

Scholtz, Hellmut D.

Article — Published Version

Modell zur Maximierung des Endvermögens unter gleichzeitiger Sicherstellung intertemporärer Vermögenserhaltung/Solvenz

Finanz-Betrieb

Suggested Citation: Scholtz, Hellmut D. (2009) : Modell zur Maximierung des Endvermögens unter gleichzeitiger Sicherstellung intertemporärer Vermögenserhaltung/Solvenz, Finanz-Betrieb, Verlagsgruppe Handelsblatt, Düsseldorf, Vol. 11, Iss. 9, pp. 496-505

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/91637>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Märkte

>> **Kapitalanlage, Kapitalmärkte, Anleihen**

Modell zur Maximierung des Endvermögens unter gleichzeitiger Sicherstellung intertemporärer Vermögenserhaltung/Solvenz

Hellmut D. Scholtz

Das Modell zeigt eine Anlagestrategie, die das Endvermögen maximiert und gleichzeitig die Gefahren des Vermögensverlustes und eine daraus folgende Insolvenz auf Grund intertemporärer worst-case-Szenarien in ihren Auswirkungen modellimmanent vermeidet. Da ein maximales Endvermögen nur durch eine "proportionale Anlagestrategie" erzielbar ist, beschränkt diese Strategie Anlagen in Risikoinvestments der Höhe nach auf optimal berechnete Fraktionen vom jeweiligen Restvermögen. Durch Einbeziehung von Überlebenswahrscheinlichkeiten und der Streuung der Anlageergebnisse lassen sich mit dem ausführlich abgeleiteten Ansatz intertemporäre Schieflogen wesentlich einschränken.

Gliederung

- I. Einführung
- II. Aufbau der Abhandlung
- III. Maximierung des Endvermögens durch eine proportionale Anlagestrategie
 1. Annahmen über den Prozess der Vermögensentwicklung
 2. Die Maximierung des Endvermögens in Abhängigkeit von f
 3. Die Einbeziehung der Ruinwahrscheinlichkeit in das Modell
 4. Eigenschaften des Modells
 5. Das Optimierungsmodell für den gesamten Vermögensprozess im Zeitablauf
 6. Die Berücksichtigung der Streuung der Ergebnisse
- IV. Der optimale Einsatz unter Einbeziehung des Gewinn/Verlust-Verhältnisses
- V. Ableitung des generellen Modells
- VI. Beispiel
- VII. Schlussfolgerungen
- VIII. Zusammenfassung

Informationen zu den Autoren

Hellmut D. Scholtz, viele Jahre als Unternehmensberater im In- und Ausland, u.a. als Vorsitzender einer Expertengruppe "Langfristige Finanzierung der Gesetzlichen Rentenversicherung", tätig hat sich in den letzten Jahren neben Fragen der gesetzlichen Alterssicherung in seinen zahlreichen Veröffentlichungen schwerpunktmäßig mit der Konzeption optimaler Investmentstrategien befasst.

Modell zur Maximierung des Endvermögens unter gleichzeitiger Sicherstellung intertemporärer Vermögenserhaltung/Solvenz

von Hellmut D. Scholtz

I. Einführung

Die Problematik der Risiken des Vermögensverlustes bei investiertem Kapital beschäftigt die Wissenschaft schon seit mehreren Jahrhunderten. Im Vordergrund der Erörterungen steht dabei der Konflikt zwischen Maximierung des Ertrages durch zusätzliche Vergütungen für die Übernahme von Risiken und andererseits der dadurch möglicherweise gefährdete Bestand des Vermögens.

Während nach *Bernoulli* (1738) ein Totalverlust des gesamten Vermögens nur vermieden werden kann, wenn ein Kapitalstock vorhanden ist, von dem nur Teilbeträge in Risikoanlagen eingesetzt werden, stand in den letzten 60 Jahren die Anlegerpräferenz bezüglich des erwarteten Ertrags/Risiko-Verhältnisses sowie der Liquidität im Vordergrund¹. Die Literatur ist sehr umfangreich. An dieser Stelle beschränken sich die Ausführungen aus Platzgründen daher für diesen Zeitraum nur auf einige im Rahmen der Abhandlung *wesentliche* Autoren, die die Thematik einerseits aus subjektivistischer Sicht und andererseits unter einem objektivistischen Blickwinkel betrachten.

Hinsichtlich der Einbeziehung *subjektiver* Maßstäbe in die Minderung des Risikos bei Anlageentscheidungen sind neben dem Ansatz von *Bernoulli* und einigen Regeln von Basel II hier stellvertretend das Portfoliomodell von *Markowitz* (1959) zu nennen². Ein Anleger handelt danach zwar rational und nutzenmaximierend aber risikoscheu. Eine Optimierung des Portfolios hängt dabei im Gegensatz zu *Bernoulli* weder von der Höhe des Vermögens des Investors noch seiner unmittelbaren Risikoeinstellung ab. Vielmehr spielen nach *Tobin* (1958) nur die Risiko-Rendite-Kombinationen der gehandelten Titel eine Rolle³.

Ein Ruin, also ein totaler Vermögensverlust eines Anlegers, ist nach *Hakansson* (1971 S. 876) bei dem Ansatz von *Markowitz* trotz der Einbeziehung des Risikos nicht ausgeschlossen⁴. Mit Hilfe des Lower Partial Moment-Ansatzes (u.a. *Barth* 2000) bzw. Value-at-risk-Konzepts (u.a. *Artzner* 1997), wird versucht, ein solches Risiko zu begrenzen⁵. Die Arbeiten konzentrieren sich dabei im Gegensatz zu *Markowitz* vornehmlich auf die Risikokomponente. Weitere Ansätze, wie z.B. das Konzept des Expected Shortfall bzw. Conditional Value at Risk (*Acerbi/Tasche* 2001), des Expected Policyholder

Deficit (*Barth* 2000), sowie des Tail-VaR (*Rockafellar/Uryasev* 2002), engen wegen einiger Probleme des VaR-Konzepts das Risiko eines worst-case-Szenarios weiter ein und erlauben damit einem Anleger die Formulierung einer entsprechenden Nutzenfunktion und einer Präferenzstruktur (u.a. *Schneeweiß* 1967), die das Erstellen einer Rangreihe von Anlagekonzepten und von Optimierungsmodellen zulässt⁶. Da eine solche Präferenzstruktur wegen arbiträrer Vorgaben jedoch subjektiven Charakter trägt, sind, wie bereits *Schneeweiß* (1967 S.175) ausführte, *einheitliche* Anlageentscheidungen, die die *unterschiedlichen* Präferenzstrukturen der Anleger widerspiegeln, nur bedingt möglich. *Funke/Johanning/Rudolph* (2006) zeigen, dass z.B. Investmentfonds den Anlegern daher unterschiedlich strukturierte Investments anbieten sollten, die den hinsichtlich Verlustrisiko und normalem Geschäftsrisiko unterschiedlichen Präferenzstrukturen gerecht werden⁷. Es besteht aber trotzdem die Schwierigkeit, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse bzw. die Höhe des worst-case-Szenarios zu bestimmen sowie eventuelle persönliche Vorteile durch bestimmte Anbieter in den Präferenzfunktionen zu eliminieren. Damit stellt sich die Fra-

1 Bernoulli, D., 1738: Exposition of a new theory on the management of risk. Repr. *Econometrica*, 1954, S. 65-86.
 2 Markowitz, H., 1959: Portfolio Selection.
 3 Tobin, J., 1958: Liquidity preferences as behaviour towards risk. In: *Review of Economic Studies*, 1, S. 65-86.
 4 Hakansson, N., 1971: Multi-period mean-variance analysis, Toward a general theory of portfolio choice. In: *Journal of Finance*, S. 857-884.

5 VaR ist die für einem bestimmten Zeitraum definierte maximal mögliche Verlusthöhe zu einem bestimmten Konfidenzniveau. Vgl. u.a. Dinkelbach, W./Kleine, A., 2003 S. 259: Vom Value at Risk zum conditional value at risk. <http://archiv.jura.uni-sb.de/projekte/Bibliothek2/text.php?id=67&show>. DId: 26.10.2008; Acerbi, C./Tasche, D., 2001 S.4: Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.28.4311>. DId.:26.10.2008. Das Konzept hat sich mittlerweile trotz der Probleme wegen der Einfachheit etabliert, vgl. u.a. Yamai, Y/Yoshida, T., 2002 S. 58: On the validity of value-at-risk: Comparative analyses with expected shortfall. In: *Monetary and Economic Studies*, January, S. 57 – 86. Der LPM-Ansatz nullter Ordnung geht von der Ruinwahrscheinlichkeit aus und ist vom Ergebnis her dem VaR vergleichbar, vgl. u.a. Dinkelbach/Kleine, 2003 S. 269; Schmeiser, H., 2005 S. 4 (5): Interne Risikosteuerungsmodelle unter Solvency II. Working papers on risk management and insurance No. 5.
 6 Schneeweiß, H., 1967 S. 17 ff. 35 ff. 113 ff.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Um die Schwierigkeiten des VaR-Konzepts hinsichtlich Verteilungsannahme und fat tail-Problematik, der Ereignisse außerhalb des durch das VaR bestimmten Vertrauensbereichs (worst case) sowie der mangelnden Subadditivität zu mindern vgl. Konzept des Expected Shortfall bzw. Conditional VaR bzw. LPM-Ansatz 1. Ordnung, auch Expected Policyholder Deficit: u.a. Rockafellar, R. T./Uryasev, S., 1999 S.2: Optimization of Conditional Value-at-Risk. <http://www.mat.uc.pt/~Inv/off/rockafellar-uryasev.pdf>. DId.:26.10.2008; Barth, M. M., 2000: A comparison of risk-based capital standards under the expected policyholder deficit and the probability of ruin approaches. In: *Journal of risk and insurance*, 67, S.397-414; Schmeiser, 2005 S. 4 (5). Zur Varianz-Kovarianz-Methode vgl. u.a.: Yamai/Yoshida, 2002 S. 61. Bezüglich Simulationsmodellen (Historische Simulation, Monte Carlo-Verfahren) vgl.u.a.: Studer, G./Steiger, G., 2001 S. 77, 79, 103: Strategische Optimierung des Kreditportfolios. In: *Die Bank*, 3, S. 214 – 218; Völker, K., 2001, S. 103: Value-at-Risk-Modelle in Banken – Quantifizierung des Risikopotentials im Portfoliokontext und Anwendung zur Risiko- und Geschäftssteuerung; Schulte, M./Horsch, A., 2002 S. 222 (223): Wertorientierte Banksteuerung-Risikomanagement.
 7 Funke, Ch./Johanning, L/Rudolph, B., 2006: Verlust- und Risikopräferenzen institutioneller Anleger. In: *Edition Risikomanagement 1.1.*, Sonderdruck der Union Investment.

» AUTOR Hellmut D. Scholtz

Hellmut D. Scholtz, viele Jahre als Unternehmensberater im In- und Ausland, u.a. als Vorsitzender einer Expertengruppe „Langfristige Finanzierung der Gesetzlichen Rentenversicherung“, tätig hat sich in den letzten Jahren neben Fragen der gesetzlichen Alterssicherung in seinen zahlreichen Veröffentlichungen schwerpunktmäßig mit der Konzeption optimaler Investmentstrategien befasst.

Bei Investments mit geringeren Gewinnwahrscheinlichkeiten oder höheren Einsatzbeträgen als den optimalen ist die marginale Ruinwahrscheinlichkeit größer als die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit.

ge nach vornehmlich objektivistischen Ansätzen, die den Erhalt des Vermögens ohne erforderliche Gruppenentscheidungen über verbindliche Präferenzstrukturen sicherstellen⁸.

Mit solchen objektivistischen Ansätzen, haben sich u.a. Kelly (1956), Dubins/Savage (1976), Breimann (1960), Feller (1968), Hakanson (1971), Thorp (1971, 1997), Scholtz (1990, 2005) und andere, z.T. beispielhaft ausgehend von zu optimierenden Spielstrategien, befasst⁹. Die Abgrenzungen zu den eher subjektivistisch orientierten Abhandlungen ist nicht immer eindeutig.

Für die Maximierung des Endvermögens durch Wahl optimal je Fall zu investierender Fraktionen vom jeweiligen Restkapital leitet Kelly (1956) die Höhe eines optimalen Anlagebetrags ab. Feller (1968 I. S.342 ff.) zeigt unter diesem Blickwinkel ergänzend, auf welche Weise die Ruinwahrscheinlichkeit bei einem Random Walk besonders einfach berechnet werden kann. Und Scholtz (1990; 2005 S. 87-95 u. S. 102 ff.) leitet aus diesen beiden Ansätzen, unter Berücksichtigung der Ausführungen von Dubins/Savage (1976 S. 192 ff.) über proportionale Strategien, einen neuen Algorithmus ab. Mit diesem Algorithmus ist der Erwartungswert des Endvermögens unter Ausschluss von intertemporären Ruintendenzen in kürzester Zeit maximierbar. Als Ruintendenz wird hier der Sachverhalt verstanden, dass von einem beliebigen Vermögensstand X_k aus die Anzahl der zukünftigen möglichen Pfade einer Vermögensentwicklung mit mindestens einem $X_m < X_k$ für $m = k+1, \dots, n$ größer ist als fünfzig Prozent aller auf k folgenden möglichen Pfade bzw. wenn die marginale Ruinwahrscheinlichkeit L' größer als die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit U' ist¹⁰.

Das Scholtz-Modell maximiert im Gegensatz zu den Arbeiten der oben erwähnten Autoren modellimmanent gleichzeitig auch den Erwartungswert des Endvermögens und ist hin-

sichtlich der Einbeziehung des Risikos frei von arbiträren Vorgaben. Es unterscheidet sich damit wesentlich von den Ansätzen der letzten 60 Jahre. Scholtz weist zwar darauf hin, dass die eine kritische Grenze überschreitenden möglichen Verluste eine Streuung aufweisen. Er zeigt aber nur bedingt auf, wie diese im Rahmen seines Ansatzes modellimmanent einzubeziehen sind¹¹.

Ein Problem besteht neben der Wahl des einzubeziehenden Zeitraumes in der Ermittlung repräsentativer Datengrundlagen und der Gewichtung der Vergangenheitsdaten als Grundlagen zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Erträge. Breimann (1960) kommt zwar zu dem Ergebnis, dass eine Strategie für die Maximierung des Endvermögens optimal ist, die die jeweils aktuellen Verhältnisse berücksichtigt. Eigene Berechnungen des Autors zeigen in Übereinstimmung mit anderen Verfassern jedoch, dass Korrelationen, Volatilitäten, Betafaktoren etc. eine erhebliche Varianz im Zeitablauf aufweisen und die Gewichtung der Zeitkomponenten problematisch ist¹². Aus diesem Grunde sind daher auch mögliche Schwankungen der Parameter bei der Konfiguration von Anlageportfolios und damit dem Einfluss auf die Vermögensentwicklung in ein objektivistisches Modell einzubeziehen.

Die folgende Abhandlung soll nun aufbauend auf den erwähnten objektivistischen Arbeiten das Scholtz-Modell (2005) speziell unter Berücksichtigung intertemporärer Beschränkungen und der Streuung der möglichen Verluste erweitern. Während die subjektivistischen Ansätze des VaR und CVaR das erforderliche Risikokapital bis zu einem unbestimmten „floor“ oder „Sicherheitsbestand“ des Vermögens bestimmen, ermöglicht das folgende Modell ein im Zeitablauf mit maximaler Zuwachsrate ansteigenden „floor“, bei dem die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit von Anlageentscheidungen regelmäßig bedeutend größer ist als die marginale Ruinwahrscheinlichkeit. Bei Anwendung des Modells ist der Vermögenserhalt und die Maximierung des Erwartungswertes des Endvermögens daher modellimmanent fast sicher.

8 Auch die Maßzahl RORAC (Return On Risk Adjusted Capital) beinhaltet über VaR subjektive Vorgaben.

9 Breiman, L., 1960: Optimal gambling systems for favorable games. Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability, University of California Press, Berkeley, CA, 1, S. 65-78; Feller, W., 1968: An introduction to probability theory and its applications. Vol. I, 3 rd ed.; Hakansson, N., 1971: Multi-period mean-variance analysis, Toward a general theory of portfolio choice. In: Journal of Finance, S. 857-984; Thorp, E. O., 1997: The Kelly criterion in Blackjack, sports betting, and the stockmarket. The 10th international conference on gambling and risk taking; Thorp, E. O., 1971: Portfolio choice and the Kelly criterion. In: Bicksler and Samuelson, Hrsg. 1974: Investment portfolio decision making, S. 253-270; Scholtz, Hellmut, D., 1990: Maximierung des Endvermögens bei Ausschluss des Ruins. In: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, S. 685 – 704; Scholtz, Hellmut, D., 2005: Langfristiger Vermögensaufbau mit risikoneutralen Hedge-Fonds-Strategien. Optimales Wertpapiermanagement für die Altersvorsorge. Asgard., St. Augustin.

10 Vgl. Scholtz 2005 a.a. O. S. 83 Fn 81.

11 Vgl. Scholtz 2005 a.a. O. S. 91 Fn 93 sowie S. 99.

12 Chatfield, Ch., 1982 S. 89ff.: Analyse von Zeitreihen. Eine Einführung. Übers. von H.Grimm führt im Zusammenhang mit der Eignung verschiedener Prognoseverfahren zu dem adaptiven Modell von Makridakis, 1977, und Brown, 1963, zur exponentiellen Glättung aus, dass adaptive Modelle, die die aktuellen Verhältnisse stärker gewichten, eine vergleichsweise geringe Eignung aufweisen; Elton, E. J/ Gruber, M., 1995: Modern portfolio theory and investment analysis. 5th ed. S. 141, 146, 168 ff. zeigen implizit die mangelnde Eignung historischer Daten hinsichtlich der Korrelation zwischen verschiedenen Wertpapieren und weisen auf mögliche Verbesserungen der Parameter hin. Diese Problematik der Repräsentanz zeigt sich ebenfalls bei den neueren Ansätzen zur Verbesserung des VaR-Konzeptes und des CVaR.

Insoweit ist dieser Ansatz den oben erwähnten Ansätzen des VaR, Expected Shortfall, Expected Policy Holder Deficit etc. deutlich überlegen. Besonderes Augenmerk des folgenden Ansatzes gilt *neben* der Maximierung des Endvermögens demnach der Höhe optimaler Anlagebeträge in Risikoinvestments bzw. der Hilfestellung bei der Frage nach dem Umfang höchstens einzugehender Risiken. Aus den Ergebnissen lassen sich somit auch gegenüber dem derzeitigen Stand geeignete Kennzahlen zur Vermeidung von Insolvenzen ableiten.

II. Aufbau der Abhandlung

Es wird davon ausgegangen, dass Anleger den Erwartungswert des *Endvermögens* durch optimale Höhen einer Abfolge einzelner Anlagebeträge maximieren und erhebliche intertemporäre Verluste durch *zwischenzeitliche worst-case-Szenarien* meiden wollen. In der Abhandlung wird hierfür approximativ angenommen, dass sich die Abfolge der Vermögensstände X_k für $k = 1, \dots, n$ wie ein Zufallsweg entwickelt. Die Parameter „Gewinn“ und *positive* Vermögensveränderung sowie „Verlust“ und *negative* Vermögensveränderung werden dabei synonym verwandt. Es wird unterstellt, dass die Verteilung der Anlageergebnisse zu Vermögensveränderungen führt, die die Grundlage für die Schätzung der *positiven* und *negativen* Veränderungen jedes k . Vermögenszustandes der Zukunft darstellt. Die Abhandlung gliedert sich aus *Anschaulichkeitsgründen* wie folgt:

Zuerst wird der Zusammenhang zwischen Maximierung des Ertrages je Geschäftsvorfall und dem Erwartungswert des Endvermögens als Einführung in das Optimierungsmodell nach Kelly (1956) dargestellt. Darauf aufbauend wird gezeigt, wie sich in das Modell eine einfache Lösung für *höchstens zulässige* Anlagebeträge in Risikoanlagen durch Berücksichtigung der *marginalen* Ruinwahrscheinlichkeit implementieren lässt. Ein hierfür abgeleitetes Theorem zeigt, dass *worst-case-Szenarien* begrenzter Zeitfenster durch einen solchen Ansatz, der allein den Erwartungswert des *Endvermögens* maximiert, nicht erfasst sind. Anschließend wird in Erweiterung des oben für den Kelly-Ansatz angenommenen Zufallsweges unter Berücksichtigung der Streuung der Anlageergebnisse geklärt, wie *unterschiedliche* Relationen von erwarteten Gewinnen und Verlusten zu berücksichtigen sind. In dem generellen Ansatz des Modells wird dann unter Annahme eines lognormal verteilten Zufallsprozesses zusammenfassend gezeigt, wie ein Ruin oder eine Insolvenz eines Anlegers trotz der Übernahme von Risiken modellimmanent vermieden werden können. Ein einfaches praktisches Beispiel veranschaulicht den Ansatz und schließt die Abhandlung ab.

III. Maximierung des Endvermögens durch eine proportionale Anlagestrategie

1. Annahmen über den Prozess der Vermögensentwicklung

Es sei wie oben erwähnt aus Anschaulichkeitsgründen *anfänglich* angenommen, dass die Vermögensentwicklung eines Anlegers sich approximativ wie ein Prozess mit durchschnittlich *gleichen* Gewinnen und *absoluten* Verlusten als Zufallsweg entwickle (Bernoulli-Prozess). Das Vermögen betrage zu Beginn X_0 . Die Gewinnwahrscheinlichkeit betrage p

$> 0,5$ und damit die Verlustwahrscheinlichkeit $q < 0,5$ mit $p + q = 1$. Die je Einsatzbetrag B_k erzielbaren Ergebnisse seien für die Gewinne $R_k = 1$ und für die Verluste $R_k = -1$, unten für das Gewinn/Verlust-Verhältnis mit $m = +R/|-R|$ bezeichnet.

Die Entwicklung des Vermögens wird dann nach Thorp (1997 S. 3.) bei Einsatzbeträgen in Höhe von jeweils B_k widerspiegelt durch:

$$(1) X_k = X_{k-1} + R_k B_k \text{ für den } k. \text{ Fall, } k = 1, \dots, n$$

und für das Endvermögen nach n Fällen:

$$(2) X_n = X_0 + \sum R_k B_k \text{ für } k=1, \dots, n,$$

so dass der Erwartungswert des Endvermögens

$$(3) E(X_n) = X_0 + \sum E(R_k B_k) = X_0 + \sum (p-q) E(B_k) \text{ für } k=1, \dots, n$$

beträgt.

Ein Anleger erreicht einen maximalen Erwartungswert $E(X_n)$ im Rahmen einer Anlagestrategie dann, wenn er für $k = 1, \dots, n$ einen festen Prozentsatz f des jeweils vorhandenen Restvermögens X_{k-1} einsetzt, also $B_k = f X_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$. Bezeichnet wird diese Strategie wegen der relativen Einsätze vom jeweiligen Restvermögen von *Dubins/Savage* (1976 S.192) als „proportionale Strategie“. Diese Bezeichnung wird im Folgenden beibehalten. Bei n_g Gewinnfällen und n_v Verlustfällen von insgesamt $n = n_g + n_v$ Fällen beträgt das Endvermögen nach n Aktionen:

$$(4) X_n = X_0 (1+f)^{n_g} (1-f)^{n_v} \text{ für } 0 < f < 1.$$

Sind das Vermögen bzw. die Einsatzbeträge unbeschränkt teilbar, dann kann bei zu großen f im *worst-case-Szenario* trotzdem ein Ruin eintreten. Dies ist aus *Abb. 1* bei $f > f_0$ deutlich zu erkennen. Denn der Erwartungswert des Endvermögens fällt mit zunehmenden $f > f_1$ immer mehr ab und erreicht bei großen f schließlich ein Endvermögen von 0. Es sind aber auch bei optimierten Einsatzbeträgen f_1 sehr niedrige zwischenzeitliche Vermögensstände $X_k < 0,01$ bei einem Anfangsvermögen von $X_0 = 1$ denkbar¹³. *Scholtz* (2005 S.108) zeigt daher auf, dass der Grund für solchen eventuellen zwischenzeitlichen Vermögensverfall darin zu suchen ist, dass der Ansatz eine latente Ruinentendenz aufweist. Denn die zulässige Gewinnwahrscheinlichkeit ist zu niedrig und der optimierte Anlagebetrag ist zu hoch, um eine von Ruinentendenzen freie Entwicklung des Vermögens zu gewährleisten.

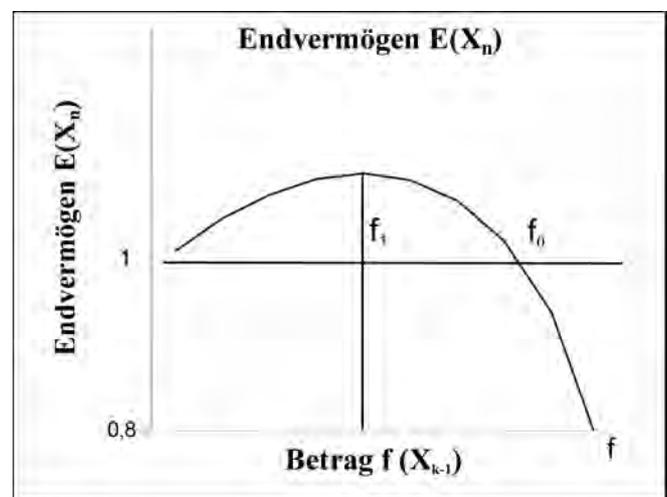


Abb. 1

13 umfangreiche eigene Simulationen bestätigen diesen Sachverhalt.

Im Folgenden sei der Ansatz von Kelly und Dubins/Savage als Voraussetzung für die Einbeziehung der weitergehenden Aspekte aus betriebswirtschaftlicher Sicht kurz erläutert.

2. Die Maximierung des Endvermögens in Abhängigkeit von f

Setzt man das Anfangsvermögen $X_0 = 1$ und teilt man n , n_g und n_v jeweils durch n , so erhält man für $n_g + n_v = n$ dann $n_g/n + n_v/n = n/n$ bzw. $p + q = 1$ und für die obige Gleichung des Endvermögens $X_n = X_0(1+f)^{n_g}(1-f)^{n_v}$ dann:

$$(5) X_n = (1+f)^p(1-f)^q.$$

Durch Logarithmierung der Funktion $E(X_n)$ sei $g(f) = E(\ln X_n) = E\{p \times \ln(1+f) + q \times \ln(1-f)\}$ bzw. $g(f) = p \times \ln(1+f) + q \times \ln(1-f)$. Nach Differenziation von $g(f)$ erhält man $g'(f)$ mit den Grenzerlösen $\partial p \times \ln(1+f) / \partial f$ bzw. $GE = p/(1+f)$ und den hier absolut gesetzten Grenzkosten $|\partial q \times \ln(1-f) / \partial f|$ bzw. $GK = q/(1-f)^{14}$.

Während unter komparativ statischer Betrachtung bei $f > 0$ die Grenzerlöse GE mit zunehmendem f anfangs über den absoluten Grenzkosten GK liegen, nähern sich die beiden Komponenten mit weiter zunehmendem f immer mehr an. Bei $GE = GK$, also wenn die Grenzerlöse gleich den Grenzkosten sind, ist das Optimum f_1 von f erreicht. Die Auflösung der Gleichung $GE = GK$ bzw. $p/(1+f) = q/(1-f)$ nach f ergibt für den optimalen Teilbetrag f bei alternativ gleichen Gewinnen oder Verlusten den Wert

$$(6) f_1 = p - q \text{ für } m = +R/|R| = 1.$$

Die erste Ableitung $g'(f)$ der Funktion $G_n(f) = \ln(X_n/X_0)^{1/n} = p \times \ln(1+f) + q \times \ln(1-f)$ für $f = 1/n$ zur Maximierung der Wachstumsrate ist identisch mit der oben angeführten Ableitung. Sie ist eine stetig monoton fallende Funktion, die die Nulllinie des Koordinatensystems aus Vermögenszuwachs und f im Punkt f_1 schneidet. In Abb. 2 liegt z.B. für $p = 0,8$ und einem Einsatz von jeweils $f_1 X_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$ das f_1 bei 0,6.

Vergrößert man f über diese Fraktion f_1 vom Vermögen hinaus, dann sinkt der Erwartungswert $E(X_n)$ des Vermögens weiter ab und erreicht schließlich in Abb. 1 bei f_0 den Wert 1, der dem Anfangsvermögen entspricht. Bei weiterer Erhöhung von $f > f_0$ liegt die Funktion im negativen Bereich. Das heißt ein Ruin bzw. ein Totalverlust des Vermögens tritt fast sicher ein.

Das Ziel der Maximierung des Endvermögens kann ein Anleger aber nur erreichen, wenn er einen zwischenzeitlichen Totalverlust des zu Spekulationszwecken verfügbaren Vermögens, den Ruin, systematisch vermeidet. Ist der Zeitraum der Aktionen begrenzt, dann kann jedoch auch wie oben erwähnt zwischenzeitlich ein sehr niedriger Vermögensstand eintreten und das erwartete Ziel eines maximalen Endvermögens wird nicht erreicht. Der Lösung dieses Problems widmet sich nun der folgende Abschnitt.

3. Die Einbeziehung der Ruinwahrscheinlichkeit in das Modell

Dubins/Savage (1976 S.193) und andere weisen darauf hin, dass ein Ruin nur vermieden werden kann, wenn die Einsatzbeträge möglichst niedrig gewählt werden. Letztlich sind diese Lösungen aber zu relativieren. Denn sie gehen davon aus, dass jede Aktion mit Gewinnwahrscheinlichkeit

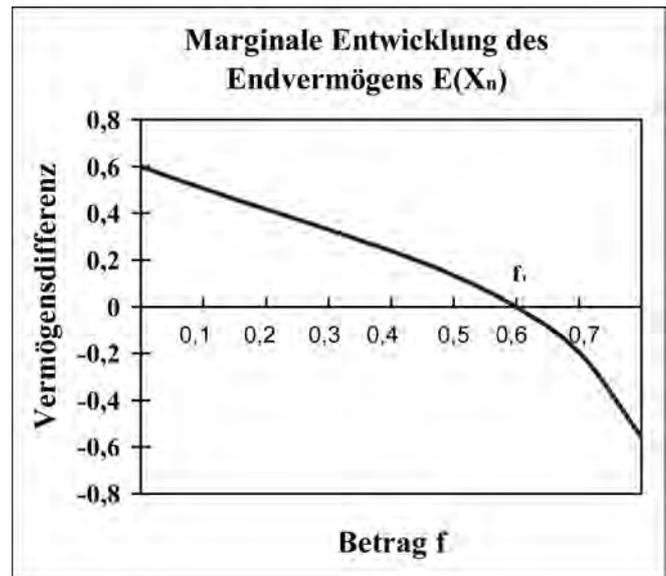


Abb. 2

$p > 0,5$ durch eine erhebliche Verminderung des Anlagebetrages den Ruin fast verhindern kann. Scholtz (1990 und 2005) zeigt auf der Grundlage eines abgewandelten Ansatzes von Feller (1968) Möglichkeiten auf, die Ruinwahrscheinlichkeit unmittelbar in das oben erörterte Maximierungsmodell einzubeziehen, so dass die Wahrscheinlichkeit des Ruins *modellimmanent* fast ausgeschlossen ist. Hierzu ist es jedoch erforderlich eine *kritische Mindestgewinnwahrscheinlichkeit* p_{cr} zu berechnen, die je nach Gewinnwahrscheinlichkeit sehr deutlich über $p = 0,5$ liegen kann. Nur bei $p \geq p_{cr}$ ist danach eine Anlage zulässig. Ferguson (1962) kommt zu vergleichbaren Ergebnissen mit Größenordnungen von etwa $p > 2/3$ bei einem Bernoulliprozess¹⁵. Scholtz (2005 S.104-105) geht davon aus, dass die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit $U'(p)$ einer marginalen Veränderung des Einsatzes f von $f = 0$ aus größer oder höchstens gleich der marginalen Veränderung der Ruinwahrscheinlichkeit $L' = q/p$ mit $U' + L' = 1$ sein muss. Nur mit $U'(p) \geq 0,5$ ist ein bestimmter Anteil in f eliminiert, der ruinöse Tendenzen der Vermögensentwicklung bewirkt.

Oben ergibt sich das Optimum von f an der Stelle, an der die Grenzkosten gleich den Grenzerlösen sind. Bei der Einbeziehung der *marginalen* Ruinwahrscheinlichkeit $L' = q/p$ für eine sehr kleine Einheit f zeigt sich aber, dass an dieser Stelle von f für alle $p < 2/3$ die *marginale* Ruinwahrscheinlichkeit $L' > 0,5$ und die *marginale* Überlebenswahrscheinlichkeit $U' = 1 - L'$ dann *kleiner* als 0,5 ist. Um also für die schrittweise Erhöhung von f von $f = 0$ aus für den marginalen Betrag $\Delta U/\Delta f$ eine Gleichheit von $U' = L'$ zu erreichen, muss entweder das Gewinn-Verlust-Verhältnis $2/3$ zu $1/3$ oder für $R_k = \pm 1$ die Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 2/3$ und die Verlustwahrscheinlichkeit $q = 1/3$ sein. Aus der Abb. 3 ist diese *kritische* Gewinnwahrscheinlichkeit p_{cr} , bei der $U' = L'$ ist, anschaulich zu erkennen. Sie findet sich in der Abb. 3 an der Stelle, an der das Lot vom Schnittpunkt zwischen der Funktion $U'(p)$ und $U' = L' = 0,5$ auf der p -Achse endet. Die *kritische* Verlustwahrscheinlichkeit q_{cr} ist dann $1 - p_{cr}$ so dass $p_{cr} + q_{cr} = 1$.

14 Für die folgenden Betrachtungen, auch der weiteren Abschnitte, wird für die Ableitung von $E(X_n)$ jeweils von der logarithmierten Funktion $g'(f)$ von $g(f)$ ausgegangen.

15 Ferguson, T. S., 1965: Betting systems which minimize the probability of ruin. In: Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 13, S. 795-818.

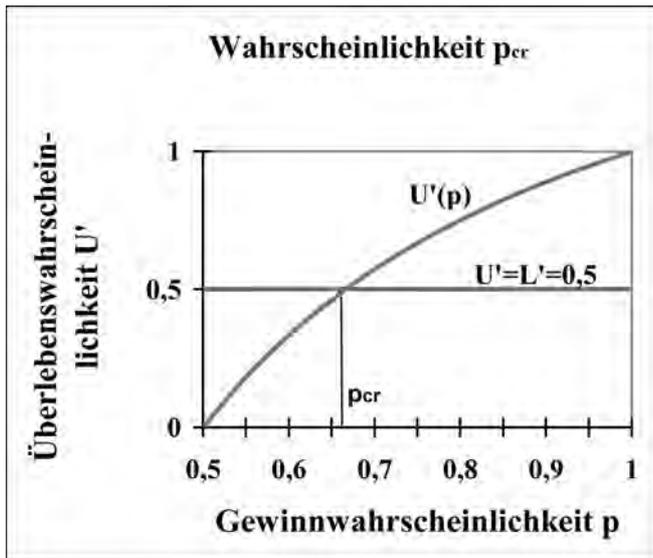


Abb. 3

Das Verhältnis z i.H.v. $\frac{2}{3}$ zu $\frac{1}{3}$ bedeutet, dass die Grenzerlöse zur systematischen Meidung von Ruintendenzen am Schnittpunkt von $U'(p) = 0,5$ mindestens doppelt so hoch sein müssen wie die absoluten Grenzkosten, also $GE = zGK$ für $z = p_{cr}/q_{cr} = 2$. In Fällen, in denen die Gewinne zu den absoluten Verlusten je Aktion an dem Schnittpunkt ein Verhältnis von $m = +R/|-R| > 1$ aufweisen, würden die erforderlichen Gewinne nach Scholtz (2005 S.105) das z -fache mit $z = m \times p_{cr}/q_{cr}$ betragen müssen, damit $U' = L'$ ist. Scholtz begründet diesen Sachverhalt mit den Eigenschaften der Ruinfunktion $L(f)$.

Hieraus ist die latente Ruintendenz des Kelly-Ansatzes deutlich erkennbar. Denn bei diesem findet sich das Optimum bei $z = 1$, also wenn – ohne Beachtung der Ruinwahrscheinlichkeit – die Grenzerlöse GE gleich den Grenzkosten GK sind. Die Grenzerlöse müssen jedoch bei dem unterstellten Prozess *mindestens* das $z = 2$ -fache betragen, wenn die Überlebenswahrscheinlichkeit U' *mindestens* gleich groß wie die Ruinwahrscheinlichkeit L' sein soll. Durch die Verminderung des nach Kelly berechneten f_1 ist bei einer das Überleben berücksichtigenden optimalen Strategie daher ein geringerer relativer Betrag f_2 des jeweiligen Restvermögens einzusetzen. Die Anzahl der *möglichen* Einsätze im worst-case-Szenario ist dann $n_f = 1/f_2$ statt $1/f_1$ mit $1/f_2 > 1/f_1$ in N .

Die Optimierung der Einsätze $B_k = f_2 X_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$ unter Einbeziehung von $L' = U'$ führt damit zu einer *deutlich verringerten* Gesamt ruinwahrscheinlichkeit mit $L_2 = (q/p)^{1/f_2} < L_1 = (q/p)^{1/f_1}$ bzw. größeren Überlebenswahrscheinlichkeit $U_2 > U_1$.

Formal findet man das optimale f_2 durch Differenziation von $g(f) = p \times \ln(1+f) + zq \times \ln(1-f)$ oder einfach durch $GE = zGK$. Nach Einsetzen der Parameter ergibt sich durch Auflösung der Gleichung $p(1+f) = zq/(1-f)$ nach f dann f_2 mit:

$$(7) f_2 = (3p-2)/(2-p) \text{ für } m = +R/|-R| = 1, z = 2 \text{ und } p > p_{cr} \text{ bzw. } p > 2/3, U' = L'.$$

Der Unterschied zwischen der Höhe des jeweils zu riskierenden Einsatzes nach Kelly mit f_1 und dem hier abgeleiteten Einsatzbetrag mit f_2 zur Verminderung ruinöser Tendenzen ist in der Abb. 4 z.B. für $p = 0,8$ und in Tab. 1 für verschiedene Gewinnwahrscheinlichkeiten p anschaulich zu erkennen.

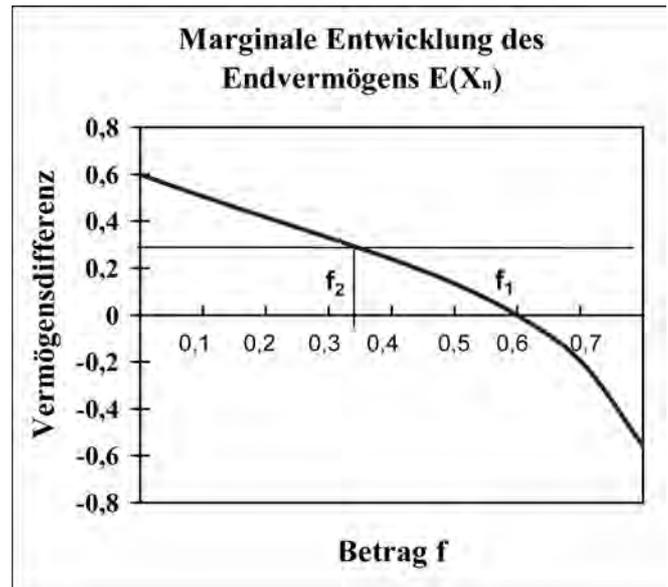


Abb. 4

So verschiebt sich durch Einbeziehung des Ruinparameters eine Parallele zur Nulllinie in der Abbildung nach oben zu $GE-GK = 0,3$ und damit die Höhe von f von f_1 nach links zu f_2 hin. Der Einsatz vom Restkapital und damit das potentielle Risiko sind damit wesentlich kleiner. Denn der mögliche Verlust macht mit 0,33% nur etwa die Hälfte des möglichen Verlustes von 0,6% nach dem Kelly-Modell aus.

Allerdings gehen auch die zwischen f_2 und f_1 liegenden möglichen Gewinne und Zuwächse des Erwartungswertes des Endvermögens als Preis für die Meidung von Ruintendenzen verloren.

p	f ₂	f ₁	f ₁ zu f ₂
0,70	0,076923077	0,40	5,200000000
0,72	0,125000000	0,44	3,520000000
0,74	0,174603175	0,48	2,749090909
...
0,78	0,278688525	0,56	2,009411765
0,80	0,333333333	0,60	1,800000000
0,90	0,636363636	0,80	1,257142857
1	1	1	1

Tab. 1: Vergleich der relativen Einsätze f_2 und f_1

4. Eigenschaften des Modells

Das folgende Theorem fasst die mathematischen Schlussfolgerungen einer Maximierung des Endkapitals *unter der Nebenbedingung* $U' = L'$ zusammen. Dabei werden die Ausführungen von Thorp (1997 S. 4-5) zum Kelly-Ansatz und von Breimann (1960) über optimale Strategien zugrunde gelegt.

Theorem

a) Das Endvermögen eines Anlegers bei Verfolgung der Strategie $\lambda(f_2)$ übersteigt, mit Ausnahme begrenzter Anzahl von Handelsmöglichkeiten, jedes andere Endvermögen einer anderen Strategie mit Einsatzbeträgen f von $M \subset \mathbf{R}, M \neq \emptyset$, im Intervall $(0, f_0)$. D.h., wenn $g(f) > 0$ dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$, für

jedes $M \subset \mathbf{R}$, $M \neq \emptyset$, mit der fast sicheren Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n > M) = 1$. Ist die Anzahl der Handelsmöglichkeiten begrenzt, dann ist eine Strategie $\lambda(f)$ mit Einsätzen von $f < f_2$ optimal.

b) Ist $f > f_0$, dann ist der Ruin fast sicher, d.h.: wenn $g(f) < 0$ dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$, wobei für jedes $\varepsilon > 0$ $\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n < \varepsilon) = 1$.

c) Ist $f = f_0$, dann oszillieren die Vermögensstände fast sicher zwischen 0 und ∞ , d.h.: wenn $g(f) = 0$, dann ist fast sicher $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = 0$.

d) Eine Strategie λ^* mit Maximierung $E \ln X_n$ mit der Nebenbedingung $U' = L'$ im Vergleich mit einer wesentlich anderen Strategie λ mit Einsätzen mit $U' \geq 0,5$ führt fast sicher zu einem höheren Endvermögen, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\lambda^*) / X_n(\lambda) = \infty$. Als wesentlich andere Strategie wird hier eine Strategie λ bezeichnet, deren Differenz $E \ln X_n^* - E \ln X_n$ mit anwachsenden n stärker zunimmt als die Standardabweichung von $\ln X_n^* - \ln X_n$, damit $\mathbb{P}(\ln X_n^* - \ln X_n > 0) \rightarrow 1$.

e) Eine Strategie mit Maximierung $E \ln X_n$ erreicht im Vergleich zu anderen Strategien ein gegebenes Ziel $X_n = C$ asymptotisch in der kürzesten Zeit.

f) Für jede Aktion i mit Wahrscheinlichkeit $p_i > p_{cr}$ maximiert der Einsatz von $f_i = f_{2i}$ $E \ln X_n$ unter der Bedingung $U' = L'$. D.h., dass in Abhängigkeit der im Fall i gültigen Parameter p_i , p_{cr} , m_i , m_x und q_i ein Einsatz i.H.v. $f_i = f_{2i}$ zu einem maximalen Endvermögen X_n führt, der die ggf. ständig sich ändernden Verhältnisse berücksichtigt. Dies gilt sowohl für begrenzte wie auch unbegrenzte Anzahlen von Handelsmöglichkeiten.

Die Punkte e) und f) sind hinsichtlich der realen Umsetzung von besonderer Bedeutung. Sie besagen, dass im Vergleich mit anderen Strategien mit $U' > 0,5$ ein gegebenes Ziel in *kürzester Zeit* erreicht wird und dass *jeweilige Aktualisierungen* der Parameter zu einem Optimum führen.

Das Theorem zeigt weiterhin, dass die Risiken beschränkter Zeiträume in dem Modell nicht hinreichend berücksichtigt werden. So ist u.a. auch aus der *Tab. 1* zu erkennen, dass sich das nach Kelly einzusetzende Fragment f_1 und f_2 für $U' = L'$ mit zunehmender Gewinnwahrscheinlichkeit p annähern und bei $p = 1$ dann $f_2 = f_1$ ist. Hierin liegt insbesondere bei einer Serie von Verlusten trotz geringer Eintrittswahrscheinlichkeit ein besonderes Risiko, soweit man beschränkte Zeitfenster des gesamten Investmentprozesses betrachtet. Daher ist es notwendig, das Optimierungsmodell um weitere Parameter zu erweitern. Zuerst sei in diesem Zusammenhang auf die Problematik von worst-case-Szenarien im Zeitablauf eingegangen.

5. Das Optimierungsmodell für den gesamten Vermögensprozess im Zeitablauf

Die obengenannte Lösung führt zu einem maximalen Erwartungswert des Endvermögens unter der Nebenbedingung $U' = L'$ des eingesetzten Anlagebetrages. Tritt jedoch das worst-case-Szenario mit der Abfolge mehrerer einschneidender Verluste trotz a priori hoher Gewinnwahrscheinlichkeiten mit hohem f auf, dann ist bei begrenzter Zeitdauer das Erreichen des maximalen Endvermögens gefährdet. Scholtz (2005) stellt daher in seinem Ansatz als Restriktion für f_2 darauf ab, dass auch die zukünftige Zeitreihe der Vermögens-

zuwächse zu den Vermögensschrumpfungen ein Verhältnis von $z = 2/3$ zu $1/3$ aufweisen muss¹⁶. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Schätzungen der Gewinnwahrscheinlichkeiten der zukünftigen Zeitreihe konsistent und erwartungstreu sind. Weiterhin wird angenommen, dass die Ereignisse der Veränderungen des Vermögens von einander *unabhängig* sind. Aus diesem Grunde kann man die *kritische* Wahrscheinlichkeit in das Modell unter der weiteren Annahme, dass systembedingt nur Anlagen mit Schätzungen von $p > p_{cr}$ realisiert werden, derart einbeziehen, dass der Erwartungswert $E(X_n^t)$ des Endvermögens des totalen Vermögensprozesses als Restriktion von f_2 *mindestens*

$$(8) E(X_n^t) = E\{(1+f)^{p_{cr}}(1-f)^{q_{cr}}\} = E\{(1+f)^z(1-f)\} \text{ für } U' = L', z = p_{cr}/q_{cr} = 2$$

und $g(f) = z \times \ln(1+f) + \ln(1-f)$ wird.

Die Gültigkeit von Punkt d) des o.a. Theorems ist dabei unterstellt. Differenziert man $g(f)$, dann erhält man nach Auflösung nach f das gesuchte f_3 mit:

$$(9) f_3 = 1/3 \text{ für } m = +R/|R| = 1, U' = L', z = p_{cr}/q_{cr} = 2.$$

Bei $p = 0,8$ ist $f_3 = f_2$. Das bedeutet, die optimal einzusetzende Fraktion f^0 vom Restkapital ist unter Berücksichtigung, dass auch kleinere Fragmente als f zur Minderung des Risikos einer zwischenzeitlichen wesentlichen Vermögensminderung zulässig sind, dann:

$$(f_2 \text{ für } p_{cr} < p < 0,8,$$

$$(10) f^0 \leq (f_3 \text{ für } 0,8 < p < 1,$$

$$1 \text{ für } p = 1.$$

Aus der *Tab. 1* ist der Effekt dieser Gleichung klar zu ersehen. Hierbei ist anzumerken, dass der Ansatz auf der Grundlage der Ruinwahrscheinlichkeiten für f_3 hier bedeutet, dass für alle $m = +R/|R|$ mit $m \geq 1$ die Anzahl der Pfade der *marginalen* Vermögensveränderungen, die über dem Ausgangsvermögen X_k für $k = 1, \dots, n$ verbleiben, größer oder gleich 50% aller möglichen Pfade beträgt.

Bevor die Anwendung dieser Gleichung in der täglichen Praxis erörtert wird, stellt sich die Frage nach der Einbeziehung der Streuung der Verluste in den Optimierungsansatz.

6. Die Berücksichtigung der Streuung der Ergebnisse

Die Ruinproblematik ist, wie es insbesondere aus den Arbeiten der letzten 60 Jahre hervorgeht, nicht allein auf der Grundlage der Erwartungswerte der erwarteten Ergebnisse zu lösen. Im Folgenden wird hier ein Ansatz gezeigt, der für die Streuungsproblematik der möglichen Verluste mit den oben erwähnten Ansätzen einerseits vergleichbar ist, sich aber hinsichtlich der modellimmanenten Maximierung des Erwartungswertes des Endvermögens wesentlich unterscheidet. Je nach Datenlage ist dabei der arbiträre Wert κ von $\kappa\sigma$ durch den VaR oder CvaR, dem Conditional Value at Risk, odgl. zu bestimmen.

Es bietet sich unter diesen Voraussetzungen an, die *negative* Differenz $d\Theta_k = X_u - X_{k-1}$ zwischen dem *unteren* Wert des Konfidenzintervalls $X_u = \exp(\ln X_{k-1} + \mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma)$ einer Schätzung Θ_k von X_k mit $\Theta_k = \exp(\ln X_{k-1} + \mu - \sigma^2/2)$ für die Bestimmung des Risikos der Abweichungen vom Schätzwert Θ_k des zukünftigen Vermögens zugrunde zu legen. Dabei ist X_u der untere Wert des Konfidenzintervalls von Θ_k minus des κ -fa-

¹⁶ Vgl. Scholtz 2005 a.a.O. S. 87 ff. sowie S.104, 109.

chen der Standardabweichung zum Konfidenzniveau γ . κ drückt hier den Grad der Sicherstellung des Vermögenserhaltes bis zum Optimum von $U' = L'$ aus. Nach Gleichung (1) ist das k . Vermögen als $X_k = X_{k-1} + R_k B_k$ für den k . Fall für $k = 1, \dots, n$ definiert. Setzt man nun $B_k = f^0 X_{k-1}$ für $k = 1, \dots, n$, dann ist bei einem approximativ angenommenem lognormal verteilten Prozess für $X_{k-1} = 1$ der Erwartungswert eines eventuellen Verlustes $d\theta = \exp(0 + \mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma) - 1$. Der optimale Anlagebetrag ist dann $f^0 X_{k-1} / |d\theta_k|$ für $k = 1, \dots, n$ und $d\theta_k < 0$. Im Verlustfall geht *durchschnittlich* ein Betrag i.H.v. *kleiner* als $|d\theta_k|$ im Rahmen des vorgegebenen Vertrauensgrades *höchstens* der Betrag $|d\theta_k|$ mit $f^0 X_{k-1}$ zum Konfidenzniveau γ verloren.

Ein Beispiel zu der Höhe eines optimalen Anlagebetrages mag dies veranschaulichen. Es sei:

Der Erwartungswert des Ertrages $\mu = 0,0541$ und $\mu - \sigma^2/2 = 0,0520$ €,

die geschätzte Standardabweichung im Anlagezeitraum $\sigma = 0,064578$ €¹⁷,

das hier nur als Beispiel arbiträr angenommene Vielfache $\kappa = 2,5$,

das vorhandene Vermögen $X_{k-1} = 1$ €,

die geschätzte Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 21/27$,

das *absolute* Verhältnis der durchschnittlichen Ergebnisse von Gewinn/Verlust $m = 3,1469$.

Es folgen nach Gleichung (10) in Verbindung mit Gleichung (7) für $f^0 = 0,33178$ und für $d\theta_k < 0$:

$$(11) B_k = f^0 X_{k-1} / |d\theta_k| \\ = 0,33178 \times 1 / |\exp(0,0541 - 0,064578^2/2 - 2,5 \times 0,064578) - 1| = 3,2 \text{ €}.$$

$d\theta_k$ ist kleiner als 0. Daraus folgt, es sind mit Kreditaufnahme oder Hebelprodukten das 3,2-fache des Vermögens X_{k-1} anzulegen. Tritt ein Verlust i.H.v. $|\exp(\mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma) - 1| \approx 10,4\%$ auf, so gehen vom investierten Gesamtkapital i.H.v. 3,2 € dann ca. 10,4% verloren. Dies ist der zulässige Betrag von $10,4/100$ mal $3,2 \text{ €} \approx 33/100 \text{ €}$ bzw. $f^0 \approx 33\%$ des Vermögens X_{k-1} . Im Durchschnitt treten jedoch nur durchschnittliche Verluste auf. Für $d\theta_k$ größer null bestehen bei der Übernahme gehobelter Risiken keine Begrenzungen.

Wie oben bereits zu *Abb. 4* erörtert, ist eine Abweichung vom Optimum mit Verminderungen beim Wachstum und Erwartungswert des Endvermögens verbunden. Diese Minderung ist die Prämie für die Vermeidung des Ruins aufgrund der Streuung der Ergebnisse mit $d\theta_k < 0$.

Aus Anschaulichkeitsgründen blieb die in der Realität übliche *Unterschiedlichkeit* der *absoluten* Gewinn- und Verlustbeträge bislang unberücksichtigt. Im Folgenden soll sie in das Modell einbezogen werden.

IV. Der optimale Einsatz unter Einbeziehung des Gewinn/Verlust-Verhältnisses

Im Folgenden sei die Ermittlung der kritischen Wahrscheinlichkeit für einen Zufallsprozess mit dem durchschnittlichen absoluten Gewinn/Verlustverhältnis m verdeutlicht.

Gegeben sei in *Abb. 5* die erste Zeile einer Übergangsmatrix mit einem Anfangsvermögen von $X_0 = 1$ € und einem möglichen Endvermögen von n € oder Ruin bei 0 €.

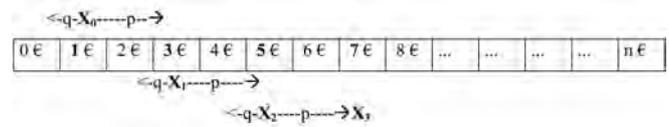


Abb. 5

Das Beispiel spiegelt aufbauend auf der ersten Zeile den oben dargestellten theoretischen Ansatz und zwei der 2^3 möglichen Pfade einer weiteren Vermögensentwicklung für 3 Schritte und *einen* Ruinfall im *ersten* Schritt wider. Das Anfangsvermögen X_0 sei wie angegeben 1 €. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $q = 0,3$ trete ein Verlust von $-R = -1$ € ein, so dass das Vermögen dann $X_1 = 0$ € wäre. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,7$ werde bei einem Gewinn/Verlust-Verhältnis von $m = 2$ ein Gewinn von $+mR = +2$ € erzielt. Das Vermögen betrage in diesem Fall dann $X_1 = 3$ €. Nach dem 3. Schritt wäre das Vermögen 4 € oder 7 €. Gefragt ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Abfolge von weiteren Schritten das Vermögen $X_n = 0$ € erreicht wird, wenn alle möglichen Fälle hinzuaddiert werden, die beim ersten Schritt mit $p = 0,7$ das Kapital $X_1 = 3$ € erreicht haben. Schrittfolgen bzw. Pfade, die in die Zelle 0 € fallen, enden dort. Mit anderen Worten kann man auch sagen, dass in allen Fällen, die die Absorptionsgrenze des Vermögens von 0 € erreichen, ein Ruin eintritt. Die Ruinwahrscheinlichkeit L ist, wie aus der *Abb. 5* zu ersehen, größer als die Verlustwahrscheinlichkeit q . Denn auch jene Fälle bzw. Pfade aus dem *anfangs* positiven Bereich können in der 0 €-Zelle enden.

Diese Darstellung dient als analoges Beispiel für alle Vermögensstände X_0 , wobei jedoch statt 1€ dann der jeweilige Stand des Anfangsvermögens einzusetzen ist. Der „Ruin“ bei Erreichen der Absorptionsgrenze 0 € ist dann nur virtuell für die Bestimmung der *marginalen* Ruinwahrscheinlichkeit von $U' = L'$ für 1 € unterhalb des Startvermögens angenommen.

Mit Hilfe von Differenzgleichungen lässt sich die gesuchte kritische Wahrscheinlichkeit p_{cr} unter den dargestellten Annahmen für $U' = L'$ berechnen. Nach *Feller* (1968 I. S. 344 und 496) liegt eine zulässige Teillösung für die Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit vor, wenn $L = pL^{m+1} + q$. Dies gilt, wenn $L^m + L^{m+1} + \dots + L = q/p$ für alle $m = 1, 2, \dots, n-1$ und hier für $L < 1$. $m = +R/|R|$ repräsentiert hier das Verhältnis der *durchschnittlichen* Gewinne zu den *durchschnittlichen* absoluten Verlusten bzw. Vermögensminderungen.

Nun soll bei einem Verlust, also mit $R_k = -1$, die marginale Ruinwahrscheinlichkeit $L' = U' = 0,5$ sein. Setzt man in $L^m + L^{m+1} + \dots + L = q/p$ bzw. $L = pL^{m+1} + q$ für die Variable L den Wert 0,5 ein und setzt nach Auflösung nach p dann $p_{cr} = p$, so erhält man nach Umformung die kritische Wahrscheinlichkeit des Gewinns für beliebige positive ganzzahlige m mit (12) $p_{cr} = 1/(2 - 0,5^m)$ für $U' = L'$, $m = 1, 2, \dots$ in \mathbb{N} .

Aus der oben gezeigten *Abb. 5* lässt sich deutlich erkennen, dass nur positive ganzzahlige Werte von m mit dem vorgegebenen Ansatz berechnet werden können. Die derart berechnete kritische Wahrscheinlichkeit p_{cr} weist daher in Abhängigkeit von m in einem Koordinatensystem einen treppenförmig fallenden Verlauf auf. Da die *positiven* Vermögensänderungen aber nicht nur ein ganzzahliges Verhältnis zu den *ab-*

17 Der Parameter σ unterliegt ebenfalls einer Streuung. Vgl. Hull, J., 1989 S. 84, 89: Options, futures, and other derivative securities; Rüger, B., 1985 S. 192 ff: Induktive Statistik. Einführung für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler.

soluten Vermögensminderungen aufweisen, geben aus diesem Grund *nicht* ganzzahlig berechnete Werte von m in \mathbf{R} nur eine Approximation wieder.

Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Bestimmung von p_{cr} ist die Art der Anlagestrategie. Aus langfristiger Sicht führt die proportionale Strategie zu wachsenden Vermögen und damit zu wachsenden absoluten Beträgen bei Gewinnen und Verlusten. Daraus folgt, dass für die Bestimmung von m zur Ermittlung der kritischen Gewinnwahrscheinlichkeit p_{cr} statt des einfachen Verhältnisses von Gewinnen und absoluten Verlusten die Zuwachsrate μ_g der Gewinne ins Verhältnis der Schrumpfrate $-\mu_v$ der Verluste gesetzt werden muss, so dass an Stelle für m dann zur Berechnung von $p_{cr} = 1/(2-0,5^{mx})$ mit

$$(13) m_x = -\mu_g/\mu_v$$

zu setzen ist. Hierbei berechnet sich das μ_v für $k = 1, \dots, n$ Vermögensstände X_k aus $\sum \ln(X_k/X_{k-1})/n_v$ für alle $X_k < X_{k-1}$ und für μ_g aus $(\ln(X_n/X_1) - \sum \ln(X_k/X_{k-1}))/n_g$.

Die Erklärungen für die Logarithmierung sind eindeutig. Geht man bei einer proportionalen Anlagestrategie von wachsenden Vermögensveränderungen aus, dann lassen sich die Darstellung in *Abb. 5* und die daraus folgenden Schlussfolgerungen über die Endpunkte der jeweiligen schrittweisen Veränderungen *nicht* aufrecht erhalten. Denn wegen des Wachstums müsste die Darstellung immer weitere Abstände der Grenzen der einzelnen Zellen, die weiter rechts liegen, ausweisen. Durch die erwähnte Logarithmierung bleiben die Abgrenzungen der einzelnen Zellen für m_x in \mathbf{N} jedoch äquidistant und die der Ableitung von p_{cr} zugrunde liegenden Annahmen über die jeweiligen Endpunkte der schrittweisen Veränderungen und daraus folgende Ableitungen können beibehalten werden.

Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob der Ansatz auf der Grundlage der Differenzgleichungen und ein Rechenansatz nach *Roberts (1976)* bei Annahme einer nicht ergodischen Markoff-Kette unter Verwendung der Übergangsmatrix zu unterschiedlichen Ergebnissen führen¹⁸. Eigene Berechnungen für $m = 1, 2, 3, \dots, 10$ lieferten identische Ergebnisse.

Aufbauend auf der zuletzt abgeleiteten kritischen Wahrscheinlichkeit p_{cr} kann im Folgenden das generelle Optimierungsmodell erörtert werden.

V. Ableitung des generellen Modells

Bei Annahme, dass bei einem Gewinn mit $R_k \neq 1$ je Einzelfall $+R/| -R|$ ein m -faches Vielfaches der durchschnittlichen absoluten Verluste mit $R_k = 1$ ist, also $+R = m| -R|$, dann ändert sich der Erwartungswert des Endvermögens im k . Gewinnfall bei Anwendung der proportionalen Strategie auf $X_k = X_{k-1}(1+mf)$ für $k = 1, \dots, n$. Der Erwartungswert des Endvermögens folgt daraus mit:

$$(14) E(X_n) = E\{(1+mf)^p(1-f)^q\} \text{ für } 1 > p > p_{cr},$$

mit $m = +R/| -R|$, $p_{cr} = 1/(2-0,5^{mx})$.

Und die Berücksichtigung von $U' = L'$ für die Optimierung von f für den Einzelfall ergibt unter Verwendung der oben gezeigten Ableitungen für den Erwartungswert des Endvermögens $E(X_n)$:

$$(15) E(X_n) = E\{(1+mf)^p(1-f)^q\} \text{ für } 1 > p > p_{cr},$$

und $g(f) = p \times \ln(1 + mf) + zq \times \ln(1 - f)$
mit $m = +R/| -R|$, $z = mp_{cr}/q_{cr}$.

Durch Differenziation von $g(f)$ erhält man die Grenzerlöse $GE = mp/(1+mf)$ und die hier absolut gesetzten Grenzkosten $zGK = zq/(1-f)$ und für $U' = L'$ dann das optimale f mit:

$$(16) f_5 = (mp-zq)/(mp+mzq) \text{ für } p_{cr} < p < 1.$$

Hierfür ist $m = +R/| -R|$, $z = mp_{cr}/q_{cr}$, $U' = L'$, $p_{cr} = 1/(2-0,5^{mx})$, $m_x = -\mu_g/\mu_v$.

Die Begründung für $z = mp_{cr}/q_{cr}$ leitet sich wie bereits erwähnt, aus dem im vorigen Kapitel behandelten Zusammenhang zwischen *marginaler* Ruinwahrscheinlichkeit und p_{cr} in Verbindung mit *Abb. 3* ab. Für *Abb. 3* ist angenommen, dass $p = n_g/n$ und $q = n_v/n$. Damit ist ersichtlich, dass bei komparativer Betrachtung mit zunehmendem p die Anzahl der Gewinne steigt und im Schnittpunkt von $U'(p) = 0,5$ die *zusätzlichen* durchschnittlichen Gewinne das mp -fache der *absoluten* durchschnittlichen Verluste i.H.v. q ausmachen. Dieser Schnittpunkt $U'(p) = 0,5$ bestimmt im Optimum jedoch den Wert von p_{cr} und damit das $z = mp_{cr}/q_{cr}$ -fache für die Gleichheit von GE und zGK unter Berücksichtigung der obigen Ableitung von p_{cr} aus $L = pL^{m+1}+q$ und $U' = L'$.

Für den gesamten Zufallsprozess im Zeitablauf ergibt sich mit $z = p_{cr}/q_{cr}$ analog zu der Gleichung (8) und der dort aufgeführten Begründung für:

$$(17) E(X_n) = E\{(1+mf)^z(1-f)\} \text{ für } U' = L' \text{ mit } p_{cr} = 1/(2-0,5^{mx}),$$

$m_x = -\mu_g/\mu_v$,
und $g(f) = z \times \ln(1 + mf) + \ln(1-f)$.

Nach Differenziation von $g(f)$, Nullsetzen der linken Seite und Auflösung nach f erhält man:

$$(18) f_6 = p_{cr} \cdot q_{cr}/m, \text{ für } p_{cr} < p < 1.$$

Hierfür ist $m = +R/| -R|$, $U' = L'$, $f_6 < f_5$, $p_{cr} = 1/(2-0,5^{mx})$, $m_x = -\mu_g/\mu_v$.

Der Parameter z enthält hier den Multiplikator $m = 1$, da zur Minderung des Risikos wie oben zu Gleichung (8) erläutert für $p > p_{cr}$ nur die *Anzahl* der Gewinne im Verhältnis zur der *Anzahl* der Verluste im Zeitablauf berücksichtigt zu werden braucht.

Zusammenfassend folgt die optimal einzusetzende Fraktion f^* einer Strategie zur Vermeidung ruinöser Tendenzen mit:

$$(f_5 \text{ für } p_{cr} < p, f_5 \leq f_6,$$

$$(19) f^* \leq (f_6 \text{ für } p < 1, f_5 > f_6,$$

$$(1 \text{ für } p = 1$$

und der optimal einzusetzende höchste Anlagebetrag B_k^* dann mit:

$$(20) B_k^* \leq f^* X_{k-1} / \exp(\mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma) - 1 \text{ für } p_{cr} < p < 1.$$

Hierfür ist $f^* < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, $(\exp(\mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma) - 1) < 0$. Die Fraktion f^* stellt dabei gleichzeitig den höchstens zulässigen Verlust vom Eigenkapital je Anlagefall dar. Ein Blick auf den Ansatz von Kelly oben unter III.2. veranschaulicht den Zusammenhang.

Beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 1$, dann können beliebig hohe Beträge B_k^* angelegt werden, ohne das Vermögen zu gefährden. Ist im praktischen k . Fall für $k = 1, \dots, n$ ein Mix oder ein einzelnes Investment $B_k > B_k^*$, dann enthält das Investment eine Ruinkomponente mit der Gefahr eines Totalverlustes im worst-case-Szenario.

18 Roberts, F. S., 1976: Discrete mathematical models.

Ein *stark* vereinfachtes Beispiel soll nun die bisherigen Ausführungen und den Ansatz rein rechnerisch veranschaulichen.

VI. Beispiel

Es seien für $k = 1, \dots, n$ folgende Verteilung von n Fallrenditen $r = (X_k/X_{k-1}) \times 100$ einer bestimmten Anlagestrategie im Zeitablauf gegeben (in Prozent):

2,53; -1,10; 9,54; 2,27; 3,53; 6,80; 5,51; 8,07; 4,55; 1,24; 2,78; 6,40; -0,13; -1,49; 8,38; -4,55; -0,48; 20,80; 12,25; 5,69; 15,33; 3,57; -7,29; 20,18; 14,25; 4,11; 13,17.

Frage: Wie hoch soll der Eigenkapitalanteil zur Vermeidung des Ruins sein und welcher Fremdmiteinsatz ist bei Risikoanlagen mit Leverageeffekt 1) zum Anfang der Totalperiode aller Fälle oder 2) welcher Hebel je einzelner Anlagezeitpunkt zulässig, wenn in Zukunft eine gleiche Renditemischung der hier um Hebeleffekte bereinigten Ergebnisse einer Investmentstrategie zu erwarten ist? Das Eigenkapital X_k für $k = 0$ sei 1€. Aus r folgt daraus für $k = 1, 2 \dots$ dann $X_k = 1,0253 \text{ €}; 1,014 \text{ €} \dots$ usw. soweit *kein* Hebel verwandt wird.

Berechnung der Parameter für $k = 1, \dots, n+1$ auf Basis der Fallrenditen $r = (X_k/X_{k-1}) \times 100$:

(1) Summen $\ln(X_k/X_{k-1})$, davon $\sum \ln(+R) = 1,615629$; $\sum \ln(-R) = -0,1544471$,

(2) Zuwachsrates $\mu_g = 0,07693$; $n_g = 21$; Durchschnittsgewinn $g = \exp(\mu_g) - 1 = 0,07997$,

(3) Schrumpfrates $\mu_v = -0,02574$; $n_v = 6$; Durchschnittsverlust $v = \exp(\mu_v) - 1 = -0,02541$,

(4) Verhältnis der Raten $m_x = -\mu_g / \mu_v = 2,988781$; Verh. Gewinn/Verlust $m = -g/v = 3,146916$,

(5) Gewinn-; Verlustwahrscheinlichkeit: $0,7777778$; $0,2222222$,

(6) kritische Wahrscheinlichkeit $p_{cr} = 1/(2-0,5^{m_x}) = 0,53361$; $q_{cr} = 0,46639$,

(7) kritischer Wahrscheinlichkeitsquotient $z = m \times p_{cr}/q_{cr} = 3,60049$,

(8) $f_5 = 0,3317893$ (Gl.16); $f_6 = 0,385406$ (Gl.19); folgt Gl. (19): $f^* = \min(f_5, f_6) = 0,331789$,

(9) Rendite $\mu = 0,052 \text{ €}$; Sigma $\sigma = 0,064578$; *zulässiger* Verlust $(\exp(\mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma) - 1) = -0,104 \text{ €}$,

(10) optimales Investment (Gl. 20) B_k^* -faches vom Kapital = $f^*/(\exp(\mu - \sigma^2/2 - \kappa\sigma) - 1) = 3,201 \text{ €}$,

(11) Zulässige Fremdmittel = $3,201 \text{ €}$ Optimalinvestment minus 1 € Eigenkapital = $2,201 \text{ €}$,

(12) Eigenkapitalquote = $1/B_k^* = 31,2\%$ (*Minimum* zur Vermeidung von Ruin/Insolvenz),

(13) *marginale* Ruinwahrscheinlichkeit = $0,2242$. Gesamte Überlebenswahrscheinlichkeit = 1

Die oben gezeigten Renditen stellen die Vermögensveränderungen je Anlage ohne Leverageeffekte dar. In der Stichprobe enthaltene Gewichtungen absoluter Daten durch zeitabhängige Effekte (Wachstum) wurden durch die relative Erhebung eliminiert. Um das Beispiel nicht zu überlasten, wird auf den Ansatz zur Erstellung der Verteilung der Renditen hier nicht weiter eingegangen. *Abb. 6* verdeutlicht den Effekt der Optimierung für den Fall 1), wenn zum Beginn der Total-

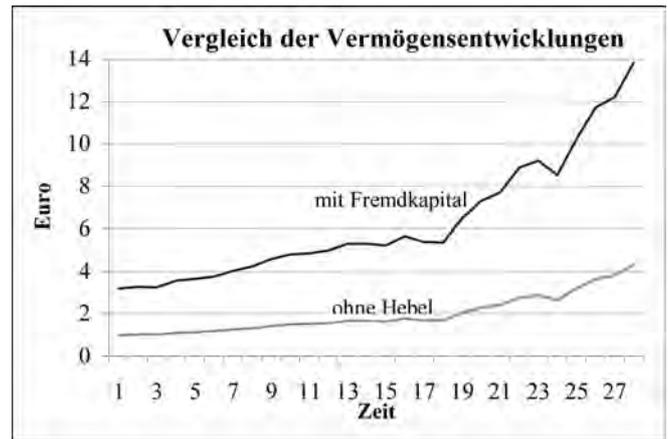


Abb. 6

periode Fremdmittel von $2,201 \text{ €}$ aufgenommen werden, so dass das anfängliche Risikokapital insgesamt dann $3,201 \text{ €}$ beträgt.

Ein Eigenkapital X_0 von 1 € entwickelt sich durch den Einsatz von Fremdmitteln i.H.v. $2,201 \text{ €}$ durch Wiederanlage des jeweiligen Restvermögens X_{k-1} für $k = 1 \dots n$ auf $X_n = 13,8 \text{ €}$. Die *marginale* Überlebenswahrscheinlichkeit U' ist dabei stets größer als die marginale Ruinwahrscheinlichkeit L' . Denn der für $U' > L'$ *zulässige* Verlust von $10,4 \text{ Prozent}$ der gesamten Kapitalanlage nach Zeile (9) wird in *keinem* Fall k erreicht. Nach Abzug der Fremdmittel von $2,201 \text{ €}$ beträgt das Endvermögen $13,8 \text{ €} - 2,201 \text{ €}$ bzw. netto $11,599 \text{ €}$. *Ohne* Fremdmittel erreicht das Vermögen X_n nur $4,31$ Werteinheiten. Der größte *absolute* Verlust V , *in der Periode* $k = 23$, beträgt $7,29 \text{ Prozent}$. Durch die in den X_{k-1} enthaltenen Fremdmittel erreicht das Vermögen X_{k-1} $9,2 \text{ €}$ und mindert sich durch den Verlust um $7,29 \text{ Prozent}$ auf $8,53 \text{ €}$. Nach Abzug der Fremdmittel ergeben sich $8,53 \text{ €}$ brutto minus $2,201 \text{ €}$ Fremdmittel dann $6,999 \text{ €}$ netto. Das alternative Vermögen X_{k-1} *ohne* Fremdmittel hat sich im $k = 23$. Fall von $2,87 \text{ €}$ auf $2,66 \text{ €}$ ermäßigt. Der *absolute* Verlust ist *ohne* Fremdmittel zwar geringer aber das erreichte Vermögen X_k ist so niedrig, dass es *nach* dem Verlust $2,66 \text{ €}$ beträgt gegenüber dem durch Fremdmittel gehebelten Vermögen von netto $6,999 \text{ €}$ in der gleichen Periode. Fazit: Die gesamte Ruinwahrscheinlichkeit des Vermögens ist bei dieser Strategie fast null¹⁹. Der intertemporäre Vermögenserhalt, bzw. die Bedingung, dass die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit U' aller Vermögensstände im Zeitablauf stets größer als die marginale Ruinwahrscheinlichkeit L' ist, ist demnach modellimmanent sichergestellt.

Trotz der relativ guten Performance der Anlagestrategie zeigt das Ergebnis, dass die Eigenkapitalquote für die realisierten Risikoinvestments fast ein Drittel des Anlagebetrages

19 Vgl. Scholtz 2005 a.a.O. S. 94 ff. Die Ruinwahrscheinlichkeit ist $\text{Ln}n\#$ bzw. $3,56 \times 10^{-10}$ für $n\# = \ln(X_n/X_0)/\mu_v = 14,55$, $\mu_v = -0,02574$ mit X_n dem Betrag der Fremdmittel i.H.v. $2,201 \text{ €}$ und dem gesamten eingesetzten gehebelten Kapital X_k i.H.v. $3,201 \text{ €}$ mit $L = 0,2242$. Die Differenz von $X_k - X_n = 1 \text{ €}$ ist das vom Anleger eingesetzte ruingefährdete eigene Vermögen. Beim Einsatz von Derivaten, oben als 2). Frage formuliert, sind die Renditeergebnisse noch eindeutiger. Die mit dem Faktor $3,201$ je Anlageentscheidung gehebelten Renditen führen dann zu einem Endvermögen von $62,34 \text{ €}$ mit einer Ruinwahrscheinlichkeit von $5,08 \times 10^{-37}$. Sie ist damit fast sicher 0. Hierbei wurde $n\# = 56$ für $\ln(0.01/1)/(\mu_v \times 3,201)$ verwandt.

zur Vermeidung eines latenten Insolvenzrisikos bzw. einer latenten Ruintendenz betragen muss²⁰.

VII. Schlussfolgerungen

Das vorgestellte Modell liefert mit der Größe des in Risikoanlagen *höchstens* anzulegenden Betrages B_k^* für $k = 1, \dots, n$ jenen Parameter, der für eine dauerhafte positive Vermögensentwicklung ruinöse Entwicklungstendenzen modellimmanent ausschließt. Im Rahmen der Überprüfung bestehender Risiken sind dabei die Voraussetzungen für die Berechnung von B_k^* ebenfalls zu aktualisieren. Hierbei erscheint zur Schätzung des zukünftigen Pfades der Vermögensentwicklung bei „normaler“ Geschäftsentwicklung eine Analyse der Mischverteilung der Ereignisse der Vermögensveränderungen nach bestimmten Risikogruppen hinreichend. Ändert sich der Strategiemix bei der Anlage in Risikoinvestments grundlegend, dann sind jedoch *detailliertere* Überprüfungen der Voraussetzungen erforderlich. Bei zu erwartenden ansteigenden Volatilitäten der Ergebnisse sind diese im Ansatz zu berücksichtigen.

Das Modell liefert auch Entscheidungsgrundlagen bei Fremdmittelaufnahmen oder bei Anlagen in Derivate. Eigene Berechnungen für die Jahre 2006/2008 zeigen z.B., dass selbst bei Anlagestrategien mit relativ hohen Gewinnwahrscheinlichkeiten ein Fremdmiteinsatz oder Anlagen in Derivate *nur* mit einem Hebel bis zum 3.2-fachen des Eigenkapitals bzw. des Underlyings zulässig waren. Dies entspricht bei Risikoinvestments mit Fremdmitteln einer notwendigen Eigenkapitalquote von etwa einem Drittel.

VIII. Zusammenfassung

Der Ansatz analysiert die mathematischen Einflussgrößen, die bei risikobehafteten Investments zur Maximierung eines Endvermögens bei *gleichzeitiger Vermeidung* von Ruintendenzen zu berücksichtigen sind. Danach muss die Gewinnwahrscheinlichkeit von Risikoinvestments eine *kritische* Größe überschreiten. Weiterhin darf *nur ein definierter* Höchstbetrag risikoreich investiert werden. Bei Investments mit geringeren Gewinnwahrscheinlichkeiten oder höheren Einsatzbeträgen als den optimalen ist die marginale Ruinwahrscheinlichkeit größer als die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit. Es besteht dann eine latente Ruintendenz und Gefährdung der Solvenz. Das Erreichen eines maximalen Endvermögens oder auch nur eines hohen Vermögens ist somit tendenziell gefährdet. Bei geringeren Einsätzen und höheren Gewinnwahrscheinlichkeiten als den optimalen oder bei strikter Einhaltung der Strategie ist dagegen auch *zwischenzeitlich* eine hohe Wachstumsrate des Vermögens zu erwarten. Der Ansatz eignet sich damit neben der Bestimmung von Anlagehöchstbeträgen für bestimmte Strategien auch zur Ableitung von Kontrollparametern im Rahmen des Risikomanagements und zur Sicherung der Solvenz.

20 Bei der Anlagestrategie handelt es sich um einen marktneutralen Zweifaktoransatz mit Handelsergebnissen am deutschen Wertpapiermarkt von Juli 2006 bis Juli 2008. Die Ergebnisse erstrecken sich etwa zur Hälfte auf den Zeitraum der Finanzkrise. Vgl. Scholtz, H. D., 2008: Risikoreduzierung bei Anlagen in Hebelprodukte -Portfoliooptimierung mit einem orthogonalen Zweifaktormodell. Risiko Manager, Nov., 23, S. 1, 6-16 sowie: The Anomaly of Betas and the Impact on the Continuation Effect: An Approach of Eliminating the Special Risk of Anomaly, <http://ssrn.com/abstract=1274191>. (DId. 26.10.2008).