

Dapena, José Pablo

Working Paper

Sobre burbujas de precios de activos, expectativas y equilibrios

Serie Documentos de Trabajo, No. 361

Provided in Cooperation with:

University of CEMA, Buenos Aires

Suggested Citation: Dapena, José Pablo (2007) : Sobre burbujas de precios de activos, expectativas y equilibrios, Serie Documentos de Trabajo, No. 361, Universidad del Centro de Estudios Macroeconómicos de Argentina (UCEMA), Buenos Aires

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/84312>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

**UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina**

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Economía y Finanzas

**SOBRE BURBUJAS DE PRECIOS DE ACTIVOS,
EXPECTATIVAS Y EQUILIBRIOS**

José Pablo Dapena

**Diciembre 2007
Nro. 361**

**www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding <jae@cema.edu.ar>**

SOBRE BURBUJAS DE PRECIOS DE ACTIVOS, EXPECTATIVAS Y EQUILIBRIOS

José Pablo Dapena*

ABSTRACT

De acuerdo a la literatura el precio de un activo (financiero o real) experimenta una burbuja si su precio de mercado se encuentra desajustado de manera persistente en el tiempo con respecto a su valor "intrínseco" o fundamental. En un contexto de racionalidad y eficiencia es difícil aceptar la existencia de estos fenómenos, sin embargo la literatura se ha encargado de reflejar que dichas situaciones pueden ser consistentes en un contexto de optimización y racionalidad, sobre todo cuando el horizonte de vida de los inversores es finito, existe poca variedad de alternativas de inversión, o existen situaciones de información imperfecta con falta de coordinación. Dadas estas situaciones, en el proceso de sostenimiento de la burbuja las expectativas de los inversores acerca del precio del activo adquieren un rol fundamental. En el presente trabajo se expone un modelo donde bajo ciertas condiciones el equilibrio en precios es consistente con las expectativas de los inversores, reaccionando dicho equilibrio a los cambios en las mismas, es decir que el equilibrio es condicional en el nivel de expectativas y en el manejo que de ellas se pueda hacer, sin perjuicio de potenciales efectos de "manada" en situaciones de información imperfecta. En el final del trabajo exponemos información sintética sobre casos que pueden ser presentados como burbujas a los efectos de la discusión de su naturaleza.

JEL: G12, G10, E32.

Palabras claves: Activos financieros, burbujas, expectativas, conducta, equilibrio.

* Valen los agradecimientos de rigor. Las opiniones presentadas en este trabajo pertenecen al autor y no reflejan necesariamente las de la Universidad del CEMA. Todos los errores son de mi responsabilidad.

1 Introducción

El concepto de burbujas en precios de activos es muy controvertido, ya que si los mercados son eficientes, no existen motivos por los que el precio de un activo se pueda desviar de su valor intrínseco de manera sostenida en el tiempo dando lugar a una potencial ineficiencia. El concepto de eficiencia en los mercados financieros ha sido objeto de extenso estudio. En un interesante documento¹ se sintetizan tres categorías de eficiencia para los mercados:

- una eficiencia de tipo productivo, donde no hay desperdicio de recursos;
- una eficiencia a la "Pareto", donde no hay desperdicio de utilidad;
- y una eficiencia de tipo informativo, donde no hay desperdicio de información.

Diremos entonces que los mercados son eficientes si los precios de los activos en el mismo reflejan adecuadamente la información disponible (Fama 1970), lo que da lugar a la Hipótesis de Mercados Eficientes (en el sentido informativo), donde la función de los mercados es agregar la información propiedad de los agentes y reflejarla en los precios. De acuerdo a esta Hipótesis, los agentes no pueden obtener ganancias extraordinarias de manera persistente en el tiempo, ya que el mero acto de comprar y vender revela parte de su información privada lo que provoca un efecto informativo en el resto del mercado. Un resultado de esta Hipótesis es que de ser cierta, ningún esquema de comercialización sería eficiente para ganarle al mercado, ya que la información pasada no sería relevante en el proceso de predecir precios futuros, lo que eliminaría totalmente la posibilidad de existencia de burbujas en los precios, ya que las mismas serían arbitradas constantemente. Sin embargo las burbujas existen, dando lugar a una literatura asociada que discute su relevancia y su efecto. Es el objetivo del presente trabajo desarrollar sobre la literatura existente respecto de este fenómeno, y aportar al papel que cumplen las expectativas en el sostenimiento y ruptura de las burbujas.

2 Literatura y antecedentes

Garber (1990) define el concepto de burbuja en base al expresado en el Diccionario Palgrave: "un extraño comportamiento de compra venta acompañado de un alto grado de especulación". En dicho trabajo estudia tres casos famosos de burbujas de precios: - la burbuja holandesa de los tulipanes de 1634-37, la burbuja del Mississippi de 1719-20 y la del mar del Sur 1720 (conectada a la anterior) y propone explicaciones económicas al comportamiento de los precios y de los inversores, concluyendo que gran parte de la conducta de los mismos está asociada a la percepción de un incremento en la probabilidad de obtener cuantiosas ganancias a partir de las adquisiciones de los activos, y en donde los inversores, a pesar de saber que dichas inversiones podían fracasar, debían tomar posiciones a la expectativa de potenciales ganancias. La literatura es consistente en asociar el concepto de burbuja a una situación donde el precio de mercado del mismo es diferente de su valor "intrínseco" o fundamental, siendo este valor calculado en base al valor presente de un flujo de consumo futuro (o de su equivalente en fondos financieros). Obstfeld y Rogoff (1996) presentan un modelo dinámico de fijación de precios reales de activos con costos de ajuste en el proceso de instalación del mismo, que origina un precio real fluctuante del capital "q" (precio sombra que refleja el valor presente del producto marginal del capital mas el flujo descontado de las ganancias como consecuencia de la reducción de los costos de instalación) consistente con Tobin (1969) donde las variaciones de dicho precio real guían el proceso de inversión y desinversión. En dicho modelo se asume un inversor representativo con horizonte infinito de tiempo y neutralidad al riesgo; bajo estas condiciones se excluye las posibilidad de burbujas especulativas en el precio real del capital a partir de la condición de transversalidad del modelo dinámico, que expresa que el valor presente del precio terminal del capital converge a cero cuando el horizonte del inversor tiende a infinito. El modelo descansa en dos condiciones para eliminar senderos dinámicos en el precio del capital que conducen a burbujas especulativas:

¹ Information, Bubbles and the Efficient Market Hypothesis, Leigh Tesfatsion.
<http://www.econ.iastate.edu/classes/econ308/testfatsion/emarketh.htm>.

- neutralidad al riesgo en el inversor,
- un horizonte infinito para el mismo.

Dadas estas condiciones, el precio sombra del capital guía la inversión excluyendo en el proceso dinámicas de precios explosivos que conducen a sobre o subinversión motivadas por expectativas auto-cumplidas inconsistentes con variables fundamentales. Ausentes estas condiciones, la existencia de una burbuja puede no ser necesariamente irracional, ya que si los inversores tienen vidas finitas la condición de transversalidad puede no satisfacerse dado que su horizonte temporal pasa a ser limitado. Entre los trabajos iniciales que exponen consistencia entre racionalidad y burbujas, encontramos a Tirole (1982) y (1985), donde en el segundo presenta en base a una economía con tasa de crecimiento positiva y con distinción entre activos productivos y no productivos un modelo de generaciones superpuestas (OLG) del que derivan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una burbuja de precios en el agregado, consistentes con una conducta de optimización y con equilibrio general. Este resultado surge debido a que las generaciones necesitan satisfacer un proceso de almacenamiento de valor, lo que lleva a que las economías acumulen capital aún cuando la inversión necesaria para mantenerlo excede el producto del mismo, dando lugar a una forma ineficiente de almacenamiento de valor pero que ayuda a la economía ya que completa un mercado "intergeneracional" de transferencia de valor, obteniéndose entonces procesos de burbujas racionales. Dada esta situación, si los costos de mantenimiento de la burbuja son bajos, constituyen una forma eficiente de traspasar valor a la siguiente generación y permite liberar recursos que pueden ser utilizados para incrementar el consumo y el bienestar. Tirole propone tres condiciones para que una burbuja pueda tener lugar: duración, escasez y creencias compartidas.

Yanagawa y Grossman (1992) proponen también al igual que Tirole la división entre activos productivos y no productivos en una economía en crecimiento, con generaciones superpuestas, y encuentran que las burbujas pueden existir de manera consistente en el tiempo proveído que las mismas no sean muy grandes (la diferencia entre el valor corriente y el valor fundamental). Si embargo, en su trabajo encuentran que la existencia de burbujas retarda el crecimiento de la economía aún en el largo plazo reduciendo el bienestar general de todas las generaciones posteriores a la aparición de la burbuja. Este resultado procede porque el activo no productivo (o sujeto a burbuja) atrae recursos de ahorros desde usos más productivos en la economía, limitando la capacidad de crecimiento futuro. Concluyen que las burbujas son más probables cuando las familias son pacientes (alta propensión al ahorro) y cuando las inversiones en capital generan un efecto derramamiento hacia la productividad del trabajo. Respecto al mercado de oferta y demanda de burbujas (o de los activos que les dan lugar) Tirole se pregunta sobre cuáles pueden ser los determinantes de la demanda de burbujas, mientras que Yanagawa y Grossman plantean la misma pregunta pero desde el lado de la oferta, en el sentido que no obstante cualquier activo puede experimentar una burbuja en su precio, no queda claro su selección.

Encontramos también el trabajo de Ventura (2003), que parte de la propuesta que todo bien de capital posee dos componentes en la determinación de su valor de mercado o corriente: un valor fundamental asociado a su productividad y un valor de burbuja (improductivo) dependiente de las expectativas acerca de su futuro tamaño. Propone que la existencia de burbujas racionales puede estar asociada a mercados financieros imperfectos donde no todos los agentes tienen acceso al mismo portafolio de activos, y estudia la conexión entre la existencia de burbujas y crecimiento de la productividad, donde los dos elementos se retroalimentan mutuamente.

Caballero y Krishnamurty (2005) estudian el concepto de burbuja en precios de activos en mercados emergentes, donde la fase de expansión del precio se encuentra asociada a ingresos de capitales desde el exterior, crecimiento del crédito, de la inversión y del valor de los activos, proceso que cesa abruptamente desinflando la economía cuando se produce un fenómeno de reversión en el sentido de los flujos de capitales. En su trabajo exponen que la literatura sobre burbujas se focaliza en dos elementos: el rol de la información en el proceso de coordinación de las acciones de los agentes o inversores; y el rol del medio ambiente macroeconómico en el surgimiento de las burbujas, siendo este último el foco de análisis de su trabajo. Postulan que la inexistencia o escasez de instrumentos que permitan almacenar valor y transmitirlo de generación en generación es frecuente en economías

emergentes, y en base a un modelo de generaciones superpuestas con ausencia de instrumentos financieros de calidad en el mercado doméstico, sugieren que dicha búsqueda procede en instrumentos localizados en economías más desarrolladas, induciendo salida de capitales que es costosa en el sentido que reduce el financiamiento disponible en el mercado local. Sugieren que esta brecha entre bajos retornos en el exterior, baja variedad de instrumentos locales y alta tasa de crecimiento puede hacer posible la existencia de burbujas en el precio de activos improductivos, tales como los inmobiliarios. Mencionamos antes que en modelos de generaciones superpuestas, las burbujas racionales pueden ser bienvenidas ya que ayudan a completar un mercado "intergeneracional" ausente, sin embargo en mercados emergentes, las mismas pueden ser perjudiciales desde el punto de vista social por su fragilidad y el impacto que su corrección puede tener en la cadena de crédito y en el proceso de acumulación de capital. Los autores establecen en sus conclusiones que en mercados emergentes lo normal es la salida de capitales, interrumpida por ocasionales ingresos que dan lugar a burbujas que posteriormente entran en crisis, como consecuencia de un subdesarrollo en el sistema financiero local, donde mercados de capitales primitivos hacen difícil encontrar activos locales dignos de confianza². Finalmente son interesantes los resultados propuestos por Abreu y Brunnermeier (2003), donde la fortaleza de una burbuja descansa en la falta de habilidad de los arbitrajistas de coordinar temporariamente sus estrategias de venta. Esta falta de sincronización conduce a un juego de "timing", donde eventos y noticias de conocimiento público y con contenido informacional intrínseco relativamente bajo pueden tener efectos desproporcionados en la dinámica de precios de los activos, ya que actúan como sincronizadores de las acciones de los inversores.

De los diferentes trabajos expuestos se pueden rescatar los siguientes resultados que consideramos de relevancia para la presente propuesta:

- puede existir procesos de burbujas racionales en el precio de los activos;
- las mismas dependen fuertemente del rol de las expectativas de los inversores y agentes;
- pueden ser eficientes como instrumento de transporte de valor entre generaciones al permitir liberar recursos para otros usos;
- son ineficientes si atraen capital en exceso como consecuencia de la suba en los precios y su efecto sobre la inversión y el crecimiento futuro;
- su ruptura o corrección pueden generar distorsiones y pérdida de bienestar ya que se reduce la posibilidad de consumo por un efecto riqueza negativo.

En el trabajo nos concentraremos en el rol de las expectativas en el sostenimiento y ruptura de una burbuja.

3 El Modelo

Hemos postulado en la sección anterior que de acuerdo a la literatura las expectativas cumplen un papel fundamental en el sostenimiento de una burbuja de precios de activos. La creencia que un precio seguirá subiendo alimenta la tendencia compradora, mas aún cuando las condiciones de transversalidad de largo plazo en el precio final del activo no se satisfacen en el corto debido al carácter temporal finito del horizonte del inversor. Siendo el rol de las expectativas tan relevante en este proceso, propondremos en la presente sección un esquema que permite modelar el ajuste de las mismas, tomando como base de análisis el modelo de crisis de tipo de cambio de Krugman (1996). En dicho modelo se plantea una interacción como un juego donde existen dos participantes, el Gobierno y el público; el Gobierno decide si devalúa o no devalúa, mientras que el público forma sus expectativas sobre la evolución del tipo de cambio, en el sentido de que mantienen sus expectativas de precio al nivel corriente del tipo de cambio, o las ajustan a una potencial devaluación. El costo de la diferencia entre el valor fundamental del tipo de cambio, el precio corriente y el precio esperado se modela a

² Dicho proceso ha sido estudiado para la economía argentina en Dapena (2004) que propone una distinción entre el financiamiento de la inversión a través de instrumentos de participación de capital con respecto a instrumentos de deuda, siendo los primeros más resilientes frente a reversión en los flujos de capital, y donde postula la necesidad de generar "colchones" de ahorro interno para fortalecer economías con volatilidad en su producto.

través de una función cuadrática que refleja en términos de costos las diferencias entre los precios corriente, esperado y fundamental, con un término adicional aditivo que adopta un valor positivo si el Gobierno ajusta el tipo de cambio. En dicho modelos las expectativas adquieren un rol fundamental, obligando en algunos casos a una devaluación cuando las mismas cambian. En el presente trabajo adoptamos dicho modelo y generalizamos para reflejar una situación de formación y ajuste de precios en activos (de hecho la moneda lo es también).

A los efectos del desarrollo del modelo, partimos nuevamente desde la definición de valor fundamental o "intrínseco", reflejado en el caso de un activo financiero por el valor presente del flujo de fondos futuro generado por el mismo, mientras que en un activo real, el flujo de fondos es reemplazado por el producto marginal del mismo en cada periodo. Para el caso de un activo con vida infinita, encontramos que dicho valor queda expresado como:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{FF_i}{(1+k)^i} \quad [1]$$

donde FF_i es el flujo de fondos (o producto marginal) generado en el momento i y k es la tasa de descuento relevante (formada en base a la tasa de interés de la economía y eventualmente ajustada por diferentes riesgos). Si a los efectos de la simplificación suponemos que la variable FF crece a una tasa constante g , la fórmula [1] puede ser expresada como³:

$$V_0 = \frac{FF_1}{k-g} \quad [2]$$

con $k > g$ para asegurar un valor finito de V_0 . A partir de [2] observamos que en el proceso de determinación del valor presente de un activo incide la expectativa que tiene el inversor sobre tres elementos: el flujo de fondos corriente o producto marginal, la tasa de descuento y la tasa de crecimiento. No obstante puede existir entre los inversores un consenso en cuanto a la fórmula de valuación a ser utilizada, pueden existir también diferentes estimaciones sobre el flujo de fondos, sobre la tasa de descuento y/o sobre la tasa de crecimiento que debieran utilizarse como inputs ya que las mismas pueden no ser determinísticas, y nada asegura que exista consenso entre los inversores con respecto a sus respectivas distribuciones de frecuencia. Tomando como base lo expuesto anteriormente, cuando los mercados son eficientes desde el punto de vista informativo, los errores de estimación son mínimos ya que existe consenso y divulgación de información; sin embargo con mercado mas imperfectos o tratándose de activos que no tienen oferta pública, el análisis puede ser menos transparente.

Proponemos que el valor fundamental de un activo queda determinado a partir de la formula [2], siendo el mismo consistente con valores fundamentales, "intrínsecos" o de largo plazo de las tres variables de input. En consecuencia, el desajuste entre el precio corriente y el valor fundamental al que hacemos mención al hablar de burbujas puede deberse a un desajuste entre el nivel fundamental de cualquier de dichas variables y la estimación que tienen los inversores de las mismas. A modo de ejemplo, una tasa de crecimiento esperada por encima de la de largo plazo conduce a un desajuste entre el valor fundamental del activo y su valor corriente; de similar manera opera una tasa de descuento basada en una tasa de interés por debajo del nivel de largo plazo o fundamental. Con respecto a esta ultima alternativa, se menciona que un nivel de índices de precios bajos (baja inflación) puede conducir a una "ilusión monetaria" con respecto a tasas de interés bajas, ya que los inversores pueden prestar atención a la tasa nominal y no a la real. Asimismo, en periodo de tasas de interés bajas se puede acceder a mayor nivel de crédito, lo que permite financiar una mayor especulación con su consecuente impacto en el precio de los activos. Los desajustes entre el precio fundamental y corriente

³ Ver Anexo A para el desarrollo matemático de la simplificación.

de un activo pueden deberse entonces a discrepancias en tasas de crecimiento o de interés corrientes con su respecto a su valor de largo plazo.

El costo que provoca esta situación de distorsión de precios o valores los podemos proponer en la siguiente función cuadrática⁴:

$$H = [a(V^* - V) + b(V^e - V)]^2 + C(\Delta V) \quad [3]$$

donde las variables significan:

- V^* = valor fundamental del activo en función de sus variables relevantes de largo plazo (tasa de interés y descuento, crecimiento y determinación del flujo de fondos)
- V^e = valor esperado por el inversor
- V = variable de valor del modelo
- λ = nivel del precio actual del activo
- $C()$ = costo de ajustes para la economía como consecuencia de la corrección en el precio o valor de los activos
 - $C = 0$ si $\Delta V = 0$
 - $C = C$ si $\Delta V \neq 0$
- a y $b > 0$

El primer término de [3] nos dice que existe un costo para la economía cuando el precio corriente, las expectativas de precio y el precio fundamental no se encuentran alineados, mientras que el segundo término expresa que el ajuste desde el precio corriente vigente conlleva un costo para la economía en su conjunto. En términos intuitivos, el primer término expresa los costos reflejados en la incorrecta asignación de los recursos de ahorros como consecuencia de la distorsión en los precios de los activos en el sentido de las ineficiencias expuestas en el trabajo de Yanagawa y Grossman; a su vez el segundo término expone los costos en la economía como consecuencia de un ajuste en los precios de los activos en el sentido expuesto en Caballero y Krishnamurty, donde dicho evento provoca una caída en la capacidad crediticia, potenciales cortes en la cadena de pagos, un efecto riqueza negativo con efectos en el consumo y por ende en el producto.

La variable V^* de la función de ajuste es el valor o precio fundamental ("intrínseco") del activo, consistente con una tasa de descuento y de crecimiento fundamentales o de largo plazo. El precio corriente λ puede diferir tal cual fue expuesto por una falta de alineamiento entre el nivel de las variables en el corto plazo y en el largo plazo. Finalmente, los inversores forman sus expectativas del precio del activo V^e utilizando [1] y sus expectativas con respecto a la tasa de interés o descuento, y a la tasa de crecimiento. Los costos en [3] son nulos cuando $V^e = V^* = \lambda$. En la medida que estos valores de las variables difieren, la función de costos adopta un valor positivo.

Solamente queda por definir quienes interactúan en este modelo. En el modelo de Krugman la interacción se produce entre el público y el Gobierno (este último actuando a través de la fijación del tipo de cambio). Esa situación es mas difícil de repetir en el presente caso, ya que el Gobierno no fija de manera directa el precio de los activos. Sin embargo podemos proponer dos situaciones alternativas a los efectos de la determinación del participante que maneja la variable v : por un lado podemos definir un set de inversores sofisticados o arbitrajistas, que actúa formando precios para los activos ("market makers") y que tienen que interactuar con el resto de los inversores; por otro lado dicha función la puede cumplir el Banco Central que a través de su política monetaria determina la oferta de crédito y la tasa de interés de la economía⁵, actuando de manera indirecta en la determinación del

⁴ Similar a la utilizada por Krugman en su análisis de tipo de cambio

⁵ En la sección 4.1 se expone brevemente acerca del rol del Banco Central frente a una burbuja de precios de activos financieros.

precio de los activos a través de [1]⁶. Cualquiera de las dos situaciones dan lugar a un actor que interactúa con el común de los inversores, y al que denominaremos regulador. Frente a este juego, el inversor promedio tiene dos alternativas, mantener su expectativa de precio en el nivel del valor corriente, o ajustar la expectativa a su valor de largo plazo; el regulador también tiene dos alternativas u opciones, afectar el valor corriente de los activos a través de comprar o vender al precio fundamental (o a través de movimientos de la tasa de interés), o dejarlo constante en su actual valor. Como veremos, en este juego es crucial el rol de las expectativas de los inversores en el mantenimiento de un equilibrio.

Caso 1: los inversores esperan ajuste de precios

Supongamos que el regulador ajusta el precio corriente a su valor de largo plazo a través del manejo de la tasa, tal que $V = V^*$; en consecuencia si el inversionista espera también ajuste de precios hacia su valor fundamental, entonces $V^* = V^c$; reemplazando en [3] obtenemos:

$$H = [a(V^* - V^*) + b(V^* - V^*)]^2 + C \quad [4]$$

de donde se sigue que

$$H = C \quad [5]$$

Es decir el proceso de alineamiento de precios indica que se asume la totalidad del costo de ajuste en el precio de los activos, eliminando la distorsión.

Siguiendo con el caso 1, tomemos ahora la situación en la que el regulador no ajusta el precio, aún cuando el inversor espera ajuste de precios hacia su valor fundamental; en ese caso tenemos que $V = \lambda$ que reemplazando en la función de costos permite obtener:

$$H = [a(V^* - \lambda) + b(V^* - \lambda)]^2 \quad [6]$$

y resolviendo

$$H = [(a + b) * (V^* - \lambda)]^2 \quad [7]$$

de lo expuesto se sigue que si el mercado espera ajuste de precios hacia su valor fundamental, la decisión de ajustar el mismo dependerá del costo de ajuste que se soporta como consecuencia del proceso; en la medida que $[5] > [7]$ no habrá ajuste, mientras que de suceder que $[5] < [7]$ entonces si habrá ajuste de precios para eliminar las distorsiones en la asignación de recursos. Vemos que la diferencia entre V^* y λ en [7] es un factor determinante al momento de tomar la decisión entre ajustar o no; mientras mas alta sea la diferencia, mayor será la necesidad de ajuste (lo que es consistente con el resultado de Yanagawa y Grossman, en el sentido que la economía está dispuesta a soportar burbujas en la medida que las mismas no sean significativas).

Caso 2: los inversores no esperan ajuste de precios

⁶ Al respecto existen discusiones sobre el rol que debe cumplir un Banco Central frente a la existencia de potenciales burbujas en el precio de activos. Por un lado se sostiene que mientras las mismas nos afecten el nivel de precios de la economía, ni generen potenciales daños, el Banco Central no debe inmiscuirse. Sin embargo es difícil sostener que una burbuja de precios puede no ser dañina para la economía, ya que su ruptura puede ocasionar efectos adversos en el agregado, inclusive afectando el sistema financiero en su conjunto en el caso que los activos sujetos a burbujas sean colaterales de créditos otorgados por los bancos, ya que los balances de los mismos se pueden ver perjudicados.

Tomemos ahora el caso en el que los inversores no esperan un ajuste de precios por parte del regulador, siendo $V^e = \lambda$. Dada esta situación, es conveniente ver el impacto que tiene la decisión del regulador de ajustar el valor de la variable fundamental a su nivel de largo plazo. Analicemos primero el resultado donde el regulador ajusta precios (por ejemplo a través de mover la tasa de interés) teniendo en cuenta que las expectativas de los inversores se mantiene soportando el valor corriente. Dada esa situación, la pregunta es cuanto debe ajustar el precio el regulador para minimizar el costo de ajuste. Tomando [3] y reemplazando V^e por λ :

$$H = [a(V^* - V) + b(\lambda - V)]^2 + C \quad [8]$$

minimizamos H con respecto a la variable V, para lo cual calculamos la condición de primer orden y la igualamos a cero, obteniendo que:

$$\frac{\partial H}{\partial V} = 2[a(V^* - V) + b(\lambda - V)] = 0 \quad [9]$$

de donde surge que el ajuste óptimo debiera llevar el precio del activo hasta:

$$\hat{V} = \frac{aV^* + b\lambda}{(a + b)} \quad [10]$$

siendo a y b positivos, se sigue que:

$$\hat{V} > V^* \quad [11]$$

es decir que aún cuando exista la intención de llevar el valor de los activos hacia su precio fundamental o "intrínseco", el hecho que las expectativas de los inversores no estén ajustadas implica que el grado de ajuste del regulador no puede ser total sino solo parcial, a los efectos de minimizar el costo del mismo, llevando el ajuste hacia un precio o valor intermedio entre V^* y λ , ponderado en función de los parámetros a y b respectivamente⁷. Reemplazando el resultado [10] en [8] y resolviendo, obtenemos que el costo asociado al ajuste será de :

$$H = C \quad [12]$$

Finalmente, el último caso se encuentra asociado a que el inversor no espera ajuste de precios, y tampoco hay ajuste por parte del regulador, aún sabiendo que el precio corriente de los activos se encuentra desalineado con su valor fundamental o de largo plazo. Dada esa situación $V = \lambda$, y la función de costos [3] queda expresada como:

$$H = [a(V^* - \lambda) + b(\lambda - \lambda)]^2 \quad [13]$$

resolviendo

$$H = [a(V^* - \lambda)]^2 \quad [14]$$

que es menor a [7].

⁷ Como vemos, el ajuste no será total si no parcial, pero operando de manera continua sobre las expectativas, se puede lograr una dinámica de ajuste gradual, en el sentido que el cambio en los precios modifica expectativas, procediendo a un segundo ajuste definitivo.

cada inversor debe contrastar su set de información privada con el set agregado que le muestra el mercado, y decidir en consecuencia; Dapena (2005) trabaja sobre un modelo de decisiones de inversión-desinversión en base a opciones reales en contextos de información imperfecta e interacción entre agentes, donde puede originarse situaciones de "cascadas informacionales"⁹ que den lugar a comportamientos de manada, rompiendo en el caso del presente modelo una burbuja de una manera abrupta y desordenada. En ese sentido podemos complementar la presente propuesta con el trabajo ya mencionado de Abreu y Brunnermeier (2003), donde existe dificultad en los inversores para coordinar sus estrategias, y la irrupción de noticias de eventos (que inclusive puede tener poca relevancia informativa) actúa como "sincronizador" de las acciones, provocando una ruptura de la burbuja; en los términos del modelo presentado en el presente trabajo, dichos eventos moverían las expectativas de (2) a (1) sincronizando las mismas y gatillando el proceso de ajuste.

4 Casos de discusión de algunas situaciones recientes

El propósito de la presente sección es proporcionar de manera sintética cuatro ejemplos (dos internacionales, y dos domésticos) catalogados como burbujas de precios de activos, y ensayar una explicación acerca de cual de los enfoques propuestos en la literatura y en el presente trabajo pueden ser aplicados a los efectos de interpretar los acontecimientos.

4.1 Burbuja inmobiliaria en Japón 1981-1989

Durante la década de los 80 la economía japonesa experimentó un boom en los precios de las acciones y sobre todo en los precios de los bienes inmobiliarios. Los precios de los activos se incrementaron en un múltiplo de cuatro en el periodo de 1981 a 1989. Se cita que las causas de la misma se pueden rastrear en una política monetaria demasiado laxa¹⁰ con tasas de interés relativamente bajas y con un nivel de precios de bienes al consumidor bajo debido en parte a la fortaleza del yen. El incremento en los precios de los activos resultaba de una tasa de interés por debajo de su valor fundamental, en los términos de [2], con un abundante crédito doméstico a través del sistema bancario. No obstante ya en 1987 existía preocupación por la situación, recién en 1989 el Banco Central intervino; según Miller (1996) no se produjo antes la intervención dado que el nivel de precios al consumidor no justificaba la suba en la tasa de interés, y por otro lado existían presiones políticas para mantener la demanda doméstica japonesa alta para reducir el déficit comercial con Estados Unidos (un enfriamiento de la economía habría provocado una caída en las importaciones). La tardanza en ajustar los precios se puede ver reflejada en los términos del modelo presentado en este trabajo, donde altos costos C incrementan la potencial distorsión de precios entre el valor corriente y el valor fundamental, provocando que posteriormente el resultado de dicho ajuste sobre la economía sea potencialmente mas dañino. A pesar que no existe consenso entre los expertos sobre cuando debe actuar un Banco Central frente a burbujas de precios de activos; si se puede afirmar que su explosión tiene efectos recesivos. En algunos casos se sostiene que el Banco Central debe actuar preventivamente, subiendo la tasa antes que la burbuja reviente y provocando eventualmente su ruptura; en otros se sostiene que debe esperar a que la burbuja este madura y una vez que la misma explota a partir de allí el Banco Central intervenga con su política monetaria. Inclusive Abreu y Brunnermeier (2003) sostiene que en caso que se ataque una burbuja antes que la misma se encuentre madura y el intento fracasa, esto puede reforzar la espiral ascendente de precios. Se presenta en la literatura que las burbujas suceden en entornos de tasas de inflación bajas, y es por ello que el Banco Central no encuentra motivos para subir la tasa de interés¹¹. Sin embargo Goodheart (1999) sostiene que el enfoque de índice de precios que monitorea un Banco Central cuando decide su política monetaria debiera ser mas amplio, para incorporar los precios de

⁹ Como la dinámica expuesta en el trabajo pionero de Banerjee (1982)

¹⁰ Geoffrey Miller (1996).

¹¹ De acuerdo a The Economist, las tres burbujas de precios mas grandes de la historia, Estados Unidos 1920, Japón 1980 y Estados Unidos 1990, se desarrollaron con bajos niveles de inflación.

activos financieros, ya que un desalineamiento de los mismos respecto de sus valores fundamentales puede provocar daños reales en la economía.

4.2 Burbuja de acciones de empresas de Internet

Durante la década del '90 el mercado de capitales estadounidense tuvo una verdadera revolución como consecuencia del avance tecnológico, la expansión de las telecomunicaciones y la irrupción masiva de Internet. De 1991 a 1999 los precios de las acciones en Estados Unidos se multiplicaron por un factor mayor a cuatro, hasta comenzar a caer en Marzo de 2000. Quienes justificaban la suba en los precios mencionaban un gran incremento en la productividad con efectos en las tasas de crecimiento de las ganancias, en un entorno de nivel de precios al consumidor bajos, y de tasas de interés bajas que alimentaban el crédito. De acuerdo a *The Economist*, ya en 1999 el nivel de precios de las acciones se encontraba mas sobrevalorado que en las vísperas de los caídas de 1929 y 1987, lo que de alguna manera anticipaba el desenlace. Los informes de dicha época mencionaban que los inversores podían estar influenciados por expectativas poco realistas acerca del crecimiento de las ganancias de las firmas, y estaban convencidos que los métodos tradicionales de valuación eran redundantes. Esta expresión puede quedar perfectamente encajada en los términos de la ecuación [2] donde una alta expectativa acerca de la tasa de crecimiento g , combinado con una baja tasa de interés (baja en relación a su potencial nivel de largo plazo), generaban una expectativa acerca de V que era inconsistente con su valor fundamental. A los efectos de ensayar una explicación, podemos combinar el modelo aquí presentado con el de Abreu y Brunnermeier (2003). A inicios de 2000 se inicia el juicio a la empresa Microsoft, que puede proponerse como hipótesis de noticia "sincronizadora" actúa como noticia sincronizadora; este evento puede haber provocado un cambio en las expectativas acerca del verdadero precio (en los términos del modelo aquí presentado, el equilibrio de expectativas pasa en la figura 1 de $\{2\}$ a $\{1\}$), lo que conlleva la necesidad de un ajuste. Existe consenso en que la Reserva Federal actuó de manera prudente, esperando que la burbuja explotase y promoviendo una política monetaria acomodaticia, subiendo las tasas de interés pero al mismo tiempo inyectando cierta liquidez, que permitiese minimizar el tiempo en el que la economía estadounidense estuvo en recesión.

4.3 Burbuja de tipo de cambio en Argentina

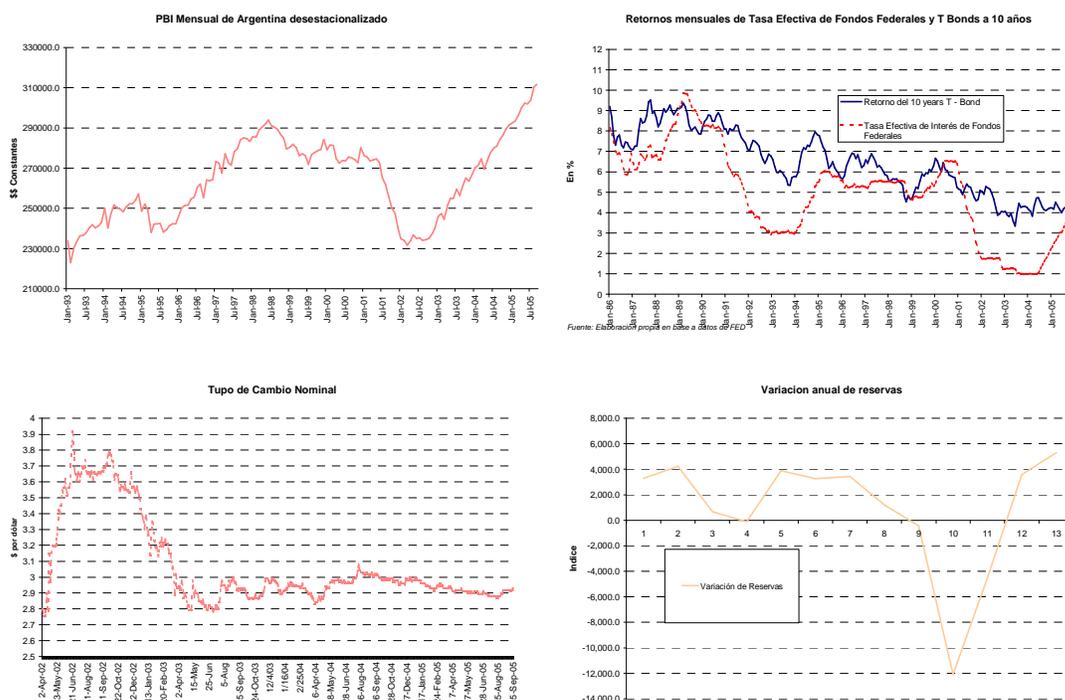
La economía argentina creció a tasas bastante significativas durante la década del '90, alcanzando su Producto Bruto Interno su máximo histórico a mediados de 1998, momento en que fue afectado por la crisis de la economía rusa¹². Hasta ese momento la economía daba señales de vigorosidad, inclusive hasta haber sorteado con éxito la crisis mexicana de 1994. El tipo de cambio estaba fijo con un sistema de convertibilidad con el dólar estadounidense, y la autoridad monetaria incrementaba su nivel de reservas de divisas con base en la entrada de capitales, ya que la cuenta corriente era negativa. A mediados de 1998 la economía entró en un derrotero que alternaba esperanzas de recuperación combinado con caídas, hasta que finalmente a principios de 2002 se abandonó el sistema de convertibilidad con una crisis de gran magnitud. La pregunta de discusión a formularse en este caso es si existía una burbuja de tipo de cambio. Nuevamente, utilizando la formula [2], y haciendo uso que dos variables que provocan influencia en el tipo de cambio son la tasa de interés (en este caso la tasa internacional de referencia, dada por la tasa de interés de fondos federales de la Reserva Federal de Estados Unidos), encontramos que tanto una tasa baja internacional, como un alto nivel de crecimiento de la economía generan un incremento en el precio de los activos en moneda local (apreciación de la moneda); con convertibilidad, la apreciación se manifiesta a través del incremento de las reservas. Cuando cambia dicho entorno, el tipo de cambio queda desacomodado, por lo que de no producirse el ajuste, la economía pierde reservas (hasta el punto que tuvo que solicitarse la asistencia de los organismos multilaterales, a los efectos de defender la convertibilidad). En caso que no logre restablecerse el crecimiento, el precio del tipo de cambio o lo que es equivalente de los activos denominados en moneda local debe ajustarse. Sin embargo, la economía argentina se encontraba con

¹² Una reseña puede ser leída en Dapena (2004).

altos costos de salida de la convertibilidad (el costo C en los términos del modelo expuesto) ya que existían depósitos en dólares que daban lugar a la existencia de un multiplicador monetario en dicha moneda, lo que provocaba un descalce en el sistema financiero en plazos y en moneda., lo que puede haber llevado a forzar el sistema hasta el límite, justificando la necesidad de una gran distorsión entre el precio corriente del tipo de cambio y su precio fundamental que justificase el ajuste. La salida de la convertibilidad coincidió con el “default” de la deuda soberana, y en 2002 el tipo de cambio nominal paso de \$1 a casi \$4 por dólar, para posteriormente apreciarse.

En los siguientes gráficos podemos observar la evolución de cuatro variables relevantes: dinámica del producto real, evolución de las tasas de interés en Estados Unidos, evolución del tipo de cambio nominal y la variación anual de reservas del Banco Central de Argentina.

Gráfico 1



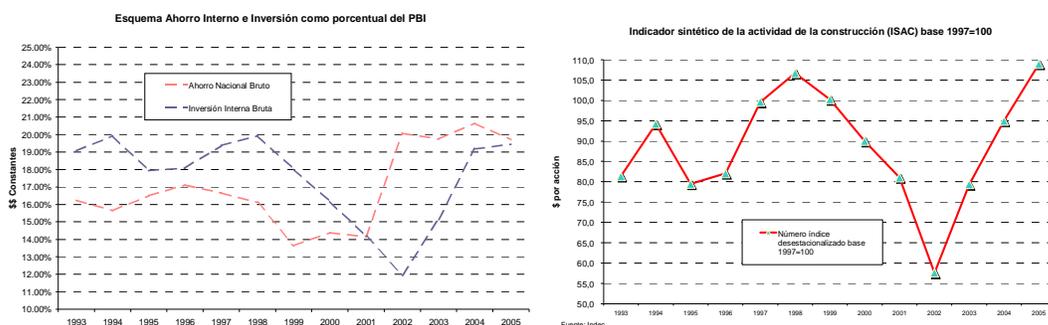
Los gráficos son interesantes de ser analizados desde el punto de vista del modelo expuesto. Un cambio en las expectativas internacionales con respecto a la economía argentina puede afectar la tasa de crecimiento, limitando la capacidad de crédito de la economía cuando la misma es muy dependiente de los flujos internacionales, dejando desalineado el tipo de cambio. El modelo puede sostenerse recreando expectativa de crecimiento, pero de cambiar las mismas, de acuerdo a lo expuesto el ajuste se vuelve necesario.

4.4 Burbuja de precios inmobiliarios en Argentina

El cuarto caso de discusión que podemos sugerir es el que actualmente se esta discutiendo acerca del mercado inmobiliario en Argentina, donde actualmente varios artículos periodísticos han estado analizando dicho fenómeno en términos de burbujas. El ensayo de explicación para este caso puede venir originado de manera diferente que en los casos anteriores. No obstante la economía argentina ha crecido significativamente desde la crisis de 2001/2002 lo que nuevamente genera una tendencia hacia la apreciación de la moneda y de los activos denominados en la misma, de los cuales los bienes inmuebles (no transables) son la mayor expresión, da la impresión que la explicación a la persistente

suba en los precios de ciertos activos inmobiliarios puede venir dada mas por los enfoques de Tirole (1985) y Ventura (2003), donde la burbuja se produce como consecuencia del subdesarrollo de los mercados de capitales donde existe poca variedad de alternativas de depósito de valor en la asignación de ahorros (luego de la crisis en el sistema financiero los depósitos en bancos todavía no generan mucho entusiasmo, el Gobierno no tiene una necesidad compulsiva de colocación de deuda ya que su manejo fiscal ha sido razonablemente prudente, la sofisticación financiera no alcanza a toda los potenciales inversores lo que limita el acceso a por ejemplo inversiones en acciones de empresas cotizantes, y finalmente la tendencia del peso es hacia su apreciación real con respecto al dólar) lo que deriva un razonable caudal de fondos hacia el sector inmobiliario. Este fenómeno ha motivado que entre los motores del crecimiento de la economía se haya encontrado la construcción, pero pone un signo de alerta en el sentido de lo expuesto por Yanagawa y Grossman (1992) donde se puede generar un exceso de derivación de ahorros hacia dicho sector, restando recursos de ahorro para otro tipo de inversiones que pueden ser necesarias para el sostenimiento del crecimiento. Asimismo, es difícil encontrar evidencia que muestre que la suba en los precios inmobiliarios es una consecuencia de bajas tasas de interés y significativo nivel de crédito, ya que el monto de créditos hipotecarios otorgado por los bancos es poco significativo con respecto al Producto de la economía, siendo que la mayor parte de la inversión en construcción estaría siendo financiada con generación de ahorros propios. Los siguientes gráficos (evolución del nivel de ahorro nacional con respecto a la inversión bruta, y evolución del índice de construcción), combinado con el que expone la evolución del producto expuesto mas arriba

Gráfico 2



dan una idea del proceso de sustento de los precios de los activos inmobiliarios. Es cierto que la suba de precios se tiene que ver alimentada necesariamente por las expectativas de posteriores apreciaciones, pero a diferencia de los casos mencionados anteriormente, en este caso la imperfección del mercado de capitales y la falta de variedad de alternativas de inversión, combinados con un crecimiento del producto bastante significativo y con niveles de ahorro significativamente altos, pueden estar alimentando a suba en los precios a través de derivar fondos hacia la construcción y el sector inmobiliario.

5 Conclusiones

Las burbujas en precios de activos son objeto de atención en la literatura en economía y finanzas, mas aún a partir del atractivo mediático que dichos términos generan. En un contexto racional no es posible admitir la existencia de las mismas, ya que la condición de transversalidad en modelos dinámicos con horizontes infinitos excluye senderos explosivos en los precios de los activos. Sin embargo cuando existen generaciones superpuestas, y los horizontes de planificación son finitos, pueden surgir burbujas en un contexto de comportamiento racional con optimización. En la mayoría de los casos actúan como depósito de valor frente al subdesarrollo en los mercados financieros y sus alternativas. Asimismo, la existencia de burbujas también tiene un componente de teoría de juego basado en la

interacción entre los participantes y las expectativas que maneja con respecto a la futura evolución de los precios, donde dichas expectativas constituyen un elemento fundamental en la explicación de las burbujas. En dicho sentido hemos desarrollado el presente trabajo exponiendo en base a un modelo de costos de ajuste entre precios esperados, precios corrientes y precios fundamentales acerca de la importancia de las expectativas en el sostenimiento de un equilibrio con burbujas en los precios; en el modelo presentado las expectativas juegan un rol fundamental, y el ajuste se hace necesario en algunas situaciones cuando las mismas cambian, debido por ejemplo a algún factor de tipo “sincronizador”, donde situaciones en las que no era óptimo ajustar los precios pueden, frente a un cambio e las expectativas, hacer necesario un ajuste. De ello se sigue que el rol de formación y manejo de expectativas de los inversores juega un rol fundamental en la prevención y manejo de dichas burbujas de precios. No hemos establecido en el modelo el motivo por el cual las expectativas pueden cambiar, pero podemos sugerir que existen eventos exógenos que en algún momento gatillan un reajuste de las expectativas, y que inician el proceso de ajuste en los precios. Dado este ajuste, la dinámica mas apropiada para hacer frente a una potencial burbuja de precios podría ser una donde la transición de las expectativas de los agentes se produce de manera gradual, continua en el tiempo, y suavizada. Sin embargo en situaciones de información imperfecta, puede darse el caso que un evento exógeno provoque un cambio abrupto en las expectativas, que alimentado por efectos sobre las conductas de los inversores y bajo los efectos de potenciales de "cascadas informacionales" provoque un daño significativo a la economía a pesar del esfuerzo por mantener bajo control el proceso. En la parte final del artículo se propusieron algunas situaciones que pueden actuar como casos de discusión, a los efectos de ilustrar los diferentes enfoques al respecto. Como desafíos en futuras investigaciones, es interesante proponer la identificación de eventos que pueden actuar como "sincronizadores" testeando su relevancia, como así también analizar el modelo considerando costos C endógenos en función de la distorsión de precios, y definiendo interacciones entre participantes que provoquen efectos de "manada" que ayuden a mejorar la comprensión que se tiene de este tipo de fenómeno en los precios de los activos.

Referencias

- Abreu D. y Brunnermeier M. (2003), "Bubbles and Crashes". *Econometrica* 71(1) 173-204.
- Banerjee A. (1992), "A Simple Model of Herd Behavior". *Quarterly Journal of Economics* 107, 797-817
- Black F. (1986). "Noise ". *Journal of Finance* 41, 529-543
- Caballero R. y Krishnamurty A. (2005), "Bubbles and Capital Flow Volatility: Causes and Risk Management ", NBER Working paper 11618
- Dapena J. (2004), "Absorción de Shocks en Economías Volátiles: Ahorro a través de acciones en el mercado de capitales, el caso argentino 1993 - 2001", UCEMA Working paper.
- Dapena J. (2005), "Decisiones de Inversión y Abandono en Contextos de Agregación Imperfecta de Información", UCEMA Working paper.
- Fama E. (1970). "Efficient Capital Markets ". *Journal of Finance* 25, 383-423
- Garber P. (1990) "Famous First Bubbles". *Journal of Economic Perspectives*, 4:2 35-54
- Goodheart C. (1999). "Time, Inflation and Assets Prices ". *Eurocast Conference* Agosto
- Grossman S. y Stiglitz J. (1980). "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets". *American Economic Review* 70, 393-408
- Hirschleifer J. (1958), "On the Theory of Optimal Investment Decision", *Journal of Political Economy* 66: 329-352.
- Krugman, P. (1996) "Are currency crises self-fulfilling?" *NBER Macroeconomics Annual*
- Miller G. (1996), The Role of a Central Bank in a Bubble Economy, *Cardozo Law Review*, 18:3 Diciembre
- Obstfeld M. y Rogoff K. (1996), *Foundations of International Macroeconomics*, The MIT Press
- Shleifer A. y Summers L. (1990). "The Noise Trader Approach to Finance". *Journal of Economic Perspectives* 4 (Primavera)
- Tirole J. (1982), "On the Possibility of Speculation under Rational Expectations", *Econometrica* 50 6, 1163-1182
- Tirole J. (1985), "Asset Bubbles and Overlapping Generations", *Econometrica* 53 6, 1499-1528
- Tobin J. (1969), "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory". *Journal of Money, Credit and Banking* 1 (Febrero): 15-29.
- Yanagawa N. y Grossman G. (1992), "Asset Bubbles and Endogenous Growth ", NBER Working paper 4004.
- Ventura J. (2003), "Economic Growth with Bubbles", Unfinished Working paper.

Articulos

“Hubble, bubble and asset trouble” *The Economist* edición del 23 de Setiembre de 1999

Anexo A - Un modelo de Valuación de Activos con Horizonte Infinito

Conforme el cálculo estándar de valor presente neto de los flujos de fondos generados por un activo¹³, el valor de un flujo de fondos futuro surge de:

$$V_t = \frac{FF_{t+1}}{(1+k)} + \frac{FF_{t+2}}{(1+k)^2} + \frac{FF_{t+3}}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{FF_{t+i}}{(1+k)^i} \quad (A.1)$$

donde V_t es el valor al momento t , FF_{t+i} es el flujo de fondos generado por el activo en el período $t+i$, y k es la tasa de descuento relevante. Si los flujos de fondos son constantes de la forma $FF_{t+1}=FF_{t+2} = \dots=FF_{t+i}$, se tiene que:

$$V_t = FF_{t+1} * \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^i} = FF_{t+1} * \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \quad (A.2)$$

donde

$$\lambda = 1/(1+k) \quad (A.3)$$

Si se resta de (D.2) el término λV_t se obtiene que:

$$V_t - \lambda V_t = FF_{t+1} \lambda \quad (A.4)$$

de donde el valor V_t será:

$$V_t = \frac{FF_{t+1} \lambda}{1 - \lambda} = \frac{FF_{t+1}}{k} \quad (A.5)$$

Siguiendo el mismo esquema de cálculo, si el flujo de fondos FF_t crece a la tasa constante g , se encuentra que:

$$V_t = FF_{t+1}/(k-g) \quad (A.6)$$

donde k es la tasa de descuento relevante y g es la tasa de crecimiento constante. Esta fórmula surge de

$$V_t = \frac{FF_t * (1+g)}{(1+k)} + \frac{FF_{t+2} * (1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{FF_{t+3} * (1+g)^3}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{FF_{t+i} * (1+g)^i}{(1+k)^i} \quad (A.7)$$

pero siendo $FF_{t+1} = FF_t (1+g)$, $FF_{t+2} = FF_t (1+g)^2$, ..., $FF_{t+i} = FF_t (1+g)^i$, entonces

$$V_t = FF_t * \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1+g)^i}{(1+k)^i} = FF_{t+1} * \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \quad (A.8)$$

donde ahora $\lambda = (1+g)/(1+k)$, y para asegurar convergencia, $g < k$. Si resta de V_t el siguiente término λV_t , se obtiene que:

$$V_t - \lambda V_t = FF_t \lambda \quad (A.9)$$

de donde el valor será el que se expone en (D.6)

¹³ Ver Hirschleifer (1985), o cualquier libro de texto básico de finanzas corporativas, tal como Brealey y Myers (1996).

$$V_t = \frac{FF_{t+1}\lambda}{1-\lambda} = \frac{FF_{t+1}}{k-g} \quad (\text{A.10})$$

El modelo puede ser fácilmente extendido a n etapas de crecimiento atendiendo las diferencias.