, GARCH) zeichnen sich dadurch aus, dass sie einer sich im Zeitverlauf ändernden Volatilität gerecht werden. Somit ist die GARCH-Familie zur

Analyse von Finanzmarktdaten gut geeignet und erlaubt schlussendlich eine gewisse Prognose der Volatilität. Es erfolgt ein Vergleich univariater und multivariater Konzepte in Bezug auf die Modellierung des Risikofaktors Marktvolatilität. In dieser Arbeit fließt diese in die Berechnung des Value at Risk ein.

Kapitel 2 stellt den Value at Risk als Risikomaß vor. Nach der Definition des Value at Risk folgt die Bestimmung sowohl der Risikofaktoren in einem Portfolio als auch des Zusammenhangs zwischen der Änderung dieser Risikofaktoren und der Wertänderung des Portfolios. Basierend auf dieser Beziehung wird der Value at Risk unter Verwendung des Delta-Normal-Verfahrens hergeleitet, wobei die Herleitung sowohl für die diskrete als auch für die kontinuierliche Rendite als Modellvariable vorgestellt wird. Es folgt eine Kritik am Value at Risk.

Kapitel 3 ist den empirischen Charakteristika von Finanzzeitreihen gewidmet, um die Eigenschaften, die bei der Modellierung der Volatilität berücksichtigt werden müssen, zu verdeutlichen. Ausgehend von der Kursbewegung der auf Märkten gehandelten Finanzprodukte wird auf den Prozess der kontinuierlichen Rendite geschlossen. Es wird auf die Verteilung und die Abhängigkeitsstruktur der kontinuierlichen Rendite eingegangen und gezeigt, dass die Annahme einer identisch und unabhängig normalverteilten kontinuierlichen Rendite, nicht zu rechtfertigen ist. Zudem werden die sogenannten stilisierten Fakten vorgestellt, die empirisch fundierte Eigenschaften von Renditen darstellen. Auf deren Basis werden Implikationen für die Modellierung der Volatilität aufgezeigt.

In Kapitel 4 wird zunächst auf den Begriff der bedingten Varianz eingegangen und anschließend Konzepte für ihre Modellierung vorgestellt. Es werden verschiedene univariate und multivariate Ansätze präsentiert. Neben deskriptiven Verfahren, die in der Praxis häufig Anwendung finden, wird schwerpunktmäßig die Familie der GARCH Modelle angeführt.

Kapitel 5 beinhaltet eine Fallstudie zur Berechnung des Value at Risk für ein Portfolio unter Verwendung von GARCH Prozessen für die Volatilität. Hauptsächlich werden die univariaten und multivariaten GARCH Ansätze gegenübergestellt und im Hinblick auf die Prognosegüte des Value at Risk evaluiert. Dementsprechend werden in der Fallstudie die Modellierung der bedingten Varianz und die Berechnung des Value at Risk für jeweils univariate und multivariate Ansätze anhand eines Beispiels verdeutlicht. Abschließend erfolgt die Validierung der Value at Risk Kennzahlen, die auf der unterschiedlichen Modellierung der Volatilität basieren.

Die Arbeit schließt mit einem Fazit in Kapitel 6.

2 Der Value at Risk als Risikomaß

Mit Einzug der Globalisierung der Finanzmärkte und der Entwicklung derivativer Finanzinstrumente sind für die Banken nicht nur die Chancen sondern auch die Risiken im Bankengeschäft gestiegen. Speziell das Marktrisiko ist in den Vordergrund gerückt, da Marktpreisschwankungen von Zinsen, Aktien oder Wechselkursen nicht unerhebliche Auswirkungen auf den Wert von Positionen zur Folge haben können. Der Baseler Ausschuss befürwortet seit 1996 interne Modelle auf Basis des Value at Risk (VaR) für die Risikomessung und damit für die Bestimmung der Eigenkapitalausstattung für Marktrisiken. Der VaR ist somit im Bankensektor für die Einschätzung möglicher Wertänderungen und damit für die Bestimmung der Eigenkapitalanforderungen zur Deckung des Verlustrisikos weit verbreitet. Der VaR weist eine monetäre Verlustschranke, die ein Portfolio nur mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit innerhalb eines bestimmten Zeitraums überschreitet, aus. Mit anderen Worten quantifiziert der VaR einen Verlust, der innerhalb einer festgesetzten Haltedauer nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit höher ausfällt. Die Bankenaufsicht fordert für die interne Berechnung ein Konfidenzniveau von 99% beziehungsweise eine Risikowahrscheinlichkeit von 1% sowie eine Haltedauer von zehn Tagen (siehe §315 Abs.1 SolvV). Außerdem darf der historische Beobachtungszeitraum nicht kürzer als ein Jahr sein, was etwa 250 Tagesbeobachtungen entspricht (siehe §315 Abs.2 SolvV).

2.1 Definition des Value at Risk

Der Value at Risk ist das negative p -Quantil $-Q_p$ zur Verteilung der Wertänderung ΔV und trennt diese im Teilungsverhältnis $p : 1 - p$. Formal gilt:

$$\mathbb{P}(\Delta V \leq Q_p) = \mathbb{P}(\Delta V \leq -VaR) \leq p \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}(-\Delta V > VaR) \leq p \quad (2.1)$$

Der Value at Risk ist somit eine Schranke, die der Verlust $-\Delta V$ höchstens mit Wahrscheinlichkeit p überschreitet. Dieser Zusammenhang lässt sich in der Hinsicht

schärfer fassen, dass unter allen Schranken VaR die kleinste ist:

$$VaR = \min\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}(-\Delta V > x) \leq p\}$$

Für den Spezialfall, dass eine kontinuierliche Verteilungsfunktion F vorliegt, ist das Quantil und somit der Value at Risk eindeutig bestimmt durch:

$$\mathbb{P}(\Delta V \leq Q_p) = F(Q_p) = p \Leftrightarrow VaR = -Q_p = -F^{-1}(p)$$

Links vom Quantil befindet sich die Wahrscheinlichkeitsmasse p , rechts davon die der Vertrauenswahrscheinlichkeit $1 - p$. Bevor eine explizite Formel für den Value at Risk hergeleitet werden kann, muss im ersten Schritt das Mapping der Risikofaktoren für ein Portfolio erfolgen. Das Risikomapping bezeichnet die Darstellung der Wertänderung als Funktion der Änderung bestimmter Risikofaktoren. Es wird also ein Zusammenhang zwischen der Wertänderung des Portfolios ΔV und der Risikofaktoränderungen im Portfolio gesucht.

2.2 Risikomapping für ein Portfolio

Gehalten wird eine Position G für die Haltedauer h , deren Gesamtwert S_G sich aus den Preisen S_j der Einzelpositionen zusammensetzt:

$$G = a_1 G_1 + \dots + a_J G_J$$

$$\text{mit Preisen } S_j = S(t_0, G_j) \text{ und } S_G = \sum_{j=1}^J a_j S_j$$

Aktien-, Devisen- oder Rentenportfolios sind für die Position G denkbar. Die Wertänderung des Portfolios ΔV wird durch die Preisänderungen eben dieser Handelsprodukte verursacht, sodass die Risikofaktoren die Preise S_1, \dots, S_J sind. Die Preisänderungen sollen durch die kontinuierlichen Renditen R_1^c, \dots, R_J^c dargestellt werden:

$$R_j^c = \ln\left(\frac{S(t_0 + h, G_j)}{S(t_0, G_j)}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta S_j}{S_j}\right), \text{ wobei } \Delta S_j = S(t_0 + h, G_j) - S_j \quad (2.2)$$

Es wird angenommen, dass der Vektor der kontinuierlichen Renditen multivariat normalverteilt ist:

$$\mathbf{R}^c = \begin{pmatrix} R_1^c \\ \vdots \\ R_J^c \end{pmatrix} \sim \mathbb{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,J} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{J,1} & \sigma_{J,2} & \cdots & \sigma_{J,J} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Ausgangspunkt für diese Einschätzung ist die Annahme, dass Renditen verschiedener Zeiträume unabhängig sind und als Zufallsvariablen aufgefasst werden können. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass eine Zufallsvariable approximativ normalverteilt ist für den Fall, dass sie aus der additiven Überlagerung einer Vielzahl unabhängiger, zufälliger Einzeleffekte resultiert. Aus der Zeitadditivität der kontinuierlichen Rendite R_1^c, \dots, R_J^c folgt somit, dass sie approximativ normalverteilt ist. Dieser Gedanke findet sich bereits bei Bachelier (1900) und auch bei Osborne (1959) als Grundlage für ihre weitere Modellierung. An dieser Stelle wird an der Normalverteilung mit dem Hinweis, dass es sich um eine Approximation handelt, festgehalten. Auf die sich hieraus ergebende sogenannte Fat Tail Problematik wird in Kapitel 3 ausführlich eingegangen. Schlussendlich ergibt sich für die Wertänderung als Funktion der Risikofaktoränderungen:

$$\Delta V = \sum_{j=1}^J a_j \Delta S_j = \sum_{j=1}^J a_j S_j (e^{R_j^c} - 1) \quad (2.4)$$

Es wird deutlich, dass die Angabe einer expliziten Formel für den Value at Risk nicht möglich ist, da die Verteilung von ΔV auf nicht lineare Weise von R_1^c, \dots, R_J^c abhängt. Ausgehend von diesem Risikomapping sind verschiedene Ansätze zur Approximation und damit zur Berechnung des Value at Risk möglich. Im Folgenden soll das Delta-Normal-Verfahren vorgestellt werden.

2.3 Delta-Normal-Verfahren zur Herleitung des Value at Risk

Das Delta-Normal-Verfahren beruht auf der Linearisierung des Ausgangsmappings in Gleichung (2.4). Mittels Taylor-Approximation kann die Exponentialfunktion

durch das Taylorpolynom approximiert werden. Für die Funktion $f(x) = e^x - 1$ mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und erster Ableitung $f'(x) = e^x$ lautet ein Taylorpolynom erster Ordnung:

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = x$$

Abbildung 2.1. zeigt die Annäherung der Funktion durch das Taylorpolynom. Die Linearisierung entspricht nur einem kleinen Genauigkeitsverlust, da große Ausschläge der Renditen eher selten vorkommen, sodass $e^{R^c} - 1 \approx R^c$ eine gute Approximation um die Entwicklungsstelle im Ursprung ist. Unter Anwendung des Taylor-Verfahrens sind zwei unterschiedliche Modellvariablen für das Mapping denkbar. Sowohl die diskrete als auch die kontinuierliche Portfoliorendite sind geeignet, da sie explizit die Wertänderung berücksichtigen. Somit ist die Herleitung des Value at Risk möglich.

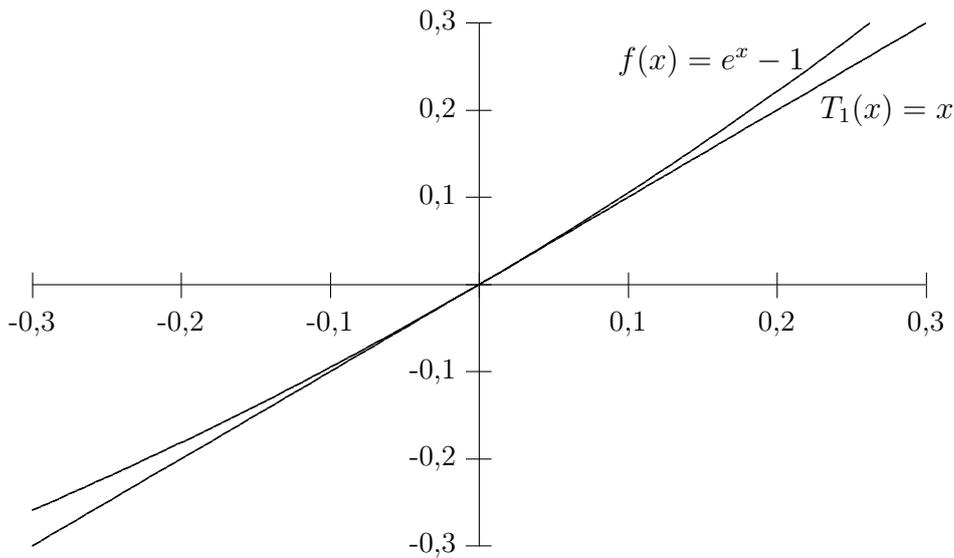


Abbildung 2.1. Taylor-Approximation

2.3.1 Diskrete Portfoliorendite als Modellvariable

Im ersten Schritt wird unter Berücksichtigung der Portfoliogewichte $w_j = \frac{a_j S_j}{S_G}$ beziehungsweise $\mathbf{w} = (w_1 \cdots w_J)'$ der Gesamtwert der Position S_G in das Mapping

einbezogen, sodass Gleichung (2.4) folgende Form annimmt:

$$\Delta V = S_G \sum_{j=1}^J w_j (e^{R_j^c} - 1) \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{S_G} = \sum_{j=1}^J w_j (e^{R_j^c} - 1) \quad (2.5)$$

Der Ausdruck links ist nichts anderes als die diskrete Portfoliorendite R_G^d . Portfoliorendite meint die Rendite der Gesamtposition G und entspricht in diesem Fall der Wertänderung ΔV der Position im Verhältnis zum Portfoliowert S_G . Durch die Taylor-Approximation auf der rechten Seite der Gleichung resultiert das folgende Mapping:

$$R_G^d = \sum_{j=1}^J w_j R_j^c \sim \mathbb{N}(\mu_G, \sigma_G^2) \quad \text{mit} \quad \mu_G = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma_G^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \quad (2.6)$$

Aus dem Transformationssatz folgt, dass die diskrete Portfoliorendite eine $\mathbb{N}(\mu_G, \sigma_G^2)$ -verteilte Zufallsvariable ist. Für diese Folgerung ist neben der Linearität auch die Annahme der multivariat normalverteilten kontinuierlichen Rendite in Gleichung (2.3) entscheidend. Streng genommen ist die Implikation nicht gerechtfertigt, da die diskrete Rendite die Eigenschaft der Zeitaggregation nicht aufweist. Aus der Normalverteilung der kontinuierlichen Rendite folgt eher, dass die diskrete Rendite lognormalverteilt ist. Die Annahme gilt also nur approximativ. Aus der Definition des Value at Risk in Gleichung (2.1) folgt mit der diskreten Portfoliorendite als Modellvariable für die explizite Darstellung des Value at Risk:

$$\mathbb{P}(\Delta V \leq -VaR) = p$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(R_G^d \leq -\frac{VaR}{S_G}\right) = p \quad (2.7)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\frac{\Delta V}{S_G} - \mu_G}{\sigma_G} \leq \frac{-\frac{VaR}{S_G} - \mu_G}{\sigma_G}\right) = p \Leftrightarrow \frac{-\frac{VaR}{S_G} - \mu_G}{\sigma_G} = N_p \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow VaR = -S_G(\mu_G + \sigma_G N_p) \quad (2.9)$$

Es wird die Schranke, die die Wahrscheinlichkeit p einschließt, gesucht. In Gleichung (2.7) wird die Normalverteilung der diskreten Portfoliorendite zugrunde gelegt, sodass die Schranke ebenfalls eine Rendite darstellt. Durch das Standardisieren der Normalverteilung entspricht die standardisierte Schranke dem Quantil der Stan-

dardnormalverteilung N_p zur Wahrscheinlichkeit p in Gleichung (2.8). Das Auflösen liefert in Gleichung (2.9) die explizite Form des Value at Risk.

2.3.2 Kontinuierliche Portfoliorendite als Modellvariable

Das Ausgangsmapping stimmt mit dem Mapping für den Fall in Gleichung (2.5) überein, allerdings wird die diskrete Portfoliorendite R_G^d als ein Ausdruck wiedergegeben, der die kontinuierliche Rendite enthält:

$$e^{R_G^c} - 1 = R_G^d = \frac{\Delta V}{S_G} = \sum_{j=1}^J w_j (e^{R_j^c} - 1)$$

Die Taylor-Approximation auf beiden Seiten der Gleichung führt zu folgendem Mapping:

$$R_G^c = \sum_{j=1}^J w_j R_j^c \sim \mathbb{N}(\mu_G, \sigma_G^2) \quad \text{mit} \quad \mu_G = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma_G^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$$

Im Unterschied zu Gleichung (2.6) ist die zugrunde liegende Modellvariable die kontinuierliche Portfoliorendite. Die Normalverteilung dieser Größe, die auch hier aus dem Transformationssatz folgt, ist streng genommen falsch und gilt nur approximativ, da kontinuierliche Renditen die Eigenschaft der Zeitadditivität und nicht die der Portfolioadditivität vorweisen. Auf die kontinuierliche Rendite ist in Gleichung (2.2) bereits eingegangen worden. Lediglich die Betrachtung für die Gesamtposition rückt an die Stelle für die Einzelposition im Portfolio. Der Value at Risk ergibt sich unter der Annahme der normalverteilten kontinuierlichen Portfoliorendite zu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta V \leq -VaR) &= p \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(R_G^c \leq \ln\left(1 - \frac{VaR}{S_G}\right)\right) = p \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{R_G^c - \mu_G}{\sigma_G} \leq \frac{\ln\left(1 - \frac{VaR}{S_G}\right) - \mu_G}{\sigma_G}\right) &= p \Leftrightarrow \frac{\ln\left(1 - \frac{VaR}{S_G}\right) - \mu_G}{\sigma_G} = N_p \\ \Leftrightarrow VaR &= -S_G(e^{\mu_G + \sigma_G N_p} - 1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ausgehend von den zwei Alternativen für das Mapping kann die Berechnung des Value at Risk folglich nach Gleichung (2.9) beziehungsweise (2.10) erfolgen. Abbildung 2.2. veranschaulicht die Verteilungsannahme zur Herleitung des Value at Risk für beide Modellvariablen. Das Quantil N_p nimmt abhängig von der zugrunde

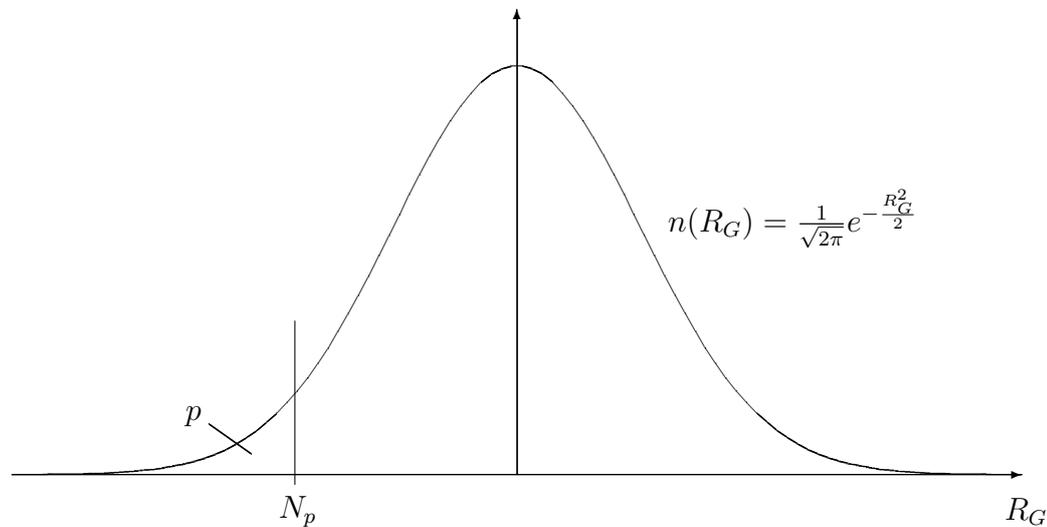


Abbildung 2.2. Standardnormalverteilung der Portfoliorendite

liegenden Portfoliorendite eine der obigen Ausprägungen für den diskreten oder kontinuierlichen Fall an. Aus der parametrischen Verteilung der Portfoliorendite folgt, dass der Mittelwert μ_G und die Standardabweichung σ_G geschätzt werden müssen, um die Normalverteilung zu spezifizieren. Die Schätzung erfolgt in dieser Arbeit durch Analyse der Renditezeitreihe und berücksichtigt ausdrücklich die im Zeitverlauf variierende Standardabweichung. Bisher wurde implizit von einer konstanten Standardabweichung der Renditen ausgegangen. Bevor aber die Modelle zur Zeitreihenanalyse vorgestellt werden, soll in Kapitel 3 auf die Eigenschaften der Rendite näher eingegangen werden.

2.4 Kritik am Value at Risk

Der Value at Risk weist zwei wesentliche Defizite auf. Erstens gilt die Nicht-Additivität von Positionen bei der VaR-Messung. Für ein Portfolio aus mehreren Teilpositionen ergibt sich der VaR des Portfolios nicht aus der Summe der VaR der Teilpositionen. Das bedeutet, dass bei Hinzunahme einer einzigen Position die Neuberechnung des Value at Risk für das gesamte Portfolio erforderlich ist. Besonders problematisch ist hier die fehlende Eigenschaft der Sub-Additivität, d.h. der Value at Risk einer Gesamtposition kann größer sein als die Summe der VaR der Teilpositionen. Zweitens trifft der Value at Risk keine Aussage über die Höhe des Verlusts für den

Fall, dass der Verlust $-\Delta V$ die Schranke VaR überschreitet. An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Expected Shortfall als alternatives Risikomaß infrage kommt, um Extremrisiken besser abbilden zu können. Der Expected Shortfall ist definiert als derjenige erwartete Verlust, der eintritt, wenn der Verlust die Schranke VaR übersteigt. Nichtsdestotrotz liegen die Vorteile des Value at Risk in der einfachen Bestimmung und Interpretation des Risikomaßes. Das Risiko wird auf eine Zahl komprimiert und durch die monetäre Größe als Einheit sind nicht nur verschiedene Positionen in ihrem Risikogehalt stets vergleichbar sondern die Unterlegung mit Kapital ist ohne Probleme direkt ablesbar.

3 Empirische Charakteristika von Finanzzeitreihen

Im vorigen Kapitel wurde deutlich, dass die Standardabweichung in direkter Beziehung zum Value at Risk steht, sodass eine möglichst zuverlässige Schätzung dieser Größe unabdingbar ist. Auf Finanzmärkten wird die Standardabweichung als Volatilität bezeichnet und beschreibt die Unsicherheit der zukünftigen Preisentwicklung. Sie ist am Markt nicht direkt beobachtbar und muss aus der Wertentwicklung der Vermögenswerte geschätzt werden. Da in dieser Arbeit Zeitreihenmodelle für die Schätzung der Volatilität herangezogen werden, sollen die Eigenschaften von Finanzzeitreihen näher beleuchtet werden. Von zentraler Bedeutung sind hierbei die Renditen der zugrunde liegenden Kursreihe, die bestimmte empirisch fundierte Eigenschaften aufweisen. Die Bedeutung der Renditezeitreihe wird deutlich, wenn die Definition des Volatilitätsbegriffs von Taleb zugrunde gelegt wird: „Volatility is best defined as the amount of variability in the returns of a particular asset“ (Taleb 1997, S. 88). Mit anderen Worten erfolgt die Volatilitätsmodellierung auf Basis der Renditen. Eine wesentliche Anforderung an den Modelltyp zur Beschreibung der Volatilität ist, den Charakteristika der Rendite gerecht zu werden. Diese werden im Folgenden am Beispiel des Deutschen Aktien Index (DAX) veranschaulicht. Der Ausgangspunkt für die Betrachtung der Rendite ist jedoch der Kursverlauf an sich.

3.1 Zufallsbewegung der Kurse und Stationarität der Rendite

Für die folgende Betrachtung liegen die DAX-Werte ab Januar 2000 bis einschließlich Juni 2013 vor. Abbildung 3.1. stellt die logarithmierten Tagesschlusskurse im Zeitverlauf grafisch dar. Zu der Art und Weise, wie sich die Kursentwicklung von Aktien, Börsenindices oder auch Währungskursen beschreiben lässt, existieren zwei unterschiedliche Ansichten. Der Auffassung, dass die Entwicklung Trends aufweist

und sich bestimmte Muster im Zeitverlauf wiederholen, steht die Auffassung gegenüber, dass Kursverläufe das Resultat von Zuffalsbewegungen sind. Im letzteren Fall können Kursänderungen keine Abhängigkeiten aufweisen und Kursprognosen sind auf Basis der Historie nicht möglich. Diese Auffassung spiegelt sich in der Random Walk Hypothese wider und findet in der Literatur zahlreiche Befürworter, so zum Beispiel Bachelier (1900), Osborne (1959), Alexander (1961) und Fama (1965). Black und Scholes (1973) nehmen als Grundlage für die Optionspreisbewertung eine geometrische Brownsche Bewegung der Aktienkurse und somit einen stochastischen Prozess an. Mit Itô's Lemma ergibt sich für den log-Kurs ein generalisierter Wiener Prozess mit konstantem Driftparameter μ . Eine ausführliche Herleitung und Darstellung der Aktienkursbewegung im kontinuierlichen Zeitmodell liefert Hull (2012, S. 280-294). Im diskreten Fall spricht man vom Gaußschen Random Walk Prozess, der definiert ist durch:

$$\ln P_t = \mu + \ln P_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{N}(0, \sigma^2) \quad (3.1)$$

Aus den logarithmierten Kursen folgt die notwendige Eigenschaft, dass keine negativen Kurswerte angenommen werden können: $P_t = P_{t-1}e^{\mu+\varepsilon_t}$. In Gleichung (3.1) setzt sich der heutige logarithmierte Kurs $\ln P_t$ aus dem Driftparameter μ , dem logarithmierten Kurs der Vorperiode $\ln P_{t-1}$ und der Innovation ε_t zusammen. Der Zufallscharakter des Random Walk wird durch die Zufallsvariable ε_t realisiert. Wenn sie identisch und unabhängig normalverteilt ist (independent and identically distributed, iid), wird ihr Prozess als Gaußscher White Noise Prozess bezeichnet. Für die Momente des (Gaußschen) White Noise Prozesses gilt:

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \text{für } t \neq s$$

Constant Mean Modell. Für die statistische Analyse ist die fundamentale Voraussetzung die Stationarität der Zeitreihe, die der Random Walk nicht aufweist. Ein Prozess ist schwach stationär, wenn Mittelwert und Varianz für alle Zeitpunkte konstant sind und die Autokovarianzen lediglich von einem konstanten zeitlichen Abstand abhängen. Dementsprechend garantiert die Stationarität, dass diese Parameter gegenüber der Zeit invariant sind und somit nicht für jeden Zeitpunkt geschätzt werden müssen. Allein bei Betrachtung der Kursreihe in Abbildung 3.1. wird deutlich, dass der Random Walk nicht mittelwertstationär sein kann. Durch



Abbildung 3.1. Logarithmierter Kurs des Deutschen Aktien Index

Differenzenbildung der logarithmierten Kurse lässt sich der Random Walk in einen stationären Prozess transformieren. An dieser Stelle wird die Bedeutung der Logarithmierung deutlich, da die Differenzenbildung einen Prozess der kontinuierlichen Rendite hervorbringt:

$$\ln P_t - \ln P_{t-1} = R_t^c = \mu + \varepsilon_t \quad \text{mit} \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{N}(0, \sigma^2) \quad (3.2)$$

Der Prozess für die kontinuierliche Rendite wird als Constant Mean Modell (CMM) bezeichnet, da sich der Prozess um einen konstanten Mittelwert bewegt. Formal gilt:

$$\mathbb{E}_{t-1}(R_t^c) = \mathbb{E}_t(R_t^c) = \mu \quad \text{für alle } t$$

$\mathbb{E}_{t-1}(R_t^c)$ ist der bedingte Erwartungswert der Rendite zum Zeitpunkt t , gegeben die Prozessvergangenheit bis zum Zeitpunkt $t - 1$. Abbildung 3.2. veranschaulicht die kontinuierliche DAX-Rendite und ihre Schwankung um den Mittelwert. Mit $\varepsilon_t = R_t^c - \mathbb{E}_{t-1}(R_t^c)$ kann die Zufallsbewegung der Störgröße ε_t als Renditeüberraschung interpretiert werden. Die auch als Marktschock oder als Innovation bezeichnete Größe beschreibt die Abweichung der tatsächlichen Rendite von ihrem bedingten Erwartungswert, der auf Basis der Informationen zum Zeitpunkt $t - 1$ formuliert wird. Insofern kommt es aufgrund neuer, unerwarteter Informationen zwischen $t - 1$ und t zum Marktschock.

Einheitswurzeltest. Der Einheitswurzel Test ermöglicht die statistische Untersuchung der Stationarität einer Zeitreihe. Ein stochastischer Prozess, der eine Ein-

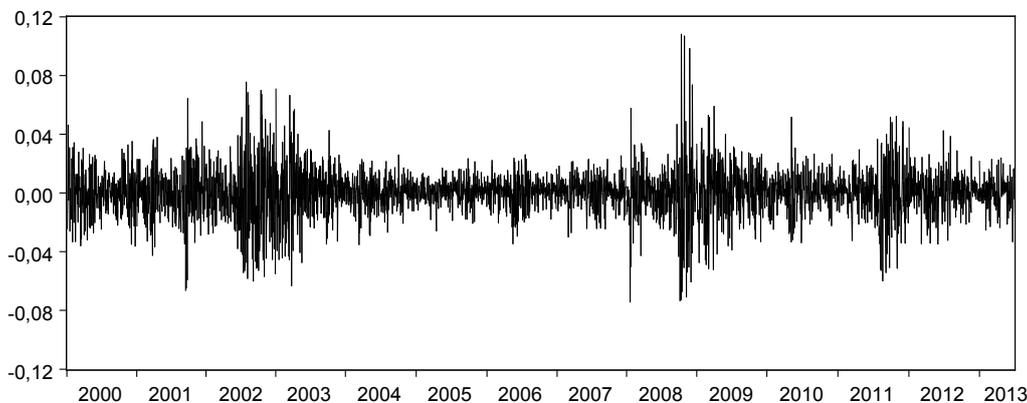


Abbildung 3.2. Kontinuierliche DAX-Rendite

heitswurzel aufweist, gilt als nicht-stationär, lässt sich aber durch einmalige Differenzenbildung in einen stationären Prozess umformen. Man sagt der Prozess ist integriert von der Ordnung 1. Für den Dickey-Fuller Test wird die Nullhypothese, dass die Zeitreihe eine Einheitswurzel enthält ($\phi = 1$), gegen die Alternative, dass die Zeitreihe stationär ist ($\phi < 1$), zur folgenden Regressionsgleichung (mit einer Konstanten, aber ohne Trend) getestet:

$$R_t^c = \mu + \phi R_{t-1}^c + \varepsilon_t$$

In der Regel wird jedoch so verfahren, dass R_{t-1}^c auf beiden Seiten subtrahiert und die Nullhypothese der Nicht-Stationarität ($\alpha = 0$) gegen die Alternative ($\alpha < 0$) zur modifizierten Regressionsgleichung getestet wird:

$$\Delta R_t^c = R_t^c - R_{t-1}^c = \mu + (\phi - 1)R_{t-1}^c + \varepsilon_t = \mu + \alpha R_{t-1}^c + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Teststatistik $t = \hat{\alpha} / \sqrt{\text{Var}(\hat{\alpha})}$ betragsmäßig größer als der von Dickey und Fuller vorgeschlagene kritische Wert zu einem bestimmten Signifikanzniveau ist. Die simulierten kritischen Werte werden herangezogen, da die Teststatistik unter der Nullhypothese der Nicht-Stationarität keiner Studentischen t-Verteilung folgt. Die Details zur Monte Carlo Simulation und eine vollständige Tabelle aller kritischen Werte finden sich bei Dickey (1976).

Augmented-Dickey-Fuller Test. Für die DAX-Rendite im CMM wird der Augmented-Dickey-Fuller (ADF) Test verwendet. Er stellt insofern eine Erweite-

rung zum Dickey-Fuller Test dar, als potenzielle Korrelationen höherer Ordnungen in die Regressionsgleichung durch die Aufnahme k verzögerter Differenzterme einfließen können. Somit ist der ADF Test imstande, die Annahme des White Noise Prozesses ε_t zu garantieren, welche unter Missachtung potenzieller Korrelationen höherer Ordnungen verletzt werden würde. Das Schwarz Informationskriterium zur Bestimmung der Spezifikation von k legt jedoch nahe, keine weiteren Differenzterme aufzunehmen ($k = 0$), sodass der ADF-Test effektiv dem gewöhnlichen Dickey-Fuller Test zur Gleichung (3.3) entspricht. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind nur elementare Zusammenhänge angeführt, sodass für eine ausführliche Darstellung auf Dickey und Fuller (1979) beziehungsweise auf Said und Dickey (1984) verwiesen sei. Tabelle 3.1. zeigt die Teststatistik und die dazugehörigen kritischen Werte. Die Nullhypothese kann im Beispiel für alle Signifikanzniveaus abgelehnt werden, da die Teststatistik betragsmäßig größer als der jeweilige kritische Wert ist. Die Zeitreihe der Rendite im CMM ist stationär.

Tabelle 3.1. Augmented-Dickey-Fuller Test für die Zeitreihe der DAX-Rendite

		t-Statistik	p -Wert
Augmented-Dickey-Fuller Teststatistik		-59,5912	0,0001
Kritische Werte	1% Level	-3,4321	
	5% Level	-2,8622	
	10% Level	-2,5672	

Stilisierte Fakten. Die bisherige Diskussion zur Random Walk Hypothese offenbart, dass eine Annahme von zentraler Bedeutung ist. Es wird unterstellt, dass die kontinuierliche Rendite identisch und unabhängig normalverteilt ist, kurz: $R_t^c \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$. Die Normalverteilungsannahme und die Annahme der Unabhängigkeit der Renditen werden jedoch durch die Empirie *nicht* gestützt. Diesen Umstand formuliert Mandelbrot 1963 in Form der sogenannten stilisierten Fakten, die empirisch fundierte Eigenschaften der Rendite darstellen. Im Folgenden wird auf die stilisierten Fakten eingegangen.

3.2 Verteilung der kontinuierlichen Rendite

Auf zwei Unzulänglichkeiten der Normalverteilung für die Beschreibung der Renditeverteilung macht Mandelbrot aufmerksam: „The tails of the distributions of price

changes are in fact extraordinary long“ (Mandelbrot 1963, S. 395). „The empirical distributions of price changes are usually too ‘peaked’ to be relative to samples from Gaussian populations“ (Mandelbrot 1963, S. 394). Mandelbrot beschreibt also eine leptokurtische Verteilung mit einer aus der empirischen Renditeverteilung geschätzten Kurtosis, die deutlich größer als drei ist.

3.2.1 Defizite der Normalverteilungsannahme der Rendite

Kurtosis und Schiefe liefern eine erste deskriptive Einschätzung über die Form der Verteilung und lassen auf eine Abweichung zur Normalverteilung schließen. Die Schiefe S beschreibt die Abweichung zu einer symmetrischen Verteilung und die Kurtosis κ misst die Wahrscheinlichkeitsmasse an den Flanken der Verteilung und wie spitz die Dichte um den Erwartungswert herum verläuft. Formal gilt:

$$S = \frac{E((R_t^c - \mu)^3)}{\sigma^3}, \quad \kappa = \frac{E((R_t^c - \mu)^4)}{\sigma^4}$$

Die Normalverteilung ist symmetrisch ($S = 0$) und weist eine mesokurtische Verteilung auf ($\kappa = 3$). Gelegentlich spricht man von dem Exzess oder der Überkurtosis und meint die Abweichung von der Kurtosis der Normalverteilung ($\kappa - 3 = 0$). Abbildung 3.3. veranschaulicht die Annäherung der Normalverteilung an die Häufigkeitsverteilung der DAX-Tagesrendite. Tatsächlich ist die Kurtosis deutlich größer als drei und die Verteilung somit leptokurtisch. Grafisch macht sich das an der spitzeren Verteilung und an den Ausschlägen in den Flanken der Verteilung bemerkbar. Die Ansammlung einer größeren Wahrscheinlichkeitsmasse an den Rändern der Verteilung wird als Fat Tail Problematik bezeichnet. Der positive Wert der Schiefe deutet auf eine leichte Rechtsschiefe.

Jarque-Bera Test. Die statistische Überprüfung, ob eine Verteilung normalverteilt ist, ist mit Hilfe der Jarque-Bera Teststatistik von Jarque und Bera (1980) möglich. Sie misst die Abweichung der Schiefe und Kurtosis der zugrunde liegenden Datenreihe zur Normalverteilung und ist mit zwei Freiheitsgraden Chiquadratverteilt:

$$\text{Jarque-Bera} = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(\kappa - 3)^2}{4} \right) \sim \chi^2(2) \quad (3.4)$$

Getestet wird die Nullhypothese, dass eine Normalverteilung vorliegt ($S = 0$ und $\kappa - 3 = 0$). Auf dem 1% Signifikanzniveau ist die Teststatistik deutlich größer als der kritische Wert der Chiquadrat-Verteilung von 9,21. Die Nullhypothese, dass die

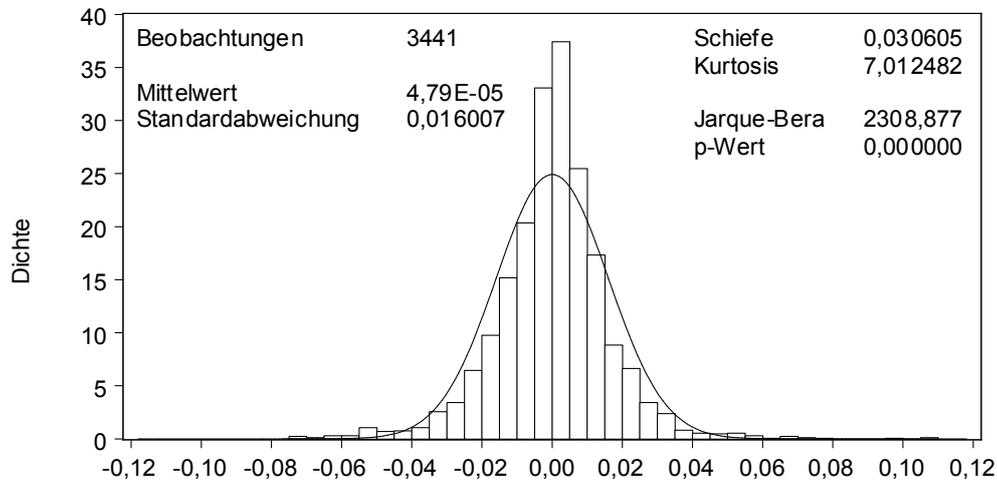


Abbildung 3.3. Empirische Verteilung der kontinuierlichen DAX-Rendite und die Annäherung durch eine Normalverteilung

Renditen normalverteilt sind, kann streng abgelehnt werden, was am p -Wert von 0,000000 ablesbar ist. Eine Vielzahl von empirischen Untersuchungen unterstreicht diese Beobachtung und lehnt die Normalverteilungshypothese ab. Mandelbrot empfiehlt daher die Klasse der stabilen Paretoverteilungen, um die Defizite der Normalverteilung zu beheben.

3.2.2 Die Klasse der stabilen Paretoverteilung

Die stabile Paretoverteilung wird üblicherweise durch ihre charakteristische Funktion $\varphi(t)$ wiedergegeben:

$$\varphi(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} \exp \left[i\delta t - \gamma |t|^\alpha \left(1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \exp \left[i\delta t - \gamma |t| \left(1 + i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot \frac{2}{\pi} \ln |t| \right) \right] & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

Für α und β gelten die Restriktionen: $0 < \alpha \leq 2$ und $-1 \leq \beta \leq 1$. Durch die vier Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ weist die stabile Paretoverteilung eine herausragende Kalibrierungseigenschaft auf, sodass sich Fat Tails und Schiefe auf diese Weise sehr gut modellieren lassen. Der charakteristische Exponent α bestimmt die Kurtosis der Verteilung. Je kleiner α ist, desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse befindet sich an den Rändern der Verteilung. Die Schiefe der Verteilung wird durch β bestimmt. Für $\beta = 0$ ist die Verteilung symmetrisch, für positive Werte ist die Verteilung linkssteil

und rechtschief, für negative Werte ist sie rechtssteil und linksschief. Der Skalierungsparameter γ und der Lageparameter δ legen die letzten Eigenschaften der Verteilung fest. Für $\alpha > 1$ entspricht δ dem Mittelwert der Verteilung μ . Die Normalverteilung stellt einen Spezialfall der übergeordneten Klasse der stabilen Verteilung dar. Für die Normalverteilung gilt:

$$\varphi(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \text{ mit } \alpha = 2, \beta = 0, \gamma = \frac{\sigma^2}{2}, \delta = \mu$$

Mit Hilfe einer inversen Fourier Transformation lässt sich die charakteristische Funktion der Normalverteilung in eine Dichtefunktion umwandeln:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-ixt} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Insofern ist die stabile Paretoverteilung eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes. Ebenso wie die Normalverteilung ist ihre Verallgemeinerung summenstabil, was bedeutet, dass die Summe zweier unabhängig paretoverteilter Zufallsvariablen mit gleichem Parameter α wieder paretoverteilt ist. Somit können Renditen aus kurzen Beobachtungszeiträumen auf längere Zeiträume aggregiert werden.

Implementation stabiler Verteilung. Die Verteilung hat zwei Nachteile, die ihren Einsatz lange Zeit erschwert haben. Zum einen ist die Verteilung mit Ausnahme einiger Spezialfälle nicht in einer geschlossenen Form in Form einer Dichtefunktion darstellbar. Dieses Problem konnte behoben werden, indem die Beziehung zwischen charakteristischer Funktion und Dichtefunktion zur Geltung kommt. Verwiesen sei an dieser Stelle auf Menn und Rachev (2006). Zum anderen weist die Verteilung für $\alpha < 2$, also mit Ausnahme der Normalverteilung, eine unendliche Varianz auf. Eine Lösung dieses Problems liegt in der Einführung von gestutzten Verteilungen. Die Paretoverteilung wird derart gestutzt, dass man Verteilungen mit endlicher Varianz und glatter Dichte erhält. Die Familie der Smoothly Truncated Stable Distributions (STS) ist dazu imstande und auch hier sei auf Menn und Rachev (2009) verwiesen. Die STS-Verteilung wird derart modelliert, dass die Ränder der Paretoverteilung durch die Flanken der Normalverteilungen ersetzt werden. Die Verteilung setzt sich dementsprechend aus drei Abschnitten zusammen. Mit Hilfe einer Optimierung werden die Abschneidepunkte und die Parameter der Normalverteilungen bestimmt, sodass sich eine Verteilung ergibt, die viel Wahrscheinlichkeitsmasse an den Enden der

Verteilung aufweist. Als weiterführende Literatur zur Fat Tail Problematik und zu stabilen Verteilungen muss Rachev (2003) erwähnt werden, der die bedeutendsten Artikel auf diesem Gebiet in einem Buch zusammengestellt hat. In der vorliegenden Arbeit wird allerdings an der Approximation durch die Normalverteilung festgehalten, da die Einführung einer verallgemeinerten stabilen Verteilung den Umfang klar sprengen würde. In Kapitel 4 wird gezeigt, dass mit Einführung einer bedingten Varianz durch die GARCH-Modelle, die Flanken eine geringere Kurtosis aufweisen und die Fat Tail Problematik somit abgeschwächt wird.

3.3 Abhängigkeitsstruktur der kontinuierlichen Rendite

Die Annahme unabhängiger Renditen wird mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion (ACF) untersucht. Die Autokorrelation $\rho_{R^c}(k)$ beschreibt die Korrelation der Rendite mit sich selbst. Etwas präziser formuliert, bedeutet dies, dass die Korrelation zwischen der Rendite zum Zeitpunkt t und ihrer Realisation zu einem vorigen Zeitpunkt s bestimmt wird. Die Autokorrelationsfunktion ist somit abhängig vom zeitlichen Abstand k . Auf diese Weise lassen sich Muster innerhalb der Zeitreihe identifizieren und es kann auf eine Abhängigkeitsstruktur geschlossen werden. Formal gilt:

$$\rho_{R^c}(k) = \text{Corr}(R_t^c, R_s^c) = \frac{\text{Cov}(R_t^c, R_s^c)}{\sqrt{\text{Var}(R_t^c)\text{Var}(R_s^c)}}, \quad \text{wobei } k = t - s$$

Eine Aussage über die statistische Signifikanz der Autokorrelationen erlaubt das Bartlettsche Konfidenzintervall. Für das 5% Signifikanzniveau berechnen sich die Konfidenzbänder zu $\pm 1,96/\sqrt{T}$ und klassifizieren diejenigen Autokorrelationen als signifikant, die außerhalb des Konfidenzintervalls liegen. In Abbildung 3.4. sind die Konfidenzbänder durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

3.3.1 Nichtlinearität der Rendite

Die ACF für die kontinuierliche Rendite in Abbildung 3.4. zeigt lediglich signifikante Werte für einige wenige Zeitabstände, was auf das Ausbleiben einer signifikanten linearen Korrelation schließen lässt. Der statistische Test nach Ljung und Box (1978)

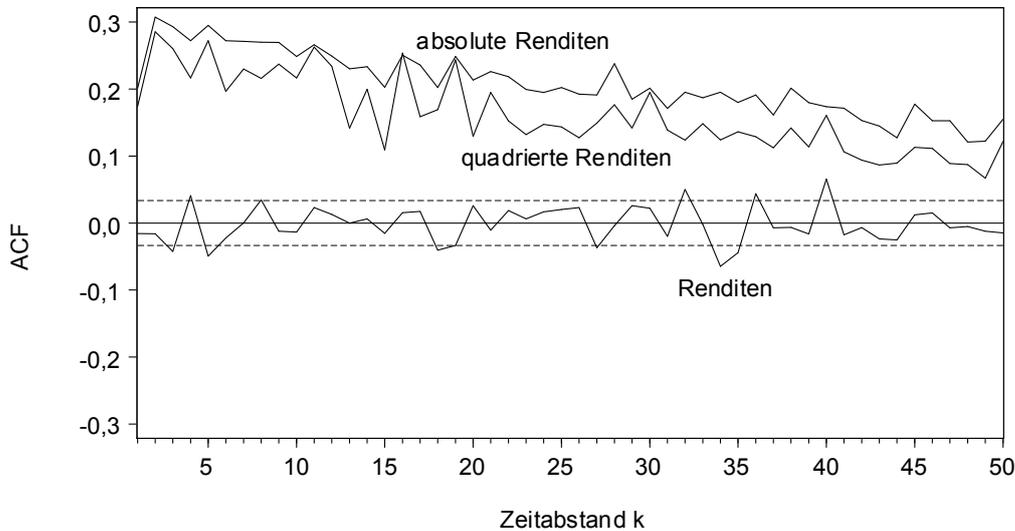


Abbildung 3.4. Autokorrelationsfunktion für transformierte DAX-Renditen

ist ein formaler Test zur Aufdeckung von Nichtlinearitäten und kann als Test, der die gemeinsame Insignifikanz der einzelnen Autokorrelationen testet, interpretiert werden. Es wird die Ljung-Box Teststatistik zur Ordnung m berechnet, um die Nullhypothese zu testen, dass keine Autokorrelationen bis zu dieser Ordnung vorhanden sind. Mit der Anzahl der Beobachtungen T gilt:

$$Q(m) = T(T + 2) \sum_{k=1}^m \frac{(\hat{\rho}_{R^c}(k))^2}{T - k} \sim \chi^2(m) \quad (3.5)$$

In Tabelle 3.2. werden die Teststatistik und der dazugehörige p -Wert bis zur fünften Ordnung wiedergegeben. Anhand der p -Werte lässt sich eine Ablehnung der Nullhypothese auf dem Signifikanzniveau von 5% sofort ablesen, sofern der p -Wert kleiner als 0,05 ist. Für die nicht transformierte Rendite wird die Nullhypothese der Nichtlinearität ab der dritten Ordnung abgelehnt, da die Autokorrelationen für $k = 3$ das Konfidenzband überschreitet und somit als signifikant gilt. Dementsprechend wird die Teststatistik durch diesen Wert „verwässert“ und die Nullhypothese kann für alle nachfolgenden Ordnungen abgelehnt werden. Für $m = 1, 2$ liegt eindeutig Nichtlinearität vor. Intuitiv sind fehlende lineare Abhängigkeiten einleuchtend. Bestünde eine lineare Abhängigkeit zwischen den Renditen, wäre stochastische Arbitrage durch das Ausnutzen der daraus resultierenden Kursvorhersagen möglich,

sodass risikoloser Gewinn realisiert werden könnte. Eine Folge der Nichtlinearität ist, dass lineare Modelle wie beispielsweise die ARMA-Familie die Abhängigkeitsstruktur nicht adäquat modellieren können und auf nichtlineare Modelltypen zurückgegriffen werden muss. Bei zeitlicher Aggregation können durchaus lineare Abhän-

Tabelle 3.2. Ljung-Box Test für transformierte DAX-Renditen

m	R_t^c		$ R_t^c $		$(R_t^c)^2$	
	Q(m)	p -Wert	Q(m)	p -Wert	Q(m)	p -Wert
1	0,8651	0,3253	140,1027	0,0000	104,5350	0,0000
2	1,7634	0,4141	465,7311	0,0000	385,6552	0,0000
3	8,0050	0,0459	762,1128	0,0000	619,5250	0,0000
4	13,7673	0,0081	1017,3258	0,0000	781,2134	0,0000
5	22,1380	0,0005	1317,1987	0,0000	1036,4291	0,0000

gigkeiten aufkommen. Betrachtet man Wochen- oder sogar Monatsrenditen steigen die Zeitabstände k , die Anzahl der Beobachtungen sinkt allerdings. Aus dieser inversen Beziehung folgt jedoch, dass eine statistische Aussage für aggregierte Renditen weniger beweiskräftig ist und von Stichprobe zu Stichprobe unterschiedlich ausfallen kann.

3.3.2 Volatilitätsclustering und Abhängigkeit transformierter Renditen

Die Nichtlinearität der Wertpapierrendite mag zwar die Random Walk Hypothese auf den ersten Blick empirisch stützen. Jedoch muss für stochastische Unabhängigkeit gelten, dass auch beliebige nichtlineare Funktionen der Rendite keine Interdependenzen aufweisen. Ding, Granger und Engle (1993) betrachten aus diesem Grund die Transformation:

$$R_t^c = |R_t^c|^d, \quad \text{wobei } d > 0$$

Sie kommen zu dem Schluss und auch in Abbildung 3.4. ist deutlich zu sehen, dass absolute und quadrierte Renditen signifikante Autokorrelationen für alle Zeitabstände aufweisen. Die p -Werte zur Ljung-Box Teststatistik in Tabelle 3.2. bestätigen die Abhängigkeit der absoluten und quadrierten Renditen, da sie eine starke Ablehnung der Nullhypothese bereits für die erste Ordnung nahe legen. Besonders auffällig ist die Persistenz der Autokorrelation, da sie für größere Zeitabstände k nur

langsam abnimmt. Dieses Phänomen wird als Volatilitätsclustering bezeichnet: Auf betragsmäßig große Renditen folgen oft betragsmäßig große Renditen. Man spricht in diesem Zusammenhang von volatilen Phasen. In ruhigen Phasen folgen kleine Preisänderungen tendenziell auf kleine Preisänderungen. Mandelbrot beschreibt die empirische Eigenschaft wie folgt: „Large changes tend to be followed by large changes - of either sign - and small changes tend to be followed by small changes“ (Mandelbrot 1963, S. 418). Die Volatilitätscluster und damit die unterschiedlich volatilen Phasen sind in Abbildung 3.2. deutlich zu sehen. Preisänderungen sind das Resultat von Informationen, die am Markt eintreffen. Intuitiv lässt sich das Volatilitätsclustering so erklären, dass Informationen nicht gleichmäßig im Zeitverlauf sondern eher infolge besonderer Ereignisse verstärkt innerhalb kurzer Zeiträume gebündelt auftreten. Dementsprechend entstehen ruhige und volatile Phasen. Aus der Abhängigkeit nichtlinearer Transformationen der Rendite folgt, dass die Annahme einer identisch und unabhängig verteilten Rendite empirisch nicht begründet ist. Renditen weisen untereinander stochastische Abhängigkeiten auf.

3.4 Implikation der stilisierten Fakten für die Modellierung der Volatilität

Aufgrund der Nichtlinearität der Rendite kann die Modellierung der Volatilität auf Basis der Rendite im CMM in Gleichung (3.2) erfolgen. Die Motivation hierfür ist, einen stationären Prozess aufgrund der Abwesenheit linearer Abhängigkeiten heranzuziehen. Das Phänomen des Volatilitätsclustering kann in der Weise interpretiert werden, dass die Volatilität der Rendite korreliert ist. Diese Eigenschaft erfordert eine Modifikation des Modells. Um das Volatilitätsclustering zu reflektieren, wird der Prozess ε_t , der nichts anderes als die zentrierte Rendite repräsentiert, in zwei Komponenten zerlegt. Die Zerlegung erfolgt in die standardnormalverteilte Größe v_t , die Weißes Rauschen darstellt, und in die bedingte Volatilität σ_t der Rendite. Letztere ist nicht konstant, das heißt sie ermöglicht die Modellierung einer *im Zeitverlauf variierenden Volatilität*, die die Informationen der Prozessvergangenheit berücksichtigt. In Kapitel 3.2.2 ist bereits erwähnt worden, dass die Normalverteilungsannahme

beibehalten wird. Folglich nimmt das Constant Mean Modell folgende Form an:

$$\begin{aligned}R_t^c &= \mu + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= v_t \sigma_t \quad \text{mit } v_t \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{N}(0, 1)\end{aligned}\tag{3.6}$$

Es folgt, dass für die kontinuierliche Rendite eine bedingte Normalverteilung existiert. Gegeben die Prozessvergangenheit bis zum Zeitpunkt $t - 1$, ist sie zum Zeitpunkt t mit Erwartungswert μ und Varianz σ_t^2 normalverteilt, kurz: $R_{t|t-1}^c \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma_t^2)$. Die bedingte Verteilung beinhaltet dementsprechend eine im Zeitverlauf variierende Varianz. Ihre Modellierung ist Gegenstand des nächsten Kapitels.

4 Modellierung der bedingten Varianz

In diesem Kapitel wird zunächst auf den Begriff der bedingten Varianz in Abschnitt 4.1 eingegangen. Anschließend werden Ansätze, die eine Modellierung der bedingten Varianz ermöglichen, vorgestellt. Von herausragender Bedeutung sind die parametrischen Modelle mit generalisierter autoregressiver bedingter Heteroskedastie (GARCH). Auf die GARCH Familie wird aus diesem Grund ausführlich eingegangen. In der Praxis sind auch deskriptive Ansätze zur Modellierung einer zeit-variierenden Varianz verbreitet, da sie den Vorteil haben, dass unbekannte Parameter nicht geschätzt werden müssen oder die Festlegung der Parameter leicht durchführbar ist. Eine Betrachtung der deskriptiven Verfahren findet daher ebenfalls statt. Den Modellen ist die Einteilung in univariate oder multivariate Ansätze übergeordnet. Univariate Modelle werden in Kapitel 4.2 und multivariate Modelle in Kapitel 4.3 vorgestellt.

4.1 Definition der bedingten Varianz

In Kapitel 3.4 ist deutlich geworden, dass das Volatilitätsclustering der Rendite eine Dekomposition des Prozesses ε_t in Gleichung (3.6) erfordert. Die Begründung für die Zerlegung und die Aufnahme der Volatilität σ_t in das CMM liegt in der Absicht, die Prozessvergangenheit zu berücksichtigen. Eben diese Notwendigkeit, den aktuellen Kenntnisstand zugrunde zu legen und die Volatilität auf dieser Basis zu bestimmen, wird durch die bedingten Momente realisiert. Unter Hinzunahme der Prozessvergangenheit bis zum Zeitpunkt $t - 1$ wird die bedingte Varianz der Rendite R_t^c bestimmt. Es gilt:

$$\text{Var}_{t-1}(R_t^c) = \text{E}_{t-1}((R_t^c - \mu)^2) = \text{E}_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \text{E}_{t-1}(v_t^2 \sigma_t^2) = \sigma_t^2 \underbrace{\text{E}_{t-1}(v_t^2)}_{=1} = \sigma_t^2 \quad (4.1)$$

Entscheidend ist die Annahme der standardnormalverteilten Größe v_t , deren Erwartungswert folglich null und deren Varianz eins ist. $\text{E}_{t-1}(v_t^2)$ bezeichnet nicht anderes

als die bedingte Varianz des Residuums v_t , da:

$$\text{Var}_{t-1}(v_t) = E_{t-1}(v_t^2) - \underbrace{[E_{t-1}(v_t)]^2}_{=0} = E_{t-1}(v_t^2)$$

Zudem ist für Herleitung (4.1) darauf hinzuweisen, dass σ_t^2 , gegeben die Prozessvergangenheit bis zum Zeitpunkt $t - 1$, keine Zufallsvariable mehr darstellt, sondern „messbar“ ist und somit aus dem bedingten Erwartungswert herausgezogen werden kann. Zusammenfassend kann die bedingte Varianz der Rendite σ_t^2 definitionsgemäß nicht konstant sein, sie variiert im Zeitverlauf.

Unbedingte Momente. Nicht weniger wichtig sind die unbedingten Momente des Prozesses ε_t . Es lässt sich zeigen, dass ε_t für einen stationären Prozess Weißes Rauschen ist. Gemäß dem Gesetz der iterierten Erwartungen kann der unbedingte Erwartungswert als Erwartungswert der bedingten Erwartungen interpretiert werden. Für die Momente gilt:

$$E(\varepsilon_t) = E(E_{t-1}(\varepsilon_t)) = E(E_{t-1}(v_t\sigma_t)) = E(\sigma_t E_{t-1}(v_t)) = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = E(E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k})) = E(\varepsilon_{t-k} E_{t-1}(\varepsilon_t)) = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) - [E(\varepsilon_t)]^2 = \sigma^2 \quad (4.4)$$

ε_t ist allerdings nicht unabhängig verteilt, da eine Beziehung zwischen den bedingten Varianzen besteht. Die unbedingte Varianz σ^2 ist abhängig vom Ansatz für die Modellierung der bedingten Varianz, worauf im Verlauf des Kapitels eingegangen wird. Ihre Konstanz lässt eine wichtige Interpretation zu. Die unbedingte Varianz von ε_t und somit die unbedingte Varianz der Rendite ($\text{Var}(R_t^c) = E((R_t^c - \mu)^2) = E(\varepsilon_t^2)$) kann als Langzeitvarianz der betrachteten Zeitreihe gedeutet werden. Idealerweise ist die bedingte Varianz ein Prozess um dieses Langzeitmittel herum. Die obere Feststellung ist für die parametrischen Ansätze von Bedeutung, da deutlich werden wird, dass die deskriptiven Konzepte keine Langzeitvarianz berücksichtigen.

Modellierung der bedingten Varianz. Die Ansätze, die im Folgenden vorgestellt werden, modellieren die *bedingte Varianz* σ_t^2 . Es sei erwähnt, dass der Schwerpunkt dieser Modelle nicht darin liegt, einen Rückschluss auf den Verlauf der Rendite oder sogar des Kurses zu ziehen, sondern darin, die Entwicklung der bedingten Varianz für die zugrunde liegende Renditezeitreihe möglichst genau zu modellieren. Ein gutes Varianz- beziehungsweise Volatilitätsmodell hat also zum Ziel, die Struk-

tur der zeit-variierenden Varianz aufzugreifen, um auf dieser Basis eine zuverlässige Prognose zu erstellen.

4.2 Univariate Ansätze zur Modellierung der bedingten Varianz

Univariate Methoden drücken im statistischen Sinn aus, dass die zu modellierende Größe eindimensional ist. Da die Modellierung der Varianz auf Basis der Renditen erfolgt, liegt den Modellen lediglich *eine* Renditezeitreihe zugrunde. Für die univariaten Ansätze wird das Constant Mean Modell, wie es in Kapitel 3.4 definiert worden ist, angenommen. Formal wird das Modell daher nicht immer wieder aufgeführt und es erfolgt lediglich die Spezifikation der bedingten Varianz.

4.2.1 Gleitende Varianzen

Einen ersten deskriptiven Ansatz liefert das Konzept der gleitenden Varianzen. Basierend auf dem Maximum Likelihood Schätzer für die Varianz ergibt sich die bedingte Varianz zum Zeitpunkt t als gewichtete Summe der letzten n Beobachtungen für die Quadrate der zentrierten Rendite. Das Gewichtungsschema ist konstant und ergibt sich aus der Anzahl der einfließenden Beobachtungen. In der Regel wird n mit 30 oder 250 angesetzt. Es ergibt sich:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{t-i}^c - \hat{\mu}_t)^2 \quad \text{mit} \quad \hat{\mu}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{t-i}^c \quad (4.5)$$

$$t = n + 1, n + 2, \dots; \quad i = 1, \dots, n$$

Die Nachteile dieser Methode sind schnell ersichtlich. Einerseits wird nur ein Teil der Stichprobeninformation herangezogen und die Anzahl der Beobachtungen willkürlich festgelegt. Je mehr Werte in die Berechnung eingehen, desto glatter ist die Kurve der Volatilität im Zeitverlauf. Andererseits kommt durch die konstanten Gewichte jeder Beobachtung das gleiche Maß an Bedeutung zu. Intuitiv macht es mehr Sinn eine Beobachtung weniger zu gewichten, je weiter sie in der Vergangenheit liegt. Dieser Aspekt wird durch die Methode der exponentiell geglätteten Varianzen aufgegriffen.

4.2.2 EWMA

Das Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) Modell basiert auf der gleitenden Varianz in Gleichung (4.5). Um die fortschreitende Prozessvergangenheit weniger stark zu gewichten, werden die Gewichtungsfaktoren so gesetzt, dass sie exponentiell mit der Rate λ abnehmen. Man spricht auch vom exponentiellen Glätten. Mit $\alpha_i = 1/n$ des Gewichtungsfaktors aus Gleichung (4.5) folgt:

$$\alpha_{i+1} = \lambda\alpha_i, \quad 0 < \lambda < 1$$

Für die Herleitung der Varianz im EWMA Modell sind zwei Zwischenschritte nötig. Erstens wird aus der notwendigen Bedingung, dass die Gewichtungsfaktoren in der Summe eins ergeben müssen, eine geometrische Reihe formuliert, um letztere als Bruch darzustellen. Es gilt:

$$\text{Wegen } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \text{ gilt } \alpha_1 \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_1\lambda^{n-1} = 1$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt daher unter Verwendung der geometrischen Reihe:

$$\alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = 1 - \lambda \quad (4.6)$$

Zweitens soll die gleitende Varianz für $i \geq 2$ anders notiert werden. Für $n \rightarrow \infty$ gilt, da $\alpha_i \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \alpha_i (R_{t-i}^c - \hat{\mu})^2 &= \lambda \sum_{i=2}^n \alpha_{i-1} (R_{t-i}^c - \hat{\mu})^2 = \lambda \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (R_{t-i-1}^c - \hat{\mu})^2 \\ &\approx \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i (R_{t-i-1}^c - \hat{\mu})^2 = \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Somit folgt aus der gleitenden Varianz in Gleichung (4.5) mit den Ausdrücken (4.6) und (4.7) für die exponentiell geglättete Varianz:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (R_{t-i}^c - \hat{\mu})^2 = \alpha_1 (R_{t-1}^c - \hat{\mu})^2 + \sum_{i=2}^n \alpha_i (R_{t-i}^c - \hat{\mu})^2 \\
&= (1 - \lambda) (R_{t-1}^c - \hat{\mu})^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 \quad \text{mit} \quad \hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_t^c \\
&= (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Prozessgedächtnis. Die bedingte Varianz kann als gewichtete Summe der Varianzschätzung $\hat{\sigma}_{t-1}^2$ und des quadrierten Marktschocks ε_{t-1}^2 der Vorperiode interpretiert werden. Für eine praktische Anwendung ist eine Initialisierung notwendig, sodass in der Regel $\hat{\sigma}_1^2 = (R_1^c - \hat{\mu})^2$ für die weitere Varianzmodellierung ab $t = 2$ gewählt wird. Ein wesentlicher Unterschied ist, dass sie die gesamte Prozessvergangenheit und nicht nur die letzten n Beobachtungen berücksichtigt. Aus diesem Grund ist, im Unterschied zur gleitenden Varianz, in der Herleitung und auch in der Darstellung der bedingten Varianz der Mittelwert $\hat{\mu}$ konstant, da er sich aus der gesamten Anzahl der Renditebeobachtungen berechnet. Die Berücksichtigung der gesamten Historie und die exponentielle Abnahme werden durch rekursives Einsetzen der bedingten Varianz verdeutlicht:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_t^2 &= (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-1}^2 \\
&= (1 - \lambda) \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda [(1 - \lambda) \varepsilon_{t-2}^2 + \lambda \hat{\sigma}_{t-2}^2] \\
&= (1 - \lambda) (\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda \varepsilon_{t-2}^2) + \lambda^2 \hat{\sigma}_{t-2}^2 \\
&= \dots = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n \lambda^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2 + \lambda^n \hat{\sigma}_{t-n}^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

In Gleichung (4.9) ist zu sehen, dass sowohl der bedingten Varianz als auch dem Marktschock weniger Gewicht beigemessen wird, je weiter die Beobachtungen zurückliegen. Ihre Bedeutung für die aktuelle Varianzschätzung nimmt mit der Rate λ exponentiell ab. Außerdem wird deutlich, dass die gesamte Prozessvergangenheit berücksichtigt wird. Für $n \rightarrow \infty$ gilt nämlich:

$$\hat{\sigma}_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \varepsilon_{t-i}^2$$

Mit $\alpha_i = 1/n = (1 - \lambda)\lambda^{i-1}$ stimmt also der Ausdruck mit Gleichung (4.5) überein. Die Anzahl der Beobachtungen ist jedoch „unendlich“.

Persistenz. Aus Gleichung (4.8) folgt unmittelbar, dass der Glättungsparameter λ einen Einfluss auf die Persistenz der exponentiell geglätteten Varianz $\hat{\sigma}_t^2$ hat. Große Werte von λ bewirken eine größere Glättung der Varianzbewegung, da der Varianzschätzung der Vorperiode $\hat{\sigma}_{t-1}^2$ ein hohes Gewicht zukommt. Im Umkehrschluss wird der Marktschock ε_{t-1}^2 kaum gewichtet, sodass die tägliche Neubewertung sehr langsam auf neue Informationen reagiert. Die bedingte Varianz ist persistent. Für kleine Werte von λ kann sie hingegen stark schwanken, da Markteinflüsse sich sehr schnell widerspiegeln können und die bedingte Varianz somit weniger träge ist.

RiskMetrics™. Das EWMA Modell findet Anwendung in der von J.P. Morgan kreierten RiskMetrics™ Datenbank für die Aktualisierung der täglichen Volatilitätsschätzung. Zur Bestimmung des Glätteparameters λ existieren mehrere Ansätze. Eine Variante ist das von J.P. Morgan (1996, S. 98) verwendete Root Mean Squared Error (RMSE) Kriterium. Für verschiedene λ wird die geschätzte Varianz $\hat{\sigma}_t^2(\lambda)$ mit $(R_t^c - \hat{\mu})^2$ verglichen, um den Wert zu wählen, der RMSE minimiert:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T ((R_t^c - \hat{\mu}_{R^c})^2 - \hat{\sigma}_{R^c,t}^2(\lambda))^2} \stackrel{!}{=} \min_{0 < \lambda < 1} \quad (4.10)$$

J.P. Morgan verwendet für Tagesdaten den Glättungsparameter $\lambda = 0,94$. Dieser ist das gewichtete Mittel der optimalen, individuellen Werte, die nach dem RMSE Kriterium in Gleichung (4.10) bestimmt worden sind. Außerdem wird im RiskMetrics™ Ansatz der Mittelwert μ gleich null gesetzt.

Kritik. Aufgrund der vorgegebenen Parameter beziehungsweise ihrer einfachen Bestimmung fällt das EWMA Modell in die Kategorie des deskriptiven Ansatzes. Die deskriptiven Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass die Varianzmodellierung sehr simpel ist. Zudem ist nur eine geringe Menge an Daten erforderlich. Speziell für das EWMA Modell werden lediglich die Rendite und die Varianzschätzung der Vorperiode benötigt. Ein Nachteil der deskriptiven Verfahren ist die fehlende Mittelwertrückkehr der bedingten Varianz. Empirisch gesehen tendiert sie jedoch dazu, sich auf lange Sicht einem Langezeitmittel zu nähern. Die Langzeitvarianz fließt bei den parametrischen Verfahren, die im Folgenden vorgestellt werden, in die Varianzschätzung ein.

4.2.3 ARCH

Das Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) Modell geht auf Engle (1982), der mit dem ARCH Prozess zeitveränderliche Inflationsrisiken abbildete, zurück. Seither bilden der Ansatz der autoregressiven bedingten Heteroskedastie und seine Verallgemeinerung (Kapitel 4.2.4) eine Familie der Zeitreihenmodelle, die für die Analyse von Finanzmarktdaten nicht mehr wegzudenken ist. ARCH Prozesse zeichnen sich dadurch aus, dass sie die stilisierten Fakten von Mandelbrot abbilden können. Zudem lässt sich das Zeitreihenmodell aufgrund seines parametrischen Charakters mit Hilfe statistischer Tests untersuchen.

Definition. Im Rahmen des CMM ist die bedingte Varianz eines ARCH(p) Prozesses definiert als:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t-i}^c - \mu)^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (4.11)$$

$$\omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \text{ für alle } i, \quad p > 0$$

Die bedingte Varianz ist abhängig von den quadrierten Marktschocks ε_{t-1}^2 der Vergangenheit. Die Ordnung p legt dabei die Anzahl der vergangenen Störgrößen, die in die Berechnung der Varianz zum Zeitpunkt t eingehen, fest. Auf den ersten Blick mag der ARCH Prozess mit dem Schätzer für die gleitende Varianz in Gleichung (4.5) für die Annahme, dass die Ordnung p der Anzahl der Beobachtungen n entspricht und $\omega = 0$, übereinstimmen. Ein wesentlicher Unterschied, der die Abgrenzung zum deskriptiven Verfahren verdeutlicht, besteht darin, dass bei der gleitenden Varianz die Gewichte a priori auf $1/n$ festgesetzt werden, während die Parameter des ARCH Modells ω und α_i mit ökonometrischen Methoden so bestimmt werden, dass das Modell die beste Anpassung an die Daten hat. ARCH Prozesse enthalten den Spezialfall der unabhängig und identisch verteilten Rendite. Für $\alpha_i = 0$ folgt, dass die Varianz der Rendite konstant ist, da $\text{Var}(R_t^c) = \sigma^2 = \omega$. Dementsprechend ermöglicht ein Signifikanztest für die Parameter α_i , festzustellen, ob eine zeitveränderliche bedingte Varianz überhaupt vorliegt.

Unbedingte Varianz. Für $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ sind ARCH Prozesse schwach stationär. Der Prozess der Störgröße ε_t hat also Erwartungswert, Kovarianz und Varianz gemäß (4.2) bis (4.4). Somit ist auch die Rendite schwach stationär. Die unbedingte Varianz

ergibt sich zu:

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \quad (4.12)$$

Aufbauend auf der Stationarität des ARCH Prozesses zeigen Higgins und Bera (1992) eine weitere Interpretation der bedingten Varianz. Nach Umformung von (4.12) lässt sich die bedingte Varianz auch folgendermaßen notieren:

$$\sigma_t^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \sigma^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad \text{mit} \quad \omega = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i\right) \sigma^2 \quad (4.13)$$

Sie lässt sich als gewichtetes Mittel aus Langzeitvarianz σ^2 und den quadrierten Marktschocks ε_{t-i}^2 interpretieren.

Leptokurtische Verteilung. Nachfolgend soll auf die stilisierten Fakten von Mandelbrot eingegangen werden. Es lässt sich zeigen, dass ein Prozess der ARCH Familie die gleiche oder eine größere Kurtosis als ein Prozess mit unabhängig und identisch normalverteilten Zufallsgrößen aufweist. Für das vierte zentrale Moment eines ARCH Prozesses gilt unter der Voraussetzung, dass es existiert:

$$\text{E}((R_t^c - \mu)^4) = \text{E}(\varepsilon_t^4) = \text{E}[\text{E}_{t-1}(v_t^4 \sigma_t^4)] = \text{E}[\sigma_t^4 \text{E}_{t-1}(v_t^4)] = 3\text{E}(\sigma_t^4) \quad (4.14)$$

Sofern eine konvexe Funktion g vorliegt, gilt laut der Jensenschen Ungleichung für jede Zufallsvariable X :

$$\text{E}(g(X)) \geq g(\text{E}(X))$$

Mit $X = \sigma_t^2$ und $g(X) = X^2$ folgt somit:

$$\text{E}(\sigma_t^4) \geq \text{E}(\sigma_t^2)^2 \quad (4.15)$$

Die Kurtosis ergibt sich mit (4.14) und aufgrund von (4.15) zu:

$$\kappa = \frac{\text{E}((R_t^c - \mu)^4)}{\sigma^4} = \frac{3\text{E}(\sigma_t^4)}{\text{E}(\sigma_t^2)^2} \geq 3$$

Ein ARCH Prozess ist im Allgemeinen somit in der Lage, die leptokurtische Verteilung der Rendite zu modellieren, da die Kurtosis gleich groß oder größer als die Kurtosis der Normalverteilung ist.

Volatilitätsclustering. Eine alternative Schreibweise verdeutlicht, dass ein ARCH(p) Prozess sich als AR(p) Prozess in den Quadraten schreiben lässt. So

mit wird das Volatilitätsclustering explizit modelliert. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass Volatilitätscluster das Resultat der stochastischen Abhängigkeit der Rendite aufgrund der Abhängigkeitsstruktur ihres quadrierten Prozesses ist. Aufgrund von $E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2$ kann der quadrierte Prozess ε_t^2 wie folgt notiert werden:

$$\varepsilon_t^2 = \sigma_t^2 + u_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + u_t \quad (4.16)$$

Der Prozess u_t stellt dabei Weißes Rauschen dar. Eine simple Transformation des quadrierten Prozesses führt zum selben Ergebnis:

$$\varepsilon_t^2 = v_t^2 \sigma_t^2 = \sigma_t^2 + \sigma_t^2 (v_t^2 - 1) = \sigma_t^2 + u_t \quad \text{mit} \quad u_t = \sigma_t^2 (v_t^2 - 1)$$

Für den quadrierten ARCH Prozess ε_t^2 lässt sich zeigen, dass er autokorreliert ist. Zusammenfassend werden also die stochastischen Abhängigkeiten mit ARCH Prozessen modelliert. Gleichung (4.16) verdeutlicht im Übrigen die Namensgebung des Prozesses. Es handelt sich um ein Konzept mit autoregressiver bedingter Heteroskedastie. Heteroskedastie beschreibt den Umstand, dass die Varianz im Zeitverlauf schwankt und somit Volatilitätscluster auftreten.

Prognose. Ein zentrales Anwendungsgebiet des ARCH Prozesses ist die Prognose der bedingten Varianz. ARCH Prozesse erlauben eine Prognose der bedingten Varianz für $t + k$ auf Basis der Informationsmenge zum Zeitpunkt t . Sie stellen somit eine wichtige Eigenschaft bereit, da sie die Prognose für längere Zeiträume erlauben. Im Kontrast dazu wird ein weiteres Defizit der deskriptiven Verfahren erkennbar, da sie lediglich eine Ein-Schritt Prognose zulassen. Die Konstruktion der prognostizierten Werte wird am Beispiel des ARCH(1) Prozesses verdeutlicht. Für die bedingte Varianz der Rendite gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}_t(R_{t+k}^c) &= \sigma_{t+k|t}^2 = E_t((R_{t+k}^c - \mu)^2) = E_t(\varepsilon_{t+k}^2) \\ &= E_t(v_{t+k}^2(\omega + \alpha \varepsilon_{t+k-1}^2)) \\ &= \omega + \alpha E_t(\varepsilon_{t+k-1}^2) \\ &= \omega + \alpha \sigma_{t+k-1|t}^2, \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

Zu beachten ist, dass für $k = 1$ die bedingte Varianz mit $\sigma_{t+1|t}^2 = \omega + \alpha \varepsilon_t^2$ bekannt ist. Die Prognose erfolgt somit für die darauf folgenden Zeitschritte. Mit dem

Startwert $\sigma_{t+1|t}^2$ lässt sich die Differenzgleichung lösen zu:

$$\sigma_{t+k|t}^2 = \omega \left(\frac{1 - \alpha^{k-1}}{1 - \alpha} \right) + \alpha^{k-1} \sigma_{t+1|t}^2, \quad k \geq 2$$

Wegen $0 \leq \alpha < 1$ gilt außerdem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{t+k|t}^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha} = \sigma^2$$

Die Prognose der bedingten Varianz nähert sich somit mit zunehmendem Prognosehorizont der unbedingten Varianz an. Je weiter die Prognose vom heutigen Zeitpunkt t liegt, desto näher befindet sie sich am Langzeitmittel. Basierend auf der ersten Schätzung der bedingten Varianz kann die Prognose für alle weiteren Zeitpunkte erfolgen.

Kritik. ARCH Prozesse weisen trotz ihrer idealen Eigenschaften zur Modellierung der bedingten Varianz ein großes Defizit bei der Parameterschätzung auf. Sobald ARCH Prozesse höherer Ordnung geschätzt werden, sind die Nichtnegativitätsrestriktionen für die Parameter α_i häufig verletzt. Daraus ergibt sich, dass Prozesse, die eine lange Vergangenheitsstruktur berücksichtigen, nicht imstande sind, die bedingte Varianz definitionsgemäß zu modellieren. ARCH Prozesse sind somit nur eingeschränkt einsetzbar. In diesem Zusammenhang schaffen generalisierte ARCH Prozesse eine Abhilfe.

4.2.4 GARCH

Die Verallgemeinerung zum Prozess mit generalisierter autoregressiver bedingter Heteroskedastie (GARCH) geht auf Bollerslev (1986) zurück. Die bedingte Varianz ist für den GARCH(p,q) Prozess ε_t wie folgt definiert:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (4.17)$$

$$\omega > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \text{ für alle } i, \quad \beta_j \geq 0 \text{ für alle } j, \quad p, q > 0$$

Im Unterschied zur bedingten Varianz im ARCH Prozess in Gleichung (4.11) fließen im GARCH Fall zusätzlich die Varianzen der Vergangenheit in die Schätzung zum Zeitpunkt t ein. Die Ordnung q legt fest, in welchen Maß frühere Realisation der

bedingten Varianz für die aktuelle Schätzung herangezogen werden. In der Regel ist ein GARCH(1,1) Prozess ausreichend, um die Struktur der bedingten Varianz zu erfassen. Auch an dieser Stelle ist auf den Unterschied zum deskriptiven Verfahren hingewiesen, da ein GARCH(1,1) Prozess dem RiskMetricsTM Ansatz in Gleichung (4.8) zu gleichen scheint. Abgesehen vom Parameter ω , der im RiskMetricsTM Ansatz nicht definiert ist, ist die Rate λ auf 0,94 für alle Zeitreihen festgesetzt. Die Parameter eines GARCH Prozesses werden hingegen so geschätzt, dass der Prozess die beste Anpassung an die jeweilige Zeitreihe liefert. Ebenso wie im ARCH Modell erlaubt zudem ein Signifikanztest für die Parameter, zu untersuchen, ob eine zeitveränderliche Varianz überhaupt vorhanden ist.

Unbedingte Varianz. Die schwache Stationarität eines GARCH(p,q) Prozesses ist für $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ gegeben. In diesem Fall existiert die unbedingte Varianz des GARCH Prozesses ε_t . Sie ergibt sich zu:

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}$$

Die bedingte Varianz in einem stationären GARCH Modell lässt sich ebenso wie im ARCH Modell in Gleichung (4.13) in alternativer Schreibweise notieren:

$$\sigma_t^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j \right) \sigma^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Mit $\omega = (1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j) \sigma^2$ lässt sich die bedingte Varianz als eine von drei Komponenten abhängige Variable interpretieren. Die bedingte Varianz σ_t^2 zum Zeitpunkt t ist sowohl von der Langzeitvarianz σ^2 als auch von den quadrierten Marktschocks ε_{t-i}^2 und der bedingten Varianz σ_{t-j}^2 der Vergangenheit abhängig.

Volatilitätsclustering. In Kapitel 4.2.3 ist bereits gezeigt worden, dass die ARCH Familie im Allgemeinen die leptokurtische Randverteilung der Rendite abbilden kann. Die Modellierung der stochastischen Abhängigkeiten der Rendite durch einen GARCH Prozess ist ebenso wie im ARCH Modell garantiert. Die alternative Schreibweise des quadrierten Prozesses ε_t^2 verdeutlicht dies. Für die GARCH(p,q)

Darstellung gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t^2 &= v_t^2 \sigma_t^2 = \sigma_t^2 + \sigma_t^2(v_t^2 - 1) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + u_t \\
&= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + u_t + \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-1}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-1}^2 \\
&= \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j (\varepsilon_{t-j}^2 - \sigma_{t-j}^2) + u_t \\
&= \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{j=1}^q \beta_j u_{t-j} + u_t \quad \text{mit } u_t = \sigma_t^2(v_t^2 - 1) = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2 \\
m &= \max(p, q), \quad \alpha_i = 0, \text{ wenn } i > p, \quad \beta_j = 0, \text{ wenn } j > q
\end{aligned}$$

Analog zum ARCH Prozess stellt auch hier u_t Weißes Rauschen dar. Während der ARCH(p) Prozess sich als AR(p) Prozess in den Quadraten schreiben lässt, ist der GARCH(p, q) Prozess in Form eines ARMA(m, q) Prozesses in den Quadraten darstellbar. Die Modellierung der Volatilitätscluster findet explizit statt.

ARCH(∞) Darstellung. Der Vorzug des GARCH Modells gegenüber ARCH ist damit begründet, dass für ersteren die Nichtnegativitätsrestriktionen weniger wahrscheinlich verletzt werden, da der Prozess sparsamer modelliert wird. Für einen GARCH(1,1) Prozess lässt sich das durch rekursives Einsetzen der bedingten Varianz verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\
&= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta(\omega + \alpha \varepsilon_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2) \\
&= \dots = \omega \sum_{i=1}^n \beta^{i-1} + \alpha \sum_{j=1}^n \beta^{j-1} \varepsilon_{t-j}^2 + \beta^n \sigma_{t-n}^2 \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt aus Gleichung (4.18):

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad \text{mit } \gamma_0 = \omega \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i = \frac{\omega}{1-\beta} \quad \text{und } \gamma_j = \alpha \beta^{j-1} \tag{4.19}$$

Gleichung (4.19) bringt eine ARCH(∞) Darstellung hervor. Mit nur drei Parametern ist die bedingte Varianz im GARCH(1,1) Modell imstande, eine unendliche Anzahl der vergangenen quadrierten Marktschocks zu berücksichtigen. Das Modell

ist effektiv ein ARCH Prozess mit unendlicher Ordnung p . In Gleichung (4.18) wird außerdem deutlich, dass die Gewichte mit der Rate β exponentiell abnehmen, je weiter eine Beobachtung in der Vergangenheit liegt.

Prognose. Die Varianzprognose für den Zeitpunkt $t + k$ unter Berücksichtigung der bis zum Zeitpunkt t verfügbaren Informationen soll am GARCH(1,1) Prozess veranschaulicht werden. Für $k = 1$ lässt sich die bedingte Varianz problemlos mit $\sigma_{t+1|t}^2 = \omega + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_t^2$ schätzen, da alle Informationen verfügbar sind. Um eine allgemeine Form für alle weiteren Zeitpunkte zu finden, wird die Prognose zunächst für $k = 2, 3$ durchgeführt:

$$\begin{aligned}\text{Var}_t(R_{t+2}^c) &= \sigma_{t+2|t}^2 = \omega + \alpha\text{E}_t(\varepsilon_{t+1}^2) + \beta\sigma_{t+1|t}^2 \\ &= \omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t+1|t}^2 \\ \text{Var}_t(R_{t+3}^c) &= \sigma_{t+3|t}^2 = \omega + \alpha\text{E}_t(\varepsilon_{t+2}^2) + \beta\text{E}_t(\sigma_{t+2|t}^2) \\ &= \omega + (\alpha + \beta)\text{E}_t(\sigma_{t+2|t}^2) \\ &= \omega + (\alpha + \beta)(\omega + (\alpha + \beta)\sigma_{t+1|t}^2) \\ &= \omega + \omega(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2\sigma_{t+1|t}^2\end{aligned}$$

Für $t + k$ folgt somit:

$$\text{Var}_t(R_{t+k}^c) = \sigma_{t+k|t}^2 = \omega \sum_{i=0}^{k-2} (\alpha + \beta)^i + (\alpha + \beta)^{k-1} \sigma_{t+1|t}^2, \quad k \geq 2 \quad (4.20)$$

Es ist zu erkennen, dass die langfristige Prognose gegen eine Konstante konvergiert, vorausgesetzt, dass schwache Stationarität mit $\alpha + \beta < 1$ vorliegt. Dieser Wert wird als unbedingte Varianz interpretiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{t+k|t}^2 = \omega \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha + \beta)^i = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta} = \sigma^2$$

Folglich existiert die Mittelwertrückkehr der bedingten Varianz auch für einen schwach stationären GARCH Prozess. Für diesen Fall lässt sich Gleichung (4.20) auch anders notieren mit $\omega = \sigma^2 - (\alpha + \beta)\sigma^2$:

$$\text{Var}_t(R_{t+k}^c) = \sigma_{t+k|t}^2 = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^{k-1}(\sigma_{t+1|t}^2 - \sigma^2), \quad k \geq 2$$

Parameterschätzung. Für die Parameterschätzung ist die klassische Methode

der kleinsten Quadrate nicht geeignet, da das Modell nicht linear ist. Die Parameter eines ARCH beziehungsweise GARCH Prozess werden mit der Maximum Likelihood (ML) Methode geschätzt. Die ML Schätzer haben den Vorteil konsistent und asymptotisch erwartungstreu zu sein. Wie der Name andeutet, werden die Parameter so geschätzt, wie sie die tatsächliche Datenmenge am wahrscheinlichsten reproduziert hätten. Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Beobachtung einen bestimmten Wert annimmt, wird durch ihre Dichtefunktion wiedergegeben. Für die kontinuierliche Rendite wird die bedingte Normalverteilung mit konstantem Erwartungswert μ (CMM) und bedingter Varianz σ_t^2 zugrunde gelegt. Da viele Beobachtungen vorliegen, ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Stichprobe äquivalent zum Produkt der bedingten Dichtefunktionen $f(R_t^c)$ für jede einzelne Beobachtung. Dementsprechend wird folgende Likelihood Funktion, die bezüglich des unbekanntem Parametervektors $\boldsymbol{\theta}$ maximiert werden soll, aufgestellt:

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{R}^c) = \prod_{t=1}^T f(R_t^c) \quad \text{mit} \quad f(R_t^c) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2\right\}$$

Der Parametervektor $\boldsymbol{\theta}$ enthält die Parameter ω , α_i und β_j der bedingten Varianzgleichung des GARCH Prozesses. Um die Differenzierbarkeit zu erleichtern, wird die Log-Likelihood Funktion, die eine Summe anstelle eines Produkts darstellt, gebildet:

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2$$

Die Maximierung der Log-Likelihood Funktion liefert solche Schätzer für die Parameter, die die beste Anpassung an die Datenmenge vorweisen.

Kritik. Ein Vorteil der GARCH Familie ist ihre extreme Vielfältigkeit. Seit der Einführung des ARCH Prozesses durch Engle und der Verallgemeinerung durch Bollerslev, ist eine Vielzahl an Erweiterungen und Varianten entwickelt worden. Zwar mag die Flexibilität die Auswahl für das „richtige“ Modell erschweren. Sie ermöglicht jedoch einen „maßgeschneiderten“ Prozess zu formulieren, mit dessen Hilfe die Struktur der bedingten Varianz optimal modelliert werden kann und der gleichzeitig den Ansprüchen des Analysten gerecht wird. Eine Übersicht einiger populärer GARCH Modelle haben Bollerslev et al. (1992) zusammengestellt. Zum Beispiel erlauben das ARCH-M Modell von Engle et al. (1987) und seine Verallgemeinerung, dass die bedingte Volatilität in die Renditegleichung einfließt und die Rendite sich somit zum

Teil aus der Volatilität zusammensetzt. Das Konzept lässt die Annahme zu, dass Investoren für das Eingehen eines höheren Risikos mit einer höheren Rendite belohnt werden sollten, explizit zu modellieren. An dieser Stelle sei auf die Literaturverweise hingewiesen, da eine ausführliche Darstellung der Modelle aus Umfangsgründen nicht möglich ist. Nichtsdestotrotz soll im Folgenden auf zwei Erweiterungen des GARCH(1,1) Modells eingegangen werden, die interessante Aspekte thematisieren.

4.2.5 IGARCH

In zahlreichen empirischen Studien ist deutlich geworden, dass für die bedingte Varianz die Stationaritätsbedingung nur knapp oder gar nicht erfüllt ist, kurz: $\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i + \sum_{j=1}^q \hat{\beta}_j \approx 1$. Solch eine Feststellung ist beispielsweise bei Lamoureux und Lastrapes (1990), die die Persistenz der Varianz mit Hilfe eines GARCH(1,1) Prozesses für 30 börsennotierte Unternehmen untersucht haben, ersichtlich. Der Mittelwert aus der Summe von $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ für die 30 Unternehmen beträgt 0,978.

Definition. Ausgehend von diesen Beobachtungen formulieren Engle und Bollerslev (1986) für einen GARCH(1,1) Prozess die Nebenbedingung, dass α und β in der Summe eins ergeben müssen. Der sogenannte integrierte GARCH Prozess kann als ordentlicher GARCH Prozess mit limitierten Parametern interpretiert werden. Die bedingte Varianz des Prozesses für $p = q = 1$ ist definiert als:

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 = \omega + (1 - \beta) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \omega &\geq 0, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1\end{aligned}$$

Für $\omega > 0$ wird der Prozess als Integrated GARCH(1,1) mit Drift bezeichnet. Der IGARCH(1,1) Prozess ohne Drift entspricht dem EWMA Konzept in Kapitel 4.2.2. Speziell der RiskMetricsTM Ansatz ergibt sich mit $\omega = 0$, $\mu = 0$ und $\beta = 0,94$. Die Bezeichnung „integriert“ ist irreführend, da die Nichtstationarität des Prozesses impliziert wird. Nelson (1990) konnte jedoch zeigen, dass ein IGARCH(1,1) Prozess mit Drift streng stationär ist.

Prognose. Wird die Prognoseformel für die bedingte Varianz im GARCH(1,1) Modell in Gleichung (4.20) rekapituliert, dann lässt sich eine interessante Schlussfolgerung ziehen. Es wurde gezeigt, dass gilt:

$$\text{Var}_t(R_{t+k}^c) = \sigma_{t+k|t}^2 = \omega \sum_{i=0}^{k-2} (\alpha + \beta)^i + (\alpha + \beta)^{k-1} \sigma_{t+1|t}^2, \quad k \geq 2$$

Somit folgt für einen IGARCH(1,1) Prozess ohne Drift ($\omega = 0$):

$$\sigma_{t+k|t}^2 = \sigma_{t+1|t}^2, \quad k \geq 2$$

Die beste Prognose für beliebigen Zeithorizont entspricht dementsprechend der Ein-Schritt Prognose. Was in Kapitel 4.2.2 für EWMA beziehungsweise RiskMetricsTM implizit formuliert worden ist, lässt sich jetzt deutlich erkennen. Die Prognosekurve ist flach, was nicht zufriedenstellend ist. Für einen IGARCH(1,1) Prozess mit Drift ergibt sich hingegen:

$$\sigma_{t+k|t}^2 = \omega(k-1) + \sigma_{t+1|t}^2, \quad k \geq 2$$

In diesem Fall steigt die Prognosekurve linear mit den Zeitschritten k . Für eine langfristige Prognose sei somit vom IGARCH Ansatz mit oder ohne Drift abgeraten.

4.2.6 GJR-GARCH

Bisher sind die Modelle so definiert worden, dass zwischen positiven und negativen Störgrößen nicht differenziert wird. Mit anderen Worten haben positive Marktschocks $\varepsilon_t \geq 0$ wie auch negative Marktschocks $\varepsilon_t < 0$ einen symmetrischen Effekt auf die bedingte Varianz. Die fehlende Unterscheidung kommt zustande, da die Störgrößen als quadrierte Größen in die bedingte Varianz einfließen und das Vorzeichen somit verloren geht. Besonders bei Aktienrenditen ist jedoch zu beobachten, dass nach negativen Nachrichten die Volatilität stärker steigt als nach positiven. Man spricht in diesem Zusammenhang vom Leverage Effekt. „A drop in the value of the firm will cause a negative return on its stock, and will usually increase the leverage of the stock. (...) That rise in the debt-equity ratio will surely mean a rise in the volatility of the stock“ (Black 1976, S. 179). Black bemerkt also, dass negative Informationen einen geringeren Marktwert des Unternehmens zur Folge haben, wodurch ein höherer Verschuldungsgrad impliziert wird. Das wiederum lässt die Volatilität ansteigen. Zwar lässt er offen, welchen Einfluss positive Schocks haben, empirisch gesehen lassen jedoch positive Renditen die Volatilität weniger stark ansteigen. Modelle die asymmetrisch auf das Vorzeichen von Schocks reagieren werden als asymmetrische Modelle bezeichnet. Ein populäres Konzept ist der GJR-GARCH Ansatz.

Definiton. Die Namensgebung ist zurückzuführen auf Glosten, Jagannathan und

Runkle (1993), die das Modell vorgestellt haben. Auf Basis des GARCH(1,1) Prozesses nimmt die bedingte Varianz im GJR-GARCH Modell folgende Form an:

$$\sigma_t^2 = \omega + (\alpha + \gamma I_{t-1})\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (4.21)$$

$$\omega > 0, \quad \alpha + \gamma \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{für } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

Die Erweiterung sieht die Indikatorvariable I_{t-1} vor, die vom Vorzeichen des Marktschocks der Vorperiode abhängig ist. Der quadrierte Marktschock fließt dementsprechend verstärkt in die aktuelle Varianzschätzung mit ein, wenn die Störgröße in der Vorperiode negativ ist. Es ist ersichtlich, dass für den Leverage Effekt $\gamma > 0$ gelten muss. Nur dann bewirkt ein negativer Marktschock das Ansteigen der bedingten Varianz in der nächsten Periode. Nichtsdestotrotz verletzt das Modell auch für $\gamma < 0$ die Nichtnegativitätsrestriktion nicht, solange $\alpha + \gamma \geq 0$ gilt.

Unbedingte Varianz. Für den GJR-GARCH Prozess existiert die Mittelwert-rückkehr, wenn $\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} < 1$ gilt und der Prozess somit schwach stationär ist. Die unbedingte Varianz des Prozesses ist gegeben durch:

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta - \frac{\gamma}{2}}$$

News Impact Curve. Der asymmetrische Effekt lässt sich grafisch mit der News Impact Curve von Pagan und Schwert (1990) veranschaulichen. Sie stellt die bedingte Varianz σ_t^2 in Abhängigkeit des Marktschocks in der Vorperiode ε_{t-1} dar. Die Kurve ergibt sich aus der Gleichung für die bedingte Varianz des betrachteten Modells, wobei die verzögerte bedingte Varianz durch die Langzeitvarianz ersetzt wird. Abbildung 4.1. zeigt die News Impact Curve für das GARCH(1,1) und GJR-GARCH(1,1) Modell, deren Parameter auf Basis der EUR-USD Rendite von Januar 2010 bis einschließlich Juli 2013 geschätzt worden sind. Die Kurven ergeben sich somit aus Gleichung (4.17) mit $p = q = 1$ und Gleichung (4.21), wobei in beiden Fällen $\sigma_{t-1}^2 = \sigma^2$ gilt. Grafisch wird die symmetrische Resonanz der bedingten Varianz auf positive und negative Schocks im GARCH Modell sehr deutlich. Ein Marktschock einer bestimmten Größe wird einen identischen Effekt auf die bedingte Varianz unabhängig vom Vorzeichen haben. Für GJR-GARCH verläuft hingegen die Kurve asymmetrisch, da negative Schocks eine höhere Varianz verursachen als positive Schocks gleicher Größe. Außerdem lässt sich feststellen, dass negative Schocks

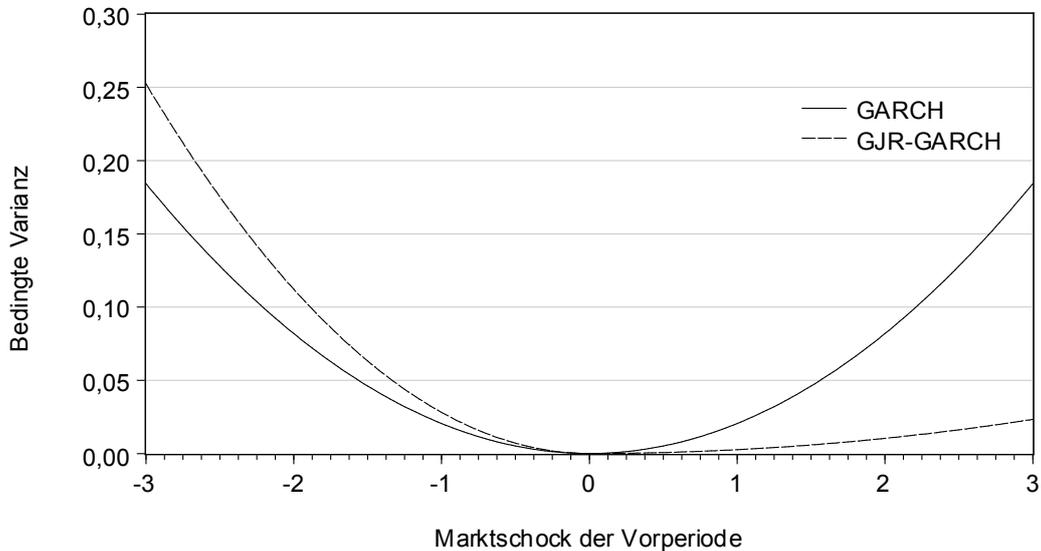


Abbildung 4.1. News Impact Curve für GARCH und GJR-GARCH am Beispiel der EUR-USD Rendite

die Varianz im GJR GARCH stärker ansteigen lassen als im GARCH und positive Schocks sich jedoch weniger stark bemerkbar machen im Vergleich zum GARCH Modell. Letztere Beobachtung ist dadurch zu erklären, dass im GJR-GARCH der Wert des Parameters α unter Hinzunahme der Indikatorvariable sinkt.

Test auf Informationsasymmetrie. Vor der Formulierung eines GJR-GARCH Modells ist ein Test für Asymmetrie sinnvoll. Engle und Ng (1993) schlagen eine Reihe von Tests vor, um zu testen, ob ein asymmetrisches Modell heranzuziehen ist. Die Engle-Ng Tests werden auf Basis der quadrierten standardisierten Residuen eines symmetrischen GARCH(1,1) Prozesses durchgeführt. Sofern Asymmetrieeffekte in den Residuen existieren, ist das Modell nicht korrekt spezifiziert, da der Prozess diese Effekte nicht erfasst. Es wird die Dummy Variable S_{t-1}^- definiert, die den Wert eins annimmt, falls $\varepsilon_{t-1} < 0$ und null andernfalls. Um zu testen, ob positive und negative Schocks eine unterschiedliche Auswirkung auf die zukünftige Varianz haben, wird die Signifikanz des Parameters ϕ_1 für folgende Regressionsgleichung getestet:

$$v_t^2 = \phi_0 + \phi_1 S_{t-1}^- + \eta \quad (4.22)$$

η ist dabei eine unabhängig und identisch verteilte Größe. Falls ϕ_1 signifikant ist, unterschätzt das GARCH Modell die bedingte Varianz nach negativen Marktschocks

und überschätzt sie nach positiven Marktschocks. Das symmetrische Modell ist somit nicht imstande, die Varianz korrekt abzubilden. Weiterhin kann die Größe der Schocks einen asymmetrischen Effekt auf die bedingte Varianz haben. Im symmetrischen GARCH Ansatz wirken sich Schocks in Form einer quadratischen Funktion auf die bedingte Varianz aus, das heißt die bedingte Varianz steigt mit einer Rate proportional zum quadrierten Marktschock. Mit Einführung der Steigungsdummies $S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1}$ respektive $S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} = (1 - S_{t-1}^-) \varepsilon_{t-1}$ lässt sich der Effekt von kleinen und negativen Schocks sowohl im negativen als auch im positiven Fall im Stil von Gleichung (4.22) jeweils separat testen. Auch hier wird die Signifikanz von ϕ_1 untersucht. Zur Nullhypothese, dass ϕ_1 sich nicht signifikant von null unterscheidet, wird die t -Statistik gebildet. Engle und Ng schlagen einen Test zur gemeinsamen Signifikanz der Dummies vor, der auf folgender Regression basiert:

$$v_t^2 = \phi_0 + \phi_1 S_{t-1}^- + \phi_2 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + \phi_3 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + \eta \quad (4.23)$$

Zur Nullhypothese $H_0 : \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ wird die Teststatistik $\zeta = T \cdot R^2$ mit dem kritischen Wert der Chiquadrat Verteilung mit 3 Freiheitsgraden verglichen. Statistisch gesehen liegen Asymmetrieeffekte vor, wenn die Nullhypothese verworfen wird, also wenn die Teststatistik den kritischen Wert übersteigt. Nachdem einige univariate Ansätze zur Modellierung der bedingten Varianz vorgestellt wurden, sollen nachfolgend multivariate Methoden präsentiert werden.

4.3 Multivariate Ansätze zur Modellierung der bedingten Varianz

Multivariate GARCH Modelle berücksichtigen die bedingten Varianzen verschiedener Teilprozesse. Sie basieren auf *mehreren* Renditezeitreihen und erlauben somit, die Wechselwirkungen zwischen den jeweiligen Prozessen darzustellen. Die explizite Modellierung wechselseitiger Beziehungen erscheint beispielsweise dann sinnvoll, wenn die bedingte Varianz auf Portfolioebene aus den Einzelpositionen abgeleitet werden soll. So ist anzunehmen, dass zwischen Aktienrenditen von Unternehmen derselben Branche enge Beziehungen existieren und ihre Berücksichtigung zu verbesserten Schätzergebnissen führt. Die Beziehungen untereinander werden durch die bedingten Kovarianzen ausgedrückt. Zusammen mit den bedingten Varianzen bil-

den sie die *bedingte Varianz-Kovarianzmatrix* Σ_t , die es im multivariaten Fall zu schätzen gilt.

CMM im multivariaten Fall. Die folgenden Konzepte sollen weiterhin im Rahmen des Constant Mean Modells definiert werden. Das CMM für den univariaten Fall aus Kapitel 3.4 wird folgendermaßen erweitert:

$$\mathbf{R}_t^c = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (4.24)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \Sigma_t^{1/2} \mathbf{v}_t \quad \text{mit } \mathbf{v}_t \stackrel{iid}{\sim} \mathbb{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \quad (4.25)$$

\mathbf{R}_t^c bezeichnet den $J \times 1$ Vektor der kontinuierlichen Renditen zum Zeitpunkt t . Ebenso wie bei den univariaten Modellen existiert die bedingte Verteilung der kontinuierlichen Renditen zum Zeitpunkt t , gegeben die Prozessvergangenheit bis zum Zeitpunkt $t - 1$, kurz: $\mathbf{R}_{t|t-1}^c \sim \mathbb{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_t)$. Die Verteilung wird durch den $J \times 1$ Erwartungsvektor $\boldsymbol{\mu}$ und die bedingte $J \times J$ Varianz-Kovarianzmatrix Σ_t spezifiziert. Hervorzuheben ist, dass die Varianz-Kovarianzmatrix symmetrisch ist. Formal gilt für die Vektoren:

$$\mathbf{R}_t^c = \begin{pmatrix} R_{1,t}^c \\ \vdots \\ R_{J,t}^c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix}, \quad \Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1,t} & \sigma_{1,2,t} & \cdots & \sigma_{1,J,t} \\ \sigma_{2,1,t} & \sigma_{2,2,t} & \cdots & \sigma_{2,J,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{J,1,t} & \sigma_{J,2,t} & \cdots & \sigma_{J,J,t} \end{pmatrix}$$

Im multivariaten Fall ist es nicht verwunderlich, dass die Bestimmung der bedingten Portfoliovarianz aus der Varianz-Kovarianzmatrix von Interesse ist. Die Portfoliorendite ist eine Zufallsvariable, da sie die gewichtete Summe aus den zufälligen Renditen der Einzelpositionen darstellt. Somit führt der allgemeine Ansatz der linearen Transformation von Zufallsvektoren zum Erwartungswert und Varianz im Portfolio. In Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 sind Erwartungswert und Varianz bereits angeführt worden. An dieser Stelle soll ihre Berechnung vor dem Hintergrund der Lineartransformation von Zufallsvektoren veranschaulicht werden. Außerdem wird deutlich, welchem Kriterium die Varianz-Kovarianzmatrix genügen muss.

Lineartransformation von Zufallsvektoren. Es wird der $J \times 1$ Zufallsvektor \mathbf{X} betrachtet mit dem $J \times 1$ Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}_\mathbf{X}$ und der $J \times J$ Varianz-Kovarianzmatrix $\Sigma_\mathbf{X}$. Außerdem ist \mathbf{b} ein deterministischer $K \times 1$ Vektor und \mathbf{A} eine deterministische $K \times J$ Matrix. Für den $K \times 1$ Zufallsvektor \mathbf{Y} gilt dann nach

der linearen Transformation $\mathbf{Y} = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{X}$ für den $K \times 1$ Erwartungswertvektor und für die $K \times K$ Varianz-Kovarianzmatrix:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{Y}} &= E(\mathbf{Y}) = \mathbf{b} + \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} &= \text{Var}(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}'\end{aligned}$$

Für die Transformation des Renditevektors \mathbf{R}_t^c gilt $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{w}'$, wobei \mathbf{w} der $J \times 1$ Vektor der Portfoliogewichte ist. Somit folgt für den Erwartungswert und die bedingte Varianz im Portfolio für die Position G :

$$\begin{aligned}\mu_{G,t} &= \mathbf{w}'_t \boldsymbol{\mu} \\ \sigma_{G,t}^2 &= \mathbf{w}'_t \boldsymbol{\Sigma}_t \mathbf{w}_t\end{aligned}\tag{4.26}$$

Der rechte Ausdruck der Gleichung (4.26) wird als quadratische Form bezeichnet. Da die Portfoliovarianz streng positiv sein muss, ergibt sich für die quadratische Form die Bedingung, dass $\mathbf{w}'_t \boldsymbol{\Sigma}_t \mathbf{w}_t > 0$ gilt. Die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}_t$ ist *positiv definit*, wenn letztere Eigenschaft für alle $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ erfüllt ist. Mit anderen Worten garantiert die Positivdefinitheit der Varianz-Kovarianzmatrix, dass die Portfoliovarianz größer als null ist. Die Definitheit einer Matrix lässt sich mit Hilfe der Hauptabschnittsdeterminanten (HAD) überprüfen. Die $J \times J$ Varianz-Kovarianzmatrix besitzt J Hauptabschnittsdeterminanten. Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle HAD größer als null sind. Im Folgenden wird das Modell in Gleichung (4.24)-(4.25) nicht immer wieder aufgeführt. Es erfolgt lediglich die Spezifikation der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix.

4.3.1 Gleitende Varianz-Kovarianzmatrizen und exponentielles Glätten

Im univariaten Fall ist bereits gezeigt worden, dass deskriptive Verfahren in der Praxis durchaus Anwendung finden. Ungeachtet der überlegenen Modellierung mit Hilfe von parametrischen Verfahren soll zur Vollständigkeit die multivariate Darstellung der beiden deskriptiven Konzepte angeführt werden.

Gleitende Varianz-Kovarianzmatrizen. Gleitende Varianz-Kovarianzmatrizen

berechnen sich zu:

$$\hat{\sigma}_{j,k,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{j,t-i}^c - \hat{\mu}_{j,t})(R_{k,t-i}^c - \hat{\mu}_{k,t}) \quad \text{mit} \quad \hat{\mu}_{j,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{j,t-i}^c, \quad \hat{\mu}_{k,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{k,t-i}^c$$

$$t = n + 1, n + 2, \dots; \quad j, k = 1, \dots, J$$

In Matrizenform erhält man:

$$\hat{\Sigma}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\epsilon}_{t-i} \hat{\epsilon}'_{t-i} \quad \text{mit} \quad \hat{\epsilon}_t = \mathbf{R}_t^c - \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$$

Exponentielles Glätten. Mit der Methode des exponentiellen Glättens berechnen sich die Elemente der Varianz-Kovarianzmatrix durch:

$$\hat{\sigma}_{j,k,t} = (1 - \lambda)(R_{j,t-1}^c - \hat{\mu}_j)(R_{k,t-1}^c - \hat{\mu}_k) + \lambda \hat{\sigma}_{j,k,t-1}$$

Matriziell notiert erfolgt die Berechnung mit $\hat{\epsilon}_t = \mathbf{R}_t^c - \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ durch:

$$\hat{\Sigma}_t = \lambda \hat{\Sigma}_{t-1} + (1 - \lambda) \hat{\epsilon}_{t-1} \hat{\epsilon}'_{t-1}$$

Für einen positiv definiten Startwert $\hat{\Sigma}_0$ und $0 < \lambda < 1$ lässt sich zeigen, dass $\hat{\Sigma}_t$ positiv definit für alle t ist. Im RiskMetricsTM Ansatz gilt $\lambda = 0,94$ und $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{0}$. Die Kritik an beiden Konzepten ist analog zu der Kritik im univariaten Fall. Nachfolgend werden Ansätze multivariater GARCH Prozesse vorgestellt.

4.3.2 Skalares GARCH Modell

Die einfachste multivariate Erweiterung stellt das skalare GARCH(1,1) Modell dar. Die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix berechnet sich durch:

$$\Sigma_t = \Omega + \alpha \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} + \beta \Sigma_{t-1}$$

Ω ist dabei eine symmetrische positiv definite Matrix. Während ihre Parameter $\omega_{j,k}$ für jedes Element der Varianz-Kovarianzmatrix verschieden sind, sind α und β für alle Varianzen und Kovarianzen identisch. Sie sind somit Skalare und namensgebend für das Modell. Ebenso wie im univariaten Fall existiert ein schwach stationärer Prozess für $\alpha + \beta < 1$. Die unbedingte Varianz-Kovarianzmatrix ergibt sich in diesem

Fall zu:

$$\Sigma = \frac{\Omega}{1 - \alpha - \beta}$$

Vech Operator. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Kovarianzen, also $\sigma_{j,k,t} = \sigma_{k,j,t}$, stellt man das Modell häufig unter Verwendung des vech Operators dar. Dieser erzeugt einen Vektor aus der Varianz-Kovarianzmatrix, indem die Spalten der Matrix Σ_t unter Vernachlässigung der symmetrischen Elemente untereinander angeordnet werden. Für eine 2×2 Matrix ergibt sich beispielsweise:

$$\text{vech}(\Sigma_t) = \text{vech} \begin{pmatrix} \sigma_{1,1,t} & \sigma_{1,2,t} \\ \sigma_{2,1,t} & \sigma_{2,2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1,t} \\ \sigma_{2,1,t} \\ \sigma_{2,2,t} \end{pmatrix}$$

Mit der vech Darstellung folgt für die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix im skalaren GARCH(p,q) Modell.

$$\text{vech}(\Sigma_t) = \text{vech}(\Omega) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \beta_j \text{vech}(\Sigma_{t-j}) \quad (4.27)$$

Der Vorteil des Modells liegt in der Einfachheit des Modells, da nur sehr wenige Parameter geschätzt werden müssen. Beispielsweise sind für $J = 2$ Wertpapiere im skalaren GARCH(1,1) Modell nur fünf Parameter zu schätzen, wie nachfolgend zu sehen ist:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,t} &= \omega_{1,1} + \alpha \varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta \sigma_{1,1,t-1} \\ \sigma_{2,1,t} &= \omega_{2,1} + \alpha \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} + \beta \sigma_{2,1,t-1} \\ \sigma_{2,2,t} &= \omega_{2,2} + \alpha \varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta \sigma_{2,2,t-1} \end{aligned}$$

Aus dieser Einfachheit resultieren schwerwiegende Unzulänglichkeiten des Modells. Erstens erlauben die Parameter α_i und β_j keine differenzierte Modellierung der Varianzen und Kovarianzen. Vielmehr ist die Gewichtung der vergangenen Beobachtungen für die aktuelle Schätzung für alle Elemente der Varianz-Kovarianzmatrix identisch. Zudem erfolgt keine Resonanz von der Volatilität eines Wertpapiers zum anderen.

4.3.3 Vektor GARCH

Aufbauend auf dem skalaren GARCH Modell verallgemeinert das Vektor GARCH Modell die Skalare α_i und β_j durch Einführung der Matrizen \mathbf{A}_i und \mathbf{B}_j . Die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix nimmt folglich folgende Form an:

$$\text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_t) = \text{vech}(\boldsymbol{\Omega}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{t-j}) \quad (4.28)$$

\mathbf{A}_i und \mathbf{B}_j stellen dabei symmetrische Matrizen mit $(J(J+1)/2)^2$ Parametern dar. Die Komplexität des Modells wird durch Formulierung der jeweiligen Varianz- und Kovarianzgleichungen deutlich. Für $p = q = 1$ und für $J = 2$ Wertpapiere ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,t} &= \omega_{1,1} + a_{1,1}\varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{1,2}\varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} + a_{1,3}\varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{1,1}\sigma_{1,1,t-1} + b_{1,2}\sigma_{2,1,t-1} + b_{1,3}\sigma_{2,2,t-1} \\ \sigma_{2,1,t} &= \omega_{2,1} + a_{2,1}\varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{2,2}\varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} + a_{2,3}\varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{2,1}\sigma_{1,1,t-1} + b_{2,2}\sigma_{2,1,t-1} + b_{2,3}\sigma_{2,2,t-1} \\ \sigma_{2,2,t} &= \omega_{2,2} + a_{3,1}\varepsilon_{1,t-1}^2 + a_{3,2}\varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} + a_{3,3}\varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{3,1}\sigma_{1,1,t-1} + b_{3,2}\sigma_{2,1,t-1} + b_{3,3}\sigma_{2,2,t-1} \end{aligned}$$

Von Vorteil ist die explizite Modellierung der dynamischen Resonanz der Varianzen und Kovarianzen untereinander. Man beachte jedoch, dass obige Spezifikation die einfachste Modelldarstellung hervorbringt, aber bereits 21 Parameter geschätzt werden müssten. Ein erheblicher Nachteil dieses Modells ist zudem, dass die Positivdefinitheit der Varianz-Kovarianzmatrix nicht garantiert ist. Es können nämlich durchaus negativ geschätzte Varianzen auftreten.

4.3.4 Diagonal-GARCH

Bollerslev, Engle und Wooldridge (1988) vereinfachen das Modell in Gleichung (4.28), indem \mathbf{A}_i und \mathbf{B}_j als Diagonalmatrizen in die Gleichung für die bedingte Varianz-

Kovarianzmatrix einfließen. Sie ergibt sich im Diagonal-GARCH nun zu:

$$\begin{aligned} \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_t) &= \text{vech}(\boldsymbol{\Omega}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \text{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_{t-j}) \\ \mathbf{A}_i &= \text{diag}(a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{N,i}), \quad N = J(J+1)/2, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \mathbf{B}_j &= \text{diag}(b_{1,j}, b_{2,j}, \dots, b_{N,j}), \quad N = J(J+1)/2, \quad j = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

Die Diagonalmatrizen vereinfachen die Schätzung der Varianz-Kovarianzmatrix derart, dass die Varianzen lediglich von ihren verzögerten Varianzen und quadrierten Schocks abhängen. Die Kovarianzen sind dementsprechend lediglich von ihren verzögerten Kovarianzen und den Kreuzprodukten von Schocks abhängig. Der Effekt wird auch hier am deutlichsten sichtbar, wenn die Gleichungen der Varianzen und Kovarianzen formuliert werden. Für zwei Wertpapiere im Diagonal-GARCH(1,1) Modell ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,t} &= \omega_{1,1} + a_1 \varepsilon_{1,t-1}^2 + b_1 \sigma_{1,1,t-1} \\ \sigma_{2,1,t} &= \omega_{2,1} + a_2 \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} + b_2 \sigma_{2,1,t-1} \\ \sigma_{2,2,t} &= \omega_{2,2} + a_3 \varepsilon_{2,t-1}^2 + b_3 \sigma_{2,2,t-1} \end{aligned}$$

Das Diagonal-GARCH Modell beinhaltet somit den Spezialfall des skalaren GARCH Modells in Gleichung (4.27) für den Fall, dass die Elemente der Diagonalmatrizen \mathbf{A}_i und \mathbf{B}_j für alle i respektive j identisch sind. Nachteilig wirkt sich die fehlende Garantie aus, dass die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix positiv definit ist.

4.3.5 BEKK-GARCH

Das Problem, dass im Vektor GARCH und Diagonal GARCH die strikte positive Definitheit der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix nicht gewährleistet ist, beschreiben Engle und Kroner (1995). Zur Lösung des Defizits schlagen sie das BEKK-GARCH Modell vor, dessen Akronym sich aus den Namen Baba, Engle, Kraft und Kroner, die an der gemeinsamen Ausarbeitung beteiligt waren, zusammensetzt. Die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix ist im BEKK-GARCH(p,q) Modell folgendermaßen definiert:

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \boldsymbol{\Omega} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}'_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i} \mathbf{A}_i + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}'_j \boldsymbol{\Sigma}_{t-j} \mathbf{B}_j$$

Σ_t ist in dem Modell immer positiv definit, da sie aus der Summe von positiv semi-definiten Matrizen gebildet wird. \mathbf{A}_i und \mathbf{B}_j sind dabei die $J \times J$ Parametermatrizen. Ω wird im Modell als symmetrische positiv definite $J \times J$ Matrix definiert. Sie ergibt sich aus der Multiplikation $\mathbf{C}'\mathbf{C}$, wobei dabei die untere Dreiecksmatrix Matrix \mathbf{C} geschätzt wird. Zur Veranschaulichung sollen an dieser Stelle die Varianz- und Kovarianzschätzungen zum Zeitpunkt t im Rahmen eines BEKK-GARCH(1,1) Modells für zwei Wertpapiere ebenfalls formuliert werden:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,1,t} &= \omega_{1,1} + a_{1,1}^2 \varepsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{1,1}a_{2,1} \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + a_{2,1}^2 \varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{1,1}^2 \sigma_{1,1,t-1} + 2b_{1,1}b_{2,1} \sigma_{1,2,t-1} + b_{2,1}^2 \sigma_{2,2,t-1} \\ \sigma_{2,1,t} &= \omega_{2,1} + a_{1,2}a_{1,1} \varepsilon_{1,t-1}^2 + (a_{2,2}a_{1,1} + a_{1,2}a_{2,1}) \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + a_{2,2}a_{2,1} \varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{1,2}b_{1,1} \sigma_{1,1,t-1} + (b_{2,2}b_{1,1} + b_{1,2}b_{2,1}) \sigma_{1,2,t-1} + b_{2,2}b_{2,1} \sigma_{2,2,t-1} \\ \sigma_{2,2,t} &= \omega_{2,2} + a_{1,2}^2 \varepsilon_{1,t-1}^2 + 2a_{1,2}a_{2,2} \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} + a_{2,2}^2 \varepsilon_{2,t-1}^2 \\ &\quad + b_{1,2}^2 \sigma_{1,1,t-1} + 2b_{1,2}b_{2,2} \sigma_{1,2,t-1} + b_{2,2}^2 \sigma_{2,2,t-1}\end{aligned}$$

Ebenso wie im Vektor GARCH ist in der BEKK Spezifikation hervorzuheben, dass die Varianz- und Kovarianzschätzungen explizit auf einer starken Rückmeldung der Varianzen, Kovarianzen sowie der Schocks der Vergangenheit untereinander basieren. Die Anzahl der zu schätzenden Parameter reduziert sich jedoch im Vergleich zum Vektor GARCH und die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix ist in jedem Fall positiv definit. Für obiges Beispiel sind elf Parameter zu schätzen.

Parameterschätzung. An dieser Stelle soll die Parameterschätzung der multivariaten Konzepte angeführt werden. Wie bereits erwähnt wurde, ist die kontinuierliche Rendite bedingt multivariat normalverteilt. Die Parameterschätzung erfolgt nach der Maximum-Likelihood Methode, sodass die Likelihoodfunktion, also das Produkt der einzelnen Dichtefunktionen, maximiert werden soll. Die Dichtefunktion nimmt folgende Form an:

$$f(\mathbf{R}_t^c) = (2\pi)^{-J/2} (\det \Sigma_t)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_t' \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \right\}$$

Analog zum univariaten Fall wird auf die Log-Likelihoodfunktion zurückgegriffen:

$$\ln L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{JT}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\det \Sigma_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t' \Sigma_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Sie gilt es, mit Hilfe numerischer Verfahren zu maximieren. Für die nachfolgenden Modelle sei erwähnt, dass sich die Schätzfunktion vereinfachen lässt.

4.3.6 CCC-GARCH

Durch das Vorliegen mehrerer Zeitreihen ist es im multivariaten Fall naheliegend, dass nicht nur die Kovarianzen sondern auch die Korrelationen bestimmt werden können. Für die bedingten Korrelationen eines multivariaten Prozesses zum Zeitpunkt t , gegeben die Prozessvergangenheit bis $t - 1$, gilt:

$$\text{Corr}_{t-1}(\varepsilon_{j,t}, \varepsilon_{k,t}) = \frac{\text{Cov}_{t-1}(\varepsilon_{j,t}, \varepsilon_{k,t})}{\sqrt{\text{Var}_{t-1}(\varepsilon_{j,t})\text{Var}_{t-1}(\varepsilon_{k,t})}} = \frac{\sigma_{j,k,t}}{\sqrt{\sigma_{j,j,t}\sigma_{k,k,t}}} = \varrho_{j,k,t}, \quad j, k = 1, \dots, J$$

Die bedingten Korrelationen lassen sich in Form der Matrix \mathbf{R}_t darstellen. Zunächst sei die $J \times J$ Diagonalmatrix \mathbf{D}_t definiert als:

$$\mathbf{D}_t = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_{1,1,t}}}, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{2,2,t}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\sigma_{J,J,t}}}\right)$$

Aus der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix Σ_t lässt sich somit mit Hilfe der Diagonalmatrix die bedingte Korrelationsmatrix \mathbf{R}_t bestimmen, da offensichtlich gilt:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{D}_t \Sigma_t \mathbf{D}_t = \begin{pmatrix} 1 & \varrho_{1,2,t} & \dots & \varrho_{1,J,t} \\ \varrho_{2,1,t} & 1 & \dots & \varrho_{2,J,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho_{J,1,t} & \varrho_{J,2,t} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Definition. Bollerslev (1990) schlägt ein vereinfachtes multivariates GARCH Modell vor, bei dem die Varianzen und Kovarianzen zeitlich variieren, die Korrelationen $\varrho_{j,k}$ jedoch als *konstant* angenommen werden. Aus Gleichung (4.29) folgt mit konstanter Korrelationsmatrix \mathbf{R} für die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix im CCC-GARCH Modell:

$$\Sigma_t = \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R} \mathbf{D}_t^{-1}$$

Die Schätzung der Varianz-Kovarianzmatrix erfolgt stufenweise. Die CCC(p,q) Spezifikation unterstellt für jede bedingte Varianz $\sigma_{j,j,t}$ in Σ_t einen *univariaten* GARCH Prozess. Zum Beispiel kann die Modellierung gemäß Gleichung (4.17) erfolgen. Nach der Schätzung der bedingten Varianzen wird in einem zweiten Schritt die Korre-

lationsmatrix \mathbf{R} mit Hilfe einer empirischen Korrelationsmatrix der standardisierten Residuen geschätzt. Für das detaillierte Schätzungsverfahren sei auf Bollerslev (1990) verwiesen. Die konstante bedingte Korrelation zwischen den Störgrößen erlaubt, einen Rückschluss auf die bedingte Kovarianzen zu schließen. Letztere sind in dem Modell proportional zum Produkt ihrer bedingten Standardabweichungen, da $\sigma_{j,k,t} = \varrho_{j,k} \sqrt{\sigma_{j,j,t} \sigma_{k,k,t}}$ gilt. Für das Beispiel mit zwei Wertpapieren im Rahmen eines CCC-GARCH(1,1) Modells erhält man:

$$\begin{aligned}\sigma_{1,1,t} &= \omega_1 + \alpha_1 \varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{1,1,t-1} \\ \sigma_{2,1,t} &= \varrho_{2,1} \sqrt{\sigma_{1,1,t} \sigma_{2,2,t}} \\ \sigma_{2,2,t} &= \omega_2 + \alpha_2 \varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{2,2,t-1}\end{aligned}$$

Kritik. Die Positivdefinitheit der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix ist gegeben, wenn die Korrelationsmatrix \mathbf{R} positiv definit ist und die Standardabweichungen auf der Hauptdiagonalen der Matrix \mathbf{D}_t beziehungsweise ihrer Inversen positiv sind. Letztere Bedingung ist in jedem Fall durch die strengen Spezifikationen für univariate GARCH Prozesse erfüllt. Ein weiterer Vorteil liegt in der Reduzierung der zu schätzenden Parameter und der leichteren Anwendbarkeit des Modells auf große Systeme von Zeitreihen. Das Resultat der geringeren Komplexität ist jedoch, dass die Varianzen nicht dynamisch aufeinander reagieren. Vielmehr spiegelt sich der multivariate Effekt lediglich in den bedingten Kovarianzen wider. Kritik lässt sich womöglich auch an der Annahme konstanter bedingter Korrelationen äußern. Die Annahme, dass eine zeitinvariante Korrelationsmatrix eine adäquate Modellierung erlaubt, muss durch Spezifikationstest überprüft werden. Es ist aber davon auszugehen, dass speziell die Korrelation zweier Renditezeitreihen von Wertpapieren in Krisenzeiten tendenziell steigt und somit nicht konstant sein kann.

4.3.7 DCC-GARCH

Das dynamisch bedingte Korrelationsmodell stellt insofern eine Verallgemeinerung des CCC Ansatzes dar, als die Korrelationsmatrix \mathbf{R}_t in der Zeit variiert. Das Modell ist von Engle (2002) und Engle und Sheppard (2001) entwickelt worden. Für die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix ergibt sich somit im DCC-GARCH Modell:

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t^{-1} \quad (4.30)$$

Auch in diesem Ansatz erfolgt ihre Schätzung mehrstufig, sodass das DCC Modell für Schätzungen sehr großer Varianz-Kovarianzmatrizen geeignet ist. Zuerst werden mit Hilfe univariater GARCH Prozesse die bedingten Varianzen der Varianz-Kovarianzmatrix für den J dimensionalen multivariaten Prozess geschätzt. Dies lässt die Konstruktion der Diagonalmatrix \mathbf{D}_t aus den bedingten Standardabweichungen wie im CCC Modell zu. Außerdem werden die Störgrößen $\varepsilon_{j,t}$ normalisiert:

$$\tilde{\varepsilon}_t = \mathbf{D}_t \varepsilon_t$$

Für die normalisierten Residuen $\tilde{\varepsilon}_{j,t}$ lässt sich eine interessante Eigenschaft zeigen. Es wird der bedingte Korrelationskoeffizient bestimmt:

$$\rho_{j,k,t} = \frac{\text{Cov}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{j,t}, \tilde{\varepsilon}_{k,t})}{\sqrt{\text{Var}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{j,t})\text{Var}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{k,t})}} = \frac{\mathbf{E}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{j,t}\tilde{\varepsilon}_{k,t})}{\sqrt{\mathbf{E}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{j,t}^2)\mathbf{E}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{k,t}^2)}} = \mathbf{E}_{t-1}(\tilde{\varepsilon}_{j,t}\tilde{\varepsilon}_{k,t}) \quad (4.31)$$

Die bedingte Korrelation entspricht offensichtlich der bedingten Kovarianz zwischen zwei normalisierten Residuen, da ihre Varianz eins ist. Im unbedingten Fall bleibt diese Beziehung bestehen.

Korrelationsdynamik. Bei der Modellierung muss die bedingte Korrelationsmatrix \mathbf{R}_t zwei Anforderungen genügen. Erstens muss sie positiv definit sein, damit die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix Σ_t in Gleichung (4.30) ebenfalls positiv definit ist. Zweitens müssen ihre Elemente denen einer wohldefinierten Korrelationsmatrix gleichen. Dies bedeutet, dass auf ihrer Hauptdiagonalen Einsen stehen müssen und andernfalls Werte zwischen 1 und -1. Aufgrund der zwei Kriterien wird die bedingte Korrelationsmatrix aufgespalten in:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{D}_{Q,t} \mathbf{Q}_t \mathbf{D}_{Q,t} \quad (4.32)$$

Die Korrelationsdynamik der Matrix \mathbf{Q}_t wird in Anlehnung an einen GARCH(1,1) Prozess auf Basis der normalisierten Residuen wie folgt spezifiziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_t &= (1 - \delta_1 - \delta_2) \bar{\mathbf{Q}} + \delta_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1} \tilde{\varepsilon}'_{t-1} + \delta_2 \mathbf{Q}_{t-1} \\ 0 &\leq \delta_1, \delta_2 < 1, \quad \delta_1 + \delta_2 < 1 \end{aligned} \quad (4.33)$$

$\bar{\mathbf{Q}}$ bezeichnet dabei die unbedingte Varianz-Kovarianzmatrix der normalisierten Re-

siduen, die durch die empirische Varianz-Kovarianzmatrix geschätzt wird:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t'$$

Die Verwendung der Varianz-Kovarianzmatrix ist aufgrund der Beziehung in Gleichung (4.31) legitim. Die Varianz-Kovarianzmatrix entspricht in diesem Fall der Korrelationsmatrix. An der Stelle zeigt sich ebenfalls, wie die konstante Korrelationsmatrix \mathbf{R} im CCC-GARCH Modell geschätzt wird. Die bedingte Diagonalmatrix $\mathbf{D}_{Q,t}$, die die Hauptdiagonalelemente der Matrix \mathbf{Q}_t beinhaltet, lässt sich wie folgt darstellen:

$$\mathbf{D}_{Q,t} = \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{q_{1,1,t}}}, \frac{1}{\sqrt{q_{2,2,t}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{q_{J,J,t}}} \right) \quad (4.34)$$

Mit den Ausdrücken (4.33) und (4.34) nimmt die Korrelationsmatrix \mathbf{R}_t gemäß Gleichung (4.32) folgende Form an:

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} 1 & \frac{q_{1,2,t}}{\sqrt{q_{1,1,t}q_{2,2,t}}} & \cdots & \frac{q_{1,J,t}}{\sqrt{q_{1,1,t}q_{J,J,t}}} \\ \frac{q_{2,1,t}}{\sqrt{q_{2,2,t}q_{1,1,t}}} & 1 & \cdots & \frac{q_{2,J,t}}{\sqrt{q_{2,2,t}q_{J,J,t}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_{J,1,t}}{\sqrt{q_{J,J,t}q_{1,1,t}}} & \frac{q_{J,2,t}}{\sqrt{q_{J,J,t}q_{2,2,t}}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Schlussendlich lassen sich mit Gleichung (4.30) die bedingten Kovarianzen unter Verwendung der bedingten Korrelationsmatrix \mathbf{R}_t berechnen. Für nähere Details des Schätzungsverfahrens sei auf Engle (2002) verwiesen. Für einen DCC-GARCH(1,1) Prozess mit zwei Wertpapieren gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1,t} &= \omega_1 + \alpha_1 \varepsilon_{1,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{1,1,t-1} \\ \sigma_{2,1,t} &= \varrho_{2,1,t} \sqrt{\sigma_{1,1,t} \sigma_{2,2,t}} \quad \text{mit} \quad \varrho_{2,1,t} = \frac{q_{2,1,t}}{\sqrt{q_{2,2,t} q_{1,1,t}}} \\ \sigma_{2,2,t} &= \omega_2 + \alpha_2 \varepsilon_{2,t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{2,2,t-1} \end{aligned}$$

Kritik. Das DCC Modell beinhaltet für $\delta_1 = \delta_2 = 0$ den Spezialfall des konstanten bedingten Korrelationsmodells in Kapitel 4.3.6. Beide Konzepte zeichnen sich durch ihre Flexibilität bei der GARCH Modellierung aus. So ist zum Beispiel der Rückgriff auf einen asymmetrischen univariaten GARCH Prozess zur Modellierung der bedingten Varianzen denkbar, auf deren Basis die weitere Modellierung erfolgt. In

die Korrelationsmodelle kann jeder GARCH Prozess aufgenommen werden, der die Stationaritätsbedingung erfüllt und der, um Konsistenz im Verlauf der Arbeit zu gewährleisten, normalverteilte Störgrößen aufweist. Speziell der DCC-GARCH Ansatz verspricht aufgrund der Flexibilität des Modells und der Dynamik der Korrelationen eine adäquate Modellierung der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix.

5 Fallstudie: VaR eines Portfolios mit GARCH Prozessen für die Volatilität

Die Fallstudie zielt darauf ab, die Berechnung des Value at Risk unter Verwendung von GARCH Prozessen zur Modellierung der bedingten Volatilität zu veranschaulichen. Im Portfoliofall besteht die Möglichkeit, die bedingte Varianz des Portfolios auf Basis der Portfoliorendite univariat oder ohne Aggregation auf Basis der Renditen der Einzelpositionen multivariat zu modellieren. Die Berechnungen dienen schwerpunktmäßig vor allem dazu, die univariaten und multivariaten Konzepte in Bezug auf die Prognosegüte der jeweiligen VaR Kennzahlen zu vergleichen.

Datensatz. Die Berechnung des Value at Risk wird für ein Portfolio aus drei Wertpapieren durchgeführt. Die Zusammensetzung erfolgte willkürlich, da in dieser Arbeit kein Anspruch auf eine optimale Risikodiversifikation gelegt wird. Tabelle 5.1. gibt eine Auflistung der Wertpapiere im Portfolio für die weitere Analyse. Der Datensatz stammt aus der Datenbank des Informationsdienstes Thomson Reuters und umfasst die Tagesschlusskurse für die drei Wertpapiere für einen Zeitraum von drei Jahren.

Tabelle 5.1. Wertpapierportfolio für die weitere Modellierung

Wertpapier	Kurszeichen	Börse	Zeitraum
E.ON SE	EONGn.DE	Xetra	01. Juli 2008 - 30. Juni 2011
Deutsche Börse AG	DB1Gn.DE	Xetra	01. Juli 2008 - 30. Juni 2011
BMW AG	BMWG.DE	Xetra	01. Juli 2008 - 30. Juni 2011

Um den Effekt der zeitabhängigen Volatilität zu veranschaulichen, liegen für die Analyse die Kursreihen mit je 765 Beobachtungen von Juli 2008 bis einschließlich Juni 2011 vor. Es wird damit beabsichtigt, einen Übergang zwischen zwei unterschiedlich volatilen Phasen zur Veranschaulichung der Dynamik der bedingten Volatilität in die Untersuchung aufzunehmen. Die Motivation, für die Zeitreihe das Jahr 2008 als Startpunkt zu wählen, liegt in der erhöhten Volatilität auf dem deutschen Markt

zu diesem Zeitpunkt als unmittelbare Auswirkung der Liquiditätskrise infolge der Insolvenz mehrerer großer Bankinstitute. Es wird unterstellt, dass zu jedem Zeitpunkt jeweils eine Aktie des jeweiligen Unternehmens gehalten wird. Im Anhang Tabelle A.1. und in Abbildung A.2. findet sich eine deskriptive Übersicht der Einzelpositionen und des Portfolios. Aus Platzgründen kann an dieser Stelle nicht weiter auf diese Aspekte eingegangen werden. In Kapitel 5.1 erfolgt die Modellschätzung und die Modellierung der bedingten Varianz. Alle in der Fallstudie angeführten Modelle werden dabei mit dem Statistikprogramm RATS geschätzt. Kapitel 5.2 stellt die Berechnung des Value at Risk vor und in Kapitel 5.3 wird die Prognosegüte des Value at Risk evaluiert.

5.1 Modellierung der bedingten Varianz mit GARCH Prozessen

Bei den univariaten Konzepten erfolgt die Modellierung der bedingten Portfoliovarianz auf Basis der kontinuierlichen Rendite des Portfolios. Hierzu werden die Kurse der Einzelpositionen addiert und aus dem Portfoliokurs die kontinuierliche Rendite gebildet. Im multivariaten Fall fließen die Zeitreihen der kontinuierlichen Renditen der Einzelpositionen separat in die Modelle zur Schätzung der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix ein. Aus der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix wird die bedingte Portfoliovarianz bestimmt.

5.1.1 Univariate Modellierung

Aufbauend auf der Darlegung der Vorteile eines GARCH Prozesses gegenüber ARCH in Kapitel 4.2.4 wird ein GARCH(1,1) Modell auf Basis der kontinuierlichen Portfoliorendite geschätzt. Die Ordnung des GARCH Prozesses ist mit dem Schwarz Informationskriteriums (SC) bestimmt worden. Für $p, q \in [1, 3]$ liefert der Vergleich der Informationskriterien, dass für $p = q = 1$ das Kriterium betragsmäßig am größten ist. Tabelle B.1. fasst die Parameterschätzung für das GARCH(1,1) Modell zusammen. Die p -Werte signalisieren, dass mit Ausnahme des Mittelwerts μ_G alle Parameter signifikant sind.

Test auf Informationsasymmetrie. Wie in Kapitel 4.2.6 gezeigt wurde, soll ein Test auf Asymmetrie feststellen, ob die Formulierung eines asymmetrischen

GARCH Modells sinnvoll ist und die Modellierung der bedingten Varianz dadurch aussagekräftiger wird. Gemäß Regressionsgleichung (4.23) wird die Signifikanz der Parameter ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 getestet. Tabelle 5.2. zeigt das Ergebnis der Schätzung unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Bei einzelner Betrachtung der Signifikanz der Parameter, wird deutlich, dass ϕ_1 und ϕ_2 auf dem 5% Niveau nicht signifikant sind. Dagegen deutet die Ablehnung der Nullhypothese $H_0 : \phi_3 = 0$ auf die Signifikanz des Steigungsdummy für positive Schocks. Offenbar hat die Größe von positiven Schocks einen asymmetrischen Effekt auf die bedingte Varianz. Die gemeinsame Insignifikanz der Parameter ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 lässt sich sofort am p -Wert zur F-Statistik ablehnen. Die alternative Teststatistik ζ übersteigt den kritischen Wert der Chiquadrat Verteilung von 7,815, sodass ebenfalls auf die gemeinsame Signifikanz zu schließen ist. Die Formulierung eines asymmetrischen GARCH Modells ist gerechtfertigt.

Tabelle 5.2. Engle-Ng Test auf Informationsasymmetrie

	$v_t^2 = \phi_0 + \phi_1 S_{t-1}^- + \phi_2 S_{t-1}^- \varepsilon_{t-1} + \phi_3 S_{t-1}^+ \varepsilon_{t-1} + \eta$		
	Koeffizient	t-Statistik	p -Wert
ϕ_0	0,950799 (0,081346)	11,688275	0,000000
ϕ_1	0,097013 (0,114182)	0,849635	0,395796
ϕ_2	-3,919348 (3,510265)	-1,116539	0,264545
ϕ_3	-10,226598 (3,492524)	-2,928140	0,003512
F-Statistik		3,545022	
p -Wert		0,014305	
$\zeta = T \cdot R^2$		763 · 0,013818 = 10,543380	

Das in Kapitel 4.2.6 vorgestellte GJR-GARCH Konzept wird herangezogen, um die Informationsasymmetrie zu modellieren. Gemäß Gleichung (4.21) für die bedingte Varianz wird das GJR-GARCH(1,1) Modell mit Hilfe der Maximum Likelihood Methode geschätzt. Die Schätzergebnisse für die Parameter sind ebenfalls in Tabelle B.1 dargestellt. Die Parameter in der bedingten Varianzgleichung sind auf dem 5% Niveau durchgängig signifikant. Lediglich der Mittelwert ist statistisch gesehen von null nicht verschieden.

Spezifikationsanalyse. Ein wichtiger Bestandteil der statistischen Modellierung sind die Spezifikationstests. Anhand der standardisierten Residuen v_t wird untersucht, ob die Modelle korrekt spezifiziert worden sind. Die Details zu den Tests, die nachfolgend beschrieben werden, sind in Tabelle C.1. zu finden. Für alle Tests versteht sich ein Signifikanzniveau von 5%. Da v_t eine standardisierte Größe ist, sollte ihr Erwartungswert null und ihre Varianz eins sein. Zu der Regressionsgleichung $v_t = c_1 + \eta$ wird mittels t-Test die Signifikanz des Parameters $c_1 = E(v_t)$ getestet. Die Nullhypothese, dass c_1 gleich null ist, kann in beiden Modellen nicht abgelehnt werden. Da für die Varianz $\text{Var}(v_t) = E(v_t^2)$ gilt, wird ebenso wie beim Erwartungswert verfahren. Zur Regressionsgleichung $v_t^2 = c_2 + \eta$ wird mit einem t-Test die Nullhypothese, dass $c_2 = E(v_t^2)$ gleich eins ist, getestet. Auch hier kann sie für beide Modelle nicht abgelehnt werden. Erwartungswert und Varianz weisen somit keine Anomalien auf. Als nächstes besteht die Anforderung an die standardisierten Residuen v_t , unkorreliert zu sein. Zudem dürften die quadrierten standardisierten Residuen keine Abhängigkeiten aufweisen, wenn die Modelle die Persistenz der Varianz korrekt spezifizieren. Die Ljung-Box Teststatistik, wie sie in Gleichung (3.5) bereits angeführt wurde, testet die Nullhypothese, dass keine linearen Abhängigkeiten bis zur spezifizierten Ordnung vorliegen. In beiden Modellen kann die Nullhypothese für die Ordnungen 5, 15 und 30 nicht abgelehnt werden. Für v_t liegt korrekterweise Nichtlinearität vor und beide Modelle geben die Dynamik der Varianz in der Portfoliorendite korrekt wieder, da auch die Quadrate eine Nichtlinearität vorweisen. Abschließend gibt der Jarque-Bera Test gemäß Gleichung (3.4) Auskunft darüber, ob v_t normalverteilt ist. Der Test legt erwartungsgemäß nahe, die Nullhypothese, dass v_t normalverteilt ist, für beide Modelle abzulehnen.

Systematik der Varianzmodellierung. Um das Prinzip der Berechnungen zu veranschaulichen, werden nachfolgend an relevanten Stellen der Fallstudie beispielhaft Rechnungen vorgestellt. Es sei angemerkt, dass alle Zahlenwerte gerundet sind, sodass Abweichungen zwischen den aufgezeigten Ergebnissen und den Ergebnissen laut Rechenweg entstehen können. Die Vorhersage der bedingten Varianz erfolgt unter Verwendung der bedingten Varianzgleichung (4.17) für $p = q = 1$. Zum Zeitpunkt t liegen am Ende eines Handelstages die aktuelle Schätzung der bedingten Varianz $\hat{\sigma}_{G,t|t-1}^2$, die aktuelle kontinuierliche Portfoliorendite R_t^c sowie der Mittelwert der Portfoliorendite $\hat{\mu}_G$ vor. Mit den Parametern des GARCH(1,1) Modells lässt sich auf Basis dieser Informationen eine Vorhersage der bedingten Varianz für den nächsten Handelstag treffen. Die Berechnung sieht mit für $t = 15.04.2010$ wie

folgt aus.

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{G,t+1|t}^2 &= \omega + \alpha(R_t^c - \hat{\mu}_G)^2 + \beta\hat{\sigma}_{G,t|t-1}^2 \\ &= 0,000005 + 0,096928(-0,000911 - 0,000693)^2 + 0,891596 \cdot 0,000118 \\ &= 0,000110\end{aligned}$$

Für die Berechnung wird auf die Rendite zurückgegriffen, da der Marktschock ε_t nicht messbar ist. Die Berechnung im asymmetrischen Modell ist nach demselben Schema durchzuführen. Abbildung 5.1. gibt die bedingte Varianz $\sigma_{G,t}^2$ im GARCH und GJR-GARCH Modell für die gesamte Stichprobe wieder. Ihr Ausschlag ist vor allem im vierten Quartal des Jahres 2008 deutlich zu sehen. Die Abbildung ist interpretierbar als tägliche Vorhersage der bedingten Varianz auf Basis der Informationen am Ende eines Handelstages analog zur obigen Beispielrechnung. Der Verlauf der bedingten Varianz zeigt nur marginale Unterschiede zwischen den Modellen. Das GJR-GARCH Modell bewirkt, dass die bedingte Varianz mit steigender Magnitude des positiven Schocks weniger stark ansteigt als im GARCH Konzept. Unumgänglich werden auch die Vorzeichenasymmetrie und der asymmetrische Effekt von der Größe der negativen Schocks modelliert.

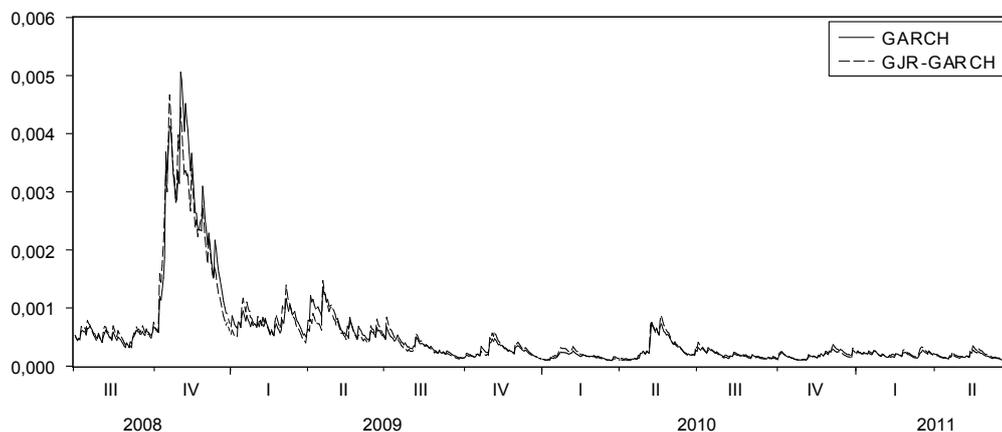


Abbildung 5.1. Bedingte Portfoliovarianz im GARCH und GJR-GARCH Modell

5.1.2 Multivariate Modellierung

In Kapitel 4.3 ist deutlich geworden, dass von den vorgestellten Modellen die bedingte Varianz-Kovarianzmatrix nur im BEKK, CCC und DCC Ansatz in jeden Fall positiv definit ist. Deshalb sollen diese Modelle in der Fallstudie zur Modellierung der bedingten Portfoliovarianz herangezogen werden. Die Ergebnisse der Parameterschätzung für das BEKK Modell finden sich in Tabelle B.2. beziehungsweise in Tabelle B.3. für das CCC und DCC Modell. Im BEKK Modell ist die Parameterinterpretation erschwert, da nicht eindeutig ist, wie sie die bedingte Varianz beeinflussen. Es wird deutlich, dass vier der sechs Parameter der unteren Dreiecksmatrix \mathbf{C} nicht signifikant sind. Somit setzen sich die Konstanten $\omega_{j,k}$ der Varianz- und Kovarianzgleichungen teilweise aus Parametern zusammen, die statistisch gesehen null sein müssten. Bei der großen Anzahl der Parameter, die zum einen geschätzt werden müssen und die in die Varianz- und Kovarianzgleichungen einfließen, ist eine insignifikante Konstante eher akzeptierbar. Viel gravierender ist die Insignifikanz der Parameter der Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} , welche die verzögerten Marktschocks und bedingten Varianzen und Kovarianzen gewichten. Die Matrix \mathbf{A} weist drei nicht signifikante Parameter auf. Hingegen sind alle Parameter der Matrix \mathbf{B} signifikant. Für das geschätzte BEKK Modell wäre eine bessere Spezifikation für die Matrix \mathbf{A} wünschenswert. Eine geringere Anzahl an zu schätzenden und leichter zu interpretierenden Parametern liefern das CCC und DCC Modell. Beide Modelle weisen identische nicht signifikante Parameter auf. Lediglich der Parameter ω_3 ist abgesehen von den in der Renditegleichungen nicht signifikanten Parametern μ_1 und μ_2 ebenfalls nicht signifikant.

Spezifikationsanalyse. Die Spezifikationstests, die im univariaten Fall durchgeführt wurden, können auf den multivariaten Fall übertragen werden. Es wird nun der Vektor der standardisierten Residuen $\mathbf{v}_t = (v_{1,t} \ v_{2,t} \ v_{3,t})'$ untersucht. Laut Definition ist der Erwartungswert des Vektors \mathbf{v}_t ein 3×1 Nullvektor $\mathbf{0}$ und die Varianz eine 3×3 Einheitsmatrix \mathbf{I} . Es wird dementsprechend für jedes Element die Nullhypothese $H_0 : E(v_{j,t}) = 0$ mit $j = 1, 2, 3$ wie im univariaten Fall überprüft. Da für die Varianz $\text{Var}(\mathbf{v}_t) = E(\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t')$ gilt, kann ebenfalls wie im univariaten Fall vorgegangen und eine Regression jedes Elements der Matrix $\mathbf{v}_t \mathbf{v}_t'$ als abhängige Variable mit einer Konstanten durchgeführt werden. Die t-Statistiken geben auch hier Auskunft über die Signifikanz der Parameter. Es werden die Nullhypothesen $H_0 : E(v_{j,t}^2) = 1$ und $H_0 : E(v_j v_{k,t}) = 0$ für $j, k = 1, 2, 3$ getestet. Mit Ausnahme des Elements $v_1 v_{3,t}$

im DCC Modell kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Die einfachen Hypothesentests in Bezug auf Erwartungswert und Varianz deuten somit auf keine Misspezifikation der BEKK und CCC Modelle. Lediglich im DCC Ansatz ist ein kleiner Makel vorhanden. Die Abhängigkeitsstruktur wird mit der Ljung-Box Statistik für die Ordnungen $m = 5, 15, 30$ überprüft. Zum einen werden die Elemente des Vektors \mathbf{v}_t auf Nichtlinearität getestet. Zum anderen dürften die Quadrate der standardisierten Residuen sowie die Kreuzprodukte keine Abhängigkeiten aufweisen. Alle Modelle weisen einige wenige Misspezifikationen auf, da in diesen Fällen die Nullhypothese einer Nichtlinearität abgelehnt wird. Die Details finden sich in den Tabellen C.2., C.3. und C.4. im Anhang. Des Weiteren bestätigt der Jarque-Bera Test die zu erwartende Ablehnung der Normalverteilungshypothese in allen Modellen für alle Elemente des Vektors der standardisierten Residuen. Nichtsdestotrotz werden die Modelle nicht verworfen. Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass sie nicht optimal spezifiziert sind.

Systematik der Varianzmodellierung. Die Berechnung der Portfoliovarianz soll am CCC Modell veranschaulicht werden. Im ersten Schritt werden die bedingten Varianzen gemäß der GARCH(1,1) Prozesse berechnet. Es soll weiterhin $t = 15.04.2010$ gelten:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{j,j,t+1|t} &= \omega_j + \alpha_j (R_{j,t}^c - \hat{\mu}_j)^2 + \beta_j \hat{\sigma}_{j,j,t|t-1} \\ \hat{\sigma}_{1,1,t+1|t} &= 0,000013 + 0,107296(0,010508 + 0,000361)^2 + 0,858167 \cdot 0,000193 \\ &= 0,000192 \\ \hat{\sigma}_{2,2,t+1|t} &= 0,000008 + 0,072896(-0,003887 - 0,000271)^2 + 0,909882 \cdot 0,000220 \\ &= 0,000210 \\ \hat{\sigma}_{3,3,t+1|t} &= 0,000007 + 0,049212(-0,005363 - 0,002099)^2 + 0,938775 \cdot 0,000234 \\ &= 0,000230\end{aligned}$$

Dies lässt die Berechnung der bedingten Kovarianzen zu:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{j,k,t+1|t} &= \varrho_{j,k} \sqrt{\hat{\sigma}_{j,j,t+1|t} \hat{\sigma}_{k,k,t+1|t}} \\ \hat{\sigma}_{2,1,t+1|t} &= 0,445579 \sqrt{0,000210 \cdot 0,000192} = 0,000089 \\ \hat{\sigma}_{3,1,t+1|t} &= 0,364714 \sqrt{0,000230 \cdot 0,000192} = 0,000076 \\ \hat{\sigma}_{3,2,t+1|t} &= 0,447060 \sqrt{0,000230 \cdot 0,000210} = 0,000098\end{aligned}$$

Mit der vollständigen bedingten Varianz-Kovarianzmatrix wird nun die bedingte Portfoliovarianz berechnet:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{G,t+1|t}^2 &= \mathbf{w}'_t \hat{\Sigma}_{t+1|t} \mathbf{w}_t \\ &= \begin{pmatrix} 0,237839 \\ 0,469379 \\ 0,292782 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0,000193 & 0,000089 & 0,000076 \\ 0,000089 & 0,000220 & 0,000098 \\ 0,000076 & 0,000098 & 0,000234 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,237839 \\ 0,469379 \\ 0,292782 \end{pmatrix} \\ &= 0,000134\end{aligned}$$

Abbildung 5.2. veranschaulicht die bedingte Portfoliovarianz für das BEKK, CCC und DCC Modell. Im Vergleich zum univariaten Fall zeigen sich deutlichere Unterschiede zwischen den multivariaten Modellen bei der Modellierung der bedingten Portfoliovarianz. Besonders im vierten Quartal des Jahres 2008 sind teilweise deutliche Abweichungen festzustellen.

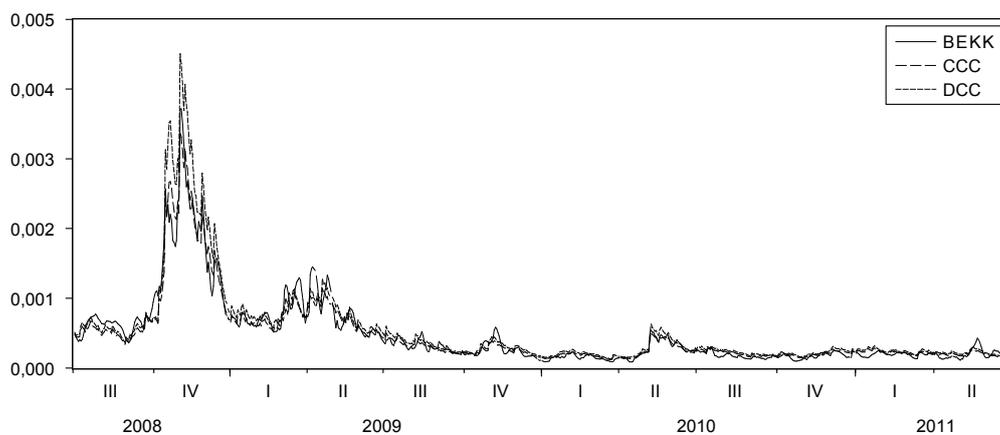


Abbildung 5.2. Bedingte Portfoliovarianz im BEKK, CCC und DCC Modell

5.2 Berechnung des Value at Risk

Nachfolgend wird der Value at Risk auf Basis der täglichen Volatilitätsschätzung für eine Haltedauer von einem Tag berechnet. Die Logik zur Bestimmung des Value at Risk folgt der Logik bei der Berechnung der bedingten Varianz. Am Ende eines Handelstages wird der Risikobetrag für den nachfolgenden Tag bestimmt. Mit der

Festsetzung der Haltedauer für einen Tag wird sich an an der regulatorischen Vorgabe zur Beurteilung der Prognosegüte orientiert. Gemäß Paragraph 318 der Solvabilitätsverordnung (SolvV) ist, „die Prognosegüte eines Risikomodells (..) mittels eines täglichen Vergleichs des anhand des Risikomodells auf der Basis einer Haltedauer von einem Arbeitstag ermittelten potenziellen Risikobetrags mit der Wertveränderung der in die modellmäßige Berechnung einbezogenen einzelnen Finanzinstrumente oder Finanzinstrumentengruppen zu ermitteln“ (§318 Abs.1 SolvV). Auf Basis dieser Berechnungen erfolgt ein Vergleich der univariaten und multivariaten Konzepte. Es darf allerdings nicht vergessen werden, dass für bankinterne Risikomodelle, wie in Kapitel 1 einleitend festgehalten wurde, eine Haltedauer von zehn Tagen gefordert wird. Es wird zwar von einer Berechnung des Value at Risk für eine Haltedauer von zehn Tagen in diesem Kapitel aufgrund des Umfangs der damit verbundenen Ausführungen abgesehen, jedoch wird im Anhang in Abschnitt D beispielhaft am GARCH(1,1) Prozess aufgezeigt, wie die Berechnung durchgeführt werden könnte.

5.2.1 Berechnung bei univariater Modellierung der Volatilität

Da die kontinuierliche Portfoliorendite vorliegt, berechnet sich der Value at Risk gemäß Gleichung (2.10) mit dem Unterschied, dass die bedingte Portfoliovolatilität vorliegt. Der Value at Risk wird für ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0,99$ bestimmt. Für die beispielhafte Berechnung für $t = 15.04.2010$ ergibt sich der Value at Risk mit der Volatilitätsschätzung im GARCH(1,1) Modell zu:

$$\begin{aligned}\widehat{VaR} &= -S_{G,t}(e^{\hat{\mu}_G + \hat{\sigma}_{G,t+1|t}N_{0,01}} - 1) \\ &= -120,67(e^{0,000693 + \sqrt{0,000110}(-2,3262)} - 1) = 2,83 \text{ EUR}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Die Berechnung beruht auf dem Portfoliowert zum Zeitpunkt t und der Volatilitätsschätzung für den nachfolgenden Tag. Folglich wird das Portfolio nur mit einer Risikowahrscheinlichkeit von 1% die Verlustschränke von 2,83 EUR am 16.04.2010 überschreiten. Abbildung 5.3. stellt die Value at Risk Schranken sowie den tatsächlich eingetretenen Verlust für alle Zeitpunkte grafisch dar. Es ist nicht erstaunlich, dass das Risikomaß mit derselben Dynamik schwingt wie die bedingte Varianz beziehungsweise die Volatilität. Viel interessanter ist die Schwingung unter Berücksichtigung des eingetretenen Verlusts. Auf den ersten Blick scheint der Verlust die Schranken in nur sehr wenigen Fällen zu übersteigen. Eine Validierung des Risiko-

maßes erfolgt in Kapitel 5.3.

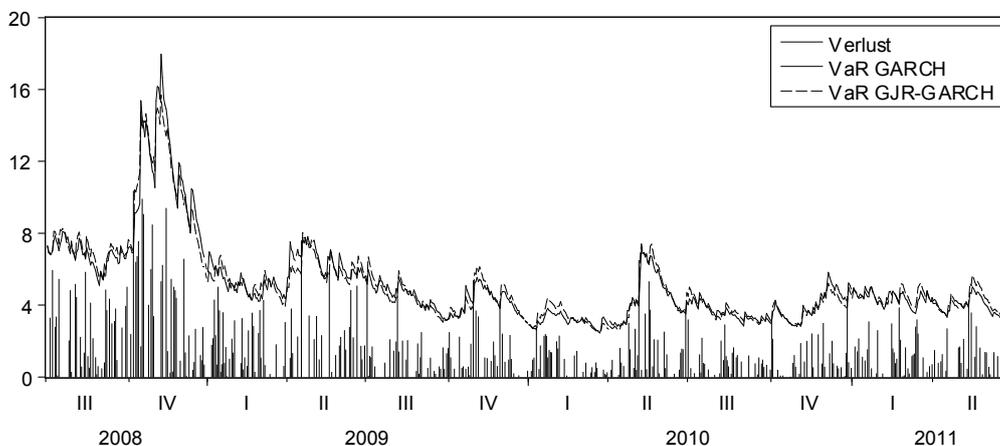


Abbildung 5.3. Tatsächlicher Portfolioverlust und Value at Risk nach GARCH und GJR-GARCH

5.2.2 Berechnung bei multivariater Modellierung der Volatilität

Aus Gründen der Einheitlichkeit soll der Value at Risk ebenso wie bei der Berechnung bei univariater Modellierung der Volatilität auf Basis der kontinuierlichen Portfoliorendite berechnet werden. Es gilt dementsprechend das Mapping in Kapitel 2.3.2. Ungeachtet dessen, dass es sich um ein Portfolio handelt, wird die Summe der normalverteilten kontinuierlichen Rendite wieder als normalverteilt angenommen. Der einzige Unterschied zur Gleichung (5.1) ist, dass der Mittelwert der Portfoliorendite im Zeitverlauf schwankt, da die Portfoliogewichte nicht konstant sind. Für selbiges Beispiel berechnet sich im ersten Schritt die erwartete Portfoliorendite im CCC Modell am $t = 15.04.2010$ wie folgt:

$$\hat{\mu}_{G,t+1|t} = \mathbf{w}'_t \hat{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} 0,237839 & 0,469379 & 0,292782 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,000361 \\ 0,000271 \\ 0,002099 \end{pmatrix} = 0,000656$$

Für die Berechnung liegen die Portfoliogewichte am 15.04.2010 sowie die geschätzten Mittelwerte der Einzelpositionen im CCC Modell vor. Folglich berechnet sich der

Value at Risk im CCC Modell basierend auf den Informationen am $t = 15.04.2010$ für den Folgetag zu:

$$\begin{aligned}\widehat{VaR} &= -S_{G,t}(e^{\hat{\mu}_{G,t+1|t} + \hat{\sigma}_{G,t+1|t}N_{0,01}} - 1) \\ &= -120,67(e^{0,000656 + \sqrt{0,000134}(-2,3262)} - 1) = 3,13 \text{ EUR}\end{aligned}$$

Abbildung 5.4. bildet den tatsächlichen Portfolioverlust und den Value at Risk, der jeweils aus der Volatilitätsmodellierung im BEKK, CCC und DCC Ansatz resultiert, für die gesamte Stichprobe ab. Basierend auf den drei multivariaten Modellen schwingt der Value at Risk gleichförmig. Im BEKK Ansatz kann eine erhöhte Variabilität festgestellt werden, da sich der Value at Risk verstärkt auf und ab bewegt. Inwieweit der multivariate Ansatz die Prognosegüte des Value at Risk im Vergleich zu den univariaten Modellen verbessert, ist mitunter Gegenstand des nächsten Abschnitts.

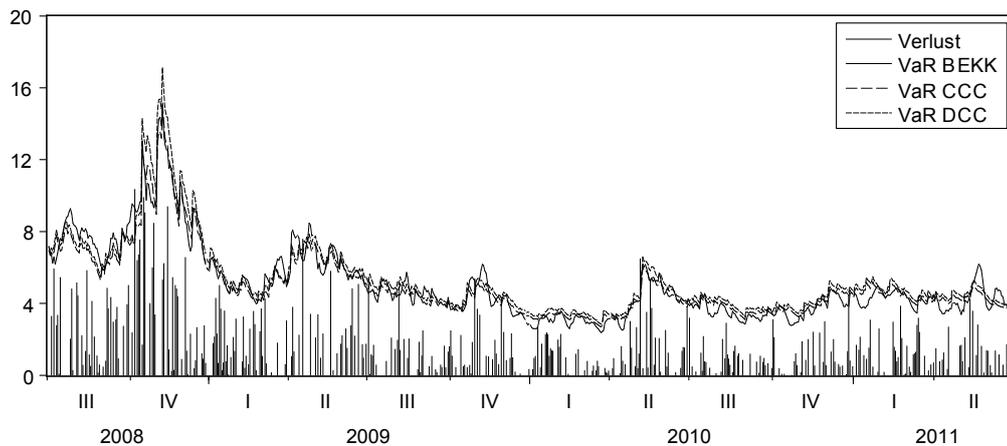


Abbildung 5.4. Tatsächlicher Portfolioverlust und Value at Risk nach BEKK, CCC und DCC

5.3 Validierung des Value at Risk

Bei der Validierung des Value at Risk ist es von Interesse, zu testen, ob das Risikomaß korrekt modelliert wird. Ein naheliegender Ausgangspunkt ist, festzustellen, wie oft der tatsächliche Verlust die kritische Schranke, die der Value at Risk vorgibt, innerhalb einer Periode in der Vergangenheit überschritten hat. Man bezeichnet

dieses Ereignis als Ausnahme. Die Ausnahmen lassen sich mit den erwarteten Überschreitungen, die gemäß einer vorgegebenen Risikowahrscheinlichkeit anzunehmen waren, vergleichen. Die Validierung zielt darauf ab, zu überprüfen, ob der Value at Risk statistisch signifikant von diesem Erwartungswert abweicht. Basierend auf Überschreitungen wird solch ein Vorgehen zur Überprüfung der Prognosegüte eines Risikomodells als Backtesting bezeichnet. Hierfür stehen verschiedene statistische Tests zur Verfügung.

Indikatorvariable. Für die folgende Betrachtung wird die Indikatorvariable I_{t+i} definiert, die den Wert eins annimmt, wenn eine Ausnahme vorliegt, das heißt, wenn der tatsächliche Verlust den Value at Risk übersteigt. Andernfalls nimmt sie den Wert null an. Da das Backtesting für T Tage durchgeführt wird, gilt formal:

$$I_{t+i} = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta V_{t+i} < -\widehat{\text{VaR}}_{t+i|t+i-1} \text{ mit } i = 1, 2, \dots, T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Backtesting soll für den Zeitraum, für den eine Value at Risk Prognose vorliegt, durchgeführt werden. Es werden 764 Wertepaare verglichen, sodass bei der standardmäßigen Risikowahrscheinlichkeit von einem Prozent, acht Ausnahmen zu erwarten sind. Tabelle 5.3. zeigt die Anzahl der Überschreitungen für die geschätzten Modelle in der Fallstudie innerhalb dieses Zeitraums. Die univariaten Modelle besitzen die größte Anzahl an Überschreitungen. Die Ausnahmen bei den multivariaten Ansätzen sind geringer, wobei lediglich im BEKK Konzept der Erwartungswert eingehalten wird und im DCC Modell die Ausnahmen sogar geringer ausfallen. Nachfolgend wird überprüft, ob die Ausnahmen statistisch gesehen zu einer Risikowahrscheinlichkeit von einem Prozent passen und die Abweichungen zum erwarteten Wert somit lediglich auf die Stichprobe zurückzuführen sind.

Tabelle 5.3. Anzahl der Value at Risk Überschreitungen für die GARCH Modelle

Modell	Ausnahmen
GARCH(1,1)	12
GJR-GARCH(1,1)	12
BEKK	8
CCC	10
DCC	6

5.3.1 Binomialtest

Die Wahrscheinlichkeit, mit der die Indikatorvariable den Wert eins annimmt sollte idealerweise der Risikowahrscheinlichkeit des zugehörigen Risikomodells entsprechen. Wie bereits angeführt, impliziert die Vertrauenswahrscheinlichkeit bei der Value at Risk Berechnung von $\alpha = 0,99$ den Erwartungswert der Indikatorvariablen $\beta = 1 - \alpha$, kurz: $E(I_{t+i}) = \beta$. Die Zufallsvariablen I_{t+i} sind mit der Risikowahrscheinlichkeit, die in einem *korrekten* Risikomodell der Ausnahmewahrscheinlichkeit β entspricht, bernoulliverteilt:

$$I_{t+i} \stackrel{iid}{\sim} \text{BE}(\beta)$$

Die Summe der unabhängig und identisch bernoulliverteilten Indikatorvariablen ist dementsprechend binomialverteilt. Mit der Wahrscheinlichkeit für eine Ausnahme β und mit der Anzahl der Indikatorvariablen T gilt:

$$\sum_{i=1}^T I_{t+i} \sim \text{B}(T, \beta)$$

Bezeichnet n die Anzahl der Ausnahmen, gilt weiterhin für die Dichtefunktion:

$$f(n) = \binom{T}{n} \beta^n (1 - \beta)^{T-n} \quad n = 0, 1, \dots, T$$

Mit einem Binomialtest lässt sich nun die Nullhypothese $H_0 : \beta = 0,01$ gegen die Alternative $H_1 : \beta \neq 0,01$ überprüfen. Es wird also getestet, ob die festgelegte Fehlerwahrscheinlichkeit des Risikomodells tatsächlich der Wahrscheinlichkeit für eine Ausnahme entspricht. Mit anderen Worten wird getestet, ob der Value at Risk signifikant häufiger oder seltener überschritten wird, als die Risikowahrscheinlichkeit des Modells von einem Prozent es vermuten lassen würde. Die Teststatistik ist dabei die Anzahl der Ausnahmen n , die bei Gültigkeit der Nullhypothese eben $\text{B}(T; 0,01)$ -verteilt ist. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Anzahl der Ausnahmen den unteren kritischen Wert c_u unterschreitet oder den oberen kritischen Wert c_o übersteigt:

$$n < c_u \text{ oder } n > c_o$$

Die kritischen Schranken ergeben sich dabei zum Signifikanzniveau α derart, dass gilt:

$$c_u : \sum_{n=0}^{c_u-1} f(n) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ und } \sum_{n=0}^{c_u} f(n) > \frac{\alpha}{2}$$
$$c_o : \sum_{n=0}^{c_o-1} f(n) < 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ und } \sum_{n=0}^{c_o} f(n) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Es wird ein zweiseitiger Test verwendet, da nicht nur beurteilt werden soll, ob die Modelle das Risiko systematisch unterschätzen, sondern ob es womöglich auch überschätzt wird. Letztere Beurteilung ist aus Bankensicht interessant, da eine Überschätzung des Risikos höhere Mindestkapitalanforderungen nach sich ziehen würde. Zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ und mit $T = 764$ ergeben sich die kritischen Schranken zu $c_u = 3$ und $c_o = 13$. Alle Ausnahmen in Tabelle 5.3. liegen somit im Annahmebereich $[3, 13]$ und die Nullhypothese kann nicht abgelehnt werden. Statistisch gesehen wird der Value at Risk in keinem Modell von dem tatsächlichen Portfolioverlust häufiger oder seltener überschritten als die erwarteten acht Ausnahmen. Die Risikowahrscheinlichkeit von 0,01 bei der Value at Risk Berechnung ist von der Wahrscheinlichkeit für eine Ausnahme nicht signifikant verschieden.

6 Fazit

Der Schwerpunkt der Arbeit liegt darin, Prozesse mit generalisierter autoregressiver bedingter Heteroskedastie vorzustellen, um eine im Zeitverlauf variierende Modellierung der Volatilität zu ermöglichen. Die Motivation für das Heranziehen der GARCH Modelle liegt in den stilisierten Fakten der kontinuierlichen Rendite. Speziell die Abhängigkeit der quadrierten Renditen lässt auf das Volatilitätsclustering schließen, sodass die Annahme einer konstanten Volatilität der Komplexität der Volatilitätsstruktur nicht gerecht wird. Da die Volatilität als Risikofaktor in die Berechnung des Value at Risk zur Bestimmung des Marktrisikos einfließt, eignen sich GARCH Prozesse zur Quantifizierung dieses Parameters. Dementsprechend findet in dieser Arbeit die Modellierung der Volatilität durch GARCH Prozesse vor dem Hintergrund der Value at Risk Berechnung statt. Das Risikomaß wird dabei für den Portfoliofall bestimmt.

Die Modellierung der Portfoliovolatilität ist sowohl durch univariate als auch durch multivariate GARCH Konzepte möglich, was in der Fallstudie verdeutlicht wird. Basierend auf verschiedenen Ansätzen für die GARCH Modellierung wird der Value at Risk bestimmt, sodass die verschiedenen Risikomaße in Bezug auf die Prognosegüte verglichen werden. Der Binomialtest zeigt für das Portfolio in der Fallstudie, dass die verwendeten univariaten und multivariaten GARCH Modelle für die Volatilitätsmodellierung einen Value at Risk hervorbringen, dessen Ausnahmen sich nicht signifikant von der erwarteten Anzahl der Ausnahmen unterscheiden. Somit greifen die univariaten und multivariaten Modelle die Volatilitätsstruktur angemessen auf und führen zu einem adäquat spezifizierten Risikomaß. Es wird jedoch deutlich, dass die Ausnahmen bei multivariater Modellierung der Volatilität abnehmen. *Für das konkrete Portfolio führen multivariate GARCH Prozesse für die Volatilität zu einer verbesserten Prognose des Value at Risk.* Bei der Verwendung multivariater Ansätze sollte jedoch die verbesserte Modellierung ins Verhältnis zum rechnerischen Aufwand gesetzt werden. Ein beträchtlicher Anstieg der Einzelpositionen im Portfolio der Fallstudie bedeutet eine starke Zunahme der Komplexität, die womöglich mit dem Anstieg der Prognosegüte nicht mehr gerechtfertigt werden kann. Aus prakti-

scher Sicht wäre in solch einem Fall ein Zugriff auf univariate Modelle legitim, da diese, wie bereits erwähnt, die Volatilität ebenfalls angemessen modellieren.

Es ist ersichtlich, dass solch eine Feststellung anhand *einer* Untersuchung nicht repräsentativ sein kann. Eine umfassende empirische Untersuchung müsste bezüglich einer univariaten und multivariaten Volatilitätsmodellierung für die Value at Risk Berechnung durchgeführt werden, um ein fundierteres Urteil bilden zu können. Es steht jedoch außer Frage, dass GARCH Prozesse im Allgemeinen durch die explizite Berücksichtigung der bedingten Heteroskedastie für die Modellierung der Volatilität sehr gut geeignet sind. Sie vereinen die Eigenschaft der relativ einfachen Schätzbarkeit mit dem Merkmal, die Volatilität einer Zeitreihe sehr präzise modellieren zu können.

Literatur

- Alexander, Sidney S. (1961). »Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks«. In: *Industrial Management Review* 2, S. 7–26.
- Bachelier, Louis (1900). »Théorie de la Spéculation«. In: *Annales scientifiques de l'É.N.S.* 3.17, S. 21–86.
- Black, Fischer und Scholes, Myron (1973). »The Pricing of Options and Corporate Liabilities«. In: *The Journal of Political Economy* 81.3, S. 637–654.
- Black, Fischer (1976). »Studies of Stock Price Volatility Changes«. In: *Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistic Section*. American Statistical Association, S. 177–181.
- Bollerslev, Tim, Chou, Ray Y. und Kroner, Kenneth F. (1992). »ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence«. In: *Journal of Econometrics* 52.1-2, S. 5–59.
- Bollerslev, Tim, Engle, Robert F. und Wooldridge, Jeffrey M. (1988). »A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariance«. In: *Journal of Political Economy* 96.1, S. 116–131.
- Bollerslev, Tim (1986). »Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity«. In: *Journal of Econometrics* 31.3, S. 307–327.
- Bollerslev, Tim (1990). »Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized Arch Model«. In: *The Review of Economics and Statistics* 72.3, S. 498–505.
- Brooks, Chris (2008). »Introductory Econometrics for Finance«. 2. Aufl. Cambridge University Press.
- Buttler, Michael und Papenbrock, Jochen (2007). »Die Alpha-stabile Welt«. In: *FB News* 5, S. 2–5. URL: http://www.itinera-consulting.com/pages/download/fachberatung_showcase2/Artikel.

- Cont, Rama (2001). »Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues«. In: *Quantitative Finance* 1.2, S. 223–236.
- Cremers, Heinz (2013). »Skript im Fach Risikomanagement«. Frankfurt School of Finance & Management.
- Dickey, David A. und Fuller, Wayne A. (1979). »Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root«. In: *Journal of the American Statistical Association* 74.366, S. 427–431.
- Dickey, David A. (1976). »Estimation and Hypothesis Testing in Nonstationary Time Series«. Diss. Iowa State University.
- Ding, Zhuanxin, Granger, Clive W.J. und Engle, Robert F. (1993). »A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model«. In: *Journal of Empirical Finance* 1.1, S. 83–106.
- Engle, Robert F., Lilien, David M. und Robins, Russel P. (1987). »Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model«. In: *Econometrica* 55.2, S. 391–407.
- Engle, Robert F. und Bollerslev, Tim (1986). »Modelling the Persistence of Conditional Variances«. In: *Econometric Reviews* 5.1, S. 1–50.
- Engle, Robert F. und Kroner, Kenneth F. (1995). »Multivariate Simultaneous Generalized ARCH«. In: *Econometric Theory* 11.1, S. 122–150.
- Engle, Robert F. und Ng, Victor K. (1993). »Measuring and Testing the Impact of News on Volatility«. In: *The Journal of Finance* 48.5, S. 1749–1778.
- Engle, Robert F. und Sheppard, Kevin (2001). »Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH«. NBER Working Paper Series, Nr. 8554. National Bureau of Economic Research. URL: <http://www.nber.org/papers/w8554>.
- Engle, Robert F. (1982). »Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation«. In: *Econometrica* 50.4, S. 987–1008.
- Engle, Robert F. (2002). »Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models«. In: *Journal of Business & Economic Statistics* 20.3, S. 339–350.

- Fama, Eugene F. (1965). »Random Walks in Stock Market Prices«. In: *Financial Analysts Journal* 21.5, S. 55–59.
- Franke, Jürgen, Härdle, Wolfgang und Hafner, Christian (2004). »Einführung in die Statistik der Finanzmärkte«. 2. Aufl. Springer.
- Friedmann, Ralph und Sanddorf-Köhle, Walter (2000). »Finanzmarktökonomie am Beispiel des 'Value at Risk'«. In: *Magazin Forschung* 2, S. 26–32.
- Glosten, Lawrence R., Jagannathan, Ravi und Runkle, David E. (1993). »On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks«. In: *The Journal of Finance* 48.5, S. 1779–1801.
- Higgins, M. L. und Bera, A. K. (1992). »A Class of Nonlinear ARCH Models«. In: *International Economic Review* 33.1, S. 137–158.
- Hull, John C. (2012). »Options, Futures, And Other Derivatives«. Pearson Education.
- J.P. Morgan/ Reuters (1996). »RiskMetrics™ - Technical Document«. 4. Aufl.
- Jarque, Carlos M. und Bera, Anil K. (1980). »Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals«. In: *Economics Letters* 6.3, S. 255–259.
- Lamoureux, Christopher G. und Lastrapes, William D. (1990). »Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model«. In: *Journal of Business & Economic Statistics* 8.2, S. 225–234.
- Ljung, G. M. und Box, G. E. P. (1978). »On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models«. In: *Biometrika* 65.2, S. 305–309.
- Mandelbrot, Benoit (1963). »The Variation of Certain Speculative Prices«. In: *The Journal of Business* 36.4, S. 394–419.
- Menn, Christian und Rachev, Svetlozar T. (2006). »Calibrated FFT-based Density Approximations for α -stable Distributions«. In: *Computational Statistics and Data Analysis* 50.8, S. 1891–1904.
- Menn, Christian und Rachev, Svetlozar T. (2009). »Smoothly Truncated Stable Distributions, GARCH-Models, and Option Pricing«. In: *Mathematical Methods of Operations Research* 69.3, S. 411–438.

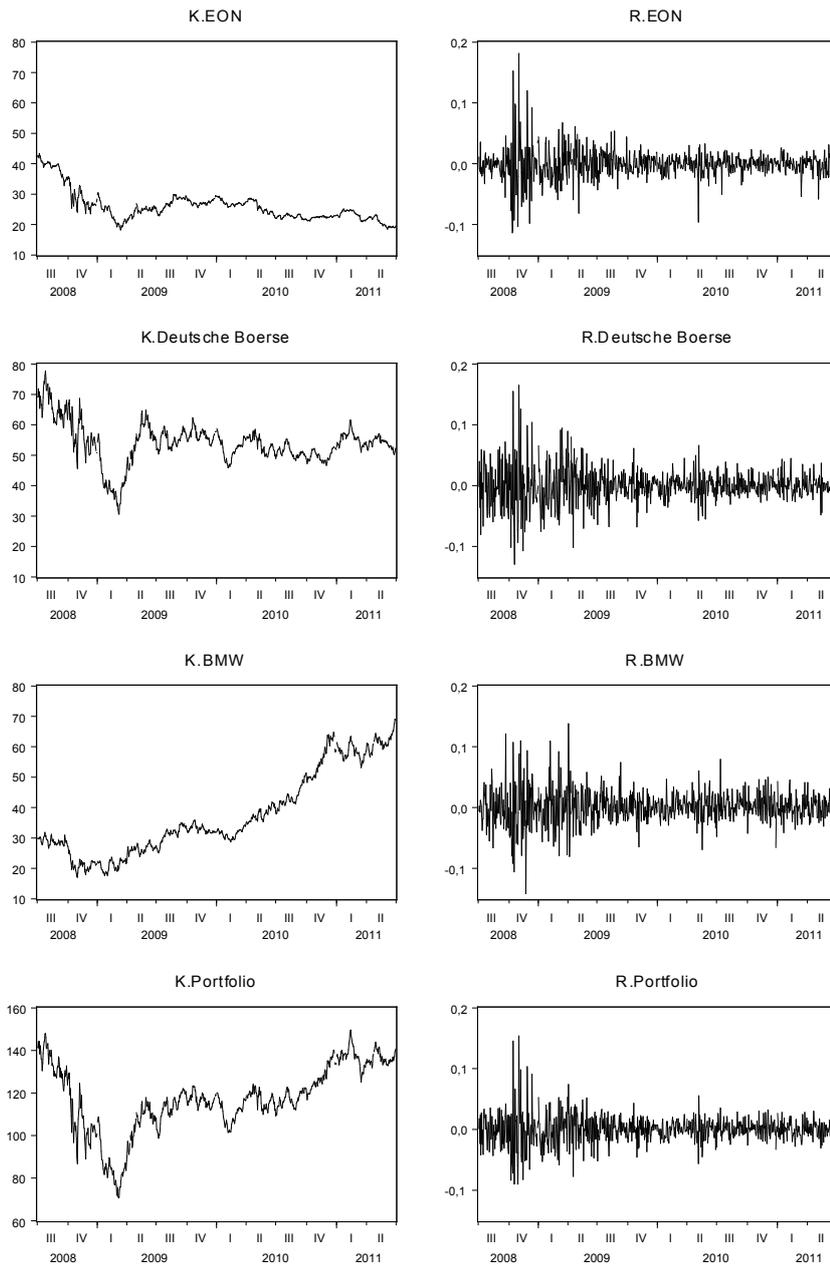
- Nelson, Daniel B. (1990). »Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model«. In: *Econometric Theory* 6.3, S. 318–334.
- Osborne, M. (1959). »Brownian Motion in the Stock Market«. In: *Operations Research* 7.2, S. 145–173.
- Pagan, Adrian P. und Schwert, William G. (1990). »Alternative Models for Conditional Stock Volatility«. In: *Journal of Econometrics* 45.1-2, S. 267–290.
- Rachev, Svetlozar T., Hrsg. (2003). »Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance«. Elsevier Science B.V.
- Said, Said E. und Dickey, David A. (1984). »Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order«. In: *Biometrika* 71.4, S. 599–607.
- Sanddorf-Köhle, Walter (2010). »Skript im Fach Arbitrage- und Gleichgewichtsmodelle«. Universität des Saarlandes.
- Sanddorf-Köhle, Walter (2012). »Skript im Fach Risikomessung und Value at Risk«. Universität des Saarlandes.
- Sanddorf-Köhle, Walter (2013). »Skript im Fach Ökonometrie und Zeitreihenanalyse«. Frankfurt School of Finance & Management.
- Schumpeter, Joseph (1933). »The Common Sense of Econometrics«. In: *Econometrica* 1.1, S. 5–12.
- Taleb, Nassim Nicholas (1997). »Dynamic Hedging: Managing Vanilla and Exotic Options«. John Wiley & Sons.

A Deskriptive Übersicht zur Fallstudie

A.1 Deskriptive Statistiken

	EON	Deutsche Börse	BMW	Portfolio
Tagesschlusskurs				
Beobachtungen	765	765	765	765
Mittelwert	25,94	53,96	37,54	117,44
Median	24,95	54,10	32,61	117,37
Maximum	43,40	77,78	69,10	149,56
Minimum	18,19	30,64	17,04	70,69
Standardabweichung	4,92	6,7284	13,83	15,70
Kontinuierliche Tagesrendite				
Beobachtungen	764	764	764	764
Mittelwert	-0,001007	-0,000363	0,001088	-0,000006
Median	-0,000441	-0,000196	0,000515	0,000524
Maximum	0,181282	0,165094	0,138356	0,153821
Minimum	-0,113645	-0,129479	-0,141391	-0,090006
Standardabweichung	0,023790	0,029078	0,027315	0,023046
Schiefe	0,564459	0,360918	0,207914	0,471134
Kurtosis	13,448591	7,172484	6,526730	9,626897

A.2 Tagesschlusskurs und kontinuierliche Tagesrendite der Einzelpositionen und des Portfolios



B Parameterschätzung der GARCH Modelle zur Fallstudie

B.1 GARCH(1,1) und GJR-GARCH(1,1) Modell

	GARCH(1,1)		GJR-GARCH(1,1)	
	Koeffizient	<i>p</i> -Wert	Koeffizient	<i>p</i> -Wert
μ_G	0,000693 (0,000623)	0,265761*	0,000302 (0,000615)	0,623119*
ω	0,000005 (0,000002)	0,041584	0,000007 (0,000003)	0,009594
α	0,096115 (0,021083)	0,000005	0,048504 (0,022073)	0,027987
β	0,892180 (0,022231)	0,000000	0,881777 (0,022369)	0,000000
γ	– –	–	0,104321 (0,043076)	0,015443
$\ln L(\theta)$	1971,88484		1975,49583	
<i>SC</i>	-3917,21540		-3917,79882	

Der Standardfehler ist jeweils in Klammern ausgewiesen. Nicht signifikante Parameter sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

B.2 BEKK-GARCH(1,1) Modell

	Koeffizient	<i>p</i> -Wert		Koeffizient	<i>p</i> -Wert
μ_1	-0,000602 (0,000540)	0,265072*	$a_{2,3}$	-0,212745 (0,036364)	0,000000
μ_2	-0,000255 (0,000628)	0,685025*	$a_{3,1}$	-0,052402 (0,034452)	0,128253*
μ_3	0,001697 (0,000718)	0,01814	$a_{3,2}$	0,129492 (0,033998)	0,000140
$c_{1,1}$	-0,000756 (0,000898)	0,399868*	$a_{3,3}$	0,198800 (0,035930)	0,000000
$c_{2,1}$	-0,002500 (0,000800)	0,001788	$b_{1,1}$	0,886113 (0,015300)	0,000000
$c_{2,2}$	-0,000003 (0,006916)	0,999633*	$b_{1,2}$	-0,184849 (0,023591)	0,000000
$c_{3,1}$	-0,003720 (0,000751)	0,000001	$b_{1,3}$	-0,138729 (0,027952)	0,000001
$c_{3,2}$	-0,000005 (0,009491)	0,999604*	$b_{2,1}$	0,174670 (0,012665)	0,000000
$c_{3,3}$	0,000000 (0,001618)	0,999962*	$b_{2,2}$	1,070175 (0,012895)	0,000000
$a_{1,1}$	0,226895 (0,034279)	0,000000	$b_{2,3}$	0,208808 (0,019787)	0,000000
$a_{1,2}$	0,074732 (0,035575)	0,035666	$b_{3,1}$	-0,050689 (0,020233)	0,012238
$a_{1,3}$	0,210154 (0,038094)	0,000000	$b_{3,2}$	-0,152301 (0,018816)	0,000000
$a_{2,1}$	-0,064423 (0,031361)	0,039952	$b_{3,3}$	0,882527 (0,016681)	0,000000
$a_{2,2}$	0,135732 (0,034198)	0,000072	–	–	–
$\ln L(\boldsymbol{\theta})$	5754,01898				

Der Standardfehler ist jeweils in Klammern ausgewiesen. Nicht signifikante Parameter sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

B.3 CCC-GARCH(1,1) und DCC-GARCH(1,1) Modell

	CCC-GARCH(1,1)		DCC-GARCH(1,1)	
	Koeffizient	<i>p</i> -Wert	Koeffizient	<i>p</i> -Wert
μ_1	-0,000361 (0,000587)	0,539303*	-0,000378 (0,000619)	0,541886*
μ_2	0,000271 (0,000706)	0,700617*	0,000222 (0,000760)	0,770039*
μ_3	0,002099 (0,000782)	0,007291	0,002129 (0,000849)	0,012120
ω_1	0,000013 (0,000004)	0,000934	0,000013 (0,000004)	0,001038
ω_2	0,000008 (0,000003)	0,008714	0,000009 (0,000004)	0,013456
ω_3	0,000007 (0,000004)	0,055147*	0,000007 (0,000004)	0,051269*
α_1	0,107296 (0,025183)	0,000020	0,105063 (0,023498)	0,000008
α_2	0,072896 (0,018404)	0,000075	0,084152 (0,021483)	0,000090
α_3	0,049212 (0,013573)	0,000288	0,054027 (0,014087)	0,000126
β_1	0,858167 (0,029282)	0,000000	0,870109 (0,026758)	0,000000
β_2	0,909882 (0,020406)	0,000000	0,903451 (0,023526)	0,000000
β_3	0,938775 (0,016606)	0,000000	0,937240 (0,015683)	0,000000
$\varrho_{2,1}$	0,445579 (0,028078)	0,000000	–	–
$\varrho_{3,1}$	0,364714 (0,029446)	0,000000	–	–
$\varrho_{3,2}$	0,447060 (0,027443)	0,000000	–	–
δ_1	–	–	0,020789 (0,008643)	0,016157
δ_2	–	–	0,928155 (0,026772)	0,000000
$\ln L(\theta)$	5716,73080		5716,58531	

Für die bedingten Varianzen sind GARCH(1,1) Prozesse angesetzt. Die Parameterindizes 1,2,3 in der bedingten Varianzgleichung beziehen sich auf EON, Deutsche Börse und BMW in gleicher Reihenfolge. Der Standardfehler ist jeweils in Klammern ausgewiesen. Nicht signifikante Parameter sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

C Spezifikationstests der GARCH Modelle zur Fallstudie

C.1 GARCH(1,1) und GJR-GARCH(1,1) Modell

	GARCH(1,1)		GJR-GARCH(1,1)	
Hypothesentests				
	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert
$H_0 : E(v_t) = c_1 = 0$	-0,876037	0,381286	-0,356739	0,721386
$H_0 : E(v_t^2) = c_2 = 1$	0,025679	0,979520	0,020267	0,983835
Ljung-Box Test für standardisierte Residuen v_t				
	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert
$m = 5$	5,506747	0,357207	4,920099	0,425709
$m = 15$	20,205244	0,164200	20,941211	0,138718
$m = 30$	38,021398	0,149201	38,694526	0,132721
Ljung-Box Test für quadrierte standardisierte Residuen v_t^2				
	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert
$m = 5$	3,211022	0,667489	4,496531	0,480348
$m = 15$	8,240474	0,913780	12,105274	0,671044
$m = 30$	20,171960	0,911987	26,721750	0,637841
Jarque-Bera Test für standardisierte Residuen v_t				
Schiefe	-0,061988		-0,113855	
Kurtosis	3,497976		3,506971	
Jarque-Bera	8,383330		9,832412	
p-Wert	0,015121*		0,007327*	

Die Parameterindices 1,2,3 der standardisierten Residuen beziehen sich auf EON, Deutsche Börse und BMW in gleicher Reihenfolge. Für die t-Statistiken gelten 763 Freiheitsgrade. Eine Missspezifikation auf dem 5% Signifikanzniveau wird durch einen Stern (*) signalisiert.

C.2 BEKK-GARCH(1,1) Modell

Hypothesentests						
	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
$H_0 : E(v_{j,t}) = 0$	-0,407370	0,683851	-0,017216	0,986268	-0,286975	0,774210
$H_0 : E(v_{j,t}^2) = 1$	0,049417	0,960600	0,022100	0,982374	0,094710	0,924570
	$v_1 v_{2t}$		$v_1 v_{3t}$		$v_2 v_{3t}$	
$H_0 : E(v_j v_{k,t}) = 0$	-0,002319	0,998150	0,024303	0,980617	-0,243947	0,807337
Ljung-Box Test für standardisierte Residuen, deren Quadrate und Kreuzprodukte						
	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
$m = 5$	6,643275	0,248550	1,172805	0,947460	7,464185	0,188343
$m = 15$	21,630158	0,117875	13,060968	0,597589	18,991369	0,214125
$m = 30$	34,254543	0,270771	22,588031	0,831810	59,898314	0,000947*
	$v_{1,t}^2$		$v_{2,t}^2$		$v_{3,t}^2$	
$m = 5$	2,187420	0,822651	1,331131	0,931696	4,170867	0,525087
$m = 15$	8,731541	0,891131	13,111612	0,593677	13,891954	0,533739
$m = 30$	18,232294	0,954650	31,937934	0,370420	30,777354	0,426411
	$v_1 v_{2t}$		$v_1 v_{3t}$		$v_2 v_{3t}$	
$m = 5$	7,377209	0,194064	14,933674	0,010650*	4,649174	0,460176
$m = 15$	22,373866	0,098369	24,811908	0,052527	13,955345	0,528919
$m = 30$	48,256181	0,018689*	53,641022	0,005040*	40,821150	0,089915
Jarque-Bera Test für standardisierte Residuen						
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
Jarque-Bera	381,818497		25,276388		51,413129	
p-Wert	0,000000*		0,000003*		0,000000*	

Die Parameterindices 1,2,3 der standardisierten Residuen beziehen sich auf EON, Deutsche Börse und BMW in gleicher Reihenfolge. Für die t-Statistiken gelten 763 Freiheitsgrade. Eine Missspezifikation auf dem 5% Signifikanzniveau wird durch einen Stern (*) signalisiert.

C.3 CCC-GARCH(1,1) Modell

Hypothesentests						
	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
$H_0 : E(v_{j,t}) = 0$	-0,884655	0,376622	-0,300462	0,763907	-0,695034	0,487246
$H_0 : E(v_{j,t}^2) = 1$	0,057041	0,954528	0,187899	0,851005	-0,108662	0,913499
	$v_1 v_{2t}$		$v_1 v_{3t}$		$v_2 v_{3t}$	
$H_0 : E(v_j v_{k_t}) = 0$	0,272035	0,785668	0,155062	0,876813	0,162429	0,871011
Ljung-Box Test für standardisierte Residuen, deren Quadrate und Kreuzprodukte						
	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
$m = 5$	5,001156	0,415739	2,256761	0,812596	6,539397	0,257210
$m = 15$	23,363044	0,076730	12,398593	0,648642	19,525313	0,190908
$m = 30$	40,445281	0,096524	20,698466	0,897079	59,108281	0,001179*
	$v_{1,t}^2$		$v_{2,t}^2$		$v_{3,t}^2$	
$m = 5$	1,595642	0,901776	1,922427	0,859771	1,793672	0,876894
$m = 15$	8,228668	0,914288	11,678236	0,703203	5,460703	0,987455
$m = 30$	14,215191	0,993477	25,175524	0,716458	14,494746	0,992298
	$v_1 v_{2t}$		$v_1 v_{3t}$		$v_2 v_{3t}$	
$m = 5$	6,008974	0,305347	20,900867	0,000846*	5,107568	0,402894
$m = 15$	10,139010	0,810906	45,420145	0,000066*	11,947087	0,683030
$m = 30$	28,647372	0,536172	69,514226	0,000056*	40,915049	0,088323
Jarque-Bera Test für standardisierte Residuen						
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
Jarque-Bera	529,581698		37,855316		129,822935	
p-Wert	0,000000*		0,000000*		0,000000*	

Die Parameterindices 1,2,3 der standardisierten Residuen beziehen sich auf EON, Deutsche Börse und BMW in gleicher Reihenfolge. Für die t-Statistiken gelten 763 Freiheitsgrade. Eine Missspezifikation auf dem 5% Signifikanzniveau wird durch einen Stern (*) signalisiert.

C.4 DCC-GARCH(1,1) Modell

Hypothesentests						
	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert	t-Statistik	p-Wert
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
$H_0 : E(v_{j,t}) = 0$	-0,755400	0,450242	-0,263862	0,791958	-0,711700	0,476868
$H_0 : E(v_{j,t}^2) = 1$	0,165094	0,868914	0,076812	0,938793	-0,151162	0,879889
	$v_1 v_{2t}$		$v_1 v_{3t}$		$v_2 v_{3t}$	
$H_0 : E(v_j v_{k_t}) = 0$	-1,133840	0,257218	-2,261358	0,024018*	-0,929236	0,353061
Ljung-Box Test für standardisierte Residuen, deren Quadrate und Kreuzprodukte						
	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert	$Q(m)$	p-Wert
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
$m = 5$	5,330962	0,376838	2,484562	0,778818	5,941195	0,311983
$m = 15$	24,171155	0,062243	13,830579	0,538415	18,289882	0,247732
$m = 30$	39,607232	0,112698	1,526676	0,870700	59,019157	0,001208*
	$v_{1,t}^2$		$v_{2,t}^2$		$v_{3,t}^2$	
$m = 5$	1,908880	0,861604	2,544089	0,769841	1,972301	0,852964
$m = 15$	7,523444	0,941466	11,338124	0,728278	7,069332	0,955697
$m = 30$	13,880818	0,994693	25,327317	0,708974	17,279701	0,969066
	$v_1 v_{2t}$		$v_1 v_{3t}$		$v_2 v_{3t}$	
$m = 5$	3,462805	0,629023	10,056047	0,073663	4,190787	0,522287
$m = 15$	8,235346	0,914001	23,256982	0,078834	12,152158	0,667477
$m = 30$	30,216076	0,454628	46,030202	0,030869*	43,960267	0,048090*
Jarque-Bera Test für standardisierte Residuen						
	$v_{1,t}$		$v_{2,t}$		$v_{3,t}$	
Jarque-Bera	566,889188		36,861976		133,784309	
p-Wert	0,000000*		0,000000*		0,000000*	

Die Parameterindices 1,2,3 der standardisierten Residuen beziehen sich auf EON, Deutsche Börse und BMW in gleicher Reihenfolge. Für die t-Statistiken gelten 763 Freiheitsgrade. Eine Missspezifikation auf dem 5% Signifikanzniveau wird durch einen Stern (*) signalisiert.

D Bootstrap Verfahren am Beispiel eines GARCH(1,1) Prozesses

Nachfolgend wird eine Möglichkeit aufgezeigt, die Berechnung des Value at Risk für die regulatorisch geforderte zehntägige Haltedauer durchzuführen. Die Berechnung des Value at Risk für eine Haltedauer von zehn Tagen basiert auf der 10-Tagesrendite:

$$R_{t+10}^c(10) = \sum_{h=1}^{10} R_{t+h}^c | \mathcal{I}_t$$

Problematisch ist, dass der zukünftige Prozess der Tagesrenditen unbekannt und damit stochastisch ist. Es ist zu klären, wie die Tagesrenditen für die Zeitpunkte $t + 1, \dots, t + 10$, gegeben die Prozessvergangenheit, verteilt sind, um auf die Verteilung der 10-Tagesrendite und damit auf das Quantil schließen zu können. Es lässt sich zeigen, dass bereits die bedingte Verteilung von R_{t+2}^c keiner Normalverteilung folgt, sodass auch $R_{t+10}^c(10)$ nicht normalverteilt sein kann. Die exakte bedingte Verteilung ist nicht bekannt. Eine Abhilfe schafft beispielsweise das sogenannte Bootstrap Verfahren zur Bestimmung der bedingten Verteilung der 10-Tagesrendite.

Die Bootstrap Methode ermöglicht primär die Simulation der zukünftigen Tagesrenditen. Für die Berechnung des Value at Risk ist der $T \times 1$ Vektor der standardisierten Residuen $\hat{v} = (\hat{v}_1 \cdots \hat{v}_T)'$ von Bedeutung. Die zentrale Voraussetzung ist, dass die standardisierten Residuen identisch und unabhängig verteilt sind und konsistent geschätzt werden können. Für eine Haltedauer von zehn Tagen werden mit Hilfe eines Zufallsgenerators 10 Residuen \hat{v} aus dem Vektor \hat{v} mit Zurücklegen gezogen. Die zufällig gezogenen Residuen erlauben einen Simulationslauf, der die zehn zukünftigen Tagesrenditen und somit die 10-Tagesrendite hervorbringt. Solch ein Simulationslauf wird für gewöhnlich $N = 10000$ mal durchgeführt, um die Verteilung und damit das 1%-Quantil der 10-Tagesrendite bestimmen zu können.

Zur Veranschaulichung soll das Vorgehen der Bootstrap Methode anhand des in der Fallstudie geschätzten GARCH(1,1) Prozess veranschaulicht werden. Es wird der Informationsstand der letzten Beobachtung innerhalb der Stichprobe zugrunde

Ein Simulationslauf von 10000 bei der Bootstrap Methode

h	v_{t+h}	ε_{t+h}	σ_{t+h}^2	$\sigma_{t+h}^2(h)$	R_{t+h}^c	$R_{t+h}^c(h)$	$S_{G,t+h}$
0		0,00358	0,00012		0,00427		140,80
1	0,04612	0,00049	0,00011	0,00011	0,00119	0,00119	140,90
2	-1,03394	-0,01068	0,00011	0,00022	-0,00999	-0,00880	140,99
3	0,03205	0,00034	0,00011	0,00033	0,00103	-0,00777	139,56
4	0,12662	0,00129	0,00010	0,00044	0,00198	-0,00579	139,71
5	0,98087	0,00969	0,00010	0,00053	0,01038	0,00459	139,98
6	1,00114	0,01005	0,00010	0,00063	0,01074	0,01533	141,44
7	0,46740	0,00478	0,00010	0,00074	0,00547	0,02080	142,97
8	0,77299	0,00773	0,00010	0,00084	0,00843	0,02923	143,75
9	0,27200	0,00272	0,00010	0,00094	0,00341	0,03264	145,47
10	-0,32985	-0,00321	0,00009	0,00103	-0,00251	0,03013	145,10

gelegt. Es werden dementsprechend am $t = 30.06.2011$ die Tagesrenditen für die zukünftigen zehn Handelstage simuliert. Die obige Tabelle zeigt einen solchen Simulationslauf, um die Systematik zu verdeutlichen. Nachdem die standardisierten Residuen zufällig gezogen worden sind, kann eine schrittweise Simulation erfolgen. Im ersten Schritt kann die bedingte Varianz σ_{t+1}^2 problemlos geschätzt werden, da der Marktschock und die bedingte Varianz am $t = 30.06.2011$ vorliegen. Die folgenden Ausführungen zeigen das Vorgehen bei der Zusammensetzung der Tabelle für $h = 1, \dots, 10$:

$$\begin{aligned}\sigma_{t+h}^2 &= 0,000005 + 0,096115\varepsilon_{t+h-1}^2 + 0,892180\sigma_{t+h-1}^2 \\ \varepsilon_{t+h} &= v_{t+h}\sigma_{t+h}, \quad R_{t+h}^c = 0,000693 + \varepsilon_{t+h} \\ \sigma_{t+h}^2(h) &= \sum_{i=1}^h \sigma_{t+i}^2, \quad R_{t+h}^c(h) = \sum_{i=1}^h R_{t+i}^c \\ S_{t+h} &= 140,80e^{R_{t+h}^c(h)}\end{aligned}$$

Nach $N = 10000$ Wiederholungen dieses Vorgangs liegen 10000 simulierte 10-Tagesrenditen vor, sodass sich eine Verteilung abzeichnet. Die kontinuierlichen Renditen können aufsteigend geordnet werden, sodass das 1%-Quantil der 10-Tagesrendite sich ergibt als:

$$R_{0,01;t+10}^c(10) = R_{t+10}^{c[k]}(10) = -0,087076 \quad \text{mit } k = 0,01 \cdot N + 1 = 101$$

Dies erlaubt die Berechnung des Value at Risk:

$$VaR = -S_{G,t}(e^{R_{0,01;t+10}^{(10)}} - 1) = -140,80(e^{-0,087076} - 1) = 11,74 \text{ EUR}$$