

Brinkmann, Gerhard

Working Paper

Die Verwendung des Euler-Theorems zum Beweis des Adding-up-Theorems impliziert einen Widerspruch

Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 51-95

Provided in Cooperation with:

Fakultät III: Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Universität Siegen

Suggested Citation: Brinkmann, Gerhard (1995) : Die Verwendung des Euler-Theorems zum Beweis des Adding-up-Theorems impliziert einen Widerspruch, Volkswirtschaftliche Diskussionsbeiträge, No. 51-95, Universität Siegen, Fakultät III, Wirtschaftswissenschaften, Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsrecht, Siegen

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/83213>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

**Die Verwendung des Euler-Theorems zum Beweis
des Adding-up-Theorems impliziert einen
Widerspruch**

von

Gerhard Brinkmann

Universität – GH – Siegen

Diskussionsbeitrag Nr. 51-95

Gliederung

- 1 Inhaltsübersicht
- 2 Linear-homogene Produktionsfunktion, Gewinnmaximierung und die Ausschöpfung des Ertrages
 - 2.1 Der Beweis
 - 2.2 Der Widerspruch
 - 2.3 Corollarien
 - 2.4 Die Behandlung des Problems in der Literatur
- 3 Linear-homogene Produktionsfunktion, Kostenminimierung und die Ausschöpfung des Ertrages
- 4 Der Beweis von Barone
- 5 Der Übergang von den Mikrofunktionen zur makroökonomischen Produktionsfunktion
- 6 Entscheidung über die empirische Wahrheit des Theorems durch die Empirie

Literaturverzeichnis

Zusammenfassung/Summary

DER BEWEIS DES AUSSCHÖPFUNGSTHEOREMS

1 Inhaltsübersicht

Das Ausschöpfungstheorem spielt in der neoklassischen Wirtschaftstheorie seit 100 Jahren eine prominente Rolle (s. BLAUG 1985, S. 439-454; NIEHANS 1990, S. 251-253; STEEDMAN 1987; STIGLER 1941, S. 320-387). Die meisten Versuche es zu beweisen nehmen als eines ihrer Axiome an, daß die Produktionsfunktion linear-homogen ist, und leiten dann mit Hilfe des Euler-Theorems ab, daß der Erlös ohne Rest an die Produktionsfaktoren verteilt wird (Abschnitte 2.1 und 3). Ich behaupte, daß diese Beweise einen Widerspruch implizieren (Abschnitte 2.2 und 3). Die Argumente sind sämtlich wohlbekannt und werden dennoch von vielen Publikationen nicht zur Kenntnis genommen. Ja, es gibt Autoren, die zeigen, daß das Ausschöpfungstheorem bei linear-homogener Produktionsfunktion nicht gelten kann und die es dann dennoch unter dieser Bedingung in derselben Veröffentlichung als gültig annehmen; andere Autoren versuchen, die Stichhaltigkeit der Argumente zu widerlegen, was ihnen meiner Meinung nach nicht gelingt (Abschnitt 2.4).

Der einzig gültige Beweis scheint mir der von Barone zu sein, der eine inhomogene (ertragsgesetzliche) Produktionsfunktion voraussetzt (Abschnitt 4). Solche inhomogenen mikroökonomischen Funktionen zu einer makroökonomischen linear-homogenen Produktionsfunktion zu aggregieren, in der das Ausschöpfungstheorem wiederum mit Hilfe des Euler-Theorems bewiesen wird, halte ich für unmöglich (Abschnitt 5).

Zum Schluß wird daran erinnert, daß über die empirische Wahrheit oder Falschheit des Theorems die Empirie zu entscheiden hat (Abschnitt 6).

Dieser Aufsatz ist ein Versuch, bekannte Aussagen, die in Teilen der Literatur in Vergessenheit geraten zu sein scheinen, in die Erinnerung zurückzurufen.

2 Linear-homogene Produktionsfunktion, Gewinnmaximierung und die Ausschöpfung des Ertrages

2.1 Der Beweis

Die meisten Autoren, die zum Beweis des Ausschöpfungstheorems von einer linear-homogenen Produktionsfunktion ausgehen, unterstellen der Unternehmung das Ziel der Gewinnmaximierung (z.B. BARTMANN 1981, S. 99f.; KRELLE 1962, S. 53; KÜLP 1994, S. 34 und S. 104-109; RAMSER 1987, S. 132-136; SCHUMANN 1992, S. 152f.; WITTMANN 1968, S. 145). Der Beweis wird wie folgt geführt:

Gegeben sei

eine Einproduktunternehmung, die nach einer Produktionsfunktion

$$(1) \quad y = f(x_1, \dots, x_n),$$

y : Menge des Produktes, > 0 ,

x_i : Einsatzmenge des Faktors i , > 0 ,

i : $1, \dots, n$,

produziere und die eine Gewinnfunktion

$$(2) \quad G(x_1, \dots, x_n) = pf(x_1, \dots, x_n) - \sum_i x_i q_i,$$

G : Gewinn,

p : Preis des Produktes, gegeben und konstant, > 0 ,

q_i : Preis des Faktors i , gegeben und konstant, > 0 ,

besitze, die sie maximieren wolle. Die Produktionsfunktion (1) sei linear-homogen und in allen Variablen stetig differenzierbar; dann ist auch die Gewinnfunktion (2) linear-homogen, und umgekehrt. Wenn die Produktionsfunktion nicht linear-homogen ist, dann auch nicht die Gewinnfunktion, und umgekehrt.

Behauptung 1:

Im Punkte $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, der im Inneren des Definitionsbereiches liegt, besitze $G(x_1, \dots, x_n)$ ein strenges Maximum. In X^0 gilt dann das Ausschöpfungs-theorem:

$$(3) \quad pf(x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_i x_i^0 q_i.$$

Beweis:

Wenn G in X^0 ein strenges Maximum besitzt, gilt dort das Grenzproduktivitätstheorem, die notwendige Bedingung 1. Ordnung für ein strenges Maximum von G (X^0 ist stationärer Punkt von G):

$$(4) \quad \forall i \left[\frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i} \cdot p = q_i \right].$$

Von der Bedingung zweiter Ordnung (oder den Bedingungen höherer Ordnung) ist meistens nicht die Rede.

Nach dem Euler-Theorem gilt für die linear-homogene Produktionsfunktion (1):

$$(5) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Gleichung (5) mit p erweitert ergibt

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pf}(x_1, \dots, x_n) = p \sum_i x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \\ \text{(4)} \end{array} \right. = \sum x_i q_i \quad \text{in } (x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \text{q.e.d.}$$

2.2 Der Widerspruch

Der Widerspruch in der skizzierten Verwendung des Euler-Theorems wird generiert durch die Behauptung 3. Um diese zu beweisen, wird zunächst Behauptung 2 aufgestellt und bewiesen.

Behauptung 2:

Wenn die Produktionsfunktion $f(x_1, \dots, x_n)$ und damit die Gewinnfunktion $G(x_1, \dots, x_n)$ homogen vom Grade eins sind, existiert kein strenges Gewinnmaximum.

Beweis (indirekt durch Nachweis eines Widerspruchs zwischen den notwendigen Eigenschaften eines strengen Maximums und einer linear-homogenen Funktion):

Wenn die linear-homogene Gewinnfunktion G , wie angenommen, ein strenges Maximum in X^0 besitzt, dann gilt dort wegen des Euler-Theorems wie bewiesen [Gleichungen (3) bis (6)]:

$$(7) \quad G(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0.$$

Wegen der linearen Homogenität von G gilt auch

$$(8) \quad \forall t > 0 \left[G(tx_1^0, \dots, tx_n^0) = tG(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0 \right],$$

was der Annahme widerspricht, daß G in X^0 ein strenges Maximum habe. q.e.d.

Der Beweis gilt für jede differenzierbare linear-homogene Funktion: Keine Funktion eines solchen Types besitzt ein strenges Maximum.

Behauptung 3:

Die Gewinnfunktion G kann nur dann ein strenges Maximum besitzen, wenn die Produktionsfunktion und damit die Gewinnfunktion nicht linear-homogen sind.

Beweis:

Da, wie zu Behauptung 2 bewiesen, keine linear-homogene Funktion ein strenges Maximum besitzt, ist jede Funktion, die ein solches Maximum besitzt, nicht linear-homogen (diese Eigenschaft ist natürlich nicht hinreichend, aber auf jeden Fall notwendig). q.e.d.

Bei der dargelegten Verwendung des Euler-Theorems zum Beweis des Ausschöpfungstheorems muß man also einerseits annehmen, daß die Gewinnfunktion und damit die Produktionsfunktion homogen vom Grade eins sind; andererseits, daß die Gewinnfunktion und damit die Produktionsfunktion nicht homogen vom Grade eins sind.

2.3 Corollarien

Corollarium A

Aus den Ausdrücken (7) und (8) folgt: Wenn es *einen* stationären Punkt X^0 von G gibt (s. dazu Corollarium B), dann beliebig viele; in jedem dieser Punkte gilt $G = 0$. Es kann von dem Modell kein Punkt angegeben werden, den die Unternehmung realisieren sollte: Nachfrage der Firma nach Faktoren und Produktionsmenge der Firma sind indeterminiert. Deshalb ist auch kein gesamtwirtschaftliches Gleichgewicht bestimmbar, wenn alle Firmen nach derselben linear-homogenen Produktionsfunktion produzieren.

Corollarium B

Wenn die Firma bei gegebenen konstanten Faktorpreisen Kostenminimierung betreibt, impliziert diese Verhaltensweise bei jeder von außen vorgegebenen Produktmenge Konstanz des Verhältnisses der Grenzproduktivitäten, diese wiederum bei linear-homogener Produktionsfunktion Konstanz jeder einzelnen Grenzproduktivität:

$$(9) \quad \forall i \left[\begin{array}{l} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \text{const.} \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \dots : \frac{\partial f}{\partial x_n} = \text{const.} \right. \end{array} \right].$$

Bei gelungener Kostenminimierung und linear-homogener Produktionsfunktion treten das Grenzproduktivitätstheorem und damit die Ausschöpfung des Ertrages also nur ein, wenn gilt:

$$(10) \quad \forall i \left[\frac{\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}}{\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{const.}}} = \frac{\overbrace{q_i}^{\text{const.}}}{\underbrace{p}_{\text{const.}}} \right].$$

Die Produktmenge muß auch in diesem Fall, um es zu wiederholen, modellexogen bestimmt werden; andernfalls ist sie unbestimmt (s. Corollarium A).

Corollarium C

Gleichung (10) wie auch Gleichungen (7) und (8) implizieren, daß bei gegebenen Preisen oder Preisrelationen, linear-homogener Produktionsfunktion und einem Gewinn von null, gleichgültig, welche Produktmenge die Firma herstellt, auch das Verhältnis der Faktoren zueinander konstant ist:

$$(11) \quad \forall i \quad \left[\begin{array}{l} x_1 : x_2 : \dots : x_n = \text{const.} \\ G = 0, \\ p : q_1 : q_2 : \dots : q_n = \text{const.} \end{array} \right]$$

Bei gegebenen Faktorpreisen werden die Faktoren also nicht gegeneinander substituiert, gleichgültig, welche Produktionsmengen hergestellt werden. Das *Nicht-Substituierbarkeitstheorem* sagt darüber hinaus (s. dazu SALVADORI 1987), daß es, wenn es nur *einen* nicht-produzierten, aber zur Produktion aller anderen Faktoren notwendigen Faktor gibt (gedacht wird natürlich an den Faktor Arbeit), es auch nur einen (von der Endnachfrage unabhängigen, allein von der Technik abhängigen) Preisvektor für den Gewinn null gibt. Voraussetzung der Ableitung des Theorems ist, daß der Arbeitsgehalt jedes Produktes bekannt ist (weitere Voraussetzungen erwähne ich hier nicht). Wenn man solche Bedingungen annimmt und wenn, aus welchen Gründen auch immer, ein solcher Preisvektor in der Wirtschaft sich einstellen sollte, sind Nachfrage und Angebot der einzelnen Firmen indeterminiert und damit auch das gesamtwirtschaftliche Gleichgewicht (s. Corollarium A).

Corollarium D

Linear-homogene Funktionen besitzen ($\forall i [x_i > 0]$ vorausgesetzt) ein Maximum, wenn überhaupt, das dann kein strenges ist, nur am Rande ihres Definitionsbereiches, der durch das Modell nicht bestimmbar ist. Für das Maximum am Rande gilt die Bedingung 1. Ordnung für ein strenges Maximum nicht (s. Corollarium A); der Gewinn ist größer als null, eine Ausschöpfung des Ertrages durch die Faktoren findet nicht statt.

2.4 Die Behandlung des Problems in der Literatur

Es ist nicht meine Absicht, auf die Dogmengeschichte des Ausschöpfungstheorems einzugehen (s. dazu die in Abschnitt 1 zitierte Literatur), sondern lediglich auf einige markante Literaturstellen hinzuweisen, die zeigen, daß einerseits alle bisher gebrachten Argumente wohl bekannt sind und daß sie andererseits von manchen Autoren gleichzeitig referiert und nicht beachtet oder angezweifelt werden (in diesem Fall versuche ich, die Argumente zu widerlegen).

STIGLER (1941) faßt im Schlußkapitel ("Euler's theorem and the marginal productivity theory") seines Buches zunächst die herrschende Meinung über das Problem zusammen:

"It is accepted doctrine that the condition of constant returns to scale of output in the firm (*i.e.*, Wicksteed's assumption) is incompatible with stable competition" (S. 382).

In einer Fußnote weist er auf ältere Arbeiten von VINER (1932), KALDOR (1934) und BOWLEY (1924) hin. Dann jedoch bezeichnet er die herrschende Meinung als falsch für den Fall, daß die langfristige Durchschnittskostenkurve und die Preiskurve (beide linear) zusammenfallen, der Gewinn der Firma also null ist:

"Under the most rigorous assumptions concerning competition, the distribution of output among firms is indeterminate, but it is stable and therefore essentially irrelevant. No firm would expand because its cost line coincided with the price line, simply because ultimately such a procedure would be futile or costly" (S. 383).

Im ersten Satz des Zitates ist die Produktion unbestimmt, im zweiten dagegen bestimmt; denn die Aussage "No firm would expand...", ist nur dann sinnvoll, wenn man voraussetzt, daß die Firma irgendeine bestimmte Größe hat. Ja, der Widerspruch ist bereits im ersten Satz enthalten: Von irgendeinem Zustand zu sagen, daß er stabil sei, setzt voraus, daß er bestimmt ist. Einen Zustand gleichzeitig als unbestimmt und stabil zu bezeichnen, ist ein Widerspruch in sich selbst. Es handelt sich hier nicht (um einen möglichen Einwand vorwegzunehmen) darum, daß der Zustand dem Theoretiker nur unbekannt wäre: dann könnte er selbstverständlich stabil sein; sondern darum, daß er von der Sache her nicht bestimmt werden kann.

SAMUELSON (1983) schreibt in den berühmten "Foundations":

"If [the production function is] really homogenous [of the first order], marginal costs would always be constant.¹⁴ (¹⁴ It follows from Euler's generalized theorem on homogenous functions that the Hessian of a homogenous function of the first order is identically zero. Obviously, stable equilibrium for a firm under pure competition is impossible in these circumstances.) It is indicative of the lack of integration mentioned above that many writers assume U-shaped cost curves in the same breath with homogeneity of the production function" (S. 85).

(Dann bringt Samuelson den Beweis des Ausschöpfungstheorems von Barone, den ich in Abschnitt 4 zitiere).

Einige Seiten weiter vorn jedoch heißt es für den Fall der linear-homogenen Produktionsfunktion (in der "Einführung zur erweiterten Auflage", S. XXIV, verweist Samuelson stolz auf diesen Abschnitt: hier sei das Problem der Unbestimmtheit gelöst worden):

"... if price is identically equal to marginal cost, the exact output of the firm will be a matter of indifference. Thus, what was usually regarded as the most favorable case for pure competition turns out to yield indeterminate output for each firm.

However, too much should not be made of this paradox. Even though the output of every firm may be indeterminate, their sum may be determinate, in the same way that the sum of two discontinuous functions may be continuous" (S. 78 f.)

Die Behauptung, die Summe unbestimmter Nachfragemengen könne bestimmt sein (sie weist offensichtlich große Ähnlichkeit mit der eben zitierten Äußerung Stiglers

auf), ist wie jene in sich widersprüchlich; denn eine Summe kann man nur bilden, wenn die einzelnen Summanden bestimmt sind. Die zum Beweis herangezogene Analogie trifft nicht zu: Wenn man zwei diskontinuierliche Funktionen aggregiert, sind diese bestimmt. Auch die weiteren Begründungsversuche Samuelsons scheinen mir widersprüchlich zu sein, worauf ich jedoch nicht eingehe.

WITTMANN (1968) zeigt in seinem streng axiomatischen Buch über Produktionstheorie, daß bei linear-homogener Produktionsfunktion nur dann ein eindeutiges Gewinnmaximum vorliegt, wenn jede Produktion - mit Ausnahme der Nullproduktion - einen Verlust erbringt, wenn also die Null eindeutig Gleichgewichtsproduktion ist, und daß sonst kein eindeutiges Gewinnmaximum existiert (S. 29). Auf S. 146 desselben Buches jedoch bringt er das Ausschöpfungstheorem bei vollständiger Konkurrenz, linear-homogener Produktionsfunktion und Gewinnmaximierung, fügt aber die Kautele ein:

"die Bedingungen zweiter Ordnung für ein Maximum vorausgesetzt"

und verweist auf die gerade erwähnte Seite 29.

SCHUMANN (1992) leitet zunächst in seinem weitverbreiteten Lehrbuch völlig zustimmend das Ausschöpfungstheorem aus den Axiomen der vollständigen Konkurrenz, der Gewinnmaximierung und der linear-homogenen Produktionsfunktion ab (S. 152 f.) und zeigt gut 30 Seiten später (S. 184 f.), daß die Unternehmung unter den angegebenen Bedingungen das Grenzproduktivitätstheorem nicht realisieren kann.

Besonders forsch geht RAMSER (1987) zu Wege:

"Für das Firmenmodell werde eine linear-homogene Produktionsfunktion angenommen...

Die Annahme der Gewinnmaximierung ... führt zu den notwendigen und hier hinreichenden Bedingungen... [es folgt das Grenzproduktivitätstheorem].

Das Produktionsniveau ... ist zufolge der Annahme linearer Homogenität unbestimmt; im Gleichgewicht entspricht es natürlich der Nachfrage" (S. 132).

An der letzten Aussage will ich natürlich nicht zweifeln (es handelt sich schließlich um die Definition des Gleichgewichtes); ich argumentiere nur, daß die Behauptung, es existiere ein Gleichgewicht, aus den Axiomen nicht abgeleitet werden kann, sondern im Gegenteil: daß die Behauptung abgeleitet werden kann, kein solches Gleichgewicht existiere.

Diese Meinung wird auch in durchaus gängigen Lehrbüchern und Lexikonartikeln vertreten:

HENDERSON/QUANDT (1983) z.B. schreiben, daß für linear-homogene Gewinnfunktionen die Bedingung zweiter Ordnung für ein Maximum nicht erfüllt (S. 80f. in Verbindung mit S. 73) und daß die Betriebsgröße unbestimmt ist (S. 111). Auch Henderson/Quandt bringen den Barone-Beweis des Ausschöpfungstheorems.

Ähnlich geht SCHEELE (1980) vor: Die Reproduktion des herkömmlichen Beweises (wie hier in Abschnitt 2.1) beschließt er mit dem Satz:

"Die Annahme der linearen Homogenität führt jedoch bei vollkommener Konkurrenz bei der Gewinnmaximierung zu Schwierigkeiten" (S. 262),

ohne diese auszuführen, und bringt dann den Barone-Beweis.

Bei VARIAN (1992, S. 29) kann man nachlesen, daß bei linear-homogener Produktionsfunktion kein Gewinnmaximum existiert. Der Autor fährt dann fort:

"It is clear from this example that the only nontrivial profit-maximizing position for a constant-returns-to scale firm is one involving zero profits. If the firm is producing some positive level of output and it makes zero profits, then it is indifferent about the level of output at which it produces" (S. 29).

Im Abschnitt "18.10 Industry structure in general equilibrium" heißt es dann:

"Let us consider first the constant-returns case. Then we know that the only profit-maximizing level of profits compatible with equilibrium is that of zero profits. Furthermore, at the prices compatible with zero profits, the firms are willing to operate at any level. Hence, the industry structure of the economy is indeterminate - firms are indifferent as to what market share they hold. If the number of firms is a variable, it is also indeterminate" (S. 356).

Ein Gleichgewicht, in dem diese Größen nicht bestimmt sind, existiert nicht.

3 Linear-homogene Produktionsfunktion, Kostenminimierung und die Ausschöpfung des Ertrages

NEWMAN (1987) ersetzt in seinem Beitrag im New Palgrave das Axiom der Gewinnmaximierung durch das der Kostenminimierung. Der Beweis des Ausschöpfungstheorems wird dann folgendermaßen geführt: Die erste Bedingung für ein Kostenminimum bei vollständigem Wettbewerb auf den Beschaffungsmärkten lautet:

$$(12) \quad \forall i \left[q_i = \lambda \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right],$$

q_i, f, x_i : wie in Abschnitt 2.1,

λ : Lagrange-Multiplikator, gleich Grenzkosten der Produktion.

Bei vollständigem Wettbewerb auch auf dem Produktmarkt werden langfristig die Grenzkosten der Produktion gleich dem Produktpreis sein, so daß (12) in das Grenzproduktivitätstheorem übergeht. Wenn die Produktionsfunktion homogen vom Grade eins ist, wird der Erlös ohne Rest auf die Produktionsfaktoren verteilt. Soweit das Referat von Newman.

Das Argument übersieht, daß, wenn die behauptete Konstellation eingetreten ist, Angebot und Nachfrage der Firmen indeterminiert sind (s. Corollarium B), daß also kein Gleichgewicht besteht. Gleichgewicht ist bei langfristiger vollständiger Konkurrenz nur zu erreichen, wenn die Produktionsfunktion nicht homogen vom Grade eins ist, womit wir bei demselben Widerspruch wie in Abschnitt 2.2 angelangt sind.

4 Der Beweis von Barone

Der folgende Beweis des Ausschöpfungstheorems trägt viele Namen; ich folge Joan ROBINSON (1934), die behauptet, daß die Priorität Barone zukommt. Gegeben sei dieselbe Situation wie in Abschnitt 2.1, außer daß die Produktionsfunktion derart beschaffen ist, daß die Kurven der totalen und der variablen Durchschnittskosten sowie der Grenzkosten zuerst fallende und dann steigende Äste aufweisen und daß die Minima dieser Kurven so liegen, wie es in den Lehrbüchern dargestellt ist.

Dann realisiert die Unternehmung bei Gewinnmaximierung und vollständiger Konkurrenz das Grenzproduktivitätstheorem (auch die Bedingung 2. Ordnung trifft zu); die so realisierte Produktmenge erfüllt gerade die Bedingung "Grenzkosten gleich Produktpreis!" Im langfristigen Gleichgewicht produzieren alle Firmen im Minimum ihrer durchschnittlichen totalen Kosten. In ihrem Minimum wird die Durchschnittskostenkurve von der Grenzkostenkurve geschnitten. Deshalb ist der Produktpreis gleich dem Minimum der totalen Durchschnittskosten, so daß der Gewinn der Unternehmung gleich null ist: Der Erlös des Produktes wird ohne Rest an die Produktionsfaktoren verteilt, das Gleichgewicht ist eindeutig und stabil.

Es ist schwer zu verstehen, warum dieser logisch einwandfreie Beweis, den immerhin Walras, basierend auf Barone, bekanntgemacht hat (s. STEEDMAN 1987, S. 22), in der Literatur so weit hinter dem widersprüchlichen Beweis, der eine linear-homogene Produktionsfunktion annimmt, zurückgetreten ist; es sei denn, man nähme an, die Theoretiker hätten sich von dem Argument überzeugen lassen, es gebe in der Realität wohl lineare Kostenfunktionen, aber nicht solche, die erst fallende und dann stei-

gende Durchschnitts- und Grenzkosten aufwiesen: eine Vorgehensweise, die sich scharf von der sonstigen Unempfindlichkeit der neoklassischen Theoretiker gegen empirische Argumente abhobe.

5 Der Übergang von den Mikrofunktionen zur makroökonomischen Produktionsfunktion

Linear-homogene Produktionsfunktionen $Y = F(A, K)$ spielen in der neoklassischen Makroökonomik eine mindestens so bedeutende Rolle wie in der Mikroökonomik: $(\partial Y/\partial A)A$ und $(\partial Y/\partial K)K$ werden wegen des Grenzproduktivitätstheorems als das gesamte Arbeits- und das gesamte Kapitaleinkommen interpretiert, die, bei linearer Homogenität von F , Y gerade ausschöpfen.

Eine solche Funktion wird auf zwei sich ausschließenden Wegen zu begründen versucht. Nehmen wir zunächst an, alle Firmen produzierten nach genau derselben linear-homogenen Produktionsfunktion mit genau den gleichen (homogenen) Faktoren genau das gleiche (homogene) Produkt; in jeder Firma gelte für jeden Faktor das Grenzproduktivitätstheorem. Dann kann man die vielen Mikrofunktionen zu einer linear-homogenen Makrofunktion aggregieren, in welcher die Argumente Arbeit und Kapital ungewichtete Summen der einzelwirtschaftlichen Arbeits- und Kapitalmengen sind. Dieser Versuch scheitert rein modellimmanent daran, daß bei Gleichheit der linear-homogenen mikroökonomischen Produktionsfunktionen Faktornachfrage und Produktmenge jeder Firma unbestimmt sind und deshalb nicht aggregiert werden können.

Gehen wir, zweitens, von dem Barone-Argument für die Ausschöpfung des Ertrages aus. Dann produzieren die Unternehmen auch bei mikroökonomischer inhomogener Funktion an einem Punkt, an dem diese Funktionen die Eigenschaft der linearen Homogenität haben. Angenommen, alle Unternehmen produzierten genau das gleiche Produkt mit genau den gleichen Produktionsfaktoren, dann könnte man die stationäre Gesamtproduktion durch eine makroökonomische linear-homogene Produktionsfunktion erklären. Rein modellimmanent trifft das Argument zu. In jeder realen Volkswirtschaft werden jedoch sehr viele unterschiedliche Güter mit sicher ganz unterschiedlichen Produktionsfaktoren produziert. Sie können nicht als Aggregate in *einer* makroökonomische Funktion eingesetzt werden:

"...The analytic use of such aggregates as 'capital', 'output', 'labor' or 'investment' as though the production side of the economy could be treated as a single firm is without sound foundation" (Fisher 1987, S. 55).

Dieses Argument leitet zum nächsten Abschnitt über.

6 Entscheidung über die empirische Wahrheit des Theorems durch die Empirie

Die vorhergehenden Abschnitte handeln ausschließlich über die Ableitung des Ausschöpfungstheorems aus gewissen Axiomen. Wenn die Theoretiker den Anspruch erheben sollten, daß das Theorem eine Behauptung über die Wirklichkeit ist, kann über die Wahrheit oder Falschheit der Aussage nur die Empirie entscheiden. Über deren Probleme in diesem Falle zu reden, würde hier zu weit führen.

Literaturverzeichnis

- BARTMANN, H. (1981): Verteilungstheorie, München.
- BLAUG, M. (1985): Economic Theory in Retrospect, Fourth Edition, Cambridge (England) u.a.
- BOWLEY, A.L. (1924): Mathematical Groundwork of Economics, Oxford.
- FISCHER, M.D. (1987): Aggregation Problem, in: The New Palgrave. A Dictionary of Economics, Volume 1, London u.a., S. 53-55.
- HENDERSON, J.M./QUANDT, R.E. (1983): Mikroökonomische Theorie. Eine mathematische Darstellung, 5., überarbeitete Auflage, München.
- KALDOR, N. (1934): The Equilibrium of the Firm, in: Economic Journal XLIV, S. 60-76.
- KRELLE, W. (1962): Verteilungstheorie, Tübingen.
- KÜLP, B. (1994): Verteilung, Theorie und Politik, 3., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Stuttgart-Jena.
- NEWMAN, P. (1987): Euler's Theorem, in: The New Palgrave. A Dictionary of Economics, Volume 2, London u.a., S. 196.
- NIEHANS, J. (1990): A History of Economic Theory, Baltimore - London.
- RAMSER, H.J. (1987): Verteilungstheorie, Berlin, u.a.
- ROBINSON, J. (1934): Euler's Theorem and the Problem of Distribution, in: Economic Journal, wieder abgedruckt in: dies.: Collected Economic Papers, 1966, Volume one, Oxford, S. 1-19.
- SALVADORI, N. (1987): Non-Substitution Theorems, in: The New Palgrave. A Dictionary of Economics, Volume 3, London u.a., S. 680-682.
- SAMUELSON, P.A. (1983): Foundations of Economic Analysis. Enlarged Edition, Cambridge (Mass). u.a., (1. Auflage 1947).
- SCHEELE, E. (1980): Einkommensverteilung I: Theorie, in: Handwörterbuch der Wirtschaftswissenschaft, Zweiter Band, Stuttgart, S. 257-285.
- SCHUMANN, J. (1992): Grundzüge der mikroökonomischen Theorie. Sechste, überarbeitete und erweiterte Auflage, Berlin u.a.
- STEEDMAN, I. (1987): Adding-up Problem, in: The New Palgrave. A Dictionary of Economics, Volume 1, London u.a., S. 21f.
- STIGLER, G.J. (1941): Production and Distribution Theories, The Formative Period, New York, reprinted 1968.
- VARIAN, H.R. (1992): Microeconomic Analysis. Third Edition, New York-London.
- VINER, J. (1932): Cost Curves and Supply Curves, in: Zeitschrift für Nationalökonomie III, S. 23-46.
- WITTMANN, W. (1968): Produktionstheorie, Berlin u.a.

Zusammenfassung: Die Benutzung des Euler-Theorems zum Beweis des Ausschöpfungstheorems impliziert einen Widerspruch, weil angenommen werden muß, einerseits, daß die Produktionsfunktion linear-homogen ist, andererseits, daß sie nicht linear-homogen ist. Barones Beweis dagegen ist gültig. Die Aggregation von inhomogenen mikroökonomischen Produktionsfunktionen, bei denen im Minimum der totalen Durchschnittskosten produziert wird, zu einer linear-homogenen makroökonomischen Produktionsfunktion ist nicht möglich, wenn unterschiedliche Güter in einer Volkswirtschaft hergestellt werden.

Summary: The proof of the adding-up theorem.

To make use of Euler's theorem in order to prove the adding-up theorem implies a contradiction, because it must be supposed

- (i) that the production function is homogeneous of degree 1,
- (ii) that the production function is not homogeneous of degree 1,

whereas Barone's proof is valid. The aggregation of inhomogeneous microeconomic production functions, although all firms are producing at the minimum of their total average costs, to one macroeconomic production function, homogeneous of degree 1, is impossible, if different goods are produced in the economy.