ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of
ZBW
Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Scholtz, Hellmut D.

Article — Digitized Version

Eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung bei abhängigen Ertragsentwicklungen

Die Rentenversicherung

Suggested Citation: Scholtz, Hellmut D. (2002) : Eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung bei abhängigen Ertragsentwicklungen, Die Rentenversicherung, ISSN 0340-5753, Asgard, Sankt Augustin, Vol. 43, Iss. 9, pp. 165-170

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/90908

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung bei abhängigen Ertragsentwicklungen

Von Hellmut D. Scholtz

Abstrakt

Für **abhängige** Erwartungswerte von Investmentrenditen wird ein Ansatz zur Optimierung von Investmentstrategien für Anlagen zur Alterssicherung abgeleitet. Eine Minimierung der Varianzen schränkt das erwartete Risiko von Portfolioentscheidungen ein und maximiert auf der Grundlage eines diskriminanzanalytischen Ansatzes den Ertrag. Dabei werden Risiken von Baisseperioden durch eine optimale Kombination von »Gewinnern« und »Verlierern« und eine Elimination des Erwartungswertes der Marktkomponenten gezielt vermindert. Mit einer optimierten Anlage in Zertifikaten kann der Ertrag darüber hinaus gesteigert werden. Der Lösungsansatz zeichnet sich durch einfache Anwendbarkeit aus.

A Ausgangslage

In **Die Rentenversicherung**, Nr. 6, 2002, hat der Autor eine Strategie für **unabhängige** Ertragserwartungen bei Aktienrenditen dargestellt. Auf besonderen Wunsch verschiedener Leser soll der Ansatz hier um die Optimierung bei **abhängigen** Renditeerwartungen ergänzt werden. Dabei wird für die Aktienauswahl und die Problematik abhängiger Renditen auf den erwähnten Aufsatz verwiesen. Um die Vergleichbarkeit der Ansätze sicherzustellen, wird weitgehend von gleichen Voraussetzungen ausgegangen. Das heißt, dass auch eine Bildung zweier Portfolios, eines Gewinnerportfolios und eines Verliererportfolios, als geeignete Strategie zur Risikobegrenzung im Vordergrund der Betrachtungen steht.

Da manche Investoren sich nur für die praktische Umsetzung interessieren dürften, wird in einem besonderen Teil ein Beispiel allgemein verständlich, und in weiteren Abschnitten die mathematische Ableitung, erläutert. Um eine in sich geschlossene Darstellung zu gewährleisten, erfolgen dabei in gekürzter Form gewisse Wiederholungen.

B Das Prinzip einer optimalen Anlagestrategie

Für eine Strategie zur Risikobegrenzung, z.B. der Momentumstrategie, werden auf der Grundlage von Kursentwicklungen der Vergangenheit, einschließlich gezahlter Dividenden und Boni, Rangreihen von Aktien erstellt. Die Aktien mit der höchsten relativen Stärke der Vergangenheit, geteilt durch den Parameter Beta für das systematische Risiko, gelten als »Gewinner« und die mit der geringsten relativen Stärke als »Verlierer«. Zur Strukturierung eines Portfolios sind dann für jeweils optimale Beträge Aktien der »Gewinner« zu kaufen und Aktien von »Verlierern« vorzuverkaufen. In Deutschland ist ein solcher Vorverkauf über eine Aktienleihe oder durch synthetische Verkäufe mit Hilfe entsprechender Optionsgeschäfte möglich. Neuere Zertifikatslösungen, Listed-Stock-Future-Zertifikate und Turbozertifikate, mit denen man auch bei kleineren Anlagebeträgen Gewinne erzielen kann, beginnen sich durchzusetzen.

Überwiegend gelten die Aktien des Dezils der Rangreihe mit den höchsten Zuwächsen als Kandidaten für den Gewinnerteil des zu bildenden Portfolios. Aktien des Dezils mit den geringsten Kursgewinnen oder gar Verlusten sind dann Kandidaten für den Verliererteil des Portfolios. Auch Drittelungen an Stelle des Dezils sind als Auswahlkriterium zu finden.

Die Strategie geht davon aus, dass auch in Zukunft der Gewinnerteil des Portfolios günstiger abschneiden wird als der Verliererteil des Portfolios.[1] Als optimale Referenzzeiträume haben sich u.a. die Ergebnisse von drei Quartalen für die Datengrundlagen der Vergangenheit und Halbjahreszeiträume für die Haltedauern erwiesen.[2]

Die in der umfangreichen Literatur nachgewiesene Rendite liegt zwischen 12 und 18 Prozent p.a. Da die Gewinner und Verlierer sich bei Schwächeperioden am Kapitalmarkt oft in die gleiche Richtung bewegen, sind die Gefahren besonders niedriger Endvermögen begrenzt. Denn was man an den Gewinnern verliert, gewinnt man gleichzeitig bei den Verlierern hinzu. Die wissenschaftlichen Untersuchungen für Anlagen mit Hilfe der Momentumstrategie zeigen nur gelegentlich negative Ergebnisse.[3]

Neben der Rangreihenbildung für die Prognose kann das unten dargestellte Modell natürlich auch für Portfolios und Teilportfolios verwandt werden, deren Ertragsprognosen auf anderen Verfahren beruhen. Diese konnten sich jedoch wegen der oft schlechteren Performance bei in etwa vergleichbaren Portfoliostrategien bisher nicht durchsetzen.[4]

Auf die wesentlichen Schwächen klassischer Portfolioansätze,[5] insbesondere den McDonalds-Effekt[6] bzw. Repräsentanzeffekt[7] und die problematischen Prognosen der Kovarianzen sei hingewiesen.[8] Der klassische Portfolioansatz ist daher in der Regel nur für Vergangenheitsdaten relevant und somit bei Entscheidungen für einen zukünftigen Anlagemix unbrauchbar.[9] Soweit ein Anleger trotzdem einen Optimierungsansatz auf der Grundlage korrelativer Zusammenhänge der Renditeerwartungen verwendet, sollte die Effizienz der Prognosen gesichert sein.[10]

1 Von den sehr zahlreichen Veröffentlichungen seien hier die Arbeiten von *Jegadeesh & Titmann* 1993, *Conrad et al.* 1994, *Rouwenhorst* 1998 und 1999, *Moskowitz & Grinblatt* 1999, *Hong et al.* 2000 angeführt.

2 *Rouwenhorst* 1999.

3 Vgl. auch Abschitt H.

4 Die Schwierigkeiten bei der Prognose von Kursentwicklungen haben in den sechziger Jahren sogar zu der Annahme geführt, dass die Entwicklungen einem Zufallsweg folgen (Random Walk Theorie). Umfangreiche Tests haben diese Annahme jedoch inzwischen widerlegt. Festzuhalten bleibt jedoch, dass sich die Bedingungen und Bestimmungsgründe für die Daten und damit deren Inhalte und Eigenschaften im Zeitablauf ständig ändern. Komplizierteren mathematischen Methoden, die gleiche Eigenschaften und »Umweltbedingungen« voraussetzen, sind sie daher kaum zugänglich.

5 *Best et al.* 1991; *Black & Littermann* 1992, S. 28; *Britten & Jones* 1999; *Frost & Savarino* 1986 und 1988; *Elton & Gruber* 1995, S. 146ff.; *Scholtz* 1999 und 2002b.

6 *Elton* 1999, S. 1201.

7 *Scholtz* 1999.

8 *Scholtz* 2002b.

9 *Steiner & Bruns* 1996, S. 16.

10 Auf die Fußnoten zu Abschitt F, die wesentliche Verbesserungsmöglichkeiten der Parameter aufzeigen, sei hingewiesen.

Ein Weg, um die Problematik der Prognose der Kovarianzen zu begrenzen, liegt in der Ergänzung des Single-Index-Modells[11] um weitere Nebenbedingungen. *Sharpe* (1963, 277 ff.) nimmt für das Single-Index-Modell an, dass zwar die Aktienerträge untereinander unabhängig sind. Über die Abhängigkeit der Kursentwicklungen der einzelnen Aktien von der Entwicklung des allgemeinen Marktes kann jedoch eine Korrelation der Kurse und damit der Gesamtrenditen zwischen den Aktien berechnet werden. Diese weist im Gegensatz zu der anhand historischer Daten unmittelbar berechneten eine teilweise Filterung des Weißen Rauschens auf.[12] Mögliche Fehler werden dadurch vermindert. Der vom Verfasser konzipierte Ansatz sei auf dieser Grundlage hier näher erläutert.

R_m sei der Erwartungswert der Rendite eines Marktindex, z.B. des DAX, für einen bestimmten Zeitraum. Die Größe $(R_i - R_m)$ sei der Erwartungswert der Drift D_i, um die der Erwartungswert der Rendite R_i einer Aktie i von R_m bei einer Gewinneraktie positiv und bei einer Verliereraktie negativ abweicht. Unter Berücksichtigung der Zufallskomponenten e_i, mit dem angenommenen Erwartungswert 0, ergibt sich dann nach Umformung und Auflösung nach D_i für die Drift:

$$D_i = R_i - R_m + e_i \qquad \text{mit } E(e_i) = 0,\ i = 1\ldots m \qquad (1)$$

mit der Varianz der Zufallskomponenten $V_i = E(e_i)^2 = V_{Ri}$.

Unter Voraussetzung der für das Single-Index-Modell üblichen Annahmen ist der Erwartungswert der Rendite einer Anlage i:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i. \qquad i = 1\ldots m \qquad (2)$$

R_i ist also für eine i. Aktie der Erwartungswert der Rendite eines Gewinners oder Verlierers. Alpha, α_i, ist der Erwartungswert des absoluten Glieds, ebenfalls als eine Art Drift interpretierbar. Der Regressionskoeffizient Beta, β_i, repräsentiert das systematische Risiko oder allgemeine Marktrisiko. Er misst die Änderung der Rendite R_i bei einer Änderung der Marktrendite R_m.

Setzt man Gleichung (2) in Gleichungen (1) für die Aktien i = 1…m ein, dann lässt sich die Kovarianz zweier Aktien einfach berechnen. Ausgegangen wird dazu für die Driften von:

$$D_i = \alpha_i + \beta_i R_m - R_m + e_i = \alpha_i + (\beta_i - 1)R_m + e_i. \qquad (3)$$

Da R_m einmal als Subtrahend und einmal im Produkt $\beta_i R_m$ vorkommt, bietet es sich an, für alle Aktien i, i = 1…m, den Ausdruck $\delta_i R_m = (\beta_i - 1)R_m$ zu definieren. Bei der Berechnung der Kovarianz der Einzelwerte der Driften D_i und D_j zweier Aktien i und j fallen die Größen α_i und α_j weg. Es ergibt sich schließlich unter Verwendung der Varianz V_m der Marktkomponenten die Kovarianz

$$V_{ij} = \delta_i \delta_j V_m. \qquad i = 1\ldots m,\ j = 1\ldots m,\ i \neq j \qquad (4)$$

Die Residualvarianz V_{ei} der Einzelwerte der Drift der Aktien i = 1…m berechnet sich dann mit:

$$V_{ei} = V_i - \delta_i^2 V_m. \qquad (4a)$$

Verwendet man Gleichung (3) mit Index G für Gewinner und Index V für Verlierer, dann ergibt sich im Falle eines Kaufes der Gewinneraktie G und Vorverkaufes der Verliereraktie V:

$$\begin{aligned} & D_G = \alpha_G + \delta_G R_m + e_G \\ - \ & \underline{D_V = -\alpha_V - \delta_V R_m - e_V} \qquad \text{(negativ, da Verkauf)} \\ = \ & D_G - D_V = \alpha_G + \delta_G R_m - \alpha_V - \delta_V R_m + e_G - e_V, \qquad (5) \end{aligned}$$

bzw.:

$$D_G + |D_V| = \alpha_G - \alpha_V + R_m(\delta_G - \delta_V). \qquad (5a)$$

Da D_V – wie oben erwähnt – negativ ist, ergibt sich bei Vorverkauf ein positiver, absoluter Wert von D_V. Die Erwartungswerte der Zufallskomponenten e wurden aus Anschaulichkeitsgründen weggelassen, da diese null sind.

Betrachtet man den Index G als Stellvertreter für ein Gewinner-Teilportfolio, aus G = 1…k Aktien, und den Index V als solchen für ein Verlierer-Teilportfolio, mit V = 1…l Aktien, mit $k \neq l$, dann wird die Marktkomponente R_m im Gesamtportfolio der Gleichung (5a), nicht eliminiert, da k ungleich l und üblicherweise δ_G ungleich δ_V. Hierdurch ergibt sich in Abhängigkeit der Richtung der Marktkomponenten R_m in vielen Fällen ein zusätzliches Risiko. Gleichung (5a) zeigt aber, dass es möglich ist, ein hinsichtlich der Marktkomponenten »risikoneutrales« Portfolio zu konstruieren, wenn es gelingt, dass die Größe $R_m(\delta_G - \delta_V)$ null wird. Es verbleibt dann nur die Reststreuung der untereinander unabhängigen Alpha.[13]

Analog zu *Scholtz* (2002b) wird daher zusammenfassend ein Lösungsansatz dargestellt, der das gesamte Risiko minimiert und die Driften, den Ertrag, maximiert.

C Der Optimierungsansatz

1 Ziel der Optimierung

Um das aufgezeigte Ziel zu erreichen, ist die Streuung derart zu vermindern, dass das Teilportfolio der Gewinner wegen der Streuung um die Erwartungswerte mit geringerer Wahrscheinlichkeit fallweise zu einem »Verliererportfolio« und das Teilportfolio der Verlierer mit geringerer Wahrscheinlichkeit zu einem »Gewinnerportfolio« wird. Zu diesem Zweck ist der Abstand zwischen den Erwartungswerten der Driften der Gewinner und denen der Verlierer[14] zu maximieren und die Streuung der Verteilungen der Teilportfolios zu minimieren.

Für die Anteile X_i der einzelnen Aktien im Portfolio ergibt sich somit folgende Zielgleichung:[15]

$$\text{Maximiere } (\Sigma X_G D_G + \Sigma X_V D_V)/(\Sigma X^2{}_G V_G + \Sigma X^2{}_V V_V)^{1/2}! \qquad G = 1\ldots k, V = 1\ldots l \qquad (6)$$

11 *Elton & Gruber* 1995, S. 132 ff. und 146 ff. und 396; *Steiner & Bruns* 1996, S. 16 ff.

12 *Elton & Gruber* 1995, S. 396 halten das Single-Indes-Modell auf der Basis zahlreicher Untersuchungen für besonders geeignet, um das Weiße Rauschen zu mindern und damit die Prognosen zu verbessern. Sie weisen darauf hin, dass kompliziertere mathematische Ansätze das Weiße Rauschen wieder erhöhen.

13 *Elton & Gruber* 1995, S. 396.

14 Hier ist unterstellt, dass durch das Ranking sich zwei approximativ glockenförmige Verteilungen ergeben. Die Verteilung der Verlierer liegt dabei mit negativer Drift D_V links von R_m und die der Gewinner mit positiver Drift D_G rechts von R_m. Es wird angenommen, dass die Verteilungen sich zum Teil überschneiden.

15 *Linder* 1964, S. 240 f.; *Elton & Gruber* 1995, S. 98 ff.

mit den Nebenbedingungen:[16]
Marktkomponente = 0:

$$\Sigma\delta_G X_G + \Sigma\delta_V X_V = 0, \qquad G = 1\ldots k, V = 1\ldots l \qquad (6a)$$

Summe der absoluten Portfolioanteile = 1:

$$\Sigma X_G - \Sigma X_V = 1, \qquad G = 1\ldots k, V = 1\ldots l \qquad (6b)$$

Nichtnegativbedingungen:

$$X_V < 0 \text{ für } D_V < 0, \qquad V = 1\ldots l \qquad (6c)$$
$$X_G > 0 \text{ für } D_G > 0. \qquad G = 1\ldots k$$

Die Lösung dieses Ansatzes ist wie folgt.

2 Mathematische Ableitung des optimalen Portfoliomix

Für die mathematische Lösung des erörterten Portfolioproblems eignet sich insbesondere ein Trennverfahren.[17] Mithilfe der Differenzialrechnung lassen sich damit optimale Anteile $b_i = \lambda X_i$ der einzelnen Aktien $i = 1\ldots m$ im Portfolio bestimmen. Die Größe λ ist dabei eine Hilfskonstante, um die Ableitung der Zielgleichung zu vereinfachen.[18] Hier werden die Indizes $i = 1\ldots m$ bei D_G und D_V wie oben **zusammenfassend** für die Indizes $G = 1\ldots k$ und $V = 1\ldots l$ verwandt. Für die Varianzen V_G und V_V gelten für die Indizes die gleichen, entsprechenden Indizes $i = 1\ldots m$.

Nach partieller Differentiation der Gleichung (6) folgt für $i = 1\ldots k$ Aktien[19] das **simultane Gleichungssystem:**

$$\begin{aligned} D_1 &= b_1V_1 + b_2V_{12} + \ldots + b_kV_{1k} \\ D_2 &= b_1V_{21} + b_2V_2 + \ldots + b_kV_{2k} \\ &\ldots \\ D_k &= b_1V_{k1} + b_2V_{k2} + \ldots + b_kV_k. \end{aligned} \qquad (7)$$

Setzt man für die Varianzen V_i und Kovarianzen V_{ij} die Gleichungen (4) bzw. (4a) in die Gleichungen von (7) ein, dann erhält man:

$$\begin{aligned} D_1 &= b_1\delta_1\delta_1V_m + b_1V_{e1} + b_2\delta_1\delta_2V_m + \ldots + b_k\delta_1\delta_kV_m \\ D_2 &= b_2\delta_2\delta_2V_m + b_1\delta_2\delta_1V_m + b_2V_{e2} + \ldots + b_k\delta_2\delta_kV_m \\ &\ldots \\ D_k &= b_k\delta_k\delta_kV_m + b_1\delta_k\delta_1V_m + b_2\delta_k\delta_2V_m + \ldots + b_kV_{ek}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Die erste Spalte rechts des Gleichheitszeichens repräsentiert dabei einen Teil der aufgespalteten jeweiligen Varianz V_i in die Residualvarianz V_{ei} und die Ergänzung $\delta_i^2V_m$ bzw. $\delta_i\delta_iV_m$, die anteilige Varianz der Marktkomponenten. Diese ergibt summiert mit den anderen Kovarianzen in jeder Gleichung den Wert $\delta_i V_m \Sigma b_j \delta_j$.

Es ist klar zu sehen, dass der zusammenfassende Ausdruck $\delta_iV_m\Sigma b_j\delta_j$ für $i,j = 1\ldots k$ in jeder Gleichung von (8) vorkommt. Daraus leitet sich, wenn man diesen Ausdruck gleich δ_iC setzt, allgemein für alle Driften $i = 1\ldots m$ das simultane Gleichungssystem

$$D_i - \delta_iC = b_iV_{ei} \qquad i = 1\ldots m \qquad (9)$$

und nach Umformung

$$b_i = (D_i - \delta_iC)/V_{ei} \qquad i = 1\ldots m \qquad (10)$$

ab.[20]

Der Wert der Konstanten C, der neben $V_m\Sigma b_i\delta_i$ einen zusätzlichen Verschiebungsparameter enthält, ist in diesem Gleichungssystem noch unbekannt. Der Verschiebungsparameter verschiebt eine Senkrechte über die Abszisse der Renditen über R_m derart, dass die Nebenbedingung (6a), Elimination des Erwartungswertes der Marktkomponenten, erfüllt wird. Er kann jedoch zusammen mit dem Wert der Konstanten berechnet werden. Da die Vorverkäufe sich nach Auflösung des Gleichungssystems (10) durch ein negatives b_i von den Käufen unterscheiden, kann durch Multiplikation jeder i. Gleichung in (10) mit δ_i und Nullsetzung der Summe aller $b_i\delta_i$ des gesamten Gleichungssystems die Nebenbedingung erreicht werden, dass $\Sigma b_i\delta_i$ für $i = 1\ldots m$ ebenfalls null wird. Hierfür ist die linke Seite aller mit δ_i multiplizierten i Gleichungen in (10) null zu setzen, alle Gleichungen des Gleichungssystems (10) sind zu summieren und die Summe der rechten Seite des Gleichungssystems (10) ist nach C aufzulösen. Es ergibt sich dann, unter der Voraussetzung, dass der Nenner $\Sigma(\delta_i^2/V_{ei})$ ungleich null ist, für die Konstante:

$$C = \Sigma(\delta_iD_i/V_{ei})/\Sigma(\delta_i^2/V_{ei}). \qquad i = 1\ldots m \qquad (11)$$

Die Anteile b_i jeder Aktie i berechnen sich unter Berücksichtigung der in Gleichung (11) berechneten Konstanten C wie in den o.a. Gleichungen (10) dann mit:

$$b_i = (D_i - \delta_iC)/V_{ei}). \qquad i = 1\ldots m \qquad (12)$$

Da die absoluten Anteile X_i aller Aktien nach Bedingung (6b) zusammen 1 bzw. 100 Prozent ergeben sollen, folgt nach Kürzung des Ausdrucks in (12) um die Hilfskonstante λ:

$$X_i = b_i/\Sigma\,|\,b_i\,|. \qquad i = 1\ldots m \qquad (13)$$

Mit den Gleichungen (11) bis (13) sind die Anteile X_i aller Aktien im optimalen Portfolio bestimmbar. Negative Werte von b_i und X_i sind dabei Anteile bzw. Beträge von vorzuverkaufenden Aktien. Ist der Ausdruck $(D_i - \delta_i C)$ für negative D_i größer als null oder für positive D_i kleiner als null, dann ist dieses Investment aus den Gleichungen zu entfernen (Nichtnegativbedingungen 6c) und eine erneute Berechnung durchzuführen.

D Kriterien für die Aktienauswahl

Das in Amerika verbreitete Treynor Maß hat für die Rangreihenbildung bei diesem Ansatz gewisse Bedeutung. Dieses Maß $(R_i - R_f)/\beta_i$, bei dem R_f die risikolose Rendite am kurzfristigen Kapitalmarkt bedeutet, verringert beim Vergleich der Ak-

16 Bei den Gleichungen der Nebenbedingungen ist zum leichteren Verständnis zu berücksichtigen, dass die X_G positiv und die X_V negativ sind.

17 *Linder* 1964, S. 240f.

18 *Elton & Gruber* 1995, S. 95 u. 100.

19 Der Laufindex mit dem letzten Glied k wird hier an Stelle von m gewählt, um einer Verwechslung von V_k und V_m, der Varianz des Marktindex, beim letzten Term vorzubeugen.

20 Zu den Einzelheiten des Gleichungssystems sei auf *Linder* (a.a.O.) und *Elton & Gruber* (a.a.O.) verwiesen.

Tab. 1 Berechnung des optimalen Anlagemix X_i

Aktie	Drift D_i	Beta β_i	Delta δ_i	Var V_i	V_{ei}	δ_i^2/V_{ei}	$\delta_i D_i/V_{ei}$	Anteil b_i	**Mix X_i**
0	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	**9.**
Aktie G1	25	0,74	– 0,26	0,178	0,172	0,393	– 37,809	157,550	**0,353**
Aktie G2	15	0,65	– 0,35	0,165	0,154	0,796	– 34,096	115,650	**0,259**
Aktie V2	– 13	0,43	– 0,57	0,159	0,130	2,504	57,106	– 64,953	**– 0,145**
Aktie V1	– 27	0,59	– 0,41	0,234	0,219	0,768	50,578	– 108,336	**– 0,243**
Summe						**4,461**	**35,778**	446,489	**1,000**
C = 8,021									
V_m = 0,09									

tienkurse untereinander deren Abhängigkeit von der Renditeentwicklung des Aktienindex R_m. Durch Weglassung von R_f kann der Auswahleffekt im Sinne der Zielsetzung noch verbessert werden. Ein Blick in Gleichung (2) zeigt, dass dann praktisch nur der Quotient aus Alpha und Beta als Sortiermerkmal übrig bleibt. R_m spielt als Konstante bei der Sortierung keine Rolle mehr. Die Rangreihenbildung anhand R_i/β_i führt somit dazu, dass Aktien mit geringerer Abhängigkeit der Kursentwicklungen vom Markt eine größere Chance haben, in das Portfolio aufgenommen zu werden, als die übrigen Aktien. Aus Gleichung (5a) ist schließlich jener Effekt zu entnehmen, wenn durch Gleichung (6a) $R_m \Sigma X_i \delta_i$ gleich null bzw. die Marktkomponente $R_m(\delta_G - \delta_V)$ in Gleichung (5a) eliminiert wird. Insoweit kommt für die Auswahl auch eine Sortierung allein nach dem unabhängigen Merkmal Alpha, α_i in Frage. Da in Gleichung (10) ein sonst gleicher Zähler mit kleiner Restvarianz V_{ei} einen Wert mit größerer Restvarianz dominiert, ist schließlich auch der Quotient α_i/V_{ei} als Auswahlkriterium begründet. Welcher Wert nun die beste Performance aufweist, kann nur in umfangreichen Tests ermittelt werden.

Ein Beispiel soll nun die einfache Anwendung des Optimierungsmodells zeigen. Die Nutzung handelsüblicher Tabellenprogramme erleichtert dabei die Berechnung.

E Beispiel

Wegen der Diversifikation des unsystematischen Risikos sollten möglichst viele Aktien in das Portfolio aufgenommen werden.[21] Aus Anschaulichkeitsgründen beschränkt sich das aufgeführte Beispiel in Tabelle 1 nur auf vier Aktien: zwei Gewinneraktien G1 und G2 sowie zwei Verliereraktien V1 und V2. Obwohl für die Berechnung nicht erforderlich, sind sie nach der Höhe der relativen Stärke bzw. der Drift[22] D_i in Spalte 0 sortiert.

Spalte 3 gibt das berechnete δ_i an. Delta, δ_i, berechnet sich aus dem Beta der Spalte 2 mit $\beta_i - 1$. In Spalte 4 findet man die geschätzte Varianz der Kursentwicklungen der einzelnen Aktien. Bei Berechnung der Drift auf logarithmischer Grundlage können für die DAX-Werte an Stelle genauerer Berechnungen die Beta und Volatilitäten aus der Zeitung oder dem Internet verwandt werden. Die Werte für die Volatilitäten sind dann durch 100 zu teilen und zu quadrieren. Spalte 5 ist der nach Gleichung (4a) berechnete Wert der Residualvarianz nach Abzug der Varianz V_m. Die Inhalte der Spalten 6 und 7 sind aus der Überschrift erkennbar. Die Summe der Spalte 6 muss größer als null sein. Die Konstante C berechnet sich dann aus der Summe der Spalte 7 geteilt durch die Summe der Spalte 6. Es ergibt sich der Wert 8,021. In Spalte 8 werden schließlich die optimalen Anteile der Anlagebeträge nach Gleichung (12) berechnet. Hierfür wird Spalte 2 nach Substraktion des Produktes $\delta_i C$ durch Spalte 5 geteilt. Die Summe der Spalte 8 ergibt sich dabei aus den absoluten Werten der Spalte 8. Der optimale Portfoliomix berechnet sich schließlich nach Gleichung (13) in Spalte 9. Hierfür sind die Einzelwerte der Spalte 8 durch die Summe der Spalte 8 zu dividieren. Die Summe der absoluten Anteile ergibt in Spalte 9 eine 1. Die Nebenbedingung der Gleichung (6b) ist somit erfüllt.

Von € 1.000,00 sind danach dann € 353,00 in Aktie G1 und € 259,00 in Aktie G2 zum jeweils geltenden Kurs zu investieren. Für € 145,00 sind zum jeweiligen Kurs Aktien der Aktie V2 und für € 243,00 Aktien der Aktie V1 vorzuverkaufen.

Für die Marktkomponente ergibt sich, mit gewissen Rundungsdifferenzen, dass $R_m \Sigma b_i \delta_i$ bzw. $R_m \Sigma X_i \delta_i$ gleich null ist. Also $R_m(0{,}353 \cdot -0{,}26 + 0{,}259 \cdot -0{,}35 - 0{,}145 \cdot -0{,}57 - 0{,}243 \cdot -0{,}41) = 0$. Der Erwartungswert der Marktkomponenten ist insoweit eliminiert und die Nebenbedingung (6a) erfüllt.

In der Literatur wird die monatliche Anlage von jeweils einem Zwölftel des Vermögens erörtert. Die Parameter für die Konstruktion des Portfolios können je nach Datenlage einfach berechnet oder wie o.a. aus dem Internet entnommen werden.

F Die Berechnung von Varianz, Beta und Delta

Soweit man für genauere Berechnungen[23] die Parameter selbst berechnen will, sind Zeitreihen von Tageswerten oder Wochenwerten der einzelnen Aktienkurse nötig. In vereinfachter, logarithmischer Darstellung ergibt sich bei einer Tagesbetrachtung für die Aktie i:

Ist K_t Kurs der Aktie des Berichtstages, K_{t-1} Kurs des vorhergehenden Tages, dann ist die Veränderung des Kurses der Aktie i: $r_i = \ln(K_t/K_{t-1})$. $r_m = \ln(I_t/I_{t-1})$ sei die entsprechende Veränderung des Kurses I des Marktindex m (z.B. DAX), n = Anzahl der betrachteten Perioden – 1, T der letzte Tag des betrachteten Zeitraumes.

21 U.a. für kursmäßig unabhängige Aktien: *Elton & Gruber* 1995, S. 59f.

22 Überschlägig berechnet mit $R_i = \ln(K_{it}/K_{it})$ für K_{it} = Aktienkurs Aktie i zum Zeitpunkt t = –179; K_{iT} = Aktienkurs Aktie i (+ evtl. Dividende) zum Zeitpunkt T = 0 für i = 1...4. D_i wurde dann mit 100 zur Veranschaulichung multipliziert. Auf das Ergebnis hat dies keinen Einfluss. Eine Division von R_i durch (T – t) ist nicht erforderlich. Im Übrigen reichen für Berechnungen der durchschnittlichen Drift der erste und letzte Wert der Zeitreihe, da $K_{iT} = K_{it}e^{\mu(T-t)}$ für $\mu = \ln(K_{iT}/K_{iT})/(T-t)$. Für die Varianz wurde hier näherungsweise das Quadrat der Volatilität aus der Zeitung verwandt.

23 Möglichkeiten genauerer Berechnungen mit Hilfe von GARCHmodellen für die Varianz finden sich bei *Bollerslev et al.* 1992. Für Beta sei u.a. auf *Elton & Gruber* 1996, S. 142ff. verwiesen.

Die Varianzen V_i (Volatilität zum Quadrat) der Aktien i und V_m des Index m (pro Tag) sind dann für t = 2...T:

$$V_i = (\Sigma r_i^2 - (\Sigma r_i)^2/n)/(n-1), \quad (14)$$

$$V_m = (\Sigma r_m^2 - (\Sigma r_m)^2/n)/(n-1). \quad (14a)$$

Die jahresbezogenen Volatilitäten in Prozent sind:

$$100 \cdot \sqrt{(V_i \cdot 250)} \text{ für die Aktie i} \quad (14b)$$

bzw. $100 \cdot \sqrt{(V_m \cdot 250)}$ für den Marktindex. (14c)

Eine Umrechnung auf die jeweils geltende Periodendauer ist für die Berechnung des optimalen Mix jedoch nicht erforderlich, da sich die Multiplikatoren im weiteren Rechengang wegkürzen.
Für Beta und Delta ergibt sich:

$$\beta_i = (\Sigma r_m r_i - \Sigma r_m \Sigma r_i/n)/(\Sigma r_m^2 - (\Sigma r_m)^2/n), \quad (15)$$

$$\delta_i = \beta_i - 1. \quad (16)$$

G Anlage in Zertifikaten

Eine Anlage in Zertifikaten (Bull- und Bearzertifikate) ermöglicht in einfacher Weise, Käufe und Vorverkäufe mit einem Hebel zu realisieren. So werden Zertifikate angeboten, bei denen ein kleinerer Betrag aufzuwenden ist als es dem Kurswert der zu Grunde liegenden Aktie entspricht. Aus diesem Grunde weisen diese Zertifikate jedoch eine Kurs-Barriere auf. Fällt der Aktienkurs unter diesen Wert oder steigt er bei Bear-Zertifikaten (Vorverkauf) über diesen Wert, dann ist der für das Zertifikat gezahlte Betrag verloren. Eine Kursänderung der Aktien führt im Allgemeinen dafür bei dem Zertifikat zu vergleichsweise höheren Kursänderungen. Die optimale Zusammensetzung eines Portfolios ist mit Zertikaten wegen kleiner Stückelungen zudem einfacher zu verwirklichen.

An dieser Stelle soll auf die Einzelheiten der Ableitung des optimalen Mix aus Zertifikaten jedoch verzichtet werden. Sie finden sich bei *Scholtz* (2002a). Hier sei die für die Praxis relevante Vorgehensweise an dem anschaulichen Beispiel der Tabelle 1 erörtert.

In der Spalte 8 werden die Werte durch den Hebel H_i jeder Aktie i dividiert. Summenbildung der Spalte 8 und Berechnung der Spalte 9 erfolgen dann wie oben beschrieben.

Die Berechnung des Hebels H_i für jede einzelne Aktie i ist vergleichsweise leicht. Sie ist vereinfacht wie folgt:

$$H_i = \text{abs}(K_i/(K_i + E_i(tp_t/(1+tp_t) - 1) - Div_i/(1+t_d p_t))). \quad i = 1...m \quad (17)$$

Es bedeuten für die Aktie i[24]: K_i = aktueller Kurs der Aktie; E_i = Barriere, bei der das Zertifikat verfällt; Div_i = eventuell bis Fälligkeit anfallende Dividende in Prozent; p = Marktzins in Prozent; $p_t = p/36500$; t = Kalendertage bis Fälligkeit des Zertifikates; t_d = Kalendertage bis Fälligkeit der Dividende.

Der absolute Ausdruck hinter dem ersten K_i und dem Bruchstrich der Gleichung (17), vermindert um eine schließende Klammer am Schluss, repräsentiert dabei vereinfacht den fairen Preis des Zertifikates.

Abonnieren statt fotokopieren...

Sollten Sie den folgenden Text auf einer Fotokopie lesen, dann müsste Sie das eigentlich sehr nachdenklich stimmen:

Zeitschriftenbeiträge sind von Fachleuten verfasst, die ihre fachliche Kompetenz und ihr berufliches Wissen darin einfließen lassen.

Es bestreitet sicher niemand, dass Autoren und Verlag für diese Wissensvermittlung honoriert werden müssen. Alles andere grenzte an Ausbeutung.

Aber gerade das tut derjenige, der ungenehmigt – und selbstredend ohne Honorierung – Fotokopien von urheberrechtlich geschützten Werken anfertigt.

Langfristig entziehen die Raubkopierer damit dem Verlag und seinen Autoren die wirtschaftliche Basis für die Herausgabe von Fachzeitschriften. Das aber würde dem Wissenstransfer erheblichen Schaden zufügen.

Zu solchen Ausbeutern aber wollen **Sie** doch nicht gehören.

Deshalb: Abonnieren statt fotokopieren, damit Sie auch morgen noch gut und umfassend informiert sind.

Ihr Asgard Verlag

H Einige spezielle Probleme

Neben den bereits erwähnten Problemen ergeben sich bei diesem Ansatz auch einige spezielle Besonderheiten. Sind die Beta bei einzelnen Aktien sehr groß, dann kann sich die Zusammensetzung des Mix erheblich ändern. In Einzelfällen können dann einige wenige Aktien sehr hohe Anteile (Repräsentanzeffekte) aufweisen. Dieser Sachverhalt birgt ein beträchtliches Risiko in sich, wenn die Beta eine hohe Varianz besitzen. Diesem Effekt kann man letztlich nur durch Festsetzung maximaler Grenzen der Anteile einzelner Aktien im Mix begegnen. Der Mix ist dann jedoch nicht mehr optimal im eigentlichen Sinne.

Das Single-Index-Modell in seiner ursprünglichen Form zeigt wegen der Glättung des Weißen Rauschens bei den Kovarianzen schon bessere Ergebnisse als der klassische Portfolioansatz. Es ist aber wegen der oft bescheidenen Performance trotzdem umstritten. Diese Performance ist u.a. durch die erwähnte geringere Diversifikation auf Grund des Repräsentanzeffektes und die Varianz[25] der Beta (*Fabozzi* 1977 und 1978; *Bauer* 1991) bedingt. *Elton & Gruber* (1995) argumentieren zwar, dass die Erwartungswerte[26] sich systembedingt nur bei einer Vielzahl von Entscheidungen realisieren. Man könne davon ausgehen, dass auf lange Sicht die berechneten Erträge sich insgesamt

24 »abs« besagt, dass das Vorzeichen unberücksichtigt bleibt.

25 Bei den Ausführungen von *Bauer, Elton & Gruber, Fabozzi* und anderen ist zu berücksichtigen, dass diese sich nicht auf Dezile von Rangreihen beziehen sondern auf den vollen Umfang der gezogenen Stichproben. Die Ergebnisse sind daher – unabhängig von der Problematik der Stichprobenziehung als solcher – für diesen Ansatz nur bedingt aussagefähig.

26 Die Streuung der Ergebnisse um den Erwartungswert bezieht sich auf eine ceteris paribus fehlerfreie Stichprobenziehung. In der Regel liegt eine solche nicht vor. Abweichungen vom Erwartungswert können durch Änderungen im gesamten Umfeld (Makroökonomie, Branche, Betrieb, Verbraucherverhalten etc.) begründet sein. In solchem Falle heben sich bei langfristiger Betrachtung Abweichungen in der Regel nicht auf.

einstellten. Für den Anleger, bei dem gerade negative Ergebnisse, z.B. wegen der Varianz der Beta, im Versicherungsfall vorliegen, ist diese aus der Stichprobentheorie abgeleitete Auffassung aber wenig tröstlich.

Das hier abgeleitete Modell stellt zwar eine ertragreichere Version als das Single-Index-Modell dar. Die erläuterten Risiken werden jedoch nur gemildert.

Der Verfasser dieser Zeilen sieht darüber hinaus aber noch eine weitere Problematik. Die Untersuchungen von *Rouwenhorst* (1998) und auch eigene Untersuchungen[27] zeigen, dass die Gleichung (2) in vielen Fällen bessere Ergebnisse bringt, wenn sie wie folgt lautet:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \gamma_i \mid R_m \mid + e_i. \qquad i = 1 \ldots m \qquad (18)$$

Durch den absoluten Term $\gamma_i \mid R_m \mid$ kann dann dem Fall Rechnung getragen werden, wenn die Funktion bei den Aktienrenditen der ausgewählten Dezile einen Knick aufweist. So zeigen die Gewinner mit einem negativen $\gamma_i \mid R_m \mid$ bei Hausse eine geringere Steigerung der Zuwächse als die Verlierer, die bei vergleichbaren β_i ein positives $\gamma_i \mid R_m \mid$ haben. Bei Baisse zeigen die Gewinner wegen des negativen $\gamma_i \mid R_m \mid$ oft einen größeren Abfall. Bei hoher Volatilität des Marktes können sich dadurch die systembedingten Ausgleichseffekte zur Risikominderung möglicherweise nicht auswirken. Das Risiko würde vielmehr in einigen Fällen durch den Vorverkauf der Verlierer verstärkt. Bei Berücksichtigung der Gamma bei der Konstruktion des Portfolios lässt sich dieser Effekt mildern oder gar eliminieren. Der Verfasser hat hierfür einen speziellen Algorithmus entwickelt.

Zusammenfassung

Durch Minimierung der Varianzen und Kovarianzen auf der Grundlage einer Diskriminanzanalyse wird das Risiko von Portfolios zur Anlage von Geldern für die Alterssicherung bei gleichzeitiger Maximierung des relativen Ertrages minimiert. Hierzu trägt auch die aufgezeigte Elimination des Erwartungswertes des allgemeinen Marktrisikos bei. Der für solche Ergebnisse optimale Anlagemix lässt sich in einer einfachen Tabelle problemlos berechnen. Daneben werden Algorithmen für die Berechnung der Varianzen, Kovarianzen sowie den Hebel von Zertifikaten aufgezeigt.

Summary

Low volatility for old age pensions is especially important. The possibility to minimize volatility, while maximizing returns, is the use of an optimized momentum portfolio. Minimizing the portfolio's variance and selling short against the box for an expected zero market risk can optimize the results of such a strategy. The computation of an optimum portfolio is quite simple.

Literatur

Bauer, Ch. (1991), Volatilitäten und Betafaktoren – geeignete Risikomaße? Die Bank, Seiten 277 bis 293.

Balvers, R./Wu, Yangru/Gilliland, E. (2000), Mean Reversion across National Stock Markets and Parametric Contrarian Investment Strategies, Journal of Finance, S. 745–772.

Best, M. J./Grauer, R. (1991), On the Sensitivity of Mean-Variance Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results, Review of Financial Studies, S. 315–342.

Black, F./Litterman, R. (1992), Global Portfolio Optimization, Financial Analysts Journal, S. 28–43.

Bollerslev, T./Chou, R. Y./Kroner, K. F. (1992), ARCH Modelling in Finance, Journal of Econometrics, S. 5–59.

Britten-Jones, M. (1999), The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolio Weights, Journal of Finance, S. 655–671.

Conrad, J. S. et al. (1994), Volume and Autocovariances in Short-Horizon Individual Security Returns, Journal of Finance, S. 1305–1329.

Elton, E. J. (1999), Expected Return, Realized Return, and Asset Pricing Tests, Journal of Finance, S. 1199–1220.

Elton, E. J./Gruber, M. J. (1995), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5th Edition.

Fabozzi, F. J./Clark, G. (1978), Beta as a Random Coefficient, Journal of Financial and Quantitative Analysis, S. 101–116.

–, (1977), Stability Tests for Alphas and Betas over Bull and Bear Market Conditions, Journal of Finance, S. 1093–1099.

Fama, E. (1965), The Behaviour of Stock Prices, Journal of Business, S. 34–105.

Frost, P. A./Savarino, J. E. (1986), An Empirical Bayes Approach To Efficient Portfolio Selection, Journal of Financial and Quantitative Analysis, S. 293–305.

–, (1988), For Better Performance: Constrain Portfolio Weights, Journal of Portfolio Management, S. 29–34.

Hong, H./Lim, T./Stein, J. C. (2002), Bad New Travels Slowly: Size, Analysts Coverage, and the Profitability of Momentum Strategies, Journal of Finance, S. 265–296.

Jegadeesh, N./Titman, S. (1993), Returns by Buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency, Journal of Finance, S. 65–91.

Kon, S. J. (1984), Models of Stock Returns – a Comparison, Journal of Finance, S. 147–165.

Linder, A. (1964), Statistische Methoden. 4. Aufl.

Markowitz, H. (1959), Portfolio Selection.

Moskowitz, T. J./Grinblatt, M. (1999), Do Industries Explain Momentum? Journal of Finance, S. 1249–1290.

Rouwenhorst, K. G. (1998), International Momentum Strategies, Journal of Finance, S. 267–284.

–, (1999), Local Return Factors and Turnover in Emerging Stock Markets, Journal of Finance, S. 1439–1464.

Scholtz, H. D. (1990), Maximierung des Endvermögens bei Ausschluss des Ruins. Zeitschrift für Betriebswirtschaft, S. 685–704.

–, (1999), Optimaler Anlagemix bei unabhängigen Kursentwicklungen, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, S. 1128–1137.

–, (2002a), Die optimale Optionsstrategie bei unabhängigen Ertragsentwicklungen, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, S. 70–77.

–, (2002b), Risikominderung durch eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung, Die Rentenversicherung, Nr. 6, S. 101–107.

Steiner, M./Bruns, Ch. (1996), Wertpapiermanagement, 6. Auflage.

Sharpe, W. F. (1963), A Simplified Model for Portfolio Analysis, Mangement Sciences, S. 277–293.

Treynor, J. L. (1965), How to Rate Management of Investment Funds. Harvard Business Review, S. 63–75.

Anschrift des Verfassers:
Soonwaldstr. 13, 55566 Bad Sobernheim

27 Vgl. u.a. zur Betaproblematik des Weiteren auch *Fabozzi* 1978, *Elton & Gruber* 1995, S. 146 ff., 294 ff. Der Verfasser dieser Zeilen konnte in Stichproben mit einer Diskriminanzanalyse eine klare Trennung der Gewinner und Verlierer zeigen, wenn die Parameter Alpha, Beta und insbesondere Gamma in die Berechnungen einbezogen wurden. Dabei zeigten die Ergebnisse in einigen Fällen für die Gamma zwar nur eine schwache Signifikanz. Aber in den gesamten Stichproben waren die negativen Alpha mit positiven Gamma und positive Alpha mit negativen Gamma signifikant vergesellschaftet. Zu prüfen wäre, ob sich hier Portfolioumschichtungen größerer Investoren niederschlagen. Der Autor konnte solche Effekte in früheren Berechnungen nachweisen. Jedenfalls scheinen weitere Untersuchungen hierzu erforderlich.