

Scholtz, Hellmut D.

Article — Accepted Manuscript (Postprint)

Strategie zur Maximierung des Endvermögens bei Meidung des Ruins - Ein geeigneter Ansatz bei Anlagen zur Alterssicherung?

Die Rentenversicherung

Suggested Citation: Scholtz, Hellmut D. (2003) : Strategie zur Maximierung des Endvermögens bei Meidung des Ruins - Ein geeigneter Ansatz bei Anlagen zur Alterssicherung?, Die Rentenversicherung, ISSN 0340-5753, Asgard-Verlag Dr. Werner Hippe GmbH, Sankt Augustin, Vol. 44, Iss. 5, pp. 81-88

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/90158>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Strategie zur Maximierung des Endvermögens bei Meidung des Ruins

Ein geeigneter Ansatz bei Anlagen zur Alterssicherung?

Hellmut D. Scholtz, Soonwaldstr. 13, 55566 Bad Sobernheim, Tel. 06751 989096

In: Die Rentenversicherung 2003, Nr. 5, S. 81-88

Abstrakt

Eine Folge von rentabel eingeschätzten Investments zur Altersvorsorge beinhaltet selbst dann ein vergleichsweise hohes Ruinrisiko, wenn eine an sich „günstige“ Wahrscheinlichkeit der Gewinne geringer ist als ein berechenbarer kritischer Wert. Das Ruinrisiko ist ebenfalls beträchtlich, wenn die Anlagebeträge eine definierte kritische Betragshöhe überschreiten.

Der folgende Ansatz zeigt die Komponenten und Lösungswege auf, die für eine Maximierung des Endvermögens bei gleichzeitigem Ausschluss eines Ruins erforderlich sind. Einige Beispiele zeigen die einfache Anwendung des Ansatzes.

I Problemstellung

In der Literatur werden an vielen Stellen Anlagekonzepte zur Steigerung des Ertrags bei gleichzeitiger Minimierung des Ruinrisikos gezeigt. Die Erörterungen zeigen, dass dieses Thema der Risikooptimierung theoretisch sehr schwierig ist. Es beschäftigt daher die Wissenschaftler seit mehreren Jahrhunderten¹.

Von den vielen Autoren, die sich mit der Optimierung aus objektivistischer Sicht befassten, seien an dieser Stelle insbesondere Kelly (1956), Latané(1959), Breimann (1960), Hakansson (1971), Dubins & Savage² (1961, 1976) erwähnt. Nach deren Grundsätzen führt jene „proportionale Strategie“ zu einem maximalen Endvermögen, die bei wiederholten Investments relative Beträge b bestimmter Höhe vom jeweils verfügbaren Kapital riskiert. Ein Ruin ist bei solchem Vorgehen definitiv ausgeschlossen. Allerdings weisen diese Strategien eine latente Ruintendenz auf. Grund hierfür ist, dass deren Ansatz auch dann zu einem Investment führt, wenn die Gewinnwahrscheinlichkeit zwar größer als 0,5 aber kleiner als die kritische Wahrscheinlichkeit³ ist. Außerdem verstärkt sich dort die Ruintendenz durch eine zu reichlich bemessene Höhe der Anlagebeträge.

Der im folgenden aufgezeigte Lösungsweg führt im Gegensatz zu den bisherigen Arbeiten zu völlig anderen Höhen der Risikobeträge b . Der methodische Weg ist für diese Problematik neu.

II. Beitrag dieses Ansatzes zur Problemlösung

Ziel des unten abgeleiteten Ansatzes ist es, die Höhe des relativen Einsatzbetrages b vom jeweiligen Restkapital bei einer Serie von Investments derart zu bestimmen, dass sich für einen Anwender nach **objektiven** Kriterien eine maximaler Endbetrag des Vermögens bzw.

¹ D. Bernoulli 1738. Auf einige weitere Ansätze, Lösungsvorschläge und Probleme hat der Autor in „Die Rentenversicherung“, 2002, Nr.11, S. 201 f., ausführlich hingewiesen. Die Kenntnis dieser Abhandlung wird im folgenden vorausgesetzt.

² Insbesondere Dubins&Savage 1976, S. 192 ff.

³ Als „kritische Wahrscheinlichkeit“ wird hier für einen Random Walk, mit Anfangskapital von einer Einheit, jene Wahrscheinlichkeit $p > 0,5$ des Gewinnes bezeichnet, bei der bei langfristiger Betrachtung die Wahrscheinlichkeit R des Verlustes dieser einen Einheit 50 Prozent beträgt. (Scholtz 2002 d, S. 203). Ist die erwartete Wahrscheinlichkeit niedriger als die kritische, dann liegt eine latente Ruintendenz vor.

Portfolios ergibt. Dabei sollen gleichzeitig und tendenziell hohe zwischenzeitliche Verluste und ein eventueller Ruin vermieden werden.

Hierfür wird einleitend am Beispiel der Ansätze von Kelly und Dubins&Savage die Bedeutung der Marginalanalyse für eine optimale Strategie gezeigt. Darauf aufbauend erfolgt die vom Autor konzipierte Ableitung der Grundlagen. Die Anpassung an die praktischen Marktgegebenheiten und einige Beispiele ermöglichen schließlich dem Anwender die praktische Umsetzung des Ansatzes. Wie bei Dubins&Savage wird im folgenden von einer „proportionalen Strategie“ als beste Grundlage einer zu optimierenden Strategie ausgegangen.

III. Der Kelly-Ansatz als Grundlage marginaler Betrachtungen zur Maximierung des Endvermögens

A Bestimmung des Vermögensendwertes und des optimalen Risikobetrages

Der Vermögensendwert C_n berechnet sich nach Kelly, Dubins&Savage und anderen wie folgt:

$$C_n = C_1 (1+b)^{n_g} (1-b)^{n_v} . \quad (1)$$

Hierbei sind n_g die Anzahl der Gewinne, n_v die Anzahl der Verluste, $n = n_g + n_v$, und b ein absoluter Bruchteil vom jeweiligen Restbetrag des Kapitals C_i , $i = 1 \dots n$. Nun entsprechen die Gewinne g nicht immer der Höhe der Verluste v . Man kann daher den Betrag b im Gewinnterm $(1+b)^{n_g}$ mit $m = g/v$ multiplizieren. Dadurch erhält man das Vielfache des im folgenden mit Risikobetrag bezeichneten b . In jedem Geschäftsfall erzielt der Anleger somit einen Gewinn⁴ mb oder erleidet einen Verlust b , den Risikobetrag, jeweils als Bruchteil vom vorhergehenden Restkapital. Um den optimalen Risikobetrag b berechnen zu können, ist diese Gleichung zu differenzieren. Es bietet sich an, in der Gleichung den Wert C_1 vorab gleich 1 zu setzen, n_g und n_v durch n zu teilen und die Gleichung zu logarithmieren. Für n_g/n erhält man die Wahrscheinlichkeit der Gewinne p und für n_v/n dann die Wahrscheinlichkeit der Verluste q mit $p+q=1$. Durch die Umformungen ändert sich der Wert des gesuchten optimalen b nicht. Die Differentiation und die abzuleitenden Schlussfolgerungen werden aber wesentlich erleichtert.

Die für weitere Berechnungen zu optimierende Funktion lautet somit für $C_1=1$, $g=mb$:

$$\ln(C_n) = p \ln(1+mb) + q \ln(1-b). \quad (2)$$

Nach Differentiation und Nullsetzung der linken Seite erhält man dann :

$$0 = mp/(1+mb) + q/(1-b) \quad (3)$$

mit dem Grenzertrag $GE = g' = mp/(1+mb)$ und dem Grenzverlust, den Grenzkosten, $GK = v' = q/(1-b)$. Eine Auflösung der Gleichung (3) nach b ergibt, dass zur Erreichung eines maximalen Endvermögens jeweils ein Betrag $b = p \cdot q / m$ zu riskieren ist. Auf dieser Grundlage soll nun der Ansatz von Kelly und Dubins&Savage weiter analysiert werden.

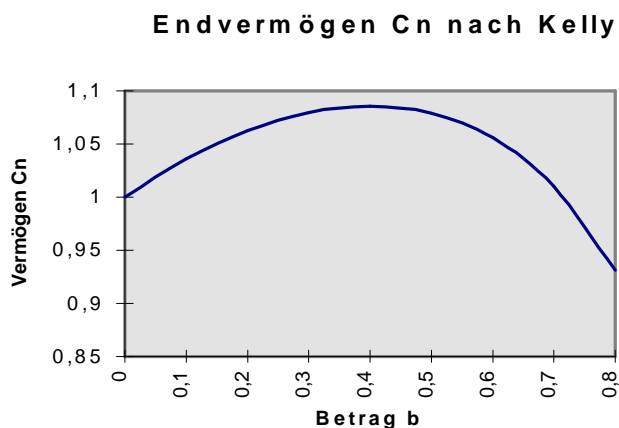
⁴ Dieses mb ist weder im Ansatz von Kelly noch in dieser Form bei Dubins&Savage enthalten.

B Analyse des Ansatzes von Kelly und Dubins&Savage

Die Abbildung 1 zeigt für $m=1$ und $C_1=1$ den Erwartungswert des Endvermögens C_n in der Senkrechten und den jeweils zu riskierenden Risikobetrag b in der Waagerechten. Sie gibt komparativ statisch die Erwartungswerte des Endvermögens C_n in Abhängigkeit unterschiedlicher Risikobeträge b für eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $p=0,7$ wieder.

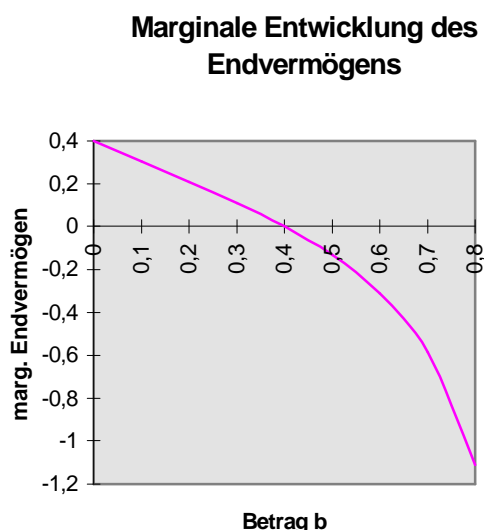
Bei einem Betrag $b=0$ verändert sich das Anfangsvermögen $C_1=1$ überhaupt nicht. Mit zunehmendem Risikobetrag b wächst der Erwartungswert des Endvermögens C_n an. Bei $b = 0,4$, also bei Einsätzen von jeweils 40 Prozent des Restkapitals, erreicht der Erwartungswert

Abbildung 1



des Vermögens ein Maximum. Überschreitet der Betrag b diesen Wert, dann ist das zu erwartende Endvermögen kleiner als das Maximum. Schließlich, bei zu großen b je Geschäftsfall, nimmt das zu erwartende Endvermögen sogar ab. Bei $b=1$ wird es null (hier nicht gezeigt).

Abbildung 2



In der Abbildung 2 ist anschaulich aufgezeigt, dass mit jeder zusätzlichen, sehr kleinen Einheit⁵ db von b das erwartete Endvermögen C_n sich mit jeweils abnehmenden dC_n erhöht. Erweitert

⁵ Der Buchstabe d vor b und C_n bedeutet, dass es sich um unendlich kleine Veränderungen (Differenzen) der jeweiligen b und C_n handelt.

man jedoch b über 0,4 hinaus, dann sind die Grenzerträge dC_n negativ, und das maximale Endvermögen C_n nimmt wieder ab. Der berechnete Betrag b entspricht hier $p-q/m=0,4$.

Die aufgezeigte Abhängigkeit zwischen marginalem Zuwachs des Endvermögens dC_n und der Erhöhung von b um jeweils db stellt auch die Grundlage für die folgende Erörterung des Risikos dar.

IV. Vermögensendwertmaximierung bei gleichzeitiger Meidung von Ruintendenzen

A Die Formulierung des Optimierungsansatzes unter Berücksichtigung der kritischen Wahrscheinlichkeit

Als kritische Wahrscheinlichkeit⁶ p_{cr} wird jene Wahrscheinlichkeit p des Gewinns bezeichnet, bei der 50 Prozent aller möglichen 2^n Gewinn-Verlustkombinationen einer Anfangseinheit keinerlei Verlust aufweisen. Dies entspricht einer Gleichheit von marginaler Ruinwahrscheinlichkeit R' und marginaler Überlebenswahrscheinlichkeit U' ($R=U$ für eine sehr kleine Einheit). Es ist:

$$p_{cr}=1/(2-0,5^m) \quad \text{für } m \geq 1; \quad q_{cr}=1-p_{cr}; \quad U' = R' \quad . \quad (4)$$

Auf dieser Grundlage sei die Zielgleichung⁷ des folgenden Ansatzes formuliert:

$$\text{Maximiere } C_n=(1+mb)^p (1-b)^h ! \quad \text{für } p \geq p_{cr} \quad (5)$$

mit den Nebenbedingungen, dass, für $U' = R'$, Grenzerlöse gleich ein zu berechnendes Mehrfaches der Grenzkosten GK. Es ergeben sich dann für den unbekanntem Exponenten h des Verlustterms der Gleichung (5) für den:

Einzelfall: $g' = a v'$, also: $h=aq$ mit $a=mp_{cr}/q_{cr}$, (6)

totalen Anlageprozess: $h=mp/a$ mit $a=mp_{cr}/q_{cr}$. (7)

B Erläuterung der Nebenbedingungen

1. Die Bedeutung von Grenzerlösen GE und Grenzkosten GK im Einzelfall

a Das kritische Verhältnis „a“ der Grenzkosten und Grenzerlöse

Zuerst wird als Grundlage für die weiteren Ableitungen für $m=1$ ein **kritisches** Verhältnis $a=p_{cr}/q_{cr}$ von kritischer Gewinnwahrscheinlichkeit p_{cr} zu kritischer Verlustwahrscheinlichkeit q_{cr} bestimmt. Bei diesem macht die Anzahl der möglichen Pfade des Random Walks der **ersten** Einheit db , die an der Nulllinie enden oder diese kreuzen, definitorisch ebenfalls grade 50

⁶ Zur Ableitung und Bedeutung der kritischen Wahrscheinlichkeit vgl. Scholtz 2002 d, S. 205

⁷ für $m=g/v$ wird einheitlich von dem arithmetischen Ansatz für a und p_{cr} ausgegangen, da bei marginalen Betrachtungen für sehr kleine db die Ergebnisse des geometrischen und arithmetischen Ansatzes konvergieren.

Prozent aus. Die verbleibende Überlebenswahrscheinlichkeit U ist dann ebenfalls 50 Prozent. Die Summe von U und R ergibt 1. Es gilt nach Transformation der Gleichung (4):

$$a=1/(1-0,5^m) \quad \text{für } m=1. \quad (8)$$

Das **kritische** Verhältnis a der Wahrscheinlichkeiten entspricht im Random Walk auch dem **kritischen Mengen**verhältnis von Gewinnen und Verlusten, bei denen 50 Prozent aller möglichen Pfade an der Nulllinie enden oder diese kreuzen⁸. Denn nach p Gewinnfällen und q Verlustfällen von je **einer** Einheit db betragen die Summe der Gewinne p Einheiten db , die der Verluste q Einheiten db und der Nettogewinn $p-q$ Einheiten db . Das **Verhältnis** der **Gewinne** zu den **Verlusten** beträgt dann - wie bei a für die kritischen Werte - **ebenfalls** p_{cr}/q_{cr} .

Es besteht also für das Gleichgewicht der marginalen Wahrscheinlichkeiten von Ruin und Überleben eine Äquivalenz zwischen dem kritischen Verhältnis der Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit und dem kritischen Mengenverhältnis der Gewinne und Verluste. Dieser Sachverhalt ist für die folgenden Überlegungen grundlegend.

b Der Vergleich von Grenzerlösen GE und erweiterten Grenzkosten aGK

Für die Bestimmung des optimalen Risikobetrages b wird für $p > p_{cr}$ in $i = 1 \dots n$ Schritten geprüft, ob eine zusätzliche Erhöhung des Betrages b um jeweils **ein** db_i , für gewinnbringende, risikobehaftete Einsätze je Einheit eine marginale Überlebenswahrscheinlichkeit aufweist, die größer ist als die marginale Ruinwahrscheinlichkeit. Entspricht die Änderung des Erwartungswertes des **Endkapitals** dC_n im i . Schritt im Verhältnis zu db_i , also dC_n/db_i , dem Verhältnis von $a = p_{cr}/q_{cr}$ des i . Schrittes, dann ist das Optimum von b erreicht. Denn a spiegelt dann auch wie oben gezeigt das kritische Mengenverhältnis dC_n/db_i wider.

Bei dem schrittweisen Hinzufügen von unendlich kleinen Einheiten db_i steigt der Erwartungswert des **Endkapitals** C_n um jeweils dC_n Einheiten an. Das Verhältnis dC_n/db_i ist dabei anfangs größer als a . Bei der letzten i . Erhöhung um den Teilbetrag db_i besteht Gleichheit zwischen a und dC_n/db_i und definitorisch Gleichheit zwischen marginaler Ruinwahrscheinlichkeit und marginaler Überlebenswahrscheinlichkeit.

Da hier die Wahrscheinlichkeiten des Ruins und des Überlebens sich auf unendlich kleine Teilbeträge db_i von b je i . Schritt beziehen, kann man diese Wahrscheinlichkeiten als **marginale** Ruinwahrscheinlichkeiten R' und **marginale** Überlebenswahrscheinlichkeiten U' , mit $R' + U' = 1$, bezeichnen.

Da alle db_i für $i < n$ ein größeres U'_i als R'_i aufweisen, hat eine Strategie mit solchen Einsätzen b , die sich aus der Summe aller db_i ergeben, eine **systemimmanente Überlebenswahrscheinlichkeit** größer als die Ruinwahrscheinlichkeit. Denn eine Tendenz zum Ruin wird systematisch gemieden, das Gewinnwachstum jedoch maximiert. Die Annahme einer höchstens zulässigen Ruinwahrscheinlichkeit ist damit – entgegen den Annahmen vieler Experten – für eine Meidung des Ruins nicht erforderlich.

In diesem Zusammenhang sei daran erinnert, dass der jeweilige Risikobetrag b aus der Summe einer optimalen Menge von db_i besteht. Im Gewinnfall wird z.B. bei $m=1$ mit

⁸ Gewinnfälle und Verlustfälle hier im Sinne von „günstigen“ Schritten, weg von der Nulllinie des Random Walks, und „ungünstigen“ Schritten, hin zur Nulllinie.

Wahrscheinlichkeit p ein ganzes b dazu gewonnen. Im Verlustfall geht ein ganzes b mit Wahrscheinlichkeit q verloren. Der gesamte Optimierungsprozess führt dann zu einer Folge von Einsätzen mit optimaler Anzahl solcher Einheiten b , bei denen je Einsatz das marginale Rufrisiko durch $dC_n/db_n = a$ mit der marginalen Überlebenswahrscheinlichkeit im Gleichgewicht ist.

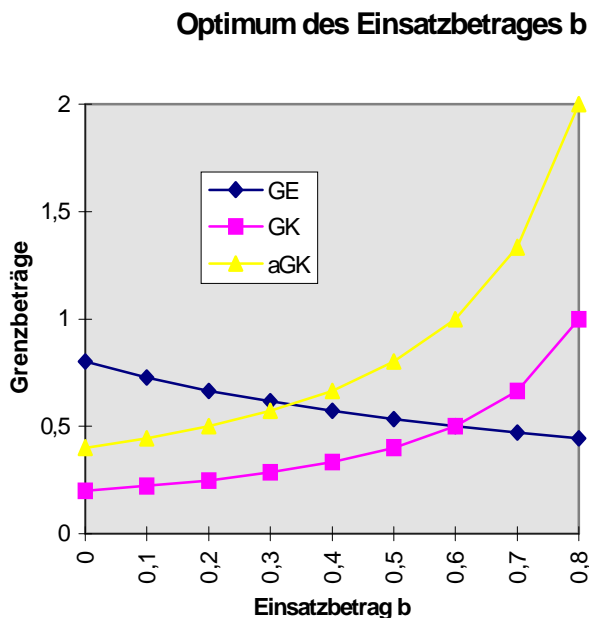
c Grafische Darstellung des Optimierungsansatzes

Eine grafische Darstellung soll den Zusammenhang noch verdeutlichen.

In Abbildung 3 sind drei Funktionen auf der Grundlage der Gleichung (3) wiedergegeben: Die Grenzerlöse $GE = mp/(1+mb)$, die Grenzkosten $GK = q/(1-b)$ und die für das Überleben erforderlichen aGK . Die Abbildung zeigt komparativ statisch die Einflüsse einer Änderung der Risikobeträge db_i von b mit der Gewinnwahrscheinlichkeit $p=0,8$ und $q=1-p=0,2$ für $g=v$, also $m=g/v=1$. Grenzkosten GK und aGK sind mit ihrem **absoluten** Wert angegeben. Die Differenz $GE-GK$ bzw. $GE-aGK$ repräsentiert dabei den marginalen Zuwachs dC_n des Endvermögens.

Es ist ohne weiteres erkennbar, dass die Grenzerlöse GE , $mp/(1+mb)$, mit wachsendem b fallen. Denn der Nenner wird immer größer und $mp/(1+mb)$ stets kleiner. Die Grenzkosten GK steigen mit größer werdendem b dagegen rapide an, da der Nenner in GK , $q/(1-b)$, immer kleiner wird. Bei $b=1$ ist der Ausdruck sogar unendlich.

Abbildung 3



Der Grenzerlös GE liegt bei $b=0$ deutlich über den Grenzkosten GK . Setzt man nun zusätzliche Kapitaleinheiten db_i ein, dann nimmt der Grenzerlös GE mit steigender Anzahl unendlich kleiner Anteile db_i von b immer mehr ab, während die Grenzkosten immer mehr ansteigen. Bei $b=0,6$, ohne Berücksichtigung der Ruinwahrscheinlichkeit, erhalte man das maximale Endvermögen C_n an jenem Punkt, an dem der Grenzerlös GE grade den Grenzkosten GK ist. Denn dort ist, vergleichbar der Abbildung 2, $dC_n = GE - GK = 0$. Ein weiterer Einsatz von kleinen Einheiten db_i würde zu einem Abfall des vorher erreichten

Vermögens führen. Denn die Grenzkosten GK dieser Anteile von b liegen über den Grenzerlösen GE und zehren somit einen Teil des vorher erreichten Vermögens auf. Dieser Punkt $b=0,6$ entspricht den Ansätzen von Kelly etc., da hier $p-q/m=0,8-0,2$ bzw. $p-q=0,6$.

Die zur Ruinvermeidung erforderlichen Grenzkosten sind aGK . Der Grenzerlös GE liegt bei $b=0$ wiederum über den Grenzkosten aGK . Im Punkt $b=0,33$ erreicht der Grenzerlös dann die aGK , die für $m=1$ hier mit $a=1/(1-0,5)$ das absolut Doppelte der einfachen Grenzkosten GK ausmachen. Da der Grenzerlös an dem Punkt $b=0,33$ ebenfalls das Doppelte bzw. a fache der einfachen Grenzkosten GK ausmacht, ergibt sich hier komparativ statisch der maximale Erwartungswert C_n des Endvermögens. Das Maximum wird erreicht mit Risikoeinsätzen b , bei denen definitiv die Überlebenswahrscheinlichkeit U' grade der Ruinwahrscheinlichkeit R' für einen marginalen Betrag von b entspricht. Denn es ist $GE=aGK$ bzw. $dC_n=GE-aGK=0$.

Zwischen dem Punkt 0,33 und 0,6 machen die Grenzerlöse GE weniger als das Doppelte oder a fache der Grenzkosten GK aus. Diese Anteile von b zwischen 0,33 und 0,6 bei den Einsätzen auf der Basis des Kelly- Kriteriums beinhalten insoweit Wahrscheinlichkeiten von R' größer als U' . Sie ergeben die in der Problemdarstellung oben aufgezeigte Ruintendenz jener Ansätze. Die marginalen Anteile von b , die links von 0,33 liegen, haben in Richtung 0 dagegen eine zunehmende über R' liegende marginale Überlebenswahrscheinlichkeit U' .

Zusammenfassend kann man sagen, dass Einsatzbeträge b in Höhe links von 0,33 durchgehend eine marginale Überlebenswahrscheinlichkeit größer als die marginale Ruinwahrscheinlichkeit aufweisen. Sie führen insoweit bei einer sehr großen Anzahl von Einsätzen zu „unendlichem“ Wohlstand. Einsätze b in Höhe rechts von 0,33 beinhalten dagegen eine Ruinkomponente mit marginalen Ruinwahrscheinlichkeiten größer als die marginalen Überlebenswahrscheinlichkeit. Dadurch führen sie tendenziell zum Ruin.

Ist $m>1$, dann wird das Optimum nur erreicht, wenn a mit $m=g/v$ multipliziert wird. Daraus folgt:

$$a=m/(1-0.5^m) \quad \text{für } m \geq 1. \quad (8a)$$

Im folgenden soll die Nebenbedingung (7) für den totalen Anlageprozess erörtert werden.

2. Der GE/aGK-Vergleich für den totalen Anlageprozess

Bei der Verwendung der Bedingungen (6) und (7) ist zu beachten, dass oben die schrittweise Erhöhung von b um db_i auf einer **Mengen**annahme beruhte. Diese Mengenannahmen können sich nun auf den **Einzel**fall beziehen. Das heißt in die Betrachtung wären die marginalen Gewinne und marginalen Verluste **eines** Handels (trade) für sich auf den Erwartungswert des Vermögens des Einzelfalls zu berücksichtigen (Nebenbedingung (6)). Die Mengenannahme kann sich aber auch auf den ganzen zukünftigen Anlageprozess und damit die Veränderung des **Gesamt**vermögens (Nebenbedingung (7)) erstrecken. Das heißt, es wären das Verhältnis der Summe aller Gewinne zu der Summe aller Verluste zu beachten. Ist nämlich im zukünftigen Anlageprozess deren Verhältnis niedriger als die kritische Größe p_{cr}/q_{cr} , dann gibt es im Vergleich zu allen möglichen Kombinationen mehr als 50 Prozent an Kombinationen von Verlusten und Gewinnen, die für das Gesamtkapital tendenziell zu einem Ruin führen können.

Um diese ruinöse Tendenz zu eliminieren, müssen die zukünftigen Gewinne mindestens das **a** fache der zukünftigen Verluste nach Gleichung (8) bzw. **a/m** fache nach Gleichung⁹ (8a) betragen. Nur dann entwickelt sich das Vermögen derart, dass von allen möglichen Kombinationen die möglichen zukünftigen Gewinn/Verlustkombinationen tendenziell über dem jeweiligen Vermögensstand verbleiben. Die Division von **a** durch **m** ist für diesen Ansatz erforderlich, da bereits im Gewinnterm $(1+mb)^p$ der Summe aller Gewinne ein **m** enthalten ist.

Die Nebenbedingungen (6) und (7) ergänzen sich somit im Sinne der Zielsetzung. Jede Bedingung stellt eine Restriktion für die andere dar. Durch den folgenden Minimum-Ansatz gewährleisten sie, dass keine zu niedrige Wahrscheinlichkeit und keine zu hohen Anlagebeträge das Vermögen durch ruinöse Tendenzen gefährden. Dies hat besonders bei hohen **p** in Verbindung mit $b=b_1$ und niedrigen **p** in Verbindung mit $b=b_2$ Bedeutung.

C Die Berechnung des optimalen Risikobetrages

Für den **Einzelfall** muss die marginale Wachstumsrate des Gewinnes **a** mal der möglichen marginalen Schrumpfrate absolut entsprechen. Nach Gleichung (5) ergibt sich damit für $U' = R'$ und $p_{cr} \leq p < 1$:

$$g' = \frac{a}{1+mb_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d(p \ln(1+mb_1))/db_1}{1} = \frac{a}{1+mb_1} \quad \text{für} \quad p_{cr} \leq p < 1. \quad (9)$$

Nach Differentiation erhält man den optimalen Risikobetrag b_1 :

$$b_1 = (mp - aq) / (mp + maq) \quad \text{für} \quad U' = R' \quad \text{und} \quad p_{cr} \leq p < 1. \quad (10)$$

Für den **totalen Prozess** gilt, dass die Wahrscheinlichkeit des Gewinnterms in Gleichung (5) für das Gesamtkapital mp/a mal der Wahrscheinlichkeit des Verlustterms entsprechen muss, also $q = mp/a$. Dies ergibt :

$$C_n = (1+mb_2)^p (1-b_2)^{mp/a} \quad \text{für} \quad p_{cr} \leq p < 1. \quad (11)$$

Nach Logarithmierung und Differentiation erhält man:

$$b_2 = (a-1)/(a+m) \quad \text{für} \quad p_{cr} \leq p < 1. \quad (12)$$

Hiernach hängt b_2 nur von dem Gewinn-Verlustverhältnis **m** und der **kritischen** Gewinn-Verlust Relation **a** ab. Die Wahrscheinlichkeiten der Gewinne und Verluste finden keine weitere Berücksichtigung.

Fasst man die Ergebnisse zusammen, dann erhält man wie oben bereits erläutert:

$$b = \begin{cases} \min(b_1, b_2) & \text{für } p_{cr} \leq p < 1, \\ 1 & \text{für } p = 1, \\ 0 & \text{für übrige.} \end{cases} \quad (13)$$

Für die Anwendung in der Praxis ist Gleichung (13) im folgenden zu transformieren.

⁹ Das **a** der Gleichung 8a kann dann einheitlich für Bedingung 6 und 7 verwandt werden.

V. Anpassung des Risikobetrages b an die Anlagepraxis

Üblicherweise ist es am Markt selten, dass ein festes Verhältnis von Gewinnen und Verlusten entsprechend einem Bernoulliprozess realisiert werden kann. Im allgemeinen ist ein Betrag $I(b)$ zu investieren, mit dem man dann eine Rendite erwirtschaftet oder einen Teilverlust erleidet. Dieser Investmentbetrag $I(b)$, I abhängig von der Höhe des Risikobetrages b , ist dann die gesuchte Variable, die vom gesamten Vermögen einen optimalen Anlagebetrag ausmacht. $I(b) = b/|v_r|$ sei somit für ein absolutes v_r , relativer Erwartungswert des Verlustes einer Anlagemöglichkeit, der in die Risikoanlage zu investierende Anteil des Vermögens. Dann folgt nach Eintreten eines Verlustes in Höhe des Erwartungswertes ein neuer Vermögensstand von $C-b$ bzw. $1-b$ für $C=1$. Daraus folgt:

$$I(b) = \begin{cases} b/|v_r| & \text{für } |v_r| > 0, \\ \text{unendlich} & \text{für } |v_r| = 0, \\ 1, & \text{wenn } b/|v_r| > 1, \text{ aber keine Kreditmöglichkeit gegeben} \\ \leq 1, & \text{wenn Anteil in einem Portfolio.} \end{cases} \quad (14)$$

Im folgenden sollen nun einige Überlegungen zur Einbeziehung dieses Ansatzes in ein Portfolio kurz erläutert werden.

VI Der optimale Anlagemix bei Meidung des Ruins

A Anlagemix bei Kauffällen

Durch weitgehende Diversifikation mit, hinsichtlich der Ertragsentwicklung möglichst unabhängigen, Investments lässt sich das Risiko zusätzlich mindern.

Bei der Anlage auf der Grundlage einer „proportionalen Strategie“ bietet es sich an, das geometrische Mittel des Anlagemix zu maximieren. Solche Portfolios, die den Erwartungswert des geometrischen Mittels über mehrere Anlageperioden maximieren, sind zwar nur bei Vorliegen von Normalverteilungen „mean-variance“-effizient. Sie minimieren aber für den Mehrperiodenfall, wie er für Anlagen zur Altersvorsorge typisch ist, auch ohne diese Verteilungsannahme das Risiko¹⁰. Diese Art von Portfolios hat zudem einen höheren Erwartungswert des Endvermögens als Ansätze für Einzelperioden. Befürworter dieser Strategie argumentieren¹¹, dass solche Portfolios

- die höchste Wahrscheinlichkeit besitzen, dass ein vorgegebener Vermögensstand in kürzester Zeit erreicht wird,
- die höchste Wahrscheinlichkeit besitzen, dass ein vorgegebener Vermögensstand in einer vorgegebenen Zeit erreicht oder überschritten wird.

Ist K_i die Summe eines Mix aus Risikokapital C_n und risikofreiem Kapital F_i einer Anlage i , mit $K_i = I(b_i)C_n + (1-I(b_i))F_i$ für $I(b_i) \leq 1$ nach Gleichung (14), dann lässt sich zur Auswahl der in das Portfolio aufzunehmenden Anlagen eine Rangreihe der geometrischen Mittel der Endvermögen K_n aller Anlagen i bilden. Jene Anlagen mit den jeweils höchsten Werten sind dann in das zu optimierende Portfolio einzubeziehen.

¹⁰ Vgl. Hakansson 1971, S. 863 ff., Thorpe 1971, Elton/Gruber 1995, S. 234

¹¹ u.a. Elton/Gruber 1995, S. 232, Hakansson 1971, Thorpe 1971

Die Maximierungsgleichung lautet somit für $K_i = I(b_i)(1 + m_i v_{ri})^{pi}(1 - v_{ri})^{qi} + (1 - I(b_i))F_i$:

$$\text{Maximiere } \prod(X_i K_i) - 1 \quad \text{für } i=1 \dots k, I(b_i) \leq 1, \sum X_i = 1 \quad (15)$$

Für eine einzelne Anlage i gilt nach entsprechender Ableitung für den jeweiligen Anteil X_i derselben in einem Portfolio¹² mit k Risikoanlagen dann:

$$X_i = 1/k \quad \text{für} \quad \sum X_i = 1 \quad (16)$$

Das heißt, in einem geometrisch zu maximierenden Portfolio sind die Risikoanlagen mit jeweils gleichen Anlagebeträgen $1/k$ zu investieren, so dass $\sum X_i = 1$. Dabei bestehen diese Beträge für Anlagen i mit $|v_{ri}| > b_i$ aus einem Risikoteil kleiner als $1/k$ und einem ergänzenden risikofreien Anteil. Für diese Anlagen ist der Risikoanteil, für $U'_i \geq R'_i$, durch den o.a. Ansatz dann derart beschränkt, dass $|v_{ri}| = b_i$. Die risikofreien Anteile können dabei für alle Risikoanlagen in einem einzigen Investment zusammengefasst werden. Die Tabellen 1 und 2 zeigen unten die Vorgehensweise.

Für den Ansatz auf der Grundlage maximaler geometrischer Mittelwerte finden sich – ebenso wie für den Ertrags-Varianz-Ansatz für den Einperiodenfall – sehr überzeugte Anhänger. In der Praxis begegnet man hinsichtlich der Parameter Mischformen. Es bestehen aus der Sicht des Verfassers daher keine Bedenken, auch für den Mehrperiodenfall optimale Portfolios für den Einperiodenfall zu konzipieren¹³ und diese fortschreitend jeweils nach Neuberechnung zeitlich aneinander zu reihen. Der oben beschriebene risikofreie Anlagenteil bei Überschreiten der optimalen Risikobeträge b_i ist dabei jedoch – insbesondere bei Derivaten (Zertifikaten, Futures, Optionen) - zu berücksichtigen.

Das Risiko lässt sich auch durch einen ausgewählten Anlagemix auf der Grundlage einer Rangreihe der Renditen durch Käufe („long“-Positionen) und gleichzeitige Vorverkäufe („short“-Positionen) weiter eingrenzen. Im folgenden sollen daher zu einem derartigen Portfolio weitere Überlegungen wiedergegeben werden.

B Momentumportfolio bei unabhängigen Ertragsentwicklungen

Scholtz (2002a, 2002b) hat gezeigt, wie sich Portfolios für den Einperiodenfall optimieren lassen. Hierbei ist jedoch, wie oben erwähnt, zusätzlich zu berücksichtigen, dass die optimalen Risikobeträge b nicht überschritten werden. Einfacher als bei dem Einperiodenfall sind jedoch für den Mehrperiodenfall auch hier die Gewichtungen der einzelnen Anteile der Anlagen zu ermitteln. Denn für die Maximierung des Ertrages kann man ebenfalls von Gleichung (15) und (16) ausgehen. So gilt für die vorzuverkaufenden Positionen, dass jeweils $1/k$ entsprechend Gleichung (16) in die einzelnen Anlagen zu investieren ist. Denn die Shortpositionen stellen risikobehaftete Anteile im Portfolio dar, die einen eignen Beitrag zum Ertrag des Portfolios

¹² Hier ist berücksichtigt, dass die Rendite auf der Basis von b bereits einen optimalen Wert auf Grund der o.a. Differentiation darstellt. Vgl. auch Elton/Gruber 1995, S. 234. Der Wert $X_i = 1/k$ ergibt sich aus einer fortschreitenden Differentiation von $(1 - kX_i)X_i^k$ für $i, k = 2, 3, \dots$, wenn man das Produkt der Gewichte $\prod X_i$ von dem Produkt $\prod K_i$ trennt. Für X_i^{100/X_i} erhält man nach Differentiation zudem für X_i als Gewicht die Zahl e bzw. gerundet $100/37$ und für $100/X_i$ gerundet den Wert 37 für die optimale Anzahl der Investments im Portfolio, wenn man für das gesamte anzulegende Kapital den Wert 100 ansetzt.

¹³ Scholtz 1999, 2002a, 2002b

ruinneutral beisteuern. Die Berechnung ist unten aus Tabelle 2 ersichtlich. Hierbei ist bei diesen Vorverkaufspositionen gedanklich eine „Umkehr“ der Begriffe für die zu berechnenden Parameter insoweit vorzunehmen, als Kursminderungen des Underlyings Gewinne und Kursanstiege Verluste darstellen.

Aus Scholtz (2002a, 2002b) könnte man entnehmen, dass es für eine solche Strategie nur bedingt erforderlich ist, dass die einzelnen Investments Gewinnwahrscheinlichkeiten aufweisen, die jeweils oberhalb der kritischen Wahrscheinlichkeiten liegen. Aus der Untersuchung von Scholtz (2002d) für einzelne Werte des Dax geht jedoch hervor, dass der Ertrag wesentlich gesteigert und die Risiken entscheidend gemindert werden können, wenn diese Bedingung berücksichtigt wird. Gleiches gilt in besonderem Maß auch für die Berücksichtigung des optimalen Risikobetrages b eines Investments.

Aus dem Blickwinkel der Altersvorsorge ist bei Unterstellung einer Risikoaversion des Anlegers noch eine weitere Komponente der Risikobegrenzung in den Ansatz ergänzend einzubeziehen.

C Begrenzung des Risikos bei zunehmendem Lebensalter

Um im Versicherungsfall Alter 65 ein auskömmliches, risikofreies Portfolio zu erhalten, bietet es sich an, den Ertragseffekt der aufgezeigten Strategie in jungen Jahren voll auszureizen. Mit zunehmendem Alter sollte dann die jeweils zu investierende Summe „risikoadjustiert“ werden. Eine Möglichkeit ist beispielsweise die Anwendung einer arithmetischen, logarithmischen oder sonstigen Funktion, mit der die Anlagebeträge korrigiert bzw. das Risiko vermindert wird. Einige mögliche adjustierte Funktionen P_a für das Portfolio im Wert von $P=100$ sind zum Beispiel :

$$P_a = 100 - 2.2222 (A - 20) \quad \text{für Alter } A = 21 \dots 63 \quad (17a)$$

$$P_a = 26,26975 \ln(65 - A) \quad \text{für Alter } A = 21 \dots 63 \quad (17b)$$

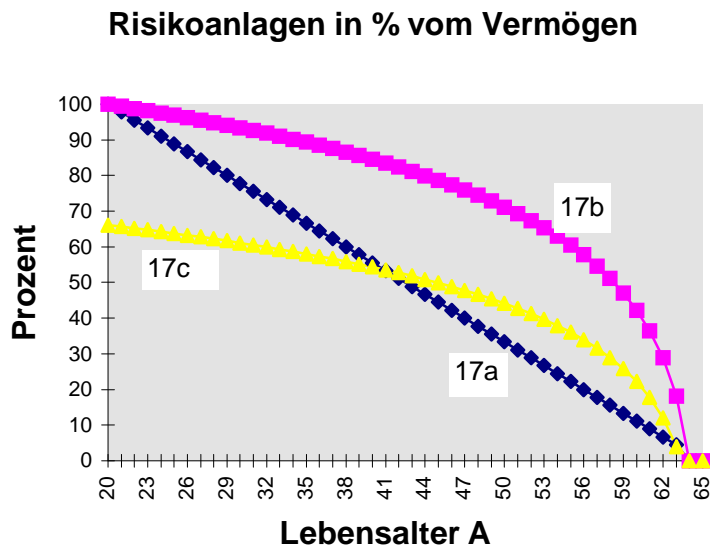
$$P_a = 20 \ln(65 - A) - 10 \quad \text{für Alter } A = 21 \dots 63 \quad (17c)$$

Gleichungen (17a) bis (17c), hier nur als Anregung gedacht, bedeuten, dass das Portfolio nur bis zu P_a Prozent mit risikoreichen Anlagen zu füllen ist. Mit zunehmendem Alter nimmt der Prozentsatz bei (17a) linear ab, bei (17b) und (17c) logarithmisch. Bei (17c) besteht dabei neben einer ggf. abzuschließenden Risikoversicherung eine Besonderheit für den eventuellen Invaliditätsfall. Die Anlage beginnt daher nur zu etwa 2/3 mit risikoreichen Anlagen. Eine Kombination von (17a) und (17c) hat, wie die Grafik 4 zeigt, ebenfalls einen gewissen Charme. Hier adjustiert der Anleger die Vermögensanlagen anfangs nach Gleichung (17c) und ab 41. Lebensjahr verwendet er Gleichung (17a). Andere Ansätze sind möglich. Das höchste Endvermögen ist, wie erörtert, bei einer Strategie mit wiederholten Einsätzen ohne Adjustierung zu erwarten. Hierbei werden die höchsten Erträge in den letzten Jahren erzielt.

In Abbildung 4 sind die einzelnen, zur Darstellung des Prinzips völlig frei gewählten Funktionen¹⁴ der Gleichung (17a-c), zur besseren Veranschaulichung dargestellt.

¹⁴ Zur Erörterung subjektiver Nutzenfunktionen in diesem Zusammenhang sei u.a. auf Hakansson 1971, Thorpe 1971, Elton/Gruber 1995 verwiesen.

Abbildung 4



Einige Rechenbeispiele sollen im folgenden die Vorgehensweise zur Bestimmung des optimalen Investments und die Konzeption von entsprechenden Portfolios verdeutlichen.

VII. Beispiele

A Optimaler Anlagebetrag bei aufeinander folgenden Investments

Oft ist eine Schätzung der Wahrscheinlichkeiten und der Rendite des Portfolios nicht möglich. Man kann dann trotzdem auf Erfahrungen aufbauende Parameter ermitteln.

Hier sei folgende Ergebnissituation bei einer bestimmten Risiko-Strategie eines Anlegers gegeben (w_i als Prozentsatz von Kurswerten des Portfolios bei Investments in Derivate in aufeinanderfolgenden $i=10$ Fällen an der Börse über $n+1$ Perioden):

$$w_i = 30, -40, 20, 50, 10, -20, 80, 30, 60, -9.$$

Es sind:

$$SZ = \sum z_i \quad \text{für } z_i = \ln(1 + w_i/100), \quad i=1,2,\dots,n.$$

$C_n = 100 \exp(SZ)$, wobei C_n das Endkapital, wenn das Anfangskapital $C=100$,

$\mu = SZ/n$ die erwartete Wachstumsrate.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind dann:

Endkapital nach $n_g=7$ Gewinnen und $n_v=3$ Verlusten 421,

$\mu = 0,1437$, durchschnittliche Wachstumsrate,

$\mu_g = 0,3236$, Wachstumsrate für $\mu_g = SZ/n_g$,

$\mu_v = -0,2761$, Schrumpfungsrage für $\mu_v = SZ/n_v$,

$v_f = -0,2412579$, $(\exp(\mu_v)-1)$ Erwartungswert des Verlustes

Gewinnwahrscheinlichkeit $p=0,7$ (entsprechend n_g/n),

Verlustwahrscheinlichkeit $q=1-p=0,3$ (entsprechend n_v/n),

Gewinn-Verlust-Verhältnis $m = -(\exp(\mu_g)-1)/(\exp(\mu_v)-1) = 1,5841$,

kritisches Verhältnis $a = m/(1-0,5^m) = 2,377$, an welchem $U' = R'$.

Das optimale b berechnet sich dann gemäß Gleichung (13) aus:

$$b = \min[(mp - aq)/(mp + maq); (a - 1)/(a + m)] = (0,177; 0,35) = 0,177.$$

und das optimale Investment $I(b)$ folgt nach Gleichung (14) mit:

$$I(b) = b/|v_r| = 0,7329.$$

Das heißt, bei einem anfänglichen Vermögen von € 100 sind jedes mal 73,29 Prozent vom jeweils erreichten Vermögen anzulegen. Ein durchschnittlicher Verlust von $b = 17,7$ Prozent des Kapitals vom jeweils aktuellen Stand wird in verschiedenen Fällen auftreten. Da es sich um eine durchschnittliche Betrachtung handelt, sind die tatsächlichen Verluste höher oder kleiner. Will man höhere Verluste als den optimalen Betrag b vermeiden, dann sind entweder entsprechende Stopps zu setzen oder entsprechende Absicherungen durch Optionen oder andere Gegenpositionen vorzunehmen. Soweit die Anlage Bestandteil eines Portfolios ist, ergibt sich die Risikobegrenzung durch die o.a. Diversifikation.

Das Ergebnis $I(b)$ besagt, dass für eine Maximierung des Vermögens bei Meidung des Ruins $100 \cdot I(b)$ Prozent des jeweils total verfügbaren Kapitals C in den, den Berechnungen zu Grunde liegenden Risikoanlagen zu investieren sind. Überschreitet der tatsächliche Risikoanteil des Vermögens diesen Prozentsatz, z.B. nach Gewinnen, dann sind Teile der Risikoanlagen aufzulösen. Entsprechend sind Unterschreitungen durch zusätzliche Risikoanlagen, z.B. nach Verlusten, aufzustocken. In der Regel sind die $I(b)$ größer als 1 und geben nur eine Rechengröße für den Anteil im Portfolio bei Anlagen in Derivaten nach Gleichung (14) ff. wieder.

Im vorliegenden Fall beträgt die Ruinwahrscheinlichkeit¹⁵ des gesamten Vermögens für $n^\circ = 23,64$ Fälle und $L = 0,3446$ dann $L^{23,64} = 1,1547$ mal 10^{-11} , sie ist also praktisch null. Bei diesen Werten ist angenommen, dass das gesamte Vermögen bei jeder Anlageentscheidung jeweils zu 73,29 Prozent in der o.a. einen Anlage investiert ist.

B Beispiel eines optimalen Mix für Kauffälle

In Tabelle 1 ist ein Musterportfolio mit Derivaten (Zertifikate, Futures) aufgezeigt. Für den Hebel wurde die Berechnung nach Scholtz (2002c, Gleichung 17) verwandt. Der Anteil für $k=4$ Anlagen 1 bis 4 beträgt je $1/k$ bzw. 25 Prozent. Der zu erwartende mögliche Gewinn ergibt sich aus $v_r \cdot m$ bzw. Spalte 3 multipliziert mit Spalte 4. Er ist hier nicht aufgeführt. Da

Tabelle 1 Optimaler geometrischer Anlagemix

Anlage	p%	v_r %	m	$I(b)$	$(1-I(b))/k$	b	Mix
1	2	3	4	5	6	7	8
1	70	18	1,111	0,5948	0,10130	0,107	0,14870
2	70	17	1,176	0,7146	0,07135	0,1214	0,17865
3	71	19	1,105	0,6760	0,08100	0,1284	0,16900
4	73	20	1,250	1	0	0,2012	0,25000
5*	100	0		1		1	0,25365
				Summe	0,25365		1

¹⁵ Nach Scholtz 2002 d, S. 205 berechnet sich die Fallzahl n° mit $-4,605/\ln(1-b)$ und die Ruinwahrscheinlichkeit mit L^C für $C = n^\circ$ und $L = pL^{(m+1)} + q$. L ist dabei für nicht ganzzahlige m durch Probieren näherungsweise zu ermitteln.

die $I(b_i)$ mit Ausnahme der 4. Anlage kleiner als 1 sind, wird in Spalte 6 der risikofrei anzulegende Anteil jeder i . Anlage F_i berechnet. Deren Summe ergibt für die $k+1$ Anlage insgesamt den Wert 25,365 Prozent. Dies ist dann der Anteil der risikofreien Anlage am Portfolio. In Spalte 8 ist er entsprechend aufgeführt. Im übrigen sprechen die Überschriften der Tabelle für sich. Als Ergebnis lässt sich aus Spalte 8 für den optimalen Mix entnehmen, dass von dem Vermögen jeweils 14,87 Prozent in Anlage 1, 17,865 Prozent in Anlage 2 ...usf. zu halten sind. Die Summe ergibt 1.

C Beispiel für ein optimales Momentumportfolio

In Tabelle 2 sind ebenfalls zwei Anlagen (Käufe) mit einem möglichen relativen Verlust von 18% und 17% und 2 Anlagen (hier Vorverkäufe) mit einem relativen Verlust von ebenfalls 18% und 17% dargestellt. Der relative Verlust bezieht sich bei den Vorverkäufen tatsächlich auf den Anstieg der entsprechenden Kurse des Underlyings, da diese einen Verlust bei Vorverkäufen bedeuten. Da die „Verluste“ in Spalte 3 bei diesen 2 Positionen eine höhere Verlustwahrscheinlichkeit q (hier: $q=1-p$ der Spalte 2) aufweisen als bei den ersten zwei Positionen, sind die optimalen Risikobeträge b in Spalte 7 niedriger. Dadurch ergibt sich auch in Spalte 6 ein höherer Anteil für die erforderlichen risikofreien Anlagen. Der mögliche Gewinn ergibt sich aus der Multiplikation von Spalte 3 mit Spalte 4. Spalte 6 ist aus der Überschrift erklärt. Die vier Investments zu jeweils $1/k$ je Investment ergeben 25 Prozent Anteil je Anlage. Dadurch findet sich für jede Anlage für die Summen aus Spalten 6 und 8 jeweils dieser Anteil von 25 Prozent wieder. Der Gesamtbetrag aller Werte in Spalte 6 zeigt die Summe von 50,065 Prozent des Vermögens, die wiederum als $k+1$ Anlage 5* risikofrei anzulegen ist. Da es sich bei Anlage 3 und 4 um Vorverkäufe(z.B. Bear-Zertifikate) handelt, sind sie in der Spalte 1 der

Tabelle 2 Geometrisches Momentumportfolio

Anlage	p%	v_r %	m	$I(b)$	$(1-I(b))/k$	b	Mix
1	2	3	4	5	6	7	8
1	70	18	1,111	0,5948	0,10130	0,10700	0,14870
2	70	17	1,176	0,7146	0,07135	0,12140	0,17865
-3	67	18	1,111	0,2280	0,19300	0,04106	0,05700
-4	68	17	1,176	0,4600	0,13500	0,07820	0,11500
5*	100	0		1		1	0,50065
				Summe	0,50065		1

Tabelle mit negativem Vorzeichen versehen. Durch die Strategie von Käufen und Vorverkäufen ist das Risiko für das Gesamtportfolio zusätzlich verringert. Die risikofreie Anlage 5* stellt dabei sicher, dass keine der Anlagen für ihren optimalen Anteil $1/k$ eine marginale Ruinwahrscheinlichkeit aufweist, die größer als die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit ist. Sollen allgemeine Marktschwankungen zum Teil aufgefangen werden, dann wäre auf eine möglichst ausgeglichene, gleiche Struktur der Long- und Short-Positionen zu achten.

Tabellen 1 und 2 wurden mit handelsüblichen Tabellenprogrammen berechnet.

VIII. Schlussfolgerungen

Bei strikter Einhaltung der „proportionalen Strategie“ ist ein Ruin vollkommen ausgeschlossen. Die systematische Elimination der Ruintendenzen ist dabei begründet in dem marginalen Ansatz. Denn dieser berücksichtigt bei positiven Ertragserwartungen ein Gleichgewicht der marginalen Wahrscheinlichkeiten des Ruins und des Überlebens. Die Vorgabe einer höchstzulässigen Ruinwahrscheinlichkeit erübrigt sich daher.

Nun hat der Verfasser für die Beispiele Derivate mit hoher Volatilität ausgewählt. An den Zahlen und den Ergebnissen ist zu sehen, dass die vorgestellten Risikokalküle, wie im Abschnitt VI erörtert, erweitert werden sollten.

Zusammenfassend scheint die Anwendung der Anlagestrategie für Zwecke der Altersversorgung geeignet. Dabei sind zwei Komponenten zu beachten. Einerseits die Prüfung, ob bei anstehenden Entscheidungen über Investments die kritische Wahrscheinlichkeit erreicht oder überschritten wird. Andererseits die Berechnung optimaler Anlagebeträge und optimaler Portfolios. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die kritische Wahrscheinlichkeit durch eine planvolle Verlustbegrenzung¹⁶ ermäßigt werden kann. Damit eröffnet sich eine höhere Anzahl von Anlagemöglichkeiten¹⁷.

Hinsichtlich der Höhe der zu investierenden Kapitalbeträge bzw. Risikobeträge b bestehen gewisse Spielräume. Die Beträge dürfen niedriger als die optimalen sein. Auf keinen Fall sollten sie aber höher sein. Dies kommt auch schon in dem Ansatz der Gleichung (13) zum Ausdruck. Dort ist deshalb auf die jeweils minimalen Beträge von b_1 oder b_2 abgestellt. Analoge Überlegungen fanden Eingang in die Entwicklung der Gleichungen (17a-c).

Zusammenfassung

Der Ansatz analysiert die mathematischen Einflussgrößen, die bei risikobehafteten Investments zur Vermeidung von Ruintendenzen bei Anlagen zur Alterssicherung zu berücksichtigen sind. Danach muss deren Gewinnwahrscheinlichkeit eine **kritische** Größe überschreiten. Weiterhin darf nur ein definierter Betrag risikoreich investiert werden. Bei Investments mit geringeren Gewinnwahrscheinlichkeiten oder höheren Einsatzbeträgen als den optimalen ist die marginale Ruinwahrscheinlichkeit größer als die marginale Überlebenswahrscheinlichkeit. Es besteht dann eine latente Ruintendenz. Das Erreichen eines maximalen Endvermögens oder auch nur eines hohen Vermögens ist somit tendenziell gefährdet. Bei geringeren Einsätzen und höheren Gewinnwahrscheinlichkeiten als den optimalen oder bei strikter Einhaltung der Strategie ist dagegen ein hohes Endvermögen zu erwarten. Die aufgezeigten Portfoliostrategien vermindern dabei das Risiko zusätzlich.

Die erforderlichen Parameter zur strategischen Optimierung des Anlageverhaltens werden abgeleitet. Einige praktische Beispiele erleichtern das Verständnis.

Summary

The approach points out the components of optimum strategies for maximizing yields while avoiding ruin. Provided all decisions are defined as elements of a decision process, the final capital can be maximized only if the ratio of possible gains and losses is greater than a fixed cut-off point and if a defined fraction of the capital is invested. A strategy using stakes larger than the critical fraction results in a tendency to be ruined. Strategies risking stakes less than the optimum stake have a tendency to acquire infinite wealth, but at a growth rate that is lower than the rate afforded by the optimum stake. The calculation of optimal portfolios is shown.

¹⁶ Scholtz 2002d, S.205, FN 21 zeigt die hierfür erforderliche Gleichung: $v_{cr}=g/m_{cr}$ für $m_{cr}=\ln(1-0,5/p)/\ln(0,5)-1$

¹⁷ Scholtz1990

Literatur

- Baumol, W. J. (1963), An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection, *Management Science*, S. 174-184
- Bernoulli, D. (1738), Exposition of a new theory on the management of risk, *Repr. Econometrica*, 1954, S. 65-86.
- Breiman, L. (1960), Optimal gambling systems for favorable games. *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on mathematical statistics and probability*, University of California Press, Berkeley, CA, 1, S. 65-78.
- Dubins, L. E./ L. J. Savage (1965), How to gamble if you must.
--- (1976), *Inequalities for stochastic processes*. Dover Publications.
- Elton E.J./M.J. Gruber (1995), *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5th edition
- Feller, W. (1968), *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I and II, (3rd ed.).
- Ferguson, T. S. (1965), Betting systems which minimize the probability of ruin, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 13, S. 795-818.
- Finetti, Bruno de (1980), *Wahrscheinlichkeitstheorie*.
- Hakansson, N. (1971), Multi-Period Mean-Variance Analysis: Toward a General Theory of Portfolio Choice, *Journal of Finance*, S. 857-984
- Hipp, Ch./ R. Michel (1990), *Risikotheorie: Stochastische Modelle und Statistische Methoden*.
- Kelly jr., J. L. (1956), A new interpretation of information rate, *Bell System Technical Journal*, 35, S. 917-926.
- Latané, H. A. (1959), Criteria for choice among risky ventures, *Journal of Political Economy*, S. 144-155.
- Packel, E. (1981), *The mathematics of games and gambling*.
- Roberts, F. S. (1976), *Discrete mathematical models*.
- Samuelson, P. A. (1974), The falacy of maximizing the geometric mean in long sequences of investing or gambling, in: Bicksler and Samuelson 1974: *Investment portfolio decision making*, S. 271-280.
- Schneeweiß, H. (1967), *Entscheidungskriterien bei Risiko*.
- Scholtz, H.D. (1990), Maximierung des Endvermögens bei Ausschluß des Ruins. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft*, S. 685 – 704.
- (1999), Optimaler Anlagemix bei unabhängigen Kursentwicklungen, *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, S. 1128-1137.
- (2002 a), Die optimale Optionsstrategie bei unabhängigen Ertragsentwicklungen, *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, S. 70 – 77.
- (2002 b), Risikominderung durch eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung, *Die Rentenversicherung*, Nr. 6, S. 101- 107.
- (2002 c), Eine optimierte Investmentstrategie für Anlagen zur Alterssicherung bei abhängigen Ertragsentwicklungen, *Die Rentenversicherung*, Nr. 9, S. 165-170.
- (2002 d), „The Gambler’s Ruin“ und die kritische Wahrscheinlichkeit. Geeignete Risikomaße bei Anlagen zur Alterssicherung? *Die Rentenversicherung*, Nr.11, S. 201 –208.
- Steiner, M. /Ch. Bruns (1996), *Wertpapiermanagement*, 5.Auflage.
- Teweles, R. J. et al (1976), *The commodity futures game*.
- Thorpe, E. (1971), Portfolio choice and the Kelly criterion, in: Bicksler and Samuelson 1974: *Investment portfolio decision making*, S. 253-270.
- Tobin, J. (1958), Liquidity preferences as behaviour towards risk, *Review of Economic Studies*, 1, S. 65-86.
- Vince, R.(1992), *The mathematics of money management*.