

Fonseca, Thaís C. O.; Cerqueira, Vinícius S.; Migon, Hélio S.; Torres, Cristian A. C.

Working Paper

Modelos GARCH assimétricos com inovações t-Student

Texto para Discussão, No. 1872

Provided in Cooperation with:

Institute of Applied Economic Research (ipea), Brasília

Suggested Citation: Fonseca, Thaís C. O.; Cerqueira, Vinícius S.; Migon, Hélio S.; Torres, Cristian A. C. (2013) : Modelos GARCH assimétricos com inovações t-Student, Texto para Discussão, No. 1872, Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), Brasília

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/91321>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

1872

TEXTO PARA DISCUSSÃO

MODELOS GARCH ASSIMÉTRICOS COM INOVAÇÕES T-STUDENT

Thaís C. O. Fonseca
Vinícius S. Cerqueira
Hélio S. Migon
Cristian A. C. Torres

MODELOS GARCH ASSIMÉTRICOS COM INOVAÇÕES T-STUDENT

Thaís C. O. Fonseca*

Vinícius S. Cerqueira**

Hélio S. Migon ***

Cristian A. C. Torres****

* Professora do Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ) e pesquisadora visitante do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea).

** Técnico de Planejamento e Pesquisa da Diretoria de Estudos e Políticas Macroeconômicas (Dimac) do Ipea.

*** Professor do Departamento de Métodos Estatísticos do IM/UFRJ.

**** Doutorando em Estatística da UFRJ.

Governo Federal

**Secretaria de Assuntos Estratégicos da
Presidência da República**
Ministro interino Marcelo Côrtes Neri



Fundação pública vinculada à Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República, o Ipea fornece suporte técnico e institucional às ações governamentais – possibilitando a formulação de inúmeras políticas públicas e programas de desenvolvimento brasileiro – e disponibiliza, para a sociedade, pesquisas e estudos realizados por seus técnicos.

Presidente
Marcelo Côrtes Neri

Diretor de Desenvolvimento Institucional
Luiz Cezar Loureiro de Azeredo

**Diretor de Estudos e Relações Econômicas
e Políticas Internacionais**
Renato Coelho Baumann das Neves

**Diretor de Estudos e Políticas do Estado,
das Instituições e da Democracia**
Daniel Ricardo de Castro Cerqueira

**Diretor de Estudos e Políticas
Macroeconômicas**
Cláudio Hamilton Matos dos Santos

**Diretor de Estudos e Políticas Regionais,
Urbanas e Ambientais**
Rogério Boueri Miranda

**Diretora de Estudos e Políticas Setoriais
de Inovação, Regulação e Infraestrutura**
Fernanda De Negri

Diretor de Estudos e Políticas Sociais
Rafael Guerreiro Osorio

Chefe de Gabinete
Sergei Suarez Dillon Soares

Assessor-chefe de Imprensa e Comunicação
João Cláudio Garcia Rodrigues Lima

Ouvidoria: <http://www.ipea.gov.br/ouvidoria>
URL: <http://www.ipea.gov.br>

Texto para Discussão

Publicação cujo objetivo é divulgar resultados de estudos direta ou indiretamente desenvolvidos pelo Ipea, os quais, por sua relevância, levam informações para profissionais especializados e estabelecem um espaço para sugestões.

© Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada – **ipea** 2013

Texto para discussão / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada.- Brasília : Rio de Janeiro : Ipea , 1990-

ISSN 1415-4765

1. Brasil. 2. Aspectos Econômicos. 3. Aspectos Sociais.
I. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada.

CDD 330.908

As opiniões emitidas nesta publicação são de exclusiva e inteira responsabilidade do(s) autor(es), não exprimindo, necessariamente, o ponto de vista do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada ou da Secretaria de Assuntos Estratégicos da Presidência da República.

É permitida a reprodução deste texto e dos dados nele contidos, desde que citada a fonte. Reproduções para fins comerciais são proibidas.

JEL: C220; C120; C130.

SUMÁRIO

SINOPSE

ABSTRACT

1 INTRODUÇÃO	7
2 MODELOS ARMA-GARCH-M EM UM CONTEXTO DE ERROS T-STUDENT.....	9
3 MODELO GARCH ASSIMÉTRICO	13
4 ESTUDO DE SIMULAÇÃO	22
5 APLICAÇÃO	26
6 CONCLUSÕES	29
REFERÊNCIAS	30
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	31

SINOPSE

Neste trabalho, modela-se a volatilidade usando uma abordagem bayesiana para a estimação de modelos Generalizados Autorregressivos de Heterocedasticidade Condicional – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH). Eventuais assimetrias são acomodadas utilizando-se modelos de transição suave para a variância. Apresentam-se alguns problemas relacionados a esta abordagem e discute-se como estes influenciam o comportamento da função de verossimilhança. Para dados cujas distribuições apresentam caudas mais pesadas, utiliza-se a distribuição t-Student. Os problemas da verossimilhança derivados da estimação dos graus de liberdade são resolvidos usando a *priori* de Jeffrey. Um estudo simulado é apresentado para evidenciar o potencial da metodologia. Por fim, uma aplicação da metodologia a séries de índices de preços ao consumidor (IPCs) no Brasil revela as vantagens da utilização de modelos GARCH assimétricos com distribuição t-Student.

Palavras-chave: t-Student; modelos GARCH; abordagem bayesiana; *priori* de Jeffrey.

ABSTRACTⁱ

In this work we consider modeling the past volatilities through a Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) model using the Bayesian approach. Asymmetries in the shocks are accommodated by smooth transition models for the variance. We discuss problems related to the likelihood function and propose a solution. In order to account for heavy tails in the applications we consider Student-t errors. The Jeffrey's prior is used in this context to correct problems in the estimation of degrees of freedom. A simulated study is presented to highlight the advantages of the proposed methodology and an application to the Brazilian index of prices illustrates the usefulness of the asymmetric GARCH model with student-t errors.

Keywords: Student-t; GARCH model; Bayesian approach; Jeffrey's prior.

i. *The versions in English of the abstracts of this series have not been edited by Ipea's editorial department.*
As versões em língua inglesa das sinopses (*abstracts*) desta coleção não são objeto de revisão pelo Editorial do Ipea.

1 INTRODUÇÃO

As duas principais classes de modelos para volatilidade condicional são os Modelos de Volatilidade Estocástica (MVE) e os modelos Generalizados Autorregressivos de Heterocedasticidade Condicional – Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH). Na primeira, a variância presente de uma variável é função de seus valores passados e de um termo estacionário gaussiano. Uma desvantagem dos modelos MVE básicos é que adotam como premissa a ideia de que a variância é independente dos choques que afetam a média das variáveis. Tentando superar tal limitação, Jacquier, Polson e Rossi (2004) apresentam um MVE em que as inovações da média condicional e da variância condicional são correlacionadas. No entanto, apesar de tal extensão, é difícil avaliar diretamente os efeitos defasados de inovações da média condicional sobre a variância condicional. Por sua vez, os modelos GARCH permitem a realização de testes de hipóteses para os parâmetros que relacionam as inovações passadas, na média, à variância condicional. Dessa forma, um diagnóstico sobre a existência e sobre o quão defasado é o impacto de movimentos na média condicional sobre a dinâmica da variância é relativamente mais fácil de ser obtido em modelos GARCH. Metodologias que permitam testar adequadamente este canal de transmissão são úteis, pois, em séries econômicas e financeiras, é possível que inovações na média gerem incerteza nos agentes e, por conseguinte, maior volatilidade.

Os modelos GARCH são frequentemente estimados utilizando-se a hipótese de normalidade dos erros. Todavia, muitas séries econômicas e financeiras possuem distribuições incompatíveis com o modelo gaussiano usual. Desde Mandelbrot (1963), vários autores têm discutido a questão das “caudas pesadas” em conjuntos de dados de retornos de ativos financeiros. Bollerslev (1987) introduziu o modelo GARCH-t como uma solução para este problema. Além disso, no contexto da análise robusta, Harvey e Chakravarty (2008) apresentam um Beta-t-EGARCH, em que as volatilidades dependem dos *scores* da distribuição t-Student. Zhang *et al.* (2011) propuseram o uso de distribuições hiperbólicas generalizadas para modelar volatilidades, sendo possível capturar “caudas pesadas” e assimetria. Neste trabalho, flexibiliza-se a hipótese de erros gaussianos ao considerar um modelo com erros t-Student. Bauwens e Lubrano (2002) mostram como a introdução de erros t-Student no modelo GARCH pode melhorar o ajuste aos dados. No entanto, como discutido em Bauwens e Lubrano (1998) e Fonseca, *et al.* (2008), a função de verossimilhança do modelo GARCH com erros t-Student é mal

comportada. Bauwens e Lubrano (1998) propõem o uso do *amostrador de Gibbs* que, entretanto, não funciona nos casos em que a função de verossimilhança é monotônica. Ardia (2008) descreve uma abordagem bayesiana para modelos GARCH com erros t-Student usando distribuições exponenciais *a priori* modificadas. Esta abordagem apresenta problemas quando a verossimilhança é monotônica nos parâmetros. No modelo apresentado neste trabalho, os graus de liberdade são estimados usando *a priori* de Jeffrey, apresentado em Fonseca *et al.* (2008), que corrige os problemas na função de verossimilhança para o modelo t-Student. Investigou-se como as estimativas dos parâmetros do modelo GARCH-t-Student se comportam em contextos de pequenas amostras, diferentes distribuições *a priori* e especificação equivocada da distribuição dos erros na função de verossimilhança.

Outro aspecto importante relacionado aos modelos GARCH é que a variância condicional pode seguir diferentes regimes em função de choques positivos e negativos ou choques pequenos e grandes. É importante que o modelo seja flexível para considerar o fato de que as notícias têm impactos assimétricos sobre a economia. Engle e Ng (1993) apresentam uma revisão sobre este tópico. Awartani e Corradi (2005) discutem a importância das assimetrias na previsão de índices econômicos. Estas não linearidades podem ser acomodadas por modelos de transição suave com assimetria na variância condicional. Assim, diferentes especificações são utilizadas para capturar estes efeitos na volatilidade. Embora seja flexível, o modelo GARCH assimétrico com transição suave apresenta problemas na estimativa de parâmetros conforme discutido em Lubrano (1998) e Bauwens e Lubrano (2002). Existe uma probabilidade positiva de que a verossimilhança seja uma função crescente quando o parâmetro de assimetria (velocidade de ajustamento) tende para o infinito. Uma distribuição *a priori* pode ser utilizada para resolver estes problemas. No entanto, a escolha da distribuição pode dominar a inferência, e as distribuições *a posteriori* serão semelhantes à *priori* selecionada. Neste contexto, propõe-se uma nova *priori* não informativa, que visa oferecer a informação correta em relação à curvatura da função de verossimilhança e resolver os problemas da mesma.

O artigo está dividido em cinco seções, além desta introdução. Na seção 2, apresenta-se o modelo ARMA-GARCH-M com erros t-Student. Discutem-se as principais questões relacionadas com a função de verossimilhança e estimativa de parâmetros como o grau de liberdade, que não é normalmente estimado na literatura.

Apresentam-se a *priori* considerada para corrigir os problemas com a verossimilhança com erros t-Student e exemplos simulados que mostram os efeitos de uma incorreta especificação do modelo. A seção 3 apresenta o modelo GARCH assimétrico e a distribuição *a priori* para os parâmetros de interesse. As questões relacionadas à função de verossimilhança são discutidas no contexto de modelos assimétricos. A seção 4 apresenta um estudo de simulação para avaliar o desempenho de estimadores bayesianos e um teste bayesiano para a seleção de modelos. Uma aplicação para os dados de índices de preços ao consumidor (IPCs) no Brasil é apresentada na seção 5. A seção 6 conclui o trabalho com os principais resultados e desenvolvimentos futuros dos modelos propostos.

2 MODELOS ARMA-GARCH-M EM UM CONTEXTO DE ERROS T-STUDENT

Considere-se uma série y_t indexada em tempo discreto $t \in N_+$. Para o termo da média, assume-se um Modelo Autorregressivo de Média Móvel – Autoregressive Moving Average Models (Arma) – e adiciona-se um termo heterocedasticidade condicional (M). Aqui, considerou-se o seguinte modelo mistura para capturar observações extremas em séries financeiras e econômicas.

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j u_{t-j} + \sum_{j=1}^k \psi_j h_{t-j} + u_t \quad (1)$$

onde $u_t = e_t \left(\frac{v-2}{v} \omega_t h_t \right)^{1/2}$, $t = p+1, \dots, N$, $e_t \sim N(0,1)$, $\omega_t \sim GI(v/2, v/2)$.

O parâmetro $v \in \mathfrak{R}$ é uma constante desconhecida, responsável pela cauda pesada da distribuição amostral. A variância é considerada heterocedástica e segue um modelo GARCH.

$$h_t = \omega + \sum_{j=1}^r \beta_j h_{t-j} + \sum_{j=1}^s \alpha_j u_{t-j}^2 \quad (2)$$

com as restrições $\sum_{j=1}^r \alpha_j + \sum_{j=1}^s \beta_j < 1$, $\omega > 0$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$. Sem perda de generalidade, pode-se considerar $\omega = 0$. A função de densidade de u_t é o modelo t-Student dado por:

$$f(u_t; \nu, h_t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} ((\nu-2)h_t)^{-1/2} \left(1 + \frac{u_t^2}{(\nu-2)h_t} \right)^{-1/2(\nu+1)} \quad (3)$$

Considere observações $y_0 = (y_1, \dots, y_p)'$ como conhecidas e o conjunto $u_p = u_{p-1} = \dots = u_{p-q} = u_{p-q+1} = 0$. A equação (1) pode ser reescrita como:

$$y = X\phi + A\theta + \tilde{H}\psi + u \quad (4)$$

onde

$$y = (y_{p+1}, \dots, y_N)', \phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)', \theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)', \psi = (\psi_1, \dots, \psi_k), u = (u_{p+1}, \dots, u_N)'$$

e

$$X = \begin{pmatrix} y_p & y_{p-1} & \cdots & y_1 \\ y_{p+1} & y_p & \cdots & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-p} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} u_p & \cdots & u_{p-q+1} \\ u_{p+1} & \cdots & u_{p-q+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N-1} & \cdots & u_{N-q} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} h_p & \cdots & h_{p-k+1} \\ h_{p+1} & \cdots & h_{p-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{N-1} & \cdots & h_{N-k} \end{pmatrix}.$$

A partir da equação (1), pode-se definir u_t , $t = p + 1, \dots, N$ recursivamente por:

$$u_t = y_t - \mu + \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} - \sum_{j=1}^q \theta_j u_{t-j} - \sum_{j=1}^k \psi_j h_{t-j}$$

O modelo em (1) é capaz de capturar o comportamento “cauda pesada”, permitindo observações extremas. Isto é de grande valor na análise de séries temporais econômicas e financeiras. No entanto, a função de verossimilhança para este modelo é mal comportada. A seguir, apresentam-se as principais questões relacionadas à estimativa de parâmetros do modelo GARCH com erros t-Student.

2.1 Questões relacionadas à função de verossimilhança e inferência bayesiana

A função de verossimilhança para o modelo (1) é dada por:

$$L(\phi, \theta, \psi, \nu | X, A\tilde{H}, y, y_0) \propto |H|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - X\phi - A\theta - \tilde{H}\psi)' H^{-1} (y - X\phi - A\theta - \tilde{H}\psi) \right\} \quad (5)$$

onde $H = \text{diag} \left(\omega_{p+1} \frac{\nu-1}{\nu} h_{p+1}, \dots, \omega_N \frac{\nu-1}{\nu} h_N \right)$

A estimativa do grau de liberdade do parâmetro ν não é trivial. Como discutido em Fonseca *et al.* (2008), a função de verossimilhança é mal comportada e do uso de *prioris* simples pode levar a distribuições *a posteriori* impróprias para os parâmetros de interesse. Como mostram Fonseca *et al.* (2008), há uma probabilidade positiva de que o estimador de máxima verossimilhança não exista para alguns conjuntos de dados. Esta não é uma questão relacionada com a abordagem frequentista, mas um problema intrínseco da verossimilhança. O teste que se segue pode ser aplicado a um determinado conjunto de dados, objetivando verificar se a verossimilhança de ν é bem comportada ou não tem um máximo. Se a condição de que se segue é satisfeita, a verossimilhança não é bem comportada.

$$\sum_{i=1}^n (\hat{z}^2 - 1)^2 < 2n$$

onde n é o tamanho da amostra e \hat{z}_i são resíduos padronizados sob normalidade. Neste trabalho, utiliza-se a correção para a verossimilhança proposta por Fonseca *et al.* (2008), isto é, considera-se a *priori* de Jeffrey para o grau de liberdade ν no Arma-GARCH-M estimado. Para os parâmetros ϕ , θ , ψ , α , β , considera-se a distribuição *a priori* dada por:

$$p(\phi, \theta, \psi, \alpha, \beta | \nu) \propto k \quad (6)$$

Para ν , considera-se a *priori* de Jeffrey independente dada por:

$$p(\nu) \propto \left(\frac{\nu}{\nu+3} \right)^{1/2} \left\{ \mathfrak{G}'(\nu/2) - \mathfrak{G}'((\nu/2)/2) - \frac{2(\nu+3)}{\nu(\nu+1)} \right\}^{1/2} \quad (7)$$

onde $\mathfrak{G}(a) = d \log \Gamma(a) / da$ e $\mathfrak{G}'(a) = d\{\mathfrak{G}(a)\} / da$ são as funções digamma e trigamma, respectivamente.

Fonseca *et al.* (2008) apresentam um estudo simulado que mostra que a mediana da *posteriori* é um melhor estimador para ν do que o método da máxima verossimilhança. Os autores também provam que a distribuição marginal da *posteriori* de ν é própria. A análise da *posteriori* pode ser obtida utilizando-se o algoritmo do *amostrador de Gibbs* das distribuições condicionais completas, com passos de *metropolis* para α , β e ν . As distribuições condicionais completas são dadas por:

- Parâmetro ϕ :

$$\phi | \theta, \psi, \alpha, \beta, X, y, y_0 \sim N(\hat{\phi}, (X' H^{-1} X)^{-1})$$

onde $\hat{\phi} = (X' H^{-1} X)^{-1} (X' H^{-1} y - X' H^{-1} A \theta - X' H^{-1} \tilde{H} \psi)$.

- Parâmetro θ :

$$\theta | \phi, \psi, \alpha, \beta, X, y, y_0 \sim N((A' H^{-1} A)^{-1} (A' H^{-1} y - A' H^{-1} X \phi - A' H^{-1} H \psi), (\tilde{A}' H^{-1} A)^{-1})$$

- Parâmetro ψ :

$$\psi | \phi, \theta, \alpha, \beta, X, y, y_0 \sim N((\tilde{H}' H^{-1} \tilde{H})^{-1} (\tilde{H}' H^{-1} y - \tilde{H}' H^{-1} X \phi - \tilde{H}' H^{-1} A \theta), (\tilde{H}' H^{-1} \tilde{H})^{-1})$$

- Parâmetros α e β :

$$p(\alpha, \beta | \dots) = \prod_{j=1}^{N-p} \phi(y_t | \mu_t, h_t)$$

onde $\mu_t = \sum_{j=1}^p \phi_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^q \theta_j u_{t-j} + \sum_{j=1}^k \psi_j h_{t-j}$ e $\phi(\cdot)$ é a função de densidade gaussiana.

Definiram-se as distribuições propostas independentes dadas por:

$$\alpha \sim N\left(\hat{\alpha}_i, \hat{\Sigma}_{\alpha_i}\right), \beta \sim N\left(\hat{\beta}_i, \hat{\Sigma}_{\beta_i}\right)$$

- Parâmetro v :

$$p(v | \dots) \propto |H|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y - X\phi - A\theta - \tilde{H}\psi)'(y - X\phi - A\theta - \tilde{H}\psi)\right\}$$

$$\times \frac{(v/2)^{(N-p)v/2}}{\Gamma(v/2)^{N-p}} \left(\prod_{t=1}^{N-p} \omega_t\right)^{-v/2-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N-p} \frac{v}{\omega_t}\right\} p(v)$$

Neste artigo, a *priori* proposta em (7) é usada na estimação dos graus de liberdade da distribuição t-Student, no estudo simulado e na aplicação a dados reais.

3 MODELO GARCH ASSIMÉTRICO

Inicialmente, considera-se normalidade para uma série temporal y_t univariada com valores indexados em tempo discreto $t \in N_+$. O modelo GARCH simétrico é dado por:

$$y_t = \mu_t + u_t \quad (8)$$

$$u_t \sim N(0, h_t) \quad (9)$$

$$h_t = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (10)$$

onde $\omega, \alpha > 0$, $\alpha + \beta < 1$ para uma série estacionária. O modelo GARCH assimétrico dado por

$$y_t = \mu_t + u_t \quad (11)$$

$$u_t \sim N(0, h_t) \quad (12)$$

$$h_t = \omega + \lambda u_{t-1}^2 f_t(u_{t-1}, \gamma) + \alpha u_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (13)$$

Considerando a função $f_t(u, \gamma) = 1 - \exp\{-\gamma u^2\}$. Se $|u_{t-1}|$ é grande, então $f_t(u, \gamma) \rightarrow 1$ e h_t será afetada por λ . Alternativamente, quando $|u_{t-1}|$ é pequeno, $f_t(u, \gamma) \rightarrow 0$ e h_t será pouco afetada por λ . Este modelo reflete diferentes efeitos de choques defasados sobre a variância condicional em função da sua magnitude. Uma alternativa é considerar $f_t(u, \gamma) = (1 + e^{-\gamma u^2})^{-1}$ para diferenciar os impactos de choques positivos e negativos sobre h_t .

3.1 Considerações sobre verossimilhança e inferência bayesiana

Considere-se y_1 uma observação conhecida. Inicialmente considerar $\mu_t = 0$. Assim, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta | y_{1:T}) \propto \prod_{t=2}^T h_t^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} y_t^2\right\} \quad (14)$$

Considere-se para o caso em que se tem assimetria em função da magnitude do choque que $\gamma \rightarrow \infty$. Então, $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} f_t(u, \gamma) = 1$, o que implica que a função de verossimilhança do modelo GARCH assimétrico tende a uma constante determinada pela função do modelo GARCH simétrico. Esta condição pode fazer com que se tenha uma verossimilhança com propriedades indesejadas. Ou seja, há uma probabilidade positiva de que a função seja crescente em γ . O teorema 1 de Lubrano (1998) apresenta este problema da verossimilhança.

Considerando a distribuição *a priori*

$$\pi_1(\theta) = \pi(\gamma, \omega, \lambda | \alpha, \beta) \pi_2(\alpha, \beta) \quad (15)$$

Como a verossimilhança é mal comportada e crescente em γ , a distribuição *a priori* de γ precisa de caudas que converjam rapidamente para zero, permitindo que a distribuição *a posteriori* seja uma função integrável de γ . No entanto, as distribuições *a priori*, tais como exponencial, podem ser demasiadamente informativas. Como solução para este problema, propõem-se distribuições *a priori* de Jeffrey a fim de penalizar a verossimilhança.

Teorema 3.1. *Considere o modelo (15). A priori proposta para $(\gamma, \lambda, \omega)$ é dada por:*

$$\pi(\gamma, \omega, \lambda) | \alpha, \beta \propto |I|^{1/2} \quad (16)$$

onde a matriz I é:

$$I = \begin{pmatrix} b(0,0,0) & b(1,1,0) & \lambda b(1,0,1) \\ & b(2,2,0) & \lambda b(2,1,1) \\ & & \lambda^2 b(2,0,2) \end{pmatrix} \quad (17)$$

e

$$b(k, i, j) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{u_{t-1}^{2k}}{h_t^2} f_t(u_{t-1}, \gamma)^i f_t'(u_{t-1}, \gamma)^j$$

As funções que definem as assimetrias na volatilidade podem ser especificadas de modo que acomodem choque de diferentes magnitudes ou positivos e negativos.

- 1) Se $f_t(u_{t-1}, \gamma) = (1 - e^{-\gamma u_{t-1}^2})$, então $f_t'(u_{t-1}, \gamma) = u_{t-1}^2 e^{-\gamma u_{t-1}^2}$. Esta função permite avaliar o impacto de choques de magnitudes diferentes sobre a variância condicional.
- 2) Se $f_t(u_{t-1}, \gamma) = (1 + e^{-\gamma u_{t-1}})^{-1}$, então $f_t'(u_{t-1}, \gamma) = u_{t-1} e^{-\gamma u_{t-1}} (1 + e^{-\gamma u_{t-1}})^{-2}$. Esta função permite avaliar o impacto de choques positivos e negativos sobre a variância condicional.

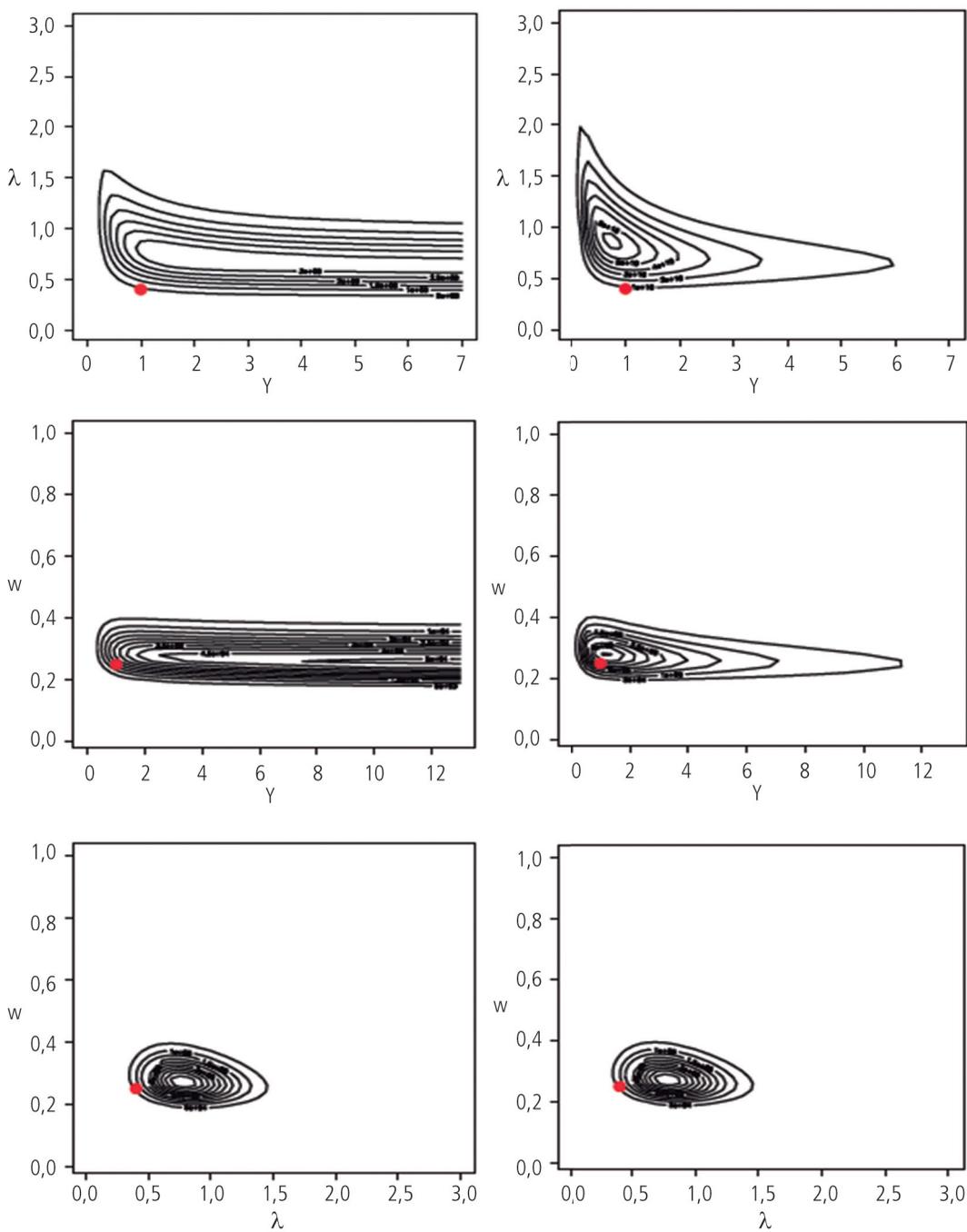
A figura 1 mostra o efeito da *priori* sobre distribuição *posteriori* de γ, λ, ω para um conjunto de dados artificiais com problemas na função de verossimilhança. Todos os outros parâmetros são fixados nos valores verdadeiros. Observe que a *priori* é bastante efetiva e de fato corrige os problemas da verossimilhança. Uma alternativa seria utilizar a *priori* de Lubrano (1998), que é dada por:

$$\pi(\gamma) = (1 + (\gamma - \gamma_0)^2)^{-1} \quad (18)$$

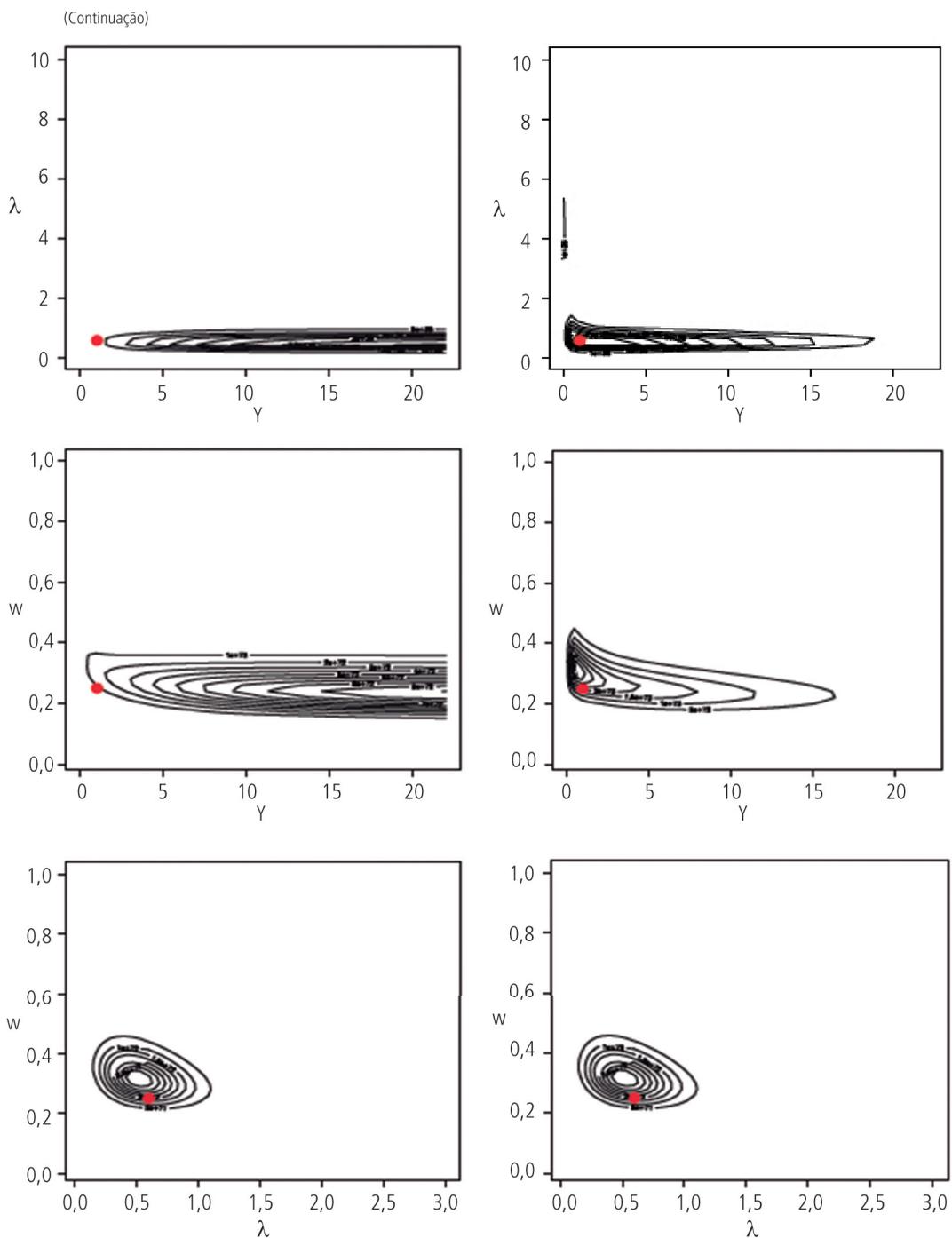
$$\gamma, \gamma_0 > 0$$

FIGURA 1

Função de verossimilhança e distribuição *a posteriori*, $T = 200$



(Continua)



Elaboração dos autores.

Obs.: Imagem reproduzida em baixa resolução em virtude das condições técnicas dos originais disponibilizados pelos autores para publicação (nota do Editorial).

Note-se que esta abordagem demanda a especificação de um *hiperparâmetro* γ_0 que pode ter muita influência na análise da *posteriori*. A proposta anterior não requer nenhuma especificação para os *hiperparâmetros*.

3.2 Seleção de modelos e teste de hipótese

Suponha-se que os modelos alternativos m podem ser explicitamente definidos, por isso têm-se m verossimilhanças e distribuições *a priori*, denotadas, respectivamente, por $p_m(x | \theta_m)$ e $p_m(\theta_m)$, $\theta_m \in \Theta_m$, $m = 1, \dots, M$. Introduce-se uma distribuição discreta prévia sobre o conjunto de modelos alternativos M , dada por $p(m) = \pi_m$, $\sum_1^M \pi_m = 1$.

A distribuição conjunta de (x, m, θ_m) é:

$$p(x, m, \theta_m) = p_m(x | \theta_m) p_m(\theta_m) p(m)$$

o que permite obter distribuição *a priori* $p(x)$. Usando o teorema de Bayes, obtém-se a distribuição *a posteriori*:

$$p(m, \theta_m | x) = \frac{p_m(x | \theta_m) p_m(\theta_m)}{p_m(x)}$$

$$p(m | x) = \frac{p_m(m) p_m(x)}{\sum p_m p(x | m)}$$

A distribuição *a posteriori* incorpora a incerteza sobre as quantidades desconhecidas (m, θ_m) condicional a x . A inferência *a posteriori* na presença de incertezas sobre o modelo correto envolve:

- avaliação da *posteriori* $p(m|x)$, $m = 1, \dots, M$ que envolve $p_m(x)$, a distribuição marginal; e
- avaliação de $p_m(\theta_m|x)$, a distribuição *a posteriori* de θ_m .

Define o Fator de Bayes do modelo 1 com relação ao modelo 2, denominado B_{12} , como:

$$B_{12} = \frac{p(x | m_1)}{p(x | m_2)} \quad (19)$$

segue-se imediatamente que as probabilidades *a posteriori* são:

$$\frac{p(m_1 | x)}{p(m_2 | x)} = \frac{p(m_1)}{p(m_2)} B_{12} \quad (20)$$

No problema de seleção de modelos, pode-se considerar o seguinte guia para tomada de decisão: a orientação fornecida em Kass e Raftery (1995) para interpretação do Fator de Bayes é mostrada na tabela 1.

TABELA 1
Orientação para a interpretação dos B_{12} 's (Fator de Bayes), que é a evidência em favor do modelo m_1 versus modelo m_2

$2\ln(B_{12})$	B_{12}	Evidências contra m_2
< 0	< 1	m_1 mostra maior evidência que m_2
0 a 2	1 a 3	Não merece ser comentada a evidência contra m_1
2 a 6	3 a 20	Evidência positiva contra m_1
6 a 10	20 a 150	Evidência forte contra m_1
> 10	> 150	Evidência muito forte contra m_1

Elaboração dos autores.

Uma alternativa para a seleção do modelo é apenas a média do modelo que integra a incerteza sobre modelo para previsão. É uma consequência natural de o conjunto descrever a incerteza com respeito aos modelos e parâmetros.

Quando o conjunto de dados do processo gerador (DPG) de um processo é um subconjunto estrito dos DPGs definido por outro modelo, então são chamados de *nested models*. Este surge muitas vezes na prática estatística, por exemplo, em econometria. Muitas vezes, parâmetros complicados estão presentes em *nested models*. Quando sua *priori* é especificada de uma forma muito vaga, algumas dificuldades surgem, sendo preciso usar algumas variantes do Fator de Bayes.

O comportamento assintótico de Fator de Bayes leva a alguns critérios bem conhecidos de seleção de modelos frequentistas. Usando a normalidade assintótica da distribuição *a posteriori* com Aproximação de Laplace, tem-se o Critério de Informação Bayesiano – conhecido como critério Bayesian Information Criterion (BIC).

3.2.1 O teste de hipótese bayesiano como um problema de decisão

Considera-se, agora, o caso especial para apenas dois modelos alternativos. Isto é conhecido na literatura como o teste de hipóteses. Um problema de decisão é completamente especificado por $\{A, \Theta, X\}$, onde A é o espaço de decisão, Θ o espaço de parâmetros e X é a amostra. Pode-se então escrever $LA \times \Theta \rightarrow \{0, k_i\}$, que é uma função perda.

O modelo 1 é definido por $\theta \in \Theta_1$ e pelo modelo alternativo $\theta \in \Theta_2$ que são indicados por H_i , $i = 1, 2$. O espaço de parâmetros é dividido em dois componentes independentes Θ_1 e Θ_2 . O espaço de ação é definido por dois componentes, $A = \{a_1, a_2\}$, o que significa que a_i a hipótese H_i é verdadeira e assim deve ser aceita. Frequentemente, $L(\theta, a_1) = 0$ se $\theta \in \Theta_1$ e K_j se $\theta \in \Theta_j$, $j \neq i$. Na verdade, um teste de hipótese é uma regra de decisão definida no espaço amostral e assumindo valores $\{a_1, a_2\}$, que é $X \rightarrow \{0, 1\}$. Pela literatura de decisão, sabe-se que $a_1 \succ a_2$ se, e somente se, $E[L(\theta, a_1)] < E[L(\theta, a_2)]$, em que a expectativa é em relação às distribuições *a posteriori*. Isto é equivalente a aceitar H_1 se, e somente se, $\frac{P(H_1 | x)}{P(H_2 | x)} > \frac{k_2}{k_1}$, o que é equivalente¹ para:

$$BF_{12} > \frac{k_2 P(H_2)}{k_1 P(H_1)} \quad (21)$$

Entre os principais inconvenientes com o teste de hipótese de bayesiano relatados na literatura estão incluídos o tratamento da hipótese nula e uma hipótese alternativa. Também a escolha da distribuição *a priori* influencia nos resultados finais.

3.2.2 Fator de Bayes fracionário e problemas computacionais

Agora, algumas abordagens serão discutidas sumariamente para avaliar o Fator de Bayes na presença de distribuições *a priori* impróprias. É importante lembrar que

$$BF_{12} = \frac{c_1 \int p_1(x | \theta_1) g_1(\theta_1) d(\theta_1)}{c_2 \int p_2(x | \theta_2) g_2(\theta_2) d(\theta_2)}$$

1. k_1 e k_2 são constantes fixas que irão determinar a importância de cada hipótese no teste bayesiano.

onde c_1 e c_2 são as constantes de normalização *a priori* $c_i^{-1} = \int g_i(\theta)d(\theta)$, $i = 1, 2$. Parte dos dados é reservado como uma amostra de simulação para fornecer uma nova informação sobre a esperança da *priori* própria. O Fator de Bayes pode ser decomposto em $BF_{x_c|x_f} BF_{x_f}$, onde x_f é parte da amostra utilizada para a simulação e x_c é a amostra restante utilizada para comparação dos modelos. É importante destacar que, em dados de séries temporais, é natural usar as primeiras observações para simulação. Permanece a questão de escolher a menor fração dos dados necessariamente para obtenção de uma distribuição *a priori* correta.

O'Hagan (1995), inspirado por alguns resultados assintóticos, propõe uma forma alternativa de escolher x_f . A verossimilhança de x_f comporta-se como a verossimilhança completa elevada a uma potência b .

O cálculo da distribuição preditiva não é sempre trivial. Todavia, se o cálculo analítico for complicado, pode-se utilizar as amostras obtidas no algoritmo de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) para calcular as preditivas, numericamente, para cada modelo de interesse. Newton e Raftery (1994) propuseram o seguinte estimador baseado nas amostras *a posteriori*.

$$\hat{p}_1(z) = \frac{\frac{dm}{1-d} + \sum_{i=1}^m p(z | \theta^{(i)}) \{d\hat{p}_1(z) + (1-d)p(z | \theta^{(i)})\}^{-1}}{\frac{dm}{(1-d)\hat{p}_1(z)} + \sum_{i=1}^m \{d\hat{p}_1(z) + (1-d)p(z | \theta^{(i)})\}^{-1}} \quad (22)$$

onde $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(m)}$ são geradas a partir da distribuição *a posteriori* $p(\theta|z)$. Este estimador tem bom desempenho para d tão pequena quanto 0.01. Uma proposta alternativa é o estimador *gamma* modificado proposto por Raftery *et al.* (2007). Nesta proposta, as saídas do algoritmo MCMC são usadas para calcular uma sequência de valores da *logverossimilhança* $\{l_k; k = 1, \dots, n\}$ e a distribuição *posteriori* das *logverossimilhanças* são dadas

$$l_{\max} - l_k \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda^{-1}) \quad (23)$$

onde l_{\max} é a máxima verossimilhança possível, $\alpha = d/2$, d é o número de parâmetros do modelo e $\lambda < 1$. Na prática, λ não é muito inferior a 1. Combinando a média harmônica identidade $\frac{1}{p(y)} = E \left\{ \frac{1}{p(y | \theta)} \right\}$ com (23) resulta em:

$$\log(p(y)) = l_{\max} + \alpha \log(1 - \lambda) \quad (24)$$

Em geral, l_{\max} não é conhecido, então $\hat{l}_{\max} = \max\{\bar{l} + s_l^2, l_k\}$ é usado, onde $\bar{l} + s_l^2$ é o estimador do momento de l_{\max} , \bar{l} e s_l^2 são a média e a variância de l_k 's.

4 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, será apresentado um estudo de simulação para avaliar os efeitos de erros de especificação dos modelos nos resultados dos testes de hipótese bayesianos como descrito na subseção 3.2. Definiu-se um sucesso quando a decisão ótima selecionada no teste bayesiano coincide com o verdadeiro modelo. Calculou-se a taxa de sucesso pela simulação de Monte Carlo. Neste estudo de simulação utilizaram-se tamanhos de amostra distintos ($T = 50; 150$), a distribuição de amostragem (normal e t-Student)² e da variância condicional do modelo (simétricas e assimétricas).

As tabelas 4 e 5 mostram que o teste de seleção de modelos tem baixa proporção de acertos no que se refere à escolha de modelos simétricos *versus* assimétricos. No entanto, as tabelas 2 e 3 mostram que os modelos simétricos apresentaram EQMs para os parâmetros maiores do que os modelos assimétricos, mesmo quando os dados simulados são simétricos.

A tabela 6 mostra que, para $n = 50$ e dados t-Student, o teste de seleção de modelos é bastante eficiente para identificar corretamente a melhor distribuição para os erros. As simulações mostram que o teste selecionará a especificação correta em mais de 98% dos casos, independentemente do valor de γ . Pela tabela 2, fica evidente a importância deste diagnóstico, pois, para dados t-Student e assimétricos, as estimativas de γ e λ obtidas no modelo gaussiano apresentam Erros Quadráticos Médios (EQMs) consideravelmente maiores do que os obtidos com o modelo t-Student. Nesse contexto, o impacto dos choques na média na variância é estimado de maneira ineficiente pelo modelo gaussiano. Por outro lado, a tabela 7 mostra que o nível de acerto do teste cai quando os dados são gaussianos. Como pode ser visto na tabela 2, não parece ser vantajoso estimar um modelo t-Student quando os dados são gaussianos. Resultados parecidos são obtidos quando $n = 150$, com a agravante de que o nível de acerto do teste de seleção de modelos perde eficiência para dados t-Student.

2. Para os dados com erros t-Student, utilizou-se $v = 4$.

TABELA 2
EQMs para os parâmetros: $n = 50$

Dados gaussianos/modelo gaussiano								
Dados	Assimétrico $\gamma = 0.01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0114	0,0002	0,0114	0,0007	0,0114	0,0010	0,0114	0,0011
β	0,0037	0,0042	0,0037	0,0043	0,0038	0,0042	0,0037	0,0043
λ		0,0007		0,0026		0,0038		
γ		0,3721		3,3344		123,9338		

Dados gaussianos/modelo t-Student								
Dados	Assimétrico $\gamma = 0.01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0191	0,0013	0,0191	0,0012	0,0194	0,0012	0,0191	0,0012
β	0,0036	0,0040	0,0037	0,0041	0,0037	0,0040	0,0037	0,0041
λ		0,0019		0,0018		0,0019		
γ		8,8790		8,7732		708,0149		

Dados t-Student/modelo t-Student								
Dados	Assimétrico $\gamma = 0.01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0229	0,0003	0,0234	0,0029	0,0224	0,0080	0,0213	0,0044
β	0,2952	0,0048	0,2928	0,0047	0,2958	0,0048	0,2968	0,0047
λ		0,0002		0,0083		0,0020		
γ		0,0018		0,06055		96,5216		
ν	10,9131	0,0273	10,8523	0,0279	10,7464	0,0288	10,7782	2,1572

Dados t-Student/modelo gaussiano								
Dados	Assimétrico $\gamma = 0.01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0119	0,0011	0,0117	0,0010	0,0118	0,0010	0,0117	0,0010
β	0,0038	0,0042	0,0037	0,0042	0,0038	0,0041	0,0037	0,0042
λ		0,0041		0,0040		0,0039		
γ		71,9134		70,6189		564,2582		

Elaboração dos autores.

TABELA 3
EQM para os parâmetros: $n = 150$

Dados	Dados gaussianos/modelo gaussiano							
	Assimétrico $\gamma = 0,01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0102	0,0007	0,0098	0,0006	0,0100	0,0007	0,0156	0,0006
β	0,0075	0,0077	0,0075	0,0077	0,0075	0,0076	0,0075	0,0764
λ		0,0024		0,0020		0,0026		
γ		0,2033		41,4745		570,5478		

Dados	Dados gaussianos/modelo t-Student							
	Assimétrico $\gamma = 0,01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0165	0,0009	0,0162	0,0009	0,0164	0,0009	0,0157	0,0008
β	0,0075	0,0075	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076
λ		0,0009		0,0009		0,0009		
γ		8,9780		8,6487		717,5496		

Dados	Dados t-Student/modelo t-Student							
	Assimétrico $\gamma = 0,01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0174	0,0001	0,0174	0,0054	0,0172	0,0011	0,0156	0,0008
β	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076
λ		0,0012		0,0002		0,0012		
γ		0,2036		4,3511		649,1171		
v	120,0385	2,8926	118,7442	2,9174	119,9784	2,8813	12,0211	2,9027

Dados	Dados t-Student/modelo gaussiano							
	Assimétrico $\gamma = 0,01$		Assimétrico $\gamma = 1$		Assimétrico $\gamma = 10$		Simétrico	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico	simétrico	assimétrico	Simétrico	Assimétrico
α	0,0107	0,0008	0,0107	0,0008	0,0106	0,0008	0,0095	0,0007
β	0,0075	0,0076	0,0075	0,0077	0,0075	0,0076	0,0075	0,0076
λ		0,0028		0,0028		0,0027		
γ		66,9577		65,2145		514,6252		

Elaboração dos autores.

TABELA 4
Proporção de decisões corretas obtidas no estudo simulado: $n = 50$

Dados/modelo	Dados gaussianos/modelo gaussiano		Dados t-Student/modelo t-Student	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
Simétrico	0,55	0,45	0,39	0,61
Assimétrico $\gamma = 0,01$	0,42	0,57	0,39	0,61
Assimétrico $\gamma = 1$	0,46	0,54	0,38	0,62
Assimétrico $\gamma = 10$	0,40	0,60	0,34	0,66

Elaboração dos autores.

TABELA 5
Proporção de decisões corretas obtidas no estudo simulado: $n = 150$

Dados/modelo	Dados gaussianos/modelo gaussiano		Dados t-Student/modelo t-Student	
	Simétrico	Assimétrico	Simétrico	Assimétrico
Simétrico	0,54	0,46	0,55	0,45
Assimétrico $\gamma = 0,01$	0,46	0,54	0,50	0,50
Assimétrico $\gamma = 1$	0,44	0,56	0,46	0,54
Assimétrico $\gamma = 10$	0,50	0,50	0,47	0,53

Elaboração dos autores.

TABELA 6
Proporção de resultados do teste para dados t-Student

Dados/modelo	$n = 50$		$n = 150$	
	Gaussiano	t-Student	Gaussiano	t-Student
Simétrico	0,02	0,98	0,48	0,52
Assimétrico $\gamma = 0,01$	0,01	0,99	0,46	0,54
Assimétrico $\gamma = 1$	0,01	0,99	0,38	0,62
Assimétrico $\gamma = 10$	0,01	0,99	0,21	0,79

Elaboração dos autores.

TABELA 7
Proporção de resultados do teste para dados gaussianos

Dados/modelo	$n = 50$		$n = 150$	
	Gaussiano	t-Student	Gaussiano	t-Student
Simétrico	0,59	0,41	0,54	0,46
Assimétrico $\gamma = 0,01$	0,61	0,39	0,52	0,48
Assimétrico $\gamma = 1$	0,59	0,41	0,53	0,47
Assimétrico $\gamma = 10$	0,64	0,36	0,52	0,48

Elaboração dos autores.

Em resumo, os resultados do estudo de simulação mostram que modelos assimétricos com transição suave podem oferecer estimativas mais eficientes para a variância condicional, relativamente aos modelos simétricos. Quanto à distribuição para os erros, os modelos gaussianos em geral não são eficientes para estimar dados t-Student. Nestes casos, a metodologia apresentada melhora consideravelmente o desempenho dos estimadores. Quando os dados são gaussianos, a situação se inverte e não há evidência de superioridade dos modelos t-Student. Os resultados do teste de seleção de modelos apresentam baixo nível de acerto quando os dados são gaussianos e quando $n = 150$. Nesse contexto, a utilização de outros critérios de seleção de modelos pode ser importante para reduzir o risco de má especificação. Indicadores de desempenho preditivo dentro e

fora da amostra podem ser utilizados para este fim. Na próxima seção, mostra-se uma aplicação da metodologia a dados reais que ilustra esta questão.

5 APLICAÇÃO

Serão apresentados a seguir alguns resultados da aplicação da metodologia a dados reais. Os estimadores desenvolvidos nas seções anteriores foram utilizados para modelar a dinâmica de IPCs no Brasil. Foram analisados os nove grupos de preços que compõem o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Estes grupos são: alimentos e bebidas, habitação, artigos de residência, vestuário, transportes, comunicação, saúde e cuidados pessoais, despesas pessoais e educação. A dinâmica do IPCA agregado também foi analisada.

As séries da variação percentual dos índices desagregados do IPCA apresentam elevada volatilidade. Além disso, por conta das frequentes mudanças metodológicas, o número de observações destas séries é relativamente pequeno para estimação de modelos GARCH. Os dados disponíveis são mensais, sem significativas mudanças metodológicas para o período de setembro de 1999 a dezembro de 2012 (total de 160 observações). Como o IPCA é o índice utilizado no regime de metas para a inflação no Brasil, a volatilidade dele e de seus componentes tem importante repercussão sobre o bem-estar das famílias brasileiras. Por conta disso, a dinâmica deste índice desperta grande interesse em pesquisadores e gestores públicos. Para os objetivos deste artigo, interessa verificar o desempenho dos estimadores apresentados em um contexto de séries muito voláteis e com reduzido número de observações. As séries, em variação percentual em relação ao mês anterior, foram dessazonalizadas pelo X-12-Arima.

Para avaliar o desempenho dos estimadores utilizaram-se indicadores de ajuste dentro e fora da amostra. Os modelos, foram estimados com os dados até dezembro de 2011. Para a hierarquização dos modelos, realizou-se o teste proposto na subseção 3.2. A métrica utilizada para avaliar a capacidade preditiva das especificações sob a hipótese de inovações t-Student e normal foi o EQM. Para a previsão dentro da amostra, utilizou-se o EQM para os últimos doze meses de 2011, e, para avaliar o potencial preditivo fora da amostra, calculou-se o EQM das previsões um passo à frente, para o ano de 2012. Foram computados os EQMs para a média e variância de cada série. Como *proxy* para

a variância “efetiva” considerou-se o quadrado do resíduo não padronizado.³ Todos os modelos foram estimados utilizando 10 mil interações e $p = q = r = s = k = 1$ no algoritmo de simulação de MCMC. Sendo *assimetria_0* a assimetria para a magnitude dos choques, e *assimetria_1* a assimetria para choques positivos e negativos, o procedimento de seleção dos modelos para cada série teve por padrão as etapas a seguir.

- 1) Para cada modelo estimado (normal simétrico, normal com *assimetria_0*, normal com *assimetria_1*, t-Student simétrico, t-Student com *assimetria_0* e t-Student com *assimetria_1*), a taxa de aceitabilidade para o algoritmo de MCMC pertence ao intervalo [0.20; 0.40].
- 2) Obtidos os valores para a variância do passo *metropolis*, realizou-se o teste apresentado em 3.2 para comparar as especificações com a mesma distribuição para os erros, de modo a selecionar um modelo com erros normais e outro com erros t-Student.

Os dois modelos selecionados foram comparados utilizando o teste apresentado na subseção 3.2 e pelos respectivos EQMs, apurados para as previsões dentro e fora da amostra.

O componente M dos modelos não foi significativo em nenhum dos casos e, por conta disso, as estimativas finais assumem $k = 0$. Como mostra a tabela 8, para os modelos com hipótese de erros normais, o teste de seleção de modelos indicou cinco especificações simétricas, três com *assimetria_0* e duas com *assimetria_1*. Já, considerando os modelos estimados sob a hipótese de erros t-Student, o mesmo teste selecionou três especificações simétricas, duas com *assimetria_0* e cinco com *assimetria_1*. O mesmo teste, quando utilizado para comparar os melhores modelos com hipótese de erros normais e t-Student, selecionou oito modelos com erros t-Student e apenas dois com erros normais. Os EQMs para a variância dentro da amostra dos modelos com erros normais, foram menores do que os com erros t-Student em oito casos. Para as previsões da média dentro da amostra os EQMs dos modelos com erros normais foram menores em cinco oportunidades. Fora da amostra, os modelos com erros t-Student tiveram EQMs menores em seis séries para a média e cinco séries para a variância.

3. Awartani e Corradi (2005) mostram que, para séries que não apresentam autocorrelação na média, o quadrado da variável oferece uma boa estimativa da variância. Como as equações para a média possuem termos autorregressivos e de média móvel foi utilizado o resíduo do componente Arma (resíduo não padronizado) como *proxy*.

TABELA 8
Resumo dos resultados

Série	Assimetria		EQM modelos com erros normais				Assimetria		EQM modelos com erros t-student				Resultado do teste para seleção de modelos
	Dentro da amostra		Fora da amostra		Assimetria		Dentro da amostra		Fora da amostra				
	Média	Variância	Média	Variância	as_0	as_1	Média	Variância	Média	Variância			
Alimentos e bebidas	s	0,1186	0,198	0,036	0,148	0,036	as_1	0,1189	0,240	0,146	0,036	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Habituação	as_1	0,02124	0,029	15,628	15,808	15,628	as_1	0,02122	0,046	48,418	48,176	Normal mostra maior evidência que t-student	
Artigos de residência	s	0,108	0,147	0,086	0,747	0,694	s	0,107	0,165	1,024	0,960	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Vestuário	s	0,0566	0,086	4,560	4,559	4,560	s	0,0565	0,069	6,544	6,573	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Transportes	as_0	0,332	0,525	0,219	0,401	0,219	as_1	0,330	0,602	0,606	0,418	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Comunicação	s	0,050	0,312	1,474,8	1,480,3	1,474,8	as_1	0,063	0,684	1,396,4	1,389,6	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Saúde e cuidados pessoais	as_1	0,00267	0,005	0,193	0,193	0,181	as_0	0,00270	0,006	0,169	0,157	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Despesas pessoais	s	0,0680	0,075	37,964	37,964	37,249	as_1	0,06817	0,101	29,327	28,595	Evidência muito forte contra o modelo normal	
Educação	as_0	0,162	0,322	101,568	101,568	101,288	s	0,158	0,255	35,810	35,703	Normal mostra maior evidência que t-student	
IPCA	as_0	0,01370	0,020	0,048	0,048	0,037	as_0	0,01375	0,022	0,018	0,007	Evidência muito forte contra o modelo normal	

Elaboração dos autores.

s: simétrico.

as_0: assimétrico_0.

as_1: assimétrico_1.

A aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho aos dados de preços ao consumidor no Brasil mostra a importância da utilização de modelos capazes de capturar “caudas pesadas”. O teste de seleção de modelos aponta para uma superioridade das especificações que utilizam a hipótese de erros t-Student. Quando o critério é o potencial preditivo, dentro ou fora da amostra, os modelos assimétricos com erros t-Student também parecem competitivos, sobretudo para previsões fora da amostra.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, utilizou-se uma abordagem bayesiana para obter estimativas de modelos GARCH assimétricos, com transições suaves e erros t-Student. As estimativas de alguns parâmetros do modelo mostraram adversidades por conta de problemas com a função de verossimilhança. Foi proposta, então, uma distribuição *a priori* para corrigir tais problemas. Os resultados de um estudo simulado mostram que a *a priori* utilizada consegue resolver os problemas da função de verossimilhança. Para a seleção dos modelos, usou-se um teste de hipótese bayesiano baseado na computação numérica de distribuições preditivas. Os resultados de comparação dos modelos mostram que os modelos assimétricos tiveram um bom desempenho quando comparado com os modelos simétricos.

Os graus de liberdade no modelo t-Student são difíceis de estimar e considerou-se a *a priori* de Jeffrey para resolver este problema de estimação. Ambos os problemas da verossimilhança são intrínsecos às mesmas e não são corrigidos com distribuições *a priori* habituais paramétricas como exponencial e gama. Isto se deve à existência de processos limitativos (gaussianos e modelos simétricos). As distribuições *a priori* propostas neste artigo tiveram um bom desempenho nesses casos.

REFERÊNCIAS

- ARDIA, D. **Financial risk management with bayesian estimation of GARCH models: theory and applications**. Springer, 2008 (Series Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, v. 612).
- AWARTANI, B. M.; CORRADI, V. Predicting the volatility of the S&P-500 index via GARCH models: the role of asymmetries. **International journal of forecasting**, v. 21, n. 1, p. 167-184, 2005.
- BAUWENS, L.; LUBRANO, M. Bayesian inference on GARCH models using the Gibbs sampler. **Econometrics journal**, v. 1, C23-C46, 1998.
- _____. Bayesian option pricing using asymmetric GARCH models. **Journal of empirical finance**, v. 9, n. 3, p. 321-342, 2002.
- BOLLERSLEV, T. A conditional heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. **The review of economics and statistics**, v. 69, n. 3, p. 542-547, 1987.
- ENGLE, R.; NG, V. K. Measuring and testing the impact of the news on volatility. **Journal of finance**, v. 48, n. 5, p. 1.749-1.778, 1993.
- FONSECA, T. C. O. *et al.* Objective Bayesian analysis for the student-t regression model. **Biometrika**, v. 95, n. 2, p. 325-333, June 2008.
- HARVEY, A.; CHAKRAVARTY, T. **Beta-t-(E)-GARCH**, University of Cambridge, 2008 (Working Paper).
- JACQUIER, E.; POLSON, N. G.; ROSSI, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models with fat-tails and correlated errors. **Journal of econometrics**, v. 122, n. 1, p. 185-212, 2004.
- KASS, R.; RAFTERY, A. E. Bayes factor. **Journal of the American statistical association**, v. 90, n. 430, p. 773-795, June 1995.
- LUBRANO, M. **Smooth transition GARCH models: a Bayesian perspective**. UCL- Core, 1998 (Discussion Papers, n. 9.866).
- MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. **Journal of business**, v. 36, n. 4, p. 394-419, 1963.
- NEWTON, M. A.; RAFTERY, A. E. Approximate bayesian inference with the weighted Likelihood bootstrap. **Journal of the royal statistical society**, v. 56, n. 1, p. 3-48, 1994 (Series B, Methodological).
- O'HAGAN, A. Fractional Bayes factors for model comparison (with discussion). **Journal of the royal statistical society**, v. 57 n. 1, p. 99-138, 1995 (Series B, Methodological).

RAFTERY, A. E. *et al.* Estimating the integrated likelihood via posterior simulation using the harmonic mean identity. *In*: BERNARDO, J. M. (Ed.). **Bayesian statistics 8**. Oxford University Press, 2007. p. 371-416.

ZHANG, X. *et al.* **Modeling dynamic volatilities and correlations under skewness and fat tails**. DSF-TI, 2011 (Discussion Paper).

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

HARVEY, A.; SHEPHARD, N. Unobservable component time series models with ARCH disturbances. **Journal of econometrics**, v. 52, p. 129-158, 1992.

KARANASOS, M. Prediction in Arma models with GARCH in mean effects. **Journal of time series analysis**, v. 22, n. 5, p. 555-576, 2001.

EDITORIAL

Coordenação

Cláudio Passos de Oliveira

Supervisão

Andrea Bossle de Abreu

Revisão

Carlos Eduardo Gonçalves de Melo
Cristina Celia Alcantara Possidente
Edylene Daniel Severiano (estagiária)
Elaine Oliveira Couto
Elisabete de Carvalho Soares
Lucia Duarte Moreira
Luciana Nogueira Duarte
Míriam Nunes da Fonseca

Editoração eletrônica

Roberto das Chagas Campos
Aeromilson Mesquita
Aline Cristine Torres da Silva Martins
Carlos Henrique Santos Vianna
Hayra Cardozo Manhães (estagiária)

Capa

Luís Cláudio Cardoso da Silva

Projeto Gráfico

Renato Rodrigues Bueno

Livraria do Ipea

SBS – Quadra 1 – Bloco J – Ed. BNDES, Térreo.

70076-900 – Brasília – DF

Fone: (61) 3315-5336

Correio eletrônico: livraria@ipea.gov.br

Composto em Adobe Garamond Pro 12/16 (texto)
Frutiger 67 Bold Condensed (títulos, gráficos e tabelas)
Impresso em offset 90g/m²
Cartão supremo 250g/m² (capa)
Rio de Janeiro-RJ

Missão do Ipea

Produzir, articular e disseminar conhecimento para aperfeiçoar as políticas públicas e contribuir para o planejamento do desenvolvimento brasileiro.

