

Scholtz, Hellmut D.

Article — Manuscript Version (Preprint)

"The Gamblers Ruin" und die kritische Wahrscheinlichkeit. Geeignete Risikomaße bei Anlagen zur Alterssicherung?

Die Rentenversicherung

Suggested Citation: Scholtz, Hellmut D. (2002) : "The Gamblers Ruin" und die kritische Wahrscheinlichkeit. Geeignete Risikomaße bei Anlagen zur Alterssicherung?, Die Rentenversicherung, ISSN 0340-5753, Bundesverband der Rentenberater e.V., Berlin, Vol. 43, Iss. 11, pp. 201-208

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/90639>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

„The Gambler’s Ruin“ und die kritische Wahrscheinlichkeit. Geeignete Risikomaße bei Anlagen zur Alterssicherung?

Hellmut D. Scholtz, D 55566 Bad Sobernheim

Abstrakt

Ein Kursverlauf einer Aktie oder eines Fonds mit einer Folge von rentabel eingeschätzten Kursveränderungen beinhaltet selbst dann ein vergleichsweise hohes Risiko, wenn die Wahrscheinlichkeit der zu erwartenden positiven Kursveränderungen unter einem bestimmbar kritischen Wert liegt. Gleiche Maßstäbe der Beurteilung gelten für die Beteiligung an anderen Investments.

Der folgende Ansatz zeigt die Komponenten und Lösungswege auf, die für eine Beurteilung der erwarteten Gewinne bei gleichzeitigem Ausschluss ruinöser Tendenzen erforderlich sind.

I Problemstellung

In der Literatur wird an vielen Stellen gezeigt, wie sich ein Portfolio berechnen lässt, das ein möglichst geringes Risiko beinhaltet. Die klassische Portfoliotheorie¹ geht dabei für die Auswahl von Anlagen von der Wechselbeziehung zwischen zukünftigen Erträgen und deren Varianz als Risikokomponenten aus. Grundsätzlich wird in den Ansätzen eine Risikoaversion der Anleger unterstellt. Wegen einiger Probleme dieses Konzepts lag in der Anlagepraxis der letzten Jahrzehnte der Schwerpunkt der Diskussion neben anderen Portfoliomodellen jedoch eher auf der Konzeption intuitiver Risikomaße². Hierbei standen für das sogenannte „**downside-risk**“ drei Konzepte, die **Semivarianz**, die **Ausfallwahrscheinlichkeit** und das **value-at-risk** Konzept, im Vordergrund.

Bei der Semivarianz, die im Rahmen verschiedener Maße schon von Markowitz³ erörtert wird, werden nur jene Werte in die Berechnungen einbezogen, die vom Erwartungswert der Erträge negativ abweichen. Die weiterführenden Berechnungen für die Auswahl der Anlagen erfolgen auf der Grundlage dieser Werte vergleichbar wie bei der Varianz⁴. Die Quadratwurzel aus der Semivarianz stellt dabei dann das Risikomaß dar.

Für das Konzept der Ausfallwahrscheinlichkeit wird jene Wahrscheinlichkeit⁵ berechnet, mit der die zu erwartende Rendite einen bestimmten subjektiven Wert unterschreitet. Wie hoch die Unterschreitung dann tatsächlich ist, wird nicht bestimmt. Die Verteilungsannahmen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten und die übrigen subjektiven Annahmen gelten als problematisch.

Auf der Grundlage der Eintrittswahrscheinlichkeiten der Vergangenheit berechnet das value-at-risk Konzept, wie hoch ein möglicher maximaler Verlust bei einem subjektiv vorgegebenen Sicherheitsniveau anzunehmen ist. Auf dieser Grundlage kann der Investor dann seine Auswahl unter den Investments⁶ und Maßnahmen zur Risikobegrenzung planen. Ungeklärt ist je-

¹ Markowitz 1959

² Bruns&Meyer-Bullerdiek 1996, S. 20 ff.; Steiner&Bruns 1996, S. 500 ff.

³ Markowitz 1959, S. 287 ff.

⁴ Scholtz 2002a und 2002b

⁵ Hier wird die Laplace’sche Definition der Wahrscheinlichkeit verwandt. Danach ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ϵ der Quotient aus Anzahl der für ϵ günstigen Fälle und Anzahl aller möglichen Fälle.

⁶ Schneeweiß 1967, S. 57 f.

doch, welche Höhe die Parameter, z.B. die Höhe des Sicherheitsniveaus, für einen möglichst hohen

Ertrag bei Meidung von Ruintendenzen⁷ konkret haben sollen. Die Annahmen über die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten sind ebenfalls umstritten. Trotz allem hat das Konzept in der Praxis verbreiteten Eingang gefunden.

Die Heranziehung einer subjektiven Risikobereitschaft der Anleger als Kriterium für die Festsetzung der Parameter reicht jedoch nicht aus. Ein solcher Maßstab bewahrt selbst risikoscheue Anleger nicht vor einem möglichen Ruin. Risikoaverse Anleger erleiden einen eventuellen Ruin eben nur mit geringerer Wahrscheinlichkeit als risikobereite Investoren. Ausgeschlossen ist der Ruin, also ein totaler Verlust der zur Anlage verfügbaren Mittel, oder eine Tendenz zum Ruin prinzipiell nicht.

Nun schwankt die Einsatzbereitschaft bei jedem Individuum zusätzlich auch noch situationsabhängig. Gruppen von Investoren, Teilnehmer an einem Investmentfonds z.B., haben überhaupt kein einheitliches Risikoverhalten. Portfolios unter dem Blickwinkel subjektiver RisikoEinstellung, die den Ruin generell und jederzeit nach diesen Kriterien meiden, können in soweit gar nicht berechnet werden.

Schneeweiß⁸ wendet sich daher auch - wie u.a. - gegen vergleichbare Lösungen, wie sie mit ihren subjektiv zu bestimmenden Parametern oben dargestellt wurden.

Die Erörterungen zeigen allgemein, dass dieses Thema der Risikooptimierung theoretisch sehr schwierig ist. Es beschäftigt daher die Wissenschaftler seit mehreren Jahrhunderten. So hat D. Bernoulli schon 1738 sich hierzu in einer interessanten Abhandlung ausführlich geäußert.

Einige Autoren, die sich in den letzten Jahrzehnten mit dem Problem aus der Sicht **objektivistischer** Lösungsansätze befassten, sind u.a. Feller (1952 und 1968), Roy (1952), Breimann (1960), Dubins & Savage (1961 und 1976), Schneeweiß (1967), Latané (1959) und Hakanson (1971), Samuelson (1971), Thorpe (1971), Ferguson (1965), Scholtz (1990), Vince (1992). Im Vordergrund steht dabei nicht die Auswahl von Anlagen. Schwerpunkt ist vielmehr das Risiko, dass bei einer bestimmten Anlagestrategie das gesamte Vermögen verloren geht bzw. ein Ruin eintritt. Die Ansätze sind jedoch methodisch auf die ggf. einzugehenden Risiken bei einzelnen Anlagen übertragbar.

Feller (1968) zeigt einen Ansatz zur Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Prozessen. Es wird zum Beispiel angenommen, dass ein Spieler bei einem Glücksspiel jeweils eine Einheit mit einer bestimmten Gewinnwahrscheinlichkeit p dazu gewinnt oder diesen Betrag mit der entsprechenden Verlustwahrscheinlichkeit q verliert. Das Spiel dauert dabei so lange an, bis der Spieler sein Kapital verloren hat oder das Kapital des Gegenspielers besitzt. In der Literatur wird dieser Ansatz allgemein als „**The Gambler's Ruin**“ behandelt. Auf der Grundlage von mathematischen Modellen zum Random-Walk⁹, zu Markoff-Ketten und anderen Ansätzen lässt sich auch eine Ruinwahrscheinlichkeit bei solchen Ergebnissen

⁷ Als Ruin wird im folgenden der Verlust des gesamten verfügbaren Vermögens verstanden. Eine Ruintendenz liegt bei einer Anlagestrategie dann vor, wenn die Ruinwahrscheinlichkeit R bei einer Folge von Anlageentscheidungen die Überlebenschance U übersteigt. Dabei gilt $R+U=1$. Auch ein Kursverlauf weist eine Ruintendenz auf, wenn derselbe durch ein ungünstiges Verhältnis von Gewinnen und Verlusten zum Verlust des gesamten Investments führen kann. Vgl. auch II A unten.

⁸ Schneeweiß 1967, S.175. Zeitlich vor der Erörterung der o.a. drei Konzeptionen

⁹ Zufallsweg

berechnen, die sich nicht nur allein auf den Gewinn oder Verlust von je einer Einheit beschränken.

Roy (1952) entwickelt eine Strategie zur Minimierung der Ruinwahrscheinlichkeit auf der Grundlage des Erwartungswertes μ des Ertrages und dessen zu erwartender Streuung σ . Sie bildet eine theoretische Grundlage für vergleichbare Maße, die in späteren Jahren erörtert wurden.

Breimann (1960) und Dubins & Savage (1961) setzen sich mit den Ruinwahrscheinlichkeiten von Strategien zur Maximierung des Vermögens auseinander. Der erwartete Gewinn kann dabei ein beliebiges Vielfaches vom erwarteten Verlust ausmachen. Bei Gewinnwahrscheinlichkeiten p größer als 0,5 führt dabei jene „proportionale Strategie“ zu einem maximalen Endvermögen, die bei wiederholten Investments relative Einsätze bestimmter Höhe vom jeweils verfügbaren Kapital vornimmt. Ein Ruin ist bei einer solchen Strategie grundsätzlich ausgeschlossen. Denn das Kapital C , vollständige Teilbarkeit vorausgesetzt, kann nie null werden. Allerdings kann das Vermögen durch mehrere Verluste für längere Zeit sehr kleine Werte annehmen (z.B. kleiner als 1 bei Startvermögen von 100). Ist daher ein betrachteter Zeitraum begrenzt, dann bedeutet ein solch kleiner Wert des Vermögens gewissermaßen einen „Quasiruin“.

Dubins&Savage und auch Breimann (a.a.O.) stellen daher fest, dass es einen **kritischen** Betrag b , als Bruchteil vom Kapital, gibt. Sie führen aus, dass riskierte Einsätze b größer als der **kritische** Betrag tendenziell zum Ruin und kleinere zu Wohlstand führen. Im Verhältnis zum Kapital, C , muss b relativ klein sein. Wie hoch diese **kritische Größe** betragsmäßig zur Meinung von Ruintendenzen anzusetzen ist, wird nur sehr bedingt behandelt.

Insgesamt zeigt sich, dass deren Strategien eine systembedingte Ruintendenz innewohnt. Es wird insoweit in vielen Fällen kein maximales Endvermögen erreicht, wenn der Zeitraum beschränkt ist.

Latané (1967) und Hakansson (1971) maximieren das geometrische Mittel der Gewinne des risikobehafteten Einsatzes b . Dabei ist das geometrische Mittel anstatt des arithmetischen Mittels der Rendite im Zeitablauf zu maximieren. Hakansson setzt sich in seiner Abhandlung auch kritisch mit dem Portfolioansatz von Markowitz (1959) auseinander. So zeigt er auf, dass bei verschiedenen Beispielen auf der Grundlage des Markowitzmodells ein Ruin nicht ausgeschlossen ist.

Bei kleinen Anzahlen n von Aktionen ergibt der Ansatz auf der Grundlage des geometrischen Mittels einen höheren Erwartungswert des Endvermögens als bei Dubins&Savage. Das Risiko ist jedoch noch höher. Bei größeren Anzahlen von Einsätzen geht der Erwartungswert des Endvermögens in den Ansatz von Kelly (1956) und Dubins & Savage über¹⁰. Insoweit wohnt auch diesem Ansatz wie o.a. eine latente Ruintendenz inne.

Vince (1992), bei den Anlegern in den USA sehr populär, versucht nun eine Verknüpfung eines „worst-case-scenarios“ mit einer Maximierung des geometrischen Mittels. Eine begründete analytische Lösung für die Optimierung des Ruin-Problems bleibt jedoch ebenfalls offen.

Die o.a. Lösungen gehen davon aus, dass ein risikobehafteter Einsatz erfolgen sollte, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit p auch kleiner als $2/3$ aber größer als 0.5 ist. Ferguson (1965)

¹⁰ Samuelson 1971, Thorp 1971

zeigt jedoch, dass eine kritische Gewinnwahrscheinlichkeit für größere Einsätze größer als $2/3$ sein müsste, wenn ein Ruin vermieden werden soll.

Schneeweiß (1967) setzt sich auf der Grundlage des Bernoulli-Prinzips mit der Rationalität verschiedener Lösungsansätze auseinander. An einem Beispiel zeigt er auf, dass ein durchaus im Sinne des Bernoulli-Prinzips "nicht unrational zu nennendes" Entscheiden zur Vermeidung des Ruins zu "äußerst unplausiblen, wenn nicht gar unvernünftigen" ¹¹ Nutzenfunktionen führen kann. Begründet ist dies darin, dass mit hoher Anzahl von Entscheidungen die Streuung der Ergebnisse relativ immer kleiner und der Erwartungswert μ des Gewinns immer größer werden muss. Insoweit wäre z.B. die Anwendung des μ -Kriteriums im Wiederholungsfall, d.h. Einsätze mit größtem μ anstatt anderer als optimal geltender Kriterien, "vernünftig".

Entscheidungsregeln, die die Ruinwahrscheinlichkeit und den Erwartungswert μ unmittelbar verwenden, hält Schneeweiß wegen der subjektiven Festsetzungen für willkürlich und nicht plausibel im Sinne des Bernoulli-Prinzips ¹². Das Problem des optimalen Portfolios unter dem Gesichtspunkt der Ruinvermeidung nach objektivistischen Grundsätzen bleibt dort ebenfalls ungelöst.

Auf der Grundlage stichprobentheoretischer Überlegungen stellt Scholtz (1990) einen Ansatz, als Teilaspekt einer anderweitigen Problemstellung, vor. Mit diesem lässt sich der kritische Einsatzbetrag b und damit ein optimal zu tragendes Risiko bei gegebener Gewinnwahrscheinlichkeit ermitteln. Dabei berechnet er die Höhe des kritischen Einsatzbetrages b derart, dass im ungünstigsten Fall die Summe der Verluste gerade der Summe der Gewinne entspricht, so dass das Vermögen trotz Risikofall und zwischenzeitlichen Verlusten tendenziell erhalten bleibt.

Der im folgenden aufgezeigte Lösungsweg führt im Vergleich zu den bisherigen Arbeiten zu anderen Überlegungen. Er geht davon aus, dass eine Strategie, die systembedingt den Totalverlust von Investments vermeidet, auch vor einem Ruin des gesamten Vermögens schützen kann. Gelegentlich sind beide Sachverhalte sogar identisch. Daher wird im folgenden das Instrumentarium zur Vermeidung des Ruins analog auch für Totalverluste von Einzelinvestments dargestellt. Im Vordergrund stehen dabei Definition und Berechnungsweise von kritischen Gewinnwahrscheinlichkeiten. Die Anwendung dieses Parameters bei Entscheidungen über Anlagen zur Alterssicherung kann dann das Risiko in der Praxis systemimmanent optimieren. Einige Beispiele unterstützen das Verständnis des Ansatzes.

II Das kritische Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten der Gewinne und Verluste

A Definition der kritischen Wahrscheinlichkeit

Es stellt sich die Frage, ob es einen objektiven Weg zur Bestimmung des Risikos gibt, das im Fall einer Investmententscheidung **höchstens** übernommen werden sollte.

Für die Lösung des Problems werden mehrere Wege gesehen. An dieser Stelle soll eine wichtige Teillösung, die Berechnung der kritischen Wahrscheinlichkeit, erläutert werden. Im folgenden sei sie als **kritische Wahrscheinlichkeit** p_{cr} bezeichnet ¹³. Deren Definition erfolge am Beispiel eines einfachen Random-Walks und der Ruinwahrscheinlichkeit.

¹¹ Schneeweiß 1967, S. 175

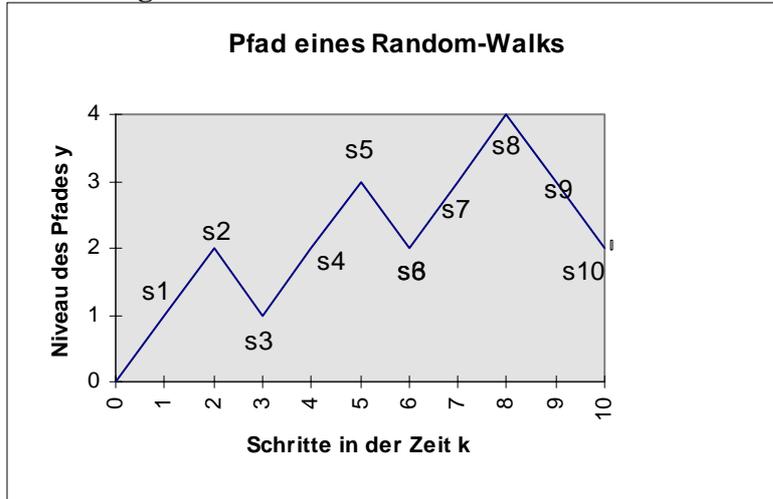
¹² Schneeweiß 1967, S. 60;100

¹³ Vgl. hierzu auch Scholtz 1990, S. 689 f.

Für den Random-Walk sei für zufällige n_g Ereignisse $+1$ und zufällige n_v Ereignisse -1 , mit dem Endpunkt (n,y) für $n=n_g+n_v$ und $y=n_g-n_v$, folgendes¹⁴ angenommen:

„Für $n>0$ und ganzzahlige y ist ein Pfad (s_0, s_1, \dots, s_n) vom Ursprung zum Punkt (n,y) eine polygonale Linie, deren Scheitelpunkte s_k die Abszisse $k=0,1,\dots,n$ und für k die Ordinaten s_0, s_1, \dots, s_n besitzen. Dabei gilt $s_k-s_{k-1} = \pm 1$, $s_0 = 0$; $s_n = n_g-n_v$. Für n Schritte bzw. Punkte auf der Abszisse gibt es 2^n mögliche Pfade.“

Abbildung 1



Die Abbildung 1 zeigt **einen** der möglichen 2^n Pfade für $n=10$, $n_g=6$ und $n_v=4$ zufällige Ereignisse. Der letzte Scheitelpunkt $s_n=s_{10}$ für $n=10$ liegt bei $n_g-n_v=6-4=2$.

Teilt man die Anzahlen n_g , n_v und n der Ereignisse jeweils durch n , dann ergeben sich für die Ereignisse ± 1 die Gewinnwahrscheinlichkeit p für n_g/n und die Verlustwahrscheinlichkeit q für n_v/n mit $p+q=1$. Hierbei ist angenommen, dass das Ereignis $+1$ ein Gewinn und das Ereignis -1 ein Verlust ist.

Die Ermittlung der kritischen Wahrscheinlichkeit hängt nun von diesen Wahrscheinlichkeiten und der Ruinwahrscheinlichkeit ab. Zur Veranschaulichung des Ruinproblems stelle man sich daher den Kursverlauf einer Aktie vor, in die das Kapitalvermögen C voll investiert ist. Es sei angenommen beim Start des Random-Walks¹⁵ betrage der Wert der Aktie **ein** €. In der schrittweisen Abfolge der Börsentage falle der Wert der Aktie um **ein** € mit der Wahrscheinlichkeit q oder steige um **ein** € mit der Wahrscheinlichkeit p . Die oben erwähnten fortlaufenden Scheitelpunkte $s_1, s_2 \dots s_n$ entsprechen dann jeweils dem Kursniveau dieser Aktie und damit auch dem Vermögen C . Für n Schritte dieser Veränderung um **einen** € existieren 2^n mögliche Entwicklungspfade bzw. Möglichkeiten der Wertveränderung der Aktie. Ein Ruin trete ein, wenn der Verlauf eines Pfades **ein** € weniger als das Startkapital $C=1$ € beträgt. Der Wert der Aktie und des Kapitalvermögens C ist dann null. Der Ruin ist eingetreten.

Die Wahrscheinlichkeit des Ruins R dieses **einen** € berechnet sich aus dem Quotienten¹⁶ q/p , bei $p+q=1$, und der Anzahl der Kapitaleinheiten, bzw.

¹⁴ Feller 1968 I; S. 68

¹⁵ für die Kursentwicklung wird approximativ der Verlauf eines Zufallswegs mit $p>q$ unterstellt.

¹⁶ Feller 1968 S. 342. Bei einem Gegenspieler mit sehr großem Kapital. Gut verständliche Ableitung auf der Grundlage geometrischer Reihen bei Packel 1981, S. 129 ff.

$$R=(q/p)^C \quad \text{hier } C=1, p>q. \quad (1)$$

Die entsprechende Überlebenswahrscheinlichkeit U ist dann:

$$U=1-R. \quad (2)$$

Das R repräsentiert die Anzahl der Pfade im Random-Walk, die im Verhältnis zur Gesamtzahl der 2^n Pfade die Nulllinie berühren oder diese unterschreiten.

Aus Gleichung 1 ist zu ersehen, dass bei $p<2/3$ und entsprechend $q>1/3$ die Anzahl der Pfade, die über der Nulllinie bleiben, kleiner ist als die Anzahl der Pfade, die die Nulllinie berühren oder unterschreiten. Dieser Sachverhalt ist leicht verständlich. Selbst wenn zu Beginn des Random-Walks die Gewinnwahrscheinlichkeit p etwas größer als $1/2$ aber kleiner als $2/3$ ist, beträgt die Anzahl der Pfade, die auf der Nulllinie enden oder die Nulllinie kreuzen, mehr als die Hälfte aller möglichen Pfade. Zurückzuführen ist dies darauf, dass auch Pfade, die sich anfänglich im positiven Bereich bewegen, schließlich negativ entwickeln können. Bei $p=2/3$ besteht gerade Gleichgewicht zwischen Ruinwahrscheinlichkeit und Überlebenswahrscheinlichkeit¹⁷, also $R=U=0.5$. Aus diesem Sachverhalt lässt sich die kritische Wahrscheinlichkeit p_{cr} wie folgt definieren:

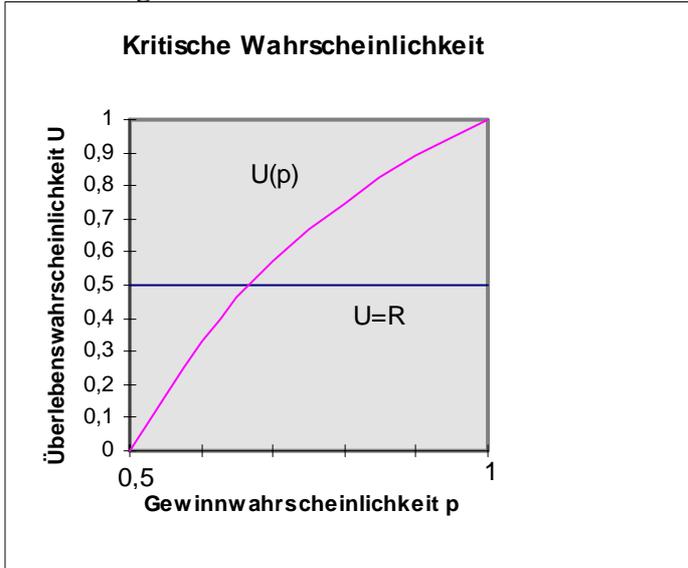
Definition:

Bei einem Random-Walk mit einem Anfangskapital von $C=1$ sei jene Wahrscheinlichkeit p eines Gewinnes als **kritische Wahrscheinlichkeit** p_{cr} bezeichnet, bei der die Anzahl der möglichen Pfade, die nur oberhalb der Nulllinie verlaufen, gerade der Anzahl der übrigen möglichen Pfade entspricht bzw. bei der $R=U=0,5$.

Die Definition gelte auch für Zufallswege, bei denen der Gewinn ein Vielfaches m des möglichen Verlustes beträgt. Eine Grafik mag den Sachverhalt veranschaulichen.

¹⁷ Feller 1968, I, S. 347. Scholtz 1990

Abbildung 2



Die Abbildung 2 zeigt als von links nach rechts verlaufende Gerade die Funktion $U=R=0,5$. Sie schneidet die Funktion der von der Gewinnwahrscheinlichkeit abhängigen Überlebenswahrscheinlichkeit $U(p)=1-R=1-q/p$ bei $2/3$ der Gewinnwahrscheinlichkeit p . Vorausgesetzt ist hier, dass die Höhe jedes Einzelgewinnes gleich der Höhe jedes Einzelverlustes entspricht. Der Wert $p=2/3$ bzw. $0,667$ im Schnittpunkt gibt in diesem Fall dann die kritische Wahrscheinlichkeit p_{cr} an. Denn hier ist die nichtlineare Funktion $U(p)$ gleich der Funktion $U=R=0,5$.

Wie oben ausgeführt, zeigt die Grafik, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit bei einem p von $0,5$ gleich null ist. Bei einem p größer als $0,5$ aber kleiner als $2/3$ ist die Überlebenswahrscheinlichkeit immer noch kleiner als $0,5$. Sie nimmt dann mit steigender Wahrscheinlichkeit von p zu. Bei $p=2/3$ erreicht sie den erörterten Wert $0,5$. Hier entspricht die Überlebenswahrscheinlichkeit dann grade der Ruinwahrscheinlichkeit.

Werden nun im obigen Beispiel der Abbildung 2 wiederholt Anlagen mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit p kleiner als die kritische Wahrscheinlichkeit p_{cr} von $2/3$ getätigt, dann ist die entsprechende „Überlebenswahrscheinlichkeit“ der ersten Einheit in Höhe eines Einzelverlustes kleiner als die „Ruinwahrscheinlichkeit“. Der Investor muss also damit rechnen, dass trotz eines positiven Erwartungswertes der Anlage in mehr als 50 Prozent der zukünftigen Fälle der aktuelle Vermögensstand - zumindest zeitweise – durch mehrere Einzelverluste von je einer Einheit unterschritten wird. Dies bedeutet, dass eine solchermaßen verfolgte Handelsstrategie tendenziell ruinös ist. Denn wegen der höheren Ruinwahrscheinlichkeit gilt die Aussage der Unterschreitung des jeweils aktuellen Vermögens auch für die folgenden niedrigeren Vermögensstände.

Weisen die Gewinne und Verluste ein Verhältnis m ungleich von 1 auf, dann ist die kritische Wahrscheinlichkeit etwas aufwendiger zu berechnen. Die dafür erforderliche Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit soll im folgenden gezeigt werden. Zu Beginn ist in diesem Zusammenhang jedoch auf die Begriffsbestimmung von Gewinn und Rendite einzugehen.

B Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit und der kritischen Wahrscheinlichkeit bei Ungleichheit von Gewinnen und Verlusten

1) Berücksichtigung von Rendite und Gewinn als Elemente der Ruinwahrscheinlichkeit

Solange nur absolute Gewinne g und Verluste v von 1 € wie im obigen Beispiel zu erwarten sind, kann die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ruins aus dem Random-Walk-Modell oder auf der Grundlage einer absorbierenden, nicht ergodischen Markoff-Kette abgeleitet werden. Dies gilt auch, wenn die Gewinne ein ganzzahliges m -faches des Verlustes betragen.

Macht der Verlust v , als oben beschriebener Betrag b , einen Bruchteil von irgendeinem definierten, absoluten Kapitalstand aus, dann führen relative b von diesem definierten Referenzkapital ebenfalls zu einem absoluten Wert. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn das Ausgangskapital oder ein irgendwann erreichter Kapitalstand als Referenzgröße verwandt wird. Ist z.B. das Referenzkapital C_k , dann folgt für den Verlust bC_k und für den Gewinn mbC_k .

Das alleinige Verhältnis m von relativen Gewinnen, Renditen, und relativen Verlusten eignet sich nicht zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit auf der Grundlage eines Random-Walks. Denn ein Verhältnis von Gewinn zu Verlust in Höhe von $m=1$, selbst bei identischer Anzahl von Gewinnen und Verlusten, führt nicht zu dem ursprünglichen Kapitalstand zurück. Der neue Kapitalstand ist niedriger. So führt z.B. ein relativer Verlust von fünfzig Prozent des Ausgangskapitals und ein folgender Gewinn von 50 Prozent auf das auf den Verlust folgende Restkapital zu einem neuen Restkapital von nur noch fünfundsiebzig Prozent des Ausgangskapitals. Setzt sich dieser Prozess fort, dann konvergiert das Endkapital schließlich gegen null.

Logarithmiert man dagegen die Skala der oben erwähnten Scheitelpunkte s_k , so kann auch das daraus abgeleitete Verhältnis m_x der Gewinne und Verluste zur Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit auf der Grundlage der obigen Modellvorstellungen herangezogen werden. Für die Berechnungen werden dann statt der Gewinne die Zuwachsrate μ_g , statt der Verluste die Schrumpfrate μ_v und das Verhältnis $m_x = \mu_g / \mu_v$ anstelle von $m = g/v$ verwandt.

Die Berechnung der Gewinne und Verluste bedarf wegen der Eigenschaft des Anlageprozesses und des kursabhängigen Anlagebestandes jedoch noch weiterer Überlegungen. Diese sollen im folgenden kurz erörtert werden.

2) Ermittlung von Gewinn und Verlust bei Vorliegen eines stochastischen Prozesses

In der Realität liegt bei Aktienkursverläufen ein Prozess mit zufällig verteilten Gewinnen und Verlusten vor. Für das obige Modell bietet sich daher eine Näherungslösung an. Dazu kann man die Komponenten der Wachstumsrate des Prozessverlaufs, und zwar die Erwartungswerte¹⁸ der Zuwachsrate μ_g und der Schrumpfrate μ_v , verwenden. Hierfür ist dann nicht die Differenz der o.a. Scheitelpunkte sondern deren relative Veränderung zu berechnen. Bei einer logarithmierten Skala entspricht dies der Differenz der Logarithmen der Scheitelpunkte. Daraus ergibt sich dann für die Kursstände s_k , $k=1\dots n$:

$$SG = \sum \ln(s_k/s_{k-1}) \quad \text{für alle } k \text{ mit } s_k > s_{k-1}, n_g = \text{Anzahl Gewinne}, \quad (3)$$

$$SV = \sum \ln(s_k/s_{k-1}) \quad \text{für alle } k \text{ mit } s_k < s_{k-1}, n_v = \text{Anzahl Verluste}. \quad (4)$$

¹⁸ Bamberg&Coenenberg 1989, S. 227. Bei kleiner Ereignisanzahl ist die Varianz zu berücksichtigen.

Der Erwartungswert der Zuwachsrates ist dann:

$$\mu g = SG/n_g \quad (5)$$

und der Erwartungswert der Schrumpfrates:

$$\mu v = SV/n_v \quad (6)$$

Für den Erwartungswert des relativen Gewinns ergibt sich daraus $g_r = \exp(\mu g) - 1$ und für den Erwartungswert des relativen Verlustes $v_r = \exp(\mu v) - 1$.

Auf dieser Grundlage kann nun bei Anlageentscheidungen oder bei Kontrolle bestehender Vermögensanlagen die Wahrscheinlichkeit eines Totalverlustes bei ungleichen Erwartungswerten von Gewinnen und Verlusten bzw. den Entwicklungsrates bestimmt werden.

3) Approximative Bestimmung der Ruinwahrscheinlichkeit und der kritischen Wahrscheinlichkeit bei Ungleichheit der Gewinne und Verluste

Eine Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit R der einen Einheit $C=1$ bei einem ungleichen Verhältnis der Gewinne g und der Verluste v ist wie oben angeführt approximativ mit Hilfe von Markoff-Ketten möglich. Für $m=g/v=2$ zeigt Feller¹⁹ einen Ansatz auf der Grundlage eines Random-Walks. Dieser Ansatz²⁰ ist für die Praxis approximativ auch für nicht ganzzahlige Fälle von m bzw. dem o.a. $m \times$ anwendbar. Es gilt:

$$R = L^C \quad \text{für } L = pL^{(m+1)} + q, \quad 0 < L < 1, \quad C=1, \quad (7)$$

$m = g/v$ bei absoluten Gewinnen und Verlusten,
 $m = m \times = -\mu g / \mu v$ bei relativen Gewinnen und Verlusten.

Relative Gewinne und Verluste von einem Kapital entsprechen der allgemein üblichen Betrachtungsweise. L , die Ruinwahrscheinlichkeit einer Einheit, ist mit wenigen Iterationen näherungsweise, also durch „Probieren“, berechenbar. Erweitert man die erste Bedingung der Gleichung 7 durch Multiplikation mit $p+q=1$, so ergibt sich für die Berechnung der kritischen Wahrscheinlichkeiten:

$$pL + qL = pL^{(m+1)} + q \quad (8)$$

Setzt man $q=1-p$ und löst die Gleichung nach p auf, dann erhält man nach Einsetzen von p_{cr} für p die kritische Wahrscheinlichkeit²¹, bei der $R^C = U^C = 0,5$ für absolut gleiche Gewinne und Verluste und $C=1$:

$$p_{cr} = 1/(2-0.5^m) \quad \text{für } m=g/v, \quad m=1, \quad R^C = U^C \quad \text{für } C=1. \quad (9)$$

¹⁹ Feller 1968, S. 367 und 496. Feller verwendet q_z anstelle von R und λ anstelle von L .

²⁰ Setzt man bei Feller a.a.O. S. 344 in Gleichung 2.1 q_z gleich L^C und für q_{z+m} dann L^{C+m} , so erhält man $L^C = pL^{C+m} + qL^{C-1}$. Nach Division durch L^{C-1} erhält man die Bedingung der Gleichung (7) (C. Klüppelberg, TUM). Der diskreten Verteilung des Random Walks wird im folgenden eine stetige Verteilung zugeordnet. Für Gleichung (7), (9) und (9a) erleichtert dies die Berechnungen für nicht ganzzahlige Werte. Diese Verteilungsannahme entspricht wohl auch eher den Gegebenheiten der Praxis.

²¹ Man kann für ein gegebenes p und g auch ein kritisches Verhältnis m_{cr} ableiten. Es folgt: $m_{cr} = \ln(1-0,5/p) / \ln(0,5) - 1$. Ein für $R=U$ entsprechender kritischer Verlust ist dann $v_{cr} = g/m_{cr}$.

Liegt eine proportionale Anlagestrategie vor, bei der stets gleiche Beträge b als Proportionen vom aktuellen Restkapital riskiert werden, dann sind die Zuwachs- und Schrumpfraten statt der Gewinne und Verluste in die Funktion einzusetzen. Es ergibt sich dann:

$$p_{cr} = 1/(2 - 0,5^{mx}) \quad \text{für } mx = -\mu g/\mu v, \quad mx = 1, \quad R^C = U^C \quad \text{für } C=1. \quad (9a)$$

Die Gleichung (9a) berechnet die kritische Wahrscheinlichkeit sowohl bei der Beurteilung von Aktienkursverläufen oder bei der Kontrolle von Aktienbeständen wie auch bei der Beurteilung einer proportionalen Anlagestrategie. Der Ansatz auf der Grundlage von Gleichung (9a) und in Verbindung mit Gleichung (7) sei in der Folge als geometrischer Ansatz bezeichnet. Begründet ist dies darin, dass das Vermögen bei einer Reihe von Verlusten sich wie eine geometrische Reihe vermindert. Lösungen auf der Grundlage absoluter Gewinne und Verluste seien entsprechend als arithmetischer Ansatz bezeichnet.

III Die Anzahl der möglichen Verluste bis zum Ruin oder Verlust des Anlagebetrages

Wie oben angeführt sind für die Anlageentscheidung neben den erläuterten Parametern der Kapitalstock und der jeweils anzulegende Betrag in die Überlegungen einzubeziehen. Die Höhe der anzulegenden Beträge bestimmt dabei die Anzahl n_R und Höhe der möglichen Verluste, die im „worst-case-scenario“ zum Ruin oder bei Einzelbetrachtung von Anlagen zu deren Totalverlust führen. In vergleichbarer Weise sind die Verluste berechenbar, die bei einem bestimmten Investment bis zu einer gewünschten Grenze anfallen.

Zu unterscheiden sind dabei 2 Fälle. Für eine Anlagestrategie, bei der stets Verluste in absolut gleicher Höhe anfallen (z.B. ein festes Verhältnis zum Anfangskapital oder dem investierten Betrag in eine bestimmte Anlage), ist C_n entsprechend dem Endglied einer arithmetischen Reihe:

$$\begin{array}{ll} \text{und damit} & C_n = C_k - n \cdot b C_k \quad \text{für } C_n < C_k \quad (10) \\ & n = (C_k - C_n) / b C_k \quad \text{für } C_n < C_k. \quad (11) \end{array}$$

Dabei ist C_k das k . Kapital (also zum Beispiel das Anfangskapital oder ein zwischenzeitlich erreichtes Kapital oder eine bestimmte Anlagesumme). Der Endbetrag C_n für $C_n < C_k$ ergibt sich nach n Verlusten mit dem stets gleichen Verlustbetrag b bzw. $b C_k$, wenn b ein relativer Wert und C_k eine absolute Konstante ist. Bei einer proportionalen Strategie fallen die Verluste relativ vom jeweiligen Kapitalbestand mit Verlustbetrag b (proportionale Strategie wie o.a.) an. Es ist C_n entsprechend dem Endglied einer geometrischen Reihe:

$$\begin{array}{ll} & C_n = C_k (1-b)^n \quad \text{für } C_n < C_k, \quad (12) \\ & n = \ln(C_n/C_k) / \ln(1-b) \quad \text{für } C_n < C_k \quad (13) \\ \text{bzw.} & n = \ln(C_n/C_k) / \mu v \quad \text{für } C_n < C_k. \quad (13a) \end{array}$$

C_n , kann auch als eine jeweils vom Investor zu bestimmende Grenze definiert werden, die das gesamte Kapital (oder die Anlagesumme) auf keinen Fall unterschreiten darf. Mit C_n als Konstante, z.B. „1“, und bekanntem μv ist n dann sehr leicht zu berechnen.

Für ein sehr kleines²² C_n nahe 0 ergibt sich die Anzahl der Kapitaleinheiten $C = n^\circ$ für die Ruinwahrscheinlichkeit nach Gleichung (7). Die Wahrscheinlichkeit, mit der die o.a. Grenze erreicht wird, lässt sich ebenfalls mit Gleichung (7) berechnen. Dabei gilt ebenfalls $C = n^\circ$.

Mit Hilfe dieses Zusammenhanges ist es möglich, einen zu hohen Anlagebetrag, der zu einem zu hohen Verlustbetrag b führt, zu mindern, bis die Wahrscheinlichkeit nach Gleichung (7) eine gewünschte Höchstgrenze erreicht.

Einige Beispiele mögen nun die Anwendung der dargestellten Parameter verdeutlichen.

IV Beispiele

A Berechnung der kritischen Wahrscheinlichkeit und der Ruinwahrscheinlichkeit bei einer Anlagestrategie mit LIF-Zertifikaten

Das folgende Beispiel wurde ausgewählt, da sich hier besonders anschaulich die Auswirkungen von zahlreichen Markteinschätzungen²³, darauf aufbauenden Entscheidungen und deren Folgen aufzeigen lassen. Die Komponenten und Folgen sind hier eben nur auf einen kürzeren Zeitraum zurückgeführt als es bei längerfristigen Anlageentscheidungen in der Altersvorsorge üblich ist.

In Warrants&Zertifikate²⁴ beschreibt die BNP-Paribas eine Anlagestrategie für LIF Zertifikate. LIF Zertifikate sind dabei Zertifikate auf einen Index (z.B. DAX). Mit diesen Zertifikaten kann man positive und negative Kursveränderungen mit Hebelwirkung gewinnbringend nutzen. Die Strategie geht davon aus, dass auf der Grundlage der für 3 Tage gemachten Prognosen Bull- oder Bear-Zertifikate für 3 Tage regelmäßig gekauft und verkauft werden. Eine Verbriefung der Strategie wird geprüft.

Die Zeitreihe der Kapitalveränderungen auf Seite 22 zeigt für 110 Börsentage ein Anwachsen des Anfangsbestandes des Kapitals von € 10 000 auf € 24 227. Den $n_g=61$ Gewinnfällen standen $n_v=42$ Verlustfälle gegenüber. Die Gewinnwahrscheinlichkeit $p=n_g/(n_g+n_v)$ betrug für die Vergangenheit somit $61/(61+42)$ bzw. 59,22 Prozent. Wegen einiger zwischenzeitlicher Verluste äußert sich die Redaktion jedoch vorsichtig. Sie weist darauf hin, dass man die positive Entwicklung der Ergebnisse nicht ohne weiteres fortschreiben könne.

Im folgenden soll nun geprüft werden, ob eine Anlage in diesen Zertifikaten mit der von der Bank empfohlenen Strategie erfolgen soll. Soweit Ruinwahrscheinlichkeiten berechnet werden, werden diese mit einem führenden „*“ versehen. Dies soll darauf aufmerksam machen, dass es sich bei den behandelten Lösungen methodisch zwar um Gleichungen zur Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten, tatsächlich aber um Lösungen bezüglich des möglichen Totalverlust eines bestimmten Investments handelt. Um die Unterschiede des arithmetischen und des geometrischen Ansatzes zu zeigen, werden beide dargestellt. Den Anforderungen der Praxis entspricht weitgehend wie o.a. der geometrische Ansatz.

Aus der Sicht der Zielsetzung dieser Arbeit wird man zuerst das Verhältnis der Gewinne und Verluste m_x bestimmen.

²² Da die Auflösung der Gleichung nach n_R mit Hilfe von Logarithmen erfolgt, muss C_n zwar größer als 0 aber nahe 0 sein.

²³ Zu Grunde liegt diesen hier ein kompliziertes, datenaufwendiges mathematisches Verfahren („neuronale Netze“).

²⁴ BNP Paribas (2002a, S.18 ff.)

Hierzu wird für die berichteten Kurswerte des dort jeweils vorhandenen Kapitals

$$\begin{aligned} SG &= \sum \ln(C_k/C_{k-1}) \text{ für alle } k \text{ mit } C_k > C_{k-1} \text{ für } n_g = 61 \text{ Gewinne,} \\ SV &= \sum \ln(C_k/C_{k-1}) \text{ für alle } k \text{ mit } C_k < C_{k-1} \text{ für } n_v = 42 \text{ Verluste.} \end{aligned}$$

Mit C_k statt s_k nach Gleichung (3) und (4) bestimmt. Für die Gewinne ergibt sich der Wert $SG=1,89867$ mit der Zuwachsrate $\mu_g=SG/n_g=0,03112$ und für die Verluste $SV=-1,013791$ mit der Schrumpfrate $\mu_v=SV/n_v=-0,0241378$.

Das Gewinn-Verlustverhältnis ist dann $mx=-\mu_g/\mu_v=1,289$ für den geometrischen Ansatz. Für die kritische Gewinnwahrscheinlichkeit ergibt sich daraus $p_{cr}=1/(2-0,5^{mx})=0,6285$. Die Bedenken der Redaktion sind also insoweit berechtigt, als die Gewinnwahrscheinlichkeit p für die Vergangenheit kleiner als die kritische Gewinnwahrscheinlichkeit p_{cr} war. Insoweit ist bei dieser Strategie zumindest zeitweise trotz des positiven Erwartungswertes des Ertrages mit ruinösen Tendenzen zu rechnen. Denn die Anzahl der möglichen Pfade, die den erreichten Kapitalstand unterschreiten, ist größer als die Anzahl der möglichen Pfade, die über diesem Kapitalstand verbleiben. Der jeweils zu investierende Betrag ist also möglichst niedrig zu halten²⁵. Nur dann ist die Anzahl der möglichen Verluste bis zum Totalverlust sehr hoch und damit die *Ruinwahrscheinlichkeit nach Gleichung (7) sehr niedrig oder gar 0.

Die Anzahl der wiederholten Investments nach Gleichung (13a) bis zum Totalverlust ergibt für $C_n=1$, $C_k=100$ und $\mu_v=-0,0241378$ gerundet den Wert von $n=191$. Die Ruinwahrscheinlichkeit nach Gleichung (7) ist bei einer proportionalen Strategie dann L^{191} oder 0 für $L=0,57377$. Für den arithmetischen Ansatz ergibt sich für die Anzahl der Fälle bis zu einem möglichen Totalverlust nach Gleichung (11) überschlägig $(100-1)/(0,0238 \cdot 100)=42$. Die *Ruinwahrscheinlichkeit L^{42} beträgt für $m=-(\exp(\mu_g)-1)/(\exp(\mu_v)-1)=1,3256$ und $L=0,5642$ dann $0,5642^{42}$ bzw. ca. $3,65 \cdot 10^{-11}$. Dieser Wert ist ebenfalls praktisch 0. Trotzdem muss wegen $p_{cr}>p$ zeitweise mit sehr ungünstigen Wertentwicklungen des Investments gerechnet werden.

Für den Leser mag interessant sein, dass bereits in der Folge, in Nr.9 des Magazins²⁶, berichtet wird, dass zwischenzeitlich erhebliche Verluste entstanden sind. Das Investmentkapital hat sich danach von € 30241 am 6.8.2002 um zirka 12 Prozent auf € 26632 am 29.8.2002 vermindert. Für den Zeitraum vom 23.7.02 bis 29.8.02 zeigt sich für die Strategie wegen der geringen Gewinnwahrscheinlichkeit von $p=0,54$ eine *Ruinwahrscheinlichkeit von fast 1.

Nun ist ein Abfall des Vermögenswertes für dieses Investment von z.B. 30241 auf 26632 um ca. 12 Prozent mit relativ hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten. Der Leser möge sich hierzu einen Random-Walk wie o.a. vorstellen. Die angenommene „Nulllinie“ sei bei 26632 und der Verlust betrage bei Verwendung eines arithmetischen Ansatzes für $\exp(\mu_v)-1$ durchschnittlich ca. 2,38 Prozent von 30241 oder absolut 720. Bei einer Differenz von $30241-26632=3609$ sind somit ca. $3609/720=5$ Verluste bis zur „Nulllinie“ möglich. Die *Ruinwahrscheinlichkeit für eine Einheit betrage wie o.a. $L=0,5462$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert des Kapitals von 100 auf 88 oder von 30241 auf 26632 fällt, ist dann ca. L^5 bzw. $0,5462^5=5,72$ Prozent.

²⁵ Durch Verlustbegrenzung kann m auf m_{cr} erhöht und das erforderliche p_{cr} vermindert werden, so dass das Investment keine latente Ruinentendenz mehr aufweist. Zur Bestimmung des Erwartungswertes der Verlustbegrenzung auf den kritischen Verlust v_{cr} bei gegebenem p und g vergl. Fußnote 21.

²⁶ BNP Paribas (2002b), S.24

Das heißt, in fast 1 von 18 Fällen vermindert sich das Kapital von 100 Prozent auf 88 Prozent oder tiefer.

Wird der geometrische Ansatz gewählt, dann sehen die Ergebnisse ähnlich aus. Die Anzahl der Verluste berechnet sich dann aus Gleichung (13a) mit:

$$n^{\circ} = \ln(26632/30241) / (-2,41378/100) = 5,264.$$

Die Ruinwahrscheinlichkeit für $m_x = \mu_g / \mu_v$ ist für eine Einheit $L = 0,57377$. Für den gegebenen Fall folgt gerundet $R = L^{5,264} = 5,4$ Prozent. Das heißt, auch bei dieser Annahme muss in 1 von etwas über 18 Fällen mit einer Wertermäßigung des Investments auf 88 Prozent oder tiefer gerechnet werden.

Im Heft 10 auf Seite 20 f. zeigt die BNP bis zum 27.9.2002 schließlich einen weiteren Abfall des Kapitals auf 22937 €.

Hier wird nun die Bedeutung klar, die einer Strategie auf der Grundlage der kritischen Wahrscheinlichkeit zukommt. Obwohl diese mit $p_{cr} = 0,624$ für den absoluten Fall nur etwa 3 Punkte über der tatsächlichen Gewinnwahrscheinlichkeit von $p = 0,592$ liegt, ergäbe sich für L definiert der Wert 0,5 und für L^5 der Wert 3,125 Prozent. Dies bedeutet, dass der Verlust um 12 Prozent nur in 1 von 32 Fällen gegenüber den o.a. 1 von 18 Fällen sich ereignete, wenn es gelingt, die Prognose entsprechend zu verbessern. Aktionsparameter wären dabei das Gewinn/Verlust-Verhältnis und/oder die Zahl der günstigen Ereignisse²³ (Gewinne).

Durch eine Kopie des Bildschirm-Ausdrucks kann der Leser die Vorgehensweise anhand konkreter Daten nachvollziehen. Das Beispiel beschränkt sich dabei auf 11 Ereignisse (10 Relationen der Kursveränderungen):

Datei? lifdat

Anzahl zu berechnender Zeilen? 10

Daten:

28055 28439 28432 28933 28544 29514 29494

28855 28175 28509 26632

Summen $\ln(C_i/C_{i-1})$ SG;SV = 0,07626488 -1,283184

$\mu_g = 0,01906622$ $n_g = 4$ $E(g_r) = 0,01924908$

$\mu_v = -0,0213864$ $n_v = 6$ $E(v_r) = -0,0215935$

Gewinn, Verlustwahrscheinlichkeit = .4 .6

μ_g / μ_v und $g_r / v_r = .8915112 .9097199$

kritische Wahrscheinlichkeit geom. pcr, arithm. pc = .6844858 .6813328

optimale Anlage b1 und b2: .3310412 -1,09919

optimales Investment I(b) x-faches vom Kapital = 0

*Ruinwahrscheinlichkeit erste Einheit geom., arithm. = .9999975 .9999973

Die Daten des Ausdrucks sprechen für sich.

Der Literatur²⁷ zufolge sind die betrachteten Zeiträume dieses Beispiels für die Beurteilung nicht optimal. Daher können die berechneten Werte ggf. zu irrtümlichen Schlussfolgerungen führen. Die Berechnungen sollten daher besser auf der Grundlage der für Momentumstrategie

²⁷ Vgl. Scholtz 2002a, 2002 b und 2002c zu den optimalen Zeiträumen bei Momentumstrategien.

gien als besonders geeigneten Periodenlängen erfolgen. Auch die Berechnung von Autokorrelationen zur Bestimmung der optimalen Periodenlängen wäre in Betracht zu ziehen.

B Analyse der Kursdaten des DAX

Um die Eignung des Ansatzes auch für andere Daten zu überprüfen, hat der Autor für einen zufällig ausgewählten Zeitraum der Jahre 1998/99 die Kursdaten des DAX analysiert. Über der kritischen Wahrscheinlichkeit²⁸ eines 64-Tageszeitraumes lagen die Kurse von Mannesmann und Preussag. Deutlich darunter lagen MAN, RWE, SAP, VEBA und VIAG. Mannesmann und Preussag entwickelten sich in den nächsten 36 Tagen, wie auf Grund der niedrigen *Ruinwahrscheinlichkeit erwartet, mit 8 bis 10 Prozent Steigerung positiv. Die Kursentwicklungen von RWE, SAP, VEBA und VIAG waren erwartungsgemäß negativ. MAN dagegen schlug entgegen der Erwartung eine fünfprozentige Gegenrichtung ein. Auf längere Sicht waren alle Aktien außer SAP positiv. Die Aktien mit hohen *Ruinwahrscheinlichkeiten oder deutlich zu geringen Gewinnwahrscheinlichkeiten im Vergleich zur kritischen Wahrscheinlichkeit wiesen jedoch auch ein geringeres Wachstum in der Zukunft auf. MMW und PRS legten dagegen jeweils rund 22 Prozent in den folgenden 64 Tagen zu. SAP ermäßigte sich um ca. 18 Prozent. Nun sind weder der Untersuchungszeitraum noch die Aktienausswahl als Bestätigung des Ansatzes besonders geeignet. Trotzdem zeigen die Ergebnisse, dass das verwandte Auswahlverfahren für die untersuchten Fälle eine deutliche Eignung für Momentumstrategien²⁹ aufweist.

V Schlussfolgerungen

Grundsätzlich scheint die Berechnung einer kritischen Wahrscheinlichkeit und die Verwendung der Formeln zur Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit bei der Beurteilung von Investments sowie zur fortlaufenden Kontrolle von Anlagen zur Alterssicherung geeignet. Begründet ist dies in der Tatsache, dass, im Vergleich zu den in der Literatur veröffentlichten, beide Maße als einzige objektivierbare Daten liefern, und dass damit bei Anlagen zur Alterssicherung eine latente Ruinentendenz systemimmanent ausgeschlossen werden kann. Die subjektive Vorgabe irgendwelcher Höchstgrenzen für die Ruinwahrscheinlichkeit ist somit überflüssig. Voraussetzung ist - wie bei allen erörterten Methoden - jedoch, dass die Zeiträume für die Datengrundlagen repräsentativ sind. Eine Möglichkeit zur Ermittlung repräsentativer Zeiträume wird in den wissenschaftlichen Untersuchungen zu Momentumstrategien gesehen. Eine aktuelle Quelle stellen naturgemäß auch eigene Untersuchungen des autokorrelativen Verhaltens der Zeitreihen und die Bestimmung optimaler lag-Beziehungen dar.

Im übrigen bietet es sich an, die kritische Wahrscheinlichkeit oder die Ruinwahrscheinlichkeit als wesentliche Parameter einer gewinnmaximierenden Strategie zu verwenden. Eine solche Strategie könnte gleichzeitig das Risiko minimieren und einen Ruin bzw. Totalverlust von Investments systemimmanent vermeiden. Hierauf soll zu gegebener Zeit daher ausführlich eingegangen werden.

Zusammenfassung

Um bei Entscheidungen über Anlagen zur Alterssicherung das Risiko von Verlusten zu mindern, wird die Eignung von Risikomaßen erörtert. Die Verwendung von Ruinwahrscheinlichkeiten und insbesondere von „kritischen Wahrscheinlichkeiten“ scheint dabei entscheidende

²⁸ Auf der Grundlage von m_x , vgl. Gleichung (7)

²⁹ Scholtz 2002 b

Vorzüge zu haben. Grund ist, dass der Ansatz bei identisch verteilten Ereignissen frei von weiteren subjektiven Annahmen hinsichtlich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen und irgendwelchen Sicherheitsniveaus ist. Als kritische Wahrscheinlichkeit wird hierbei jene Wahrscheinlichkeit der erwarteten Gewinne bezeichnet, bei der für einen eventuell zu erwartenden Verlust ein Gleichgewicht zwischen Ruinwahrscheinlichkeit und Überlebenswahrscheinlichkeit besteht.

Summary

An important result of this approach is, that a strategy with a probability of gains less than the “critical probability”, results in a tendency of ruin. The “critical probability” depends on the gain/loss ratio of expected gains and losses. It is defined by a cut-off point, where the marginal probability of survival equals the marginal probability of ruin. A simple calculation of this cut-off- point is shown.

Literatur

- Bamberg, G., A.G.Coenberg (1989), Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre.
- Baumol, W. J. (1963), An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection. *Management Science*, S. 174-184
- Bernoulli, D. (1738), Exposition of a new theory on the management of risk. Repr. *Econometrica*, 1954, S. 65-86.
- BNP Paribas (Hrsg.) (2002a), Strategietest mit LIF-Zertifikaten - der Weg zum Trading-System. *Monatsmagazin Warrants&Zertifikate*, Nr.8, S. 18-22.
- (2002b), Strategietest mit LIF-Zertifikaten - der vergangene Monat. *Monatsmagazin ...* Nr.9, S. 24.
- (2002c), Strategietest mit LIF-Zertifikaten – starke Verluste beim Markteinbruch. *Monatsmagazin...Nr.10.*, S. 20-22
- Breiman, L. (1960), Optimal gambling systems for favorable games. *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability*, University of California Press, Berkeley, CA, 1, S. 65-78.
- Bruns, Ch., F. Meyer-Bullerdiek (1996), *Professionelles Portfolio-Management*.
- Dubins, L. E., L. J. Savage (1965), How to gamble if you must.
- (1976), *Inequalities for stochastic processes*. Dover Publications.
- Feller, W. (1968), *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I and II, (3.rd ed.).
- Ferguson, T. S. (1965), Betting systems which minimize the probability of ruin. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 13, S. 795-818.
- Finetti, Bruno de (1980), *Wahrscheinlichkeitstheorie*.
- Friedman, M., L. J. Savage (1952), The expected utility hypothesis and the measurability of utility. *Journal of Political Economy* 60, S. 463-74.
- Hakansson, N. (1971), Capital growth and the mean variance approach to portfolio selection. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, S. 517-557.
- Hipp, Ch., R. Michel (1990), *Risikotheorie:Stochastische Modelle und Statistische Methoden*.
- Kelly jr., J. L. (1956), A new interpretation of information rate. *Bell System Technical Journal*, 35, S. 917-926.
- Latané, H. A. (1959), Criteria for choice among risky ventures. *Journal of Political Economy*, S. 144-155.
- Markowitz, H. M. (1959), *Portfolio Selection*.
- Packel, E. (1981), *The mathematics of games and gambling*.
- Roberts, F. S. (1976), *Discrete mathematical models*.
- Rüger, B. (1985), *Induktive Statistik*.
- Samuelson, P. A. (1974), The falacy of maximizing the geometric mean in long sequences of investing or gambling. In: Bicksler and Samuelson 1974: *Investment portfolio decision making*, S. 271-280.
- Schneeweiß, H. (1967), *Entscheidungskriterien bei Risiko*.
- Scholtz, H. D. (1990), Maximierung des Endvermögens bei Ausschluß des Ruins. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, S. 685-704.
- (2002 a), Die optimale Optionsstrategie bei unabhängigen Ertragsentwicklungen. *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, S. 70-77.
- (2002 b), Risikominderung durch eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung. *Die Rentenversicherung*, Nr. 6, S. 101-107.

- (2002c), Eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung bei abhängigen Ertragsentwicklungen. Die Rentenversicherung, Nr.10, S. 165-170
- Steiner, M., Ch. Bruns (1996), Wertpapiermanagement, 6. Auflage
- Teweles, R. J. et al (1976), The commodity futures game.
- Thorp, E. (1971), Portfolio choice and the Kelly criterion. Business and Economic Statistics Section of Proceedings of the American Statistical Association., S. 253-270.
- Tobin, J. (1958), Liquidity preferences as behaviour towards risk. Review of Economic Studies, 1, S. 65-86.
- Vince, R.(1992), The mathematics of money management.