

Ronning, Gerd

Working Paper

Wetten mit und ohne Gegner

Diskussionsbeiträge, No. 11

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Ronning, Gerd (1971) : Wetten mit und ohne Gegner, Diskussionsbeiträge, No. 11, Universität Konstanz, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78191>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Wetten mit und ohne Gegner

Gerd Ronning,

Dezember 1971

Diskussionsbeiträge
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften
der Universität Konstanz

Nr. 11

I N H A L T

	<u>Seite</u>
1	<u>Einleitung</u> 1
2	<u>Wetten gegen die Natur</u> 3
	2.1 Hypothetische Wetten 3
	2.2 Wetten in der Entscheidungstheorie 4
	2.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit und Messbarkeit des Nutzens in ein- seitigen Wetten 6
	2.4 Faire Wetten und Wahrscheinlichkeit 10
3	<u>Wetten zwischen zwei Personen</u> 12
	3.1 Grundsätzliche Annahmen 12
	3.2 Anzahl der möglichen (gleich- wahrscheinlichen) Wetten 16
	3.3 Weitere Annahmen über das Wett- verhalten 20
	3.4 Bedingungen für "die Wette" und unterschiedliches Risikoverhalten 22
	3.5 Wetten zwischen risiko-aversiven Spielern 25
	3.6 Wetten bei anderem Risikoverhalten 29
	3.7 Wetten und unliebsame Ereignisse 32
4	<u>Zusammenfassung</u> 35

Appendix

Literatur

WETTEN MIT UND OHNE GEGNER ¹⁾

1 Einleitung

Die Wette hat als M o d e l l in der modernen Nutzen-
theorie sowie in der Theorie der persönlichen Wahrschein-
lichkeit weite Verbreitung gefunden. Hier soll einmal unter-
sucht werden, ob die dort gefundenen Ergebnisse für eine
Wette in der R e a l i t ä t von Bedeutung sind. Dabei
denke ich an folgende Situation: Zwei Personen, im folgen-
den als "Spieler" bezeichnet, setzen beliebige Beträge
darauf, dass ein bestimmtes Ereignis eintritt bzw. nicht
eintritt. Tritt das Ereignis nicht ein, so muss der Spieler,
der darauf gesetzt hat, dem Gegenspieler seinen Einsatz
zahlen. Tritt das Ereignis ein, so muss dieser dem ersten
Spieler seinen Einsatz zahlen. Wann - so lautet die Frage -
bzw. unter welchen Umständen kommt eine Wette zustande ?

Vor Beantwortung dieser Frage wird in Abschnitt 2 die Li-
teratur, die im Zusammenhang mit Wetten gegen die Natur
d.h. mit "Wetten ohne Gegner" steht, dargestellt. In Ab-
schnitt 3 wird dann diese Theorie verwandt, um ein einfa-
ches Modell einer "Wette mit Gegner" d.h. einer Wette im
oben beschriebenen Sinn zu entwickeln.

¹⁾Für kritische Anmerkungen und Einwendungen in früheren
 Fassungen dieses Aufsatzes bin ich den Herren Gérard
 Gäfgen, George Morton und Dieter Spaetling dankbar.

Die bayesianische Entscheidungstheorie ist in letzter Zeit mehrfach zur Lösung von Problemen, um die sich ursprünglich die Spieltheorie kümmerte, herangezogen worden.¹⁾ Inhaltlich gesehen ist der vorliegende Aufsatz nur entfernt mit diesen Arbeiten verwandt. Dagegen lässt sich eine enge Beziehung zu der Theorie der Auktionen (theory of competitive bidding) nachweisen, wie sie beispielsweise von Lavallo (1967) oder Rothkopf (1969) dargestellt wird. Dort werden die Marktbeziehungen durch einen Auktionator geregelt, während in diesem Aufsatz die Wettangebote über einen Schiedsrichter laufen. Es lässt sich zeigen, dass beide Personen, Auktionator und Schiedsrichter, grundsätzlich die gleichen Aufgaben erfüllen.

Der vorliegende Aufsatz beschränkt sich - dem gestellten Problem entsprechend - auf zwei Personen, wenn auch eine Verallgemeinerung auf n Personen (dieser Fall wird von den genannten Autoren betrachtet) ohne grosse Schwierigkeiten formulierbar ist. Allerdings drängen die Annahmen, die in Abschnitt 3 schon für 2 Personen gemacht werden müssen, zu der Frage, welche Erkenntnisse aus solchen Modellen noch zu ziehen sind.

Wir werden deshalb im Gegensatz zur erwähnten Literatur die Präferenzstruktur der beiden Personen nicht durch eine bestimmte Funktion beschreiben, sondern verschiedene Arten von "Risikoverhalten" betrachten, das den Funktionen Beschränkungen derart auferlegt, dass sie entweder konkav,

¹⁾ Siehe z.B. Borch (1962), Arrow (1964) oder Harsanyi (1967/68).

linear oder konvex sein müssen. Allerdings nehmen wir dafür in Kauf, dass unsere Ergebnisse entsprechend "unscharf" sind.

2 Wetten gegen die Natur

2.1 Hypothetische Wetten

Wetten zwischen zwei oder mehr Personen scheinen die Mathematiker stets beschäftigt zu haben. Innerhalb einer mathematischen Theorie über Glücksspiele haben sie ihren angestammten Platz, so z.B. bei Epstein (1967). In der ökonomischen Literatur ist kein entsprechendes Interesse nachzuweisen. Dabei hat wohl der Gedanke eine Rolle gespielt, dass solche Spielsituationen keine Relevanz für wirtschaftliches Verhalten der Marktteilnehmer habe. Bedeutsam wurde die Vorstellung einer Wette dagegen in einem ~~anderen~~ ^{speziell-} Gebiet der Ökonomie, nämlich in der Nutzentheorie, die ausgehend von dem heute viel zitierten Artikel von Bernoulli (1738, 1954) h y p o t h e t i s c h e Wetten darauf untersuchte, ob sie für die Spieler akzeptabel sind, wenn diese bestimmte Rationalitätskriterien erfüllen. Dies führte zur Axiomatisierung der Auswahl zwischen Wetten. Allerdings war dafür zusätzlich notwendig, dass man nur e i n e S e i t e der - hypothetischen - Wette betrachtete, d.h. sich in die Lage des einen Spielers versetzte und nur für ihn prüfte, ob eine bestimmte Wette akzeptabel sei. Nicht betrachtet und nicht erklärt wurde, ob für den Gegenspieler überhaupt das Angebot einer solchen Wette sinnvoll sei, so zum Beispiel in dem bekannten

St. Petersburg-Spiel.¹⁾ Die bewusste einseitige Betrachtung drückt sich bereits in der Bezeichnung "Spiel" aus; noch deutlicher wird sie in dem heute gebräuchlichen Begriff "Lotterie", bei dem am ehesten die Vorstellung von der Existenz des Gegenspielers verdrängt werden kann.

Schon D. Bernoulli (1738, 1954) spricht davon, dass man reale Entscheidungssituationen als Lotterien auffassen kann, eine Vorstellung, ohne die die moderne Nutzentheorie nicht mehr auskommen kann. Er stellte die Maximierung des erwarteten Nutzens als sinnvolles Handeln dar; von Neumann und Morgenstern (1953) haben gezeigt, dass dasselbe Handeln als Konsequenz der Beachtung sinnvoller Axiome abgeleitet werden kann. Wie sinnvoll, darüber soll hier nicht gesprochen werden.²⁾

2.2 Wetten in der Entscheidungstheorie

Diese Verhaltensmaxime ist heute fester Bestandteil der Entscheidungstheorie, soweit sie einzelne Individuen im mikro-ökonomischen Bereich betrifft. Die oben erwähnte einseitige Betrachtung der Lotterien wird formal dadurch beseitigt, dass man zum Gegenspieler je nach Weltanschauung die Natur oder Gott - z.B. Ramsey (1926) - erklärt.

¹⁾ Diese Aussage berücksichtigt nicht das Ergebnis von Feller (1957, S. 251/2), der das Paradox dadurch auflöst, dass es die begrenzten finanziellen Mittel des Spielcasinos in die Analyse einbezieht. Inhaltlich entspricht dies der heute allgemein zitierten Lösung von Carl Menger, dass die Nutzenfunktion des Wettenden beschränkt sein muss. Siehe Arrow (1966, S. 268).

²⁾ Als alternative Formulierung ist besonders die von Luce und Raiffa (1957) bekanntgeworden, die die einzelnen Axiome kritisch kommentieren.

Raiffa (1968, S. 2) lässt auf die (mögliche) Frage des Lesers, gegen wen man denn spiele, einen wohlgezogenen Experimentatoren auftreten, der "weder versucht, Dich zu übervorteilen, noch als Konkurrent im Spiel gegen Dich auftritt"; gleichzeitig gibt er zu: "Der Realismus wird hier ein bisschen heikel ...".

Die Annahme eines solchen Gegenspielers schliesst ein, dass sein Handeln nicht durch das Handeln des betrachteten Entscheidungsträgers beeinflusst wird, dagegen umgekehrt der Ausgang der vom Entscheidungsträger ergriffenen "Aktionen", unter denen er auszuwählen hat, davon abhängig ist, wie sich der Gegenspieler, Natur oder Gott, verhält. Die Aktion mit dem höchsten Nutzen, die ausgewählt wird, ist also letztlich nur eine Reaktion.

Von Neumann und Morgenstern haben diese Möglichkeit, eine Theorie der Entscheidung des Einzelnen aufzustellen, ebenfalls gesehen, jedoch als zu restriktiv abgelehnt, da damit das "rationale" Handeln der Gegenseite nicht erfasst werde.¹⁾ Dass es gute Gründe gibt, ganz bewusst diese Restriktion einzuführen, zeigt Raiffa (1968, S. 288-294), der sich direkt auf den Ansatz der Spieltheorie bezieht. Sein Argument ist - in aller Kürze - , dass nie eine Theorie angewandt wird, die allen Beteiligten ihr rationales Handeln

1) "Every participant can describe his own actions but not those of the others. Nevertheless these 'alien' variables cannot, from this point of view, be described by statistical assumptions. This is because the others are guided, just as he himself, by rational principles - whatever they may mean - and no *m o d u s p r o c e e d e n d i* can be correct which does not attempt to understand those principles and the interactions of the conflicting interests of all participants." (v. Neumann und Morgenstern, 1953, S. 11).

vorschreibt, sondern immer eine, die nur für den Einzelnen die - rational gesehen - beste Entscheidung angibt.

2.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit und Messbarkeit¹⁾ des Nutzens in einseitigen Wetten

Entsprechend dem obigen Argument v. Neumanns und Morgensterns war es nur natürlich, dass sie sich auf Lotterien²⁾ mit objektiven Wahrscheinlichkeiten beschränkten. Deshalb herrschte eine lange Zeit die Meinung vor, dass die **M e s s u n g** des Nutzens dann nicht möglich sei, wenn subjektive Wahrscheinlichkeiten³⁾ in die Lotterie eingingen, so etwa bei Luce und Raiffa (1957, Abschnitt 2.8). Danach wären Nutzenfunktionen dann bestimmbar, wenn die Wahrscheinlichkeiten in der Experimentsanordnung kontrollierbar wären wie z.B. bei Mosteller und Nogee (1951), nicht dagegen aber Lotterien, denen reale Entscheidungssituationen zugrundelägen, da dort subjektive Wahrscheinlichkeitsabschätzungen nicht auszuschliessen wären.

1) Es ist noch immer üblich, von "messbarem" Nutzen als Synonym für kardinale Nutzenfunktionen zu sprechen (vergleiche z.B. Fels und Tintner, 1967, S. 65), um diese gegen ordinale, "nichtmessbare" abzugrenzen. Hier dagegen bezeichnen wir (kardinalen) Nutzen nur dann als "messbar" wenn er empirisch bestimmbar ist.

2) Die Autoren verwenden stets das englische Wort "gamble", nie dagegen "lottery".

3) Eine genaue Abgrenzung zwischen objektiven und subjektiven Wahrscheinlichkeiten (sofern sie überhaupt besteht), soll hier nicht vorgenommen werden. Folgende Unterscheidung soll genügen: Subjektive Wahrscheinlichkeiten sind (a posteriori-)Wahrscheinlichkeiten, die auf einer "kleinen", objektive dagegen sind solche, die auf einer "grossen" (gegen Unendlich gehenden) Stichprobe beruhen. - Subjektive Wahrscheinlichkeiten verschiedener Personen können derart sein, dass für gegebene Hypothese H und gegebenes Stichprobenergebnis x die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten dieser Personen unterschiedlich sind: $p_1(H|x) \neq p_2(H|x)$, wobei der Index 1 bzw. 2 die Wahrscheinlichkeit der jeweiligen Person bezeichnet. Vergleiche auch Abschnitt 3.3.

So schreibt Grayson (1960, S. 314), der Nutzenfunktionen für Ölbohrer zu bestimmen versuchte: "The Von Neumann-Morgenstern model requires that the individual views the probabilities as objective, so that a true utility of money curve will be obtained. If the individual subjectively appraises the odds, then his responses will include an unknown mixture of subjective probabilities and utilities, and the curve will not be a true utility of money curve."

Wie bereits erwähnt, richteten sich die Einwendungen nicht gegen die Verhaltensmaxime der Auswahl des maximalen Nutzens, sondern gegen die Möglichkeit, diesen bei Vorliegen subjektiver Wahrscheinlichkeiten zu messen. Denn bereits wenige Jahre später zeigte Savage (1954)¹⁾, dass sich Nutzen und (subjektive) Wahrscheinlichkeit gemeinsam derart aus einem Axiomensystem ableiten lassen, dass sich als Konsequenz der Beachtung dieser Axiome wiederum die Maximierung des erwarteten Nutzens ergibt, wobei der Nutzen dieselben Eigenschaften wie bei von Neumann und Morgenstern besitzt.

Was ergab sich für das Problem des Messens aus dieser Erweiterung des Axiomensystems, die - theoretisch - eine simultane Bestimmung von subjektiver Wahrscheinlichkeit und Nutzen ermöglichte?²⁾ Gerade die Simultanität scheint lange Zeit

¹⁾ Die Arbeit von Ramsey (1926) war zu dieser Zeit weitgehend unbekannt.

²⁾ Es sollte nicht übersehen werden, dass von Neumann und Morgenstern, obwohl sie in ihrem Buch objektive Wahrscheinlichkeiten favorisieren, die Benutzung subjektiver Wahrscheinlichkeiten nicht grundsätzlich ausgeschlossen haben: "If one objects to the frequency interpretation of probability then the two concepts (probability and preference) can be axiomatized together. This too leads to a satisfactory numerical concept of utility which will be discussed on another occasion." (1953, S. 19 - Fussnote). Diese Bemerkung findet sich bereits in der (ersten) Ausgabe aus dem Jahre 1944.

als Indiz dafür angesehen worden zu sein, dass die "unbekannte Mixtur" von Nutzen und Wahrscheinlichkeit nicht zu ergründen sei. Immerhin stammt Graysons Bemerkung von 1960. Es mag daran gelegen haben, dass Savage einen Ansatz wählte, bei dem die Axiome sich auf eine komparative Wahrscheinlichkeitsbeziehung "nicht wahrscheinlicher als" bezogen, die voraussetzten, dass diese Wahrscheinlichkeiten direkt abfragbar seien. Dagegen haben andere Autoren ihre Axiome zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten auf eine komparative Präferenz-Indifferenz-Beziehung "wird nicht vorgezogen" bezogen, so dass die Bestimmung genau wie beim Nutzen indirekt über eine Indifferenzwahrscheinlichkeit erfolgt.

Diese werden mit objektiven Wahrscheinlichkeiten in Zusammenhang gebracht, wie sie z.B. beim Roulette bestehen. Anscombe und Aumann (1963, S. 204) sagen dazu: "Wir glauben, dass die Präferenzbeziehung einen Schritt näher zum Experiment liegt als die komparative Wahrscheinlichkeits-Beziehung, und dass es wünschenswert ist, subjektive Wahrscheinlichkeiten nur auf die Präferenz-Beziehung zu stützen ohne jede a-priori-Bezugnahme - implizite oder explizite - auf komparative Wahrscheinlichkeiten". - Eine nähere Darstellung dieser unterschiedlichen Ansätze kann hier nicht gegeben werden.¹⁾

Pratt, Raiffa und Schlaifer (1964) bzw. (1965, Kapitel 3),

¹⁾ Siehe hierzu beispielsweise Anscombe und Aumann (1963), die den Ansatz von Savage als "intuitiv" bezeichnen - im Gegensatz zu ihrem eigenen Ansatz, der "externe Wahrscheinlichkeiten" (extraneous probabilities) benutzt. Dieser Ausdruck stammt von Fishburn (1970). Siehe auch Fishburn (1967).

die ebenfalls diesen Ansatz wählen, haben dann mit Blick auf das Problem, Nutzen und - davon getrennt - subjektive Wahrscheinlichkeiten zu messen, folgendes gezeigt:

Ein Entscheidungsträger kann in einer bestimmten Situation Nutzen und Wahrscheinlichkeit miteinander eindeutig angeben, d.h. es gibt nur einen Nutzen und nur eine Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Preis einer Lotterie. Es ist unerheblich, in welcher Reihenfolge beide bestimmt werden. Die Eindeutigkeit bleibt erhalten, wenn entweder nur der Nutzen oder nur die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird.

Dass diese Aussage nur bei Gültigkeit der Axiome zutrifft, mindert nicht ihren Wert bezüglich des Problems des Messens. Denn man meinte ja, dass t r o t z Erfüllung der Axiome die Nutzenmessung bei Vorliegen subjektiver Wahrscheinlichkeiten unmöglich sei.¹⁾ Nun aber ist klargestellt, dass der Nutzen bestimmt werden kann - unabhängig davon, ob in der Lotterie subjektive oder objektive Wahrscheinlichkeiten vorhanden sind.

Der neuere Ansatz, der nur auf Präferenzbeziehungen aufbaut, macht die älteren Axiomensysteme nicht überflüssig, sondern zeigt nur, wie bereits das Zitat von Anscombe und Aumann andeutete, einen direkteren Bezug zur empirischen Bestimmung des Nutzens (und auch der Wahrscheinlichkeit). Über die Frage, ob ein bestimmtes Axiomensystem sinnvoll ist, d.h. von einer Person, die damit bekannt gemacht wird, akzeptiert werden wird, ist damit nichts gesagt.

¹⁾ Die Axiomensysteme unterscheiden sich natürlich mehr oder weniger stark.

Pratt, Raiffa und Schlaifer (1965, Kapitel 2.6) haben einiges Gewichtige über das allzu leichtfertig gebrauchte Argument zu sagen, dass die Theorie "wenigstens" im normativen Sinne eine gute Hilfe sei. Nach ihrer Meinung ist es unvernünftig, in einem Fall auf den Axiomen zu bestehen, in dem Tests die a b s i c h t l i c h e Nichtbefolgung ergeben haben.

Bemerkenswert in dem hier vorgetragenen Zusammenhang ist, dass der Gegenspieler, die Natur, im "intuitiven" Ansatz klar als Gegner zu erkennen ist, der einen bestimmten "Naturzustand" mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eintreten lässt, während beim Ansatz, der nur Präferenzbeziehungen in seinen Axiomen benutzt, der Gegenspieler nur noch "durch die Axiome" gesehen werden kann. Damit wird die Betrachtung des Entscheidungsproblems wieder "einseitiger".

2.4 Faire Wetten und Wahrscheinlichkeit

Ähnlich der vom Problem der Wahrscheinlichkeit abstrahierenden, dabei deskriptiven Behandlung des Entscheidungsproblems durch D. Bernoulli wurde bis in die letzte Zeit die Wette als Beschreibung einer Wahrscheinlichkeitsabschätzung (degree of belief) benutzt. "If a person has a degree of belief p in a statement¹⁾ S , then he should have a degree of belief $1-p$ in the denial of S . The proponents of the subjectivistic theory attempt to justify

¹⁾ Statt "statement" könnte man ebensogut "event" sagen. Vergleiche Kyburg und Smokler (1964, S. 7 Fussnote).

this 'should'. They do so by arguing that degrees of belief can be measured by betting ratios (the least odds at which one is willing to bet on the truth of the statement), ..." (Kyburg und Smokler, 1964, S. 6). Auch hier handelt es sich offensichtlich um einseitige hypothetische Wetten.

Bezeichnet man eine Wette als fair, deren Erwartungswert Null ist bzw. deren Verhältnis der Wetteinsätze sich umgekehrt proportional zu dem Verhältnis der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verhält, dann besagt obige Aussage, dass jemand zwischen einer fairen Wette und der Möglichkeit nicht zu wetten indifferent ist. Schon D. Bernoulli (1738/1954, S. 27) hat darauf hingewiesen, dass diese Aussage nicht allgemein gelten kann: "... in a fair game the disutility to be suffered by loosing must be equal to the utility to be derived by winning ...", d.h. nicht das Verhältnis der Einsätze, sondern das der **N u t z e n** der Einsätze muss umgekehrt proportional dem Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten sein, damit Indifferenz herrscht.¹⁾

Weil also Präferenz- bzw. Nutzenerwägungen in eine Wette eingehen, hat Ramsey (1926) hypothetische Wetten als Methode zur Messung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten abgelehnt. Auf ihn bezieht sich de Finetti, der ursprünglich (1937) diese Idee vertrat und sich in der englischen Übersetzung (1964, S. 102 Fussnote) korrigiert. Wir werden in Abschnitt 3.4 sehen, dass nur bei linearen Nutzenfunktionen diese Methode zulässig wäre; schon Ramsey hat dies erkannt,

¹⁾Oder: Der erwartete Nutzen des Spiels muss gleich dem Nutzen des augenblicklichen Vermögensstatus sein.

der deshalb vorschlug, möglichst kleine Einsätze beim Wetten zu benutzen.

Vom logischen Gesichtspunkt her hat Carnap (1950) Wetten als nützliches Instrument zur Definition von Wahrscheinlichkeiten angesehen; er nimmt bewusst die Unmöglichkeit in Kauf, solche Wahrscheinlichkeiten anzuwenden: "The problem now to be investigated concerning the determination of decisions with the help of probability₁¹⁾ goes beyond the boundaries of inductive logic itself." (1950, S. 253). Dies hindert ihn nicht daran, ausführlich die Nutzentheorie von D. Bernoulli sowie von Morgenstern und von Neumann darzustellen. Dabei benutzt auch er das Argument (vergleiche Abschnitt 2.3), dass der Nutzen nur bei Vorliegen relativer Häufigkeiten messbar sei (1950, S. 268). Spätere Arbeiten auf der Linie von Carnap sind die von Kemeny (1955) und Shimony (1955).

3 Wetten zwischen zwei Personen

3.1 Grundsätzliche Annahmen

Wir wollen nun versuchen, die in Abschnitt 2 mittels eines Literaturüberblicks indirekt behandelte Theorie der (einseitigen) Wette auf die eigentliche Wettsituation, d.h. auf Wetten zwischen zwei Personen anzuwenden. Dem Begriff der Wette liegt hier folgende Vorstellung zugrunde:

¹⁾ Carnap (1950, S. 25) unterscheidet zwischen "probability₁ = degree of confirmation" und "probability₂ = relative frequency in the long run".

Zwei Spieler schliessen eine Wette darüber ab, ob ein bestimmtes Ereignis E eintritt oder nicht. Spieler 1 setzt einen Betrag von A Mark, dass E eintritt, Spieler 2 einen Betrag von B Mark, dass E nicht eintritt; beide Einsätze werden also in gleichen Einheiten, nämlich Mark, geleistet und ~~daher~~ ^{sonit sind} direkt miteinander vergleichbar.¹⁾

Spieler 1 gewinnt B Mark, wenn seine Meinung richtig war, d.h. wenn E eintritt, und verliert einen Betrag von A Mark, wenn das Komplementärereignis eintritt. Betrachtet man die Beträge A und B als Vermögensveränderungen, so ergibt sich für Spieler 1 ein möglicher Vermögensgewinn von B Mark und ein möglicher Verlust von A Mark. Demnach ist die augenblickliche Vermögenssituation durch den Wert 0 gekennzeichnet. - Die Ausführungen gelten entsprechend für Spieler 2.

Demnach lässt sich eine Wette durch das Tripel $(A, B; E)$ darstellen. Wir wollen im folgenden annehmen, es sei klar, um welches Ereignis gewettet würde, und deshalb eine Wette (oder auch den Vorschlag zu einer Wette) durch das Paar (A, B) bezeichnen.

Die Ausführungen des Abschnitts 2 legen es nahe, für beide Spieler eine subjektive Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E sowie eine Nutzenfunktion für die möglichen Vermögenssituationen im Zusammenhang mit der Wette anzunehmen,

1) Wenn beide Spieler ihre Einsätze in unterschiedlichen Einheiten, etwa "Äpfeln" und "Birnen", angeben, ist die direkte Vergleichbarkeit nicht mehr vorhanden. In diesem Fall müssten wir das Problem eines "numéraires" behandeln. Siehe z.B. Raiffa, 1968, S. 246-255. Siehe auch Abschnitt 3.7 dieses Aufsatzes.

genauer gesagt die Axiome, aus denen subjektive Wahrscheinlichkeit und Nutzenfunktion resultieren, als erfüllt zu betrachten:

Wir bezeichnen mit p_i die subjektive Wahrscheinlichkeit des Spielers i ($i = 1,2$) für das Ereignis "Gewinn der Wette" (das für einen der Spieler identisch mit dem Ereignis E , für den anderen identisch mit dem Komplementärereignis \bar{E} ist). Der Nutzen für beliebige Vermögensveränderungen sei u_i , wobei u eine bis auf positiv lineare Transformationen eindeutig bestimmte und mindestens zweimal differenzierbare Funktion sei.

- (1) Annahme: Wir nehmen an, es seien Axiome derart erfüllt, dass p_i und u_i ($i = 1,2$) gegeben sind.

Im Zusammenhang mit Wetten stellt sich sofort die Frage, ob ein hoher (niedriger) Wetteinsatz die Folge einer hohen (niedrigen) subjektiven Wahrscheinlichkeit oder die Folge eines geringen (grossen) Nutzens des möglichen Verlustes dieses Einsatzes (oder die Folge einer Kombination beider Komponenten) ist. Deshalb sei hier noch einmal ausdrücklich auf Abschnitt 2.3 hingewiesen, wo gezeigt wurde, dass das Auftreten subjektiver Wahrscheinlichkeiten kein Hindernis für die getrennte Bestimmung von Wahrscheinlichkeit und Nutzen ist - entgegen einer in letzter Zeit immer wieder geäusserten Auffassung.

Wie kann man nun diese geschilderte einseitige Theorie auf das Wettverhalten von zwei Spielern übertragen? Denn

einige ihrer Voraussetzungen sind offenbar verletzt. So sind beispielsweise dort die möglichen Naturzustände und die durch sie verursachten Konsequenzen bekannt, bevor der Entscheidungsträger die Aktion mit dem grössten erwarteten Nutzen auswählt, während hier die Entscheidung darüber, ob die Aktion "wetten" ergriffen werden kann, auch vom Einverständnis des Gegenspielers abhängig ist¹⁾, der den angebotenen Wetteinsatz akzeptieren und gleichzeitig seinerseits einen akzeptablen Einsatz genannt haben muss. Denn offensichtlich ist die Höhe beider Einsätze voneinander abhängig.

Ausserdem kann hier jeder Spieler durch seinen Einsatz teilweise die Konsequenzen (und damit auch teilweise seine eigene optimale Aktion) bestimmen, was in der einseitigen Theorie nicht möglich ist.

Einen Ausweg bietet die in der Spieltheorie benutzte Fiktion eines Schiedsrichters²⁾, der von beiden Spielern Wettvorschläge entgegennimmt und aus den verschiedenen sich deckenden Wettvorschlägen eine Wette nach dem Zufallsprinzip auswählt, die dann als "die Wette" bezeichnet wird. Um diesen Vorgang genauer spezifizieren zu können, verwenden wir aus bezeichnungstechnischen Gründen statt A und B

1) nicht dagegendie Aktion "nicht wetten". Zu beachten ist, dass der Gegenspieler nicht mehr die Natur ist; auf das Eintreten bzw. Nicht-Eintreten des Ereignisses E haben Spieler und Gegenspieler keinen Einfluss.

2) Vergleiche z.B. von Neumann und Morgenstern, 1953, Kapitel II; die Funktion des Schiedsrichters dort ist nicht mit der hier angenommenen identisch. Chernoffs (1954, S. 437 Fussnote) Bemerkung über das Minimax-Kriterium gilt allerdings auch hier: "The min max criterion has the property that even if the opponent discovers the player's strategy he can do nothing to improve his position."

als Einsatz des Spielers i x_i und als den Einsatz des Gegenspielers x_{3-i} , wobei $i = 1, 2$ ist.

Die Menge der Wettvorschläge des Spielers i wollen wir mit M_i bezeichnen, d.h.

$$M_i = \{(x_i, x_{3-i}) \mid (x_i, x_{3-i}) \in \mathbb{R}_+^2\} \quad i = 1, 2$$

und die Menge der "kongruenten" Wettvorschläge, d.h. solcher Vorschläge, in denen beide Spieler übereinstimmen, mit K , wobei

$$K \equiv M_1 \cap M_2$$

ist. Über das Zustandekommen einer Wette nehmen wir nun folgendes an:

(2-a) Annahme: Beide Spieler geben verschiedene Wettvorschläge derart ab, dass sie zwischen den verschiedenen in M_i enthaltenen (eigenen) Vorschlägen indifferent sind.

(2-b) Annahme: Ein Schiedsrichter nimmt die Mengen M_i ($i = 1, 2$) der Wettvorschläge entgegen und wählt aus der Menge K der kongruenten Wettvorschläge "die Wette" zufällig aus. Dabei hat jedes Element aus K die gleiche Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden.

3.2 Anzahl der möglichen (gleichwahrscheinlichen) Wetten

Die angenommene Indifferenz zwischen verschiedenen eigenen

Wettvorschlägen strukturiert die Mengen M_i und damit auch die Menge K . Insbesondere stellt sich die Frage, ob K kein Element oder mehr als ein Element enthält. Im ersten Fall käme keine Wette zustande, während im zweiten Fall die Wette nicht eindeutig bestimmt wäre. In der Ökonomie würde man von einem "instabilen" Gleichgewicht sprechen.

Behandeln wir zuerst die Indifferenz: Da jeder der Spieler den Wert einer Wette bzw. eines Wettvorschlags durch den erwarteten Nutzen bestimmt (siehe Abschnitt 2), und Wettvorschläge stets in Abhängigkeit von einem bestimmten Einsatz x_{3-i} des Gegenspielers bestimmt werden, definieren wir:

- (3) Definition: Für gegebene Wahrscheinlichkeitsabschätzungen p_i und bestimmten Einsatz x_{3-i} des Gegenspielers ist

$$E_i = p_i u_i(x_{3-i}) + (1-p_i) u_i(-x_i)$$

der erwartete Nutzen der Wette für Spieler i ($i = 1,2$).

Indifferenz (des Spielers i) besteht demnach zwischen solchen Paaren (x_i, x_{3-i}) , für die E_i konstant ist, wobei E_i beliebig gewählt werden kann. Bezeichnen wir eine solche Indifferenzmenge von Wettvorschlägen mit

$$(4) \quad M_i^* = \{(x_i, x_{3-i}) \mid (x_i, x_{3-i}) \in M_i, E_i = c, \\ c \text{ beliebig} \} \\ i = 1,2$$

so ergibt sich:

- (5) Annahme (2-a) \implies Spieler i spezifiziert M_i^*
als Menge der Wettvorschläge.

Welche Bedeutung hat (5) für die Menge $K^* \equiv M_1^* \cap M_2^*$ der kongruenten Wettvorschläge? Da u eine monoton wachsende Funktion ist¹⁾, ergibt sich aus Definition (3) für Indifferenz, d.h. konstantes E_i , dass für wachsendes x_i auch x_{3-i} wachsen muss und umgekehrt. Demnach ergibt sich M_i^* für Spieler i als Menge von Punkten gemäss Abbildung 1.

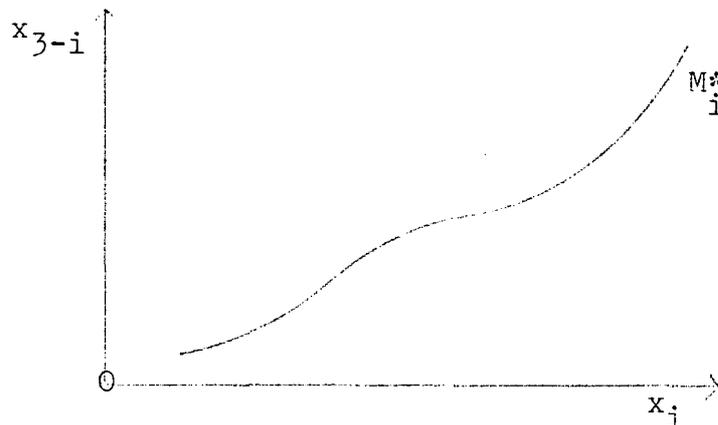


Abbildung 1 - Graphische Darstellung
der Menge M_i^* für Spieler i .

Aus (4) ergibt sich, dass die Definition von M_i^* invariant gegenüber beliebigen Transformationen von u_i ist und demnach von der Eigenschaft der Nutzenfunktion gemäss Annahme (1) nicht berührt wird. Demnach ergibt sich $K^* = M_1^* \cap M_2^*$ graphisch als die Menge aller Schnittpunkte zwischen M_1^* und M_2^* . Offensichtlich lässt sich unter den

¹⁾ Genaugenommen ergibt sich diese Eigenschaft aus der Annahme, dass grössere (erhaltene) Geldbeträge stets kleineren (erhaltenen) Geldbeträgen vorgezogen werden. Siehe z.B. Fishburn, 1970, S. 107.

bisher gemaachten Annahmen nichts darüber aussagen, wieviele Elemente K^* enthält: Jede Zahl zwischen 0 und überabzählbar vielen Elementen ist möglich. Damit ist nachträglich Annahme (2-b) gerechtfertigt, die auch für den Fall, dass K^* mehr als 1 Element enthält, "die Wette" erklärt, wenn auch nur mittels eines stochastischen Mechanismus.

Eine konkretere Aussage lässt sich dann machen, wenn man sich auf ^(streng) konkave Nutzenfunktionen beschränkt. Wir werden noch sehen, dass solche Nutzenfunktionen ein bestimmtes Risikoverhalten, nämlich "Risiko-Aversion", charakterisieren. Nimmt man für beide Spieler ^(streng) konkave Funktionen an, so lässt sich zeigen (siehe Appendix I), dass $n(K) = 0, 1, 2$ ist¹⁾, was in der Abbildung 2 skizziert ist.

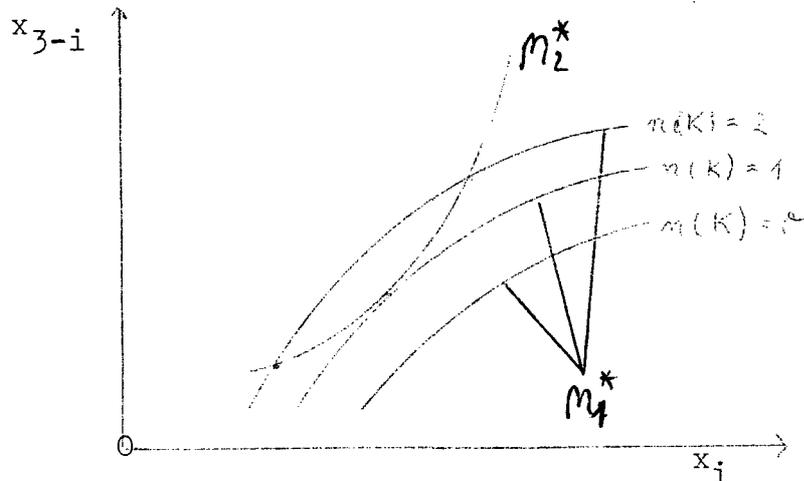


Abbildung 2 - Mögliche kongruente Wettangebote ^(streng) bei/ konkaven Nutzenfunktionen beider Spieler.

¹⁾ $n(K)$ bezeichnet die Anzahl der Elemente in K .

Also ist auch in diesem Fall die Erklärung "der Wette" mehrdeutig, falls K^* zwei Elemente enthält. Der Schiedsrichter müsste dann von beiden Punkten in Abbildung 2 einen zufällig - mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ - auswählen.

3.3 Weitere Annahmen über das Wettverhalten

Nun ist es sicher sinnvoll anzunehmen, dass jeder Spieler in den Wettvorschlägen an den Schiedsrichter den eigenen Einsatz x_i derart bestimmt, dass der erwartete Nutzen des Wettvorschlags grösser ist als der Nutzen der augenblicklichen Vermögenssituation, der wir den Wert 0 zugeordnet haben. Wir treffen deshalb die folgende

(6) Annahme: Der eigene Einsatz x_i in den Wettvorschlägen an den Schiedsrichter ist derart, dass gilt:

$$E_i > u_i(0) \quad \text{für alle } (x_i, x_{j-i}) \in M_i$$

Bezieht man die Annahme (6) auf die Indifferenzmenge M_i^* aus (4), so ergibt sich als Untermenge

$$(7) \quad M_i^{**} = \{(x_i, x_{j-i}) \mid (x_i, x_{j-i}) \in M_i^*, E_i > u_i(0)\}$$

$$i = 1, 2$$

d.h. $M_i^{**} \subseteq M_i^*$.

Hat Annahme (6) Folgen für die Aussagen über die Menge K^* , die einige Seiten zuvor in den Abbildungen 1 und 2 skizziert wurden? Eine kurze Überlegung zeigt, dass dies

nicht der Fall ist: Am einfachsten ist dies zu sehen, wenn man annimmt, die Spieler hätten ihre Wettvorschläge von Anfang an so spezifiziert, dass (6) implizite erfüllt wurde. Dann ändert sich überhaupt nichts. Aber auch wenn einer der Spieler oder beide feststellen, dass sie ihre Menge M_i^* derart spezifiziert haben, dass $E_i \leq u_i(0)$ ist und nun ihre Wettvorschläge derart modifizieren, dass für alle Wettvorschläge $E_i > 0$ wird, ergibt sich aus den Monotonieeigenschaften von u und daraus resultierend von M_i^* , dass - mit Blick auf Abbildung 1 - dadurch eine Verschiebung beider Mengen nach "rechts oben" bewirkt wird. Also besteht ein Unterschied zwischen den Mengen K^* und $K^{**} \equiv M_1^{**} \cap M_2^{**}$ nur bezüglich der "Lage" der möglichen Schnittpunkte, nicht aber bezüglich der verschiedenen möglichen ²⁾ Anzahlen der Elemente in den beiden Mengen.

Für die Ausführungen in Abschnitt ^{und 3.6} 3.5 empfiehlt es sich, für "beliebig grosse" Wetteinsätze das Verhalten der Nutzenfunktionen näher zu beschreiben. Dabei können wir die Bemerkung aus der Fussnote auf Seite 4 wieder aufgreifen, dass kein Mensch über unbegrenzte finanzielle Mittel verfügt, also auch unsere beiden Spieler nicht. Wir wollen deshalb annehmen¹⁾, beide Spieler könnten stets Beträge z_i' und z_i'' angeben, so dass - für vorgegebenes p_i -gilt:

- (a) Zu jedem $x_i > 0$ gibt es ein z_i' derart, dass für alle $x_{3-i} > 0$
- $$p_i u_i(x_{3-i}) + (1-p_i) u_i(x_i) < u_i(z_i') \quad \text{ist, und:}$$

1) Vergleiche die ähnliche Annahme für den "einseitigen" Fall der Entscheidungstheorie bei Pratt, Raiffa und Schlaifer (1965, Abschnitt 4.3.3).

(b) Zu jedem $x_{3-i} > 0$ gibt es ein z'_i derart, dass
für alle $x_i > 0$

$$p_i u_i(x_{3-i}) + (1-p_i) u_i(x_i) > u(z'_i)$$

ist. ($i = 1, 2$)

Dies entspricht der folgenden

(8) Annahme: Die Nutzenfunktionen beider Spieler sind
beschränkt.

3.4 Bedingungen für "die Wette" und unterschiedliches Risikoverhalten

Wir haben gesehen, dass selbst in extremen Fällen, d.h. dort wo die Nutzenfunktionen beider Spieler (streng) konkav sind, die jeweilige Situation dafür entscheidend ist, ob $n(K)$ die Werte 0, 1 oder 2 annimmt, wobei die Fälle $n(K) = 0$ und $n(K) = 1$ jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1, die beiden möglichen Wettkonstellationen für $n(K) = 2$ alternativ mit Wahrscheinlichkeit 1/2 eintreten würden. Anders ausgedrückt: Über die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes $n(K)$ eintritt, sagt die Theorie nichts aus, solange nichts darüber gesagt ist, wie wahrscheinlich bzw. "plausibel" bestimmte Nutzenfunktionen der beiden Spieler sind. Wir wollen diesen Gedanken hier nicht weiter untersuchen und uns im folgenden auf die Fälle beschränken, in denen eine Wette stattfindet, d.h. es soll ab sofort gelten:

$$n(K) > 0 ,$$

ohne weiter zu spezifizieren, wieviel Elemente in K ent-

halten sein sollen und welches dieser Elemente als "die Wette" ausgewählt wurde. In Abhängigkeit davon, dass ein bestimmtes Element als "die Wette" ausgewählt wurde, gilt dann wegen (1), (2) und (6) für diese Wette die folgende grundlegende Beziehung:

$$(9) \quad p_i u_i(x_{j-i}) + (1-p_i) u_i(-x_i) > u_i(0) \quad i = 1, 2 .$$

(9) ist als bedingte Bedingung für das Zustandekommen einer Wette und damit auch als bedingte Antwort auf die Frage aus Abschnitt 1 anzusehen, wann eine Wette zustandekomme. Im folgenden wollen wir nun untersuchen, welchen Einfluss die subjektiven Wahrscheinlichkeitsabschätzungen auf die Art der Einsätze haben und dabei von bestimmten Formen von Nutzenfunktionen ausgehen. Diese Art der Analyse ist durch folgende Überlegung begründet:

Es ist in mathematisch anspruchsvollen Modellen über Glücksspiele oder über Märkte Brauch, eine lineare Nutzenfunktion als "objektiv" einzuführen¹⁾ und sehr detaillierte Ergebnisse daraus abzuleiten. Nun hat die in Abschnitt 2 beschriebene Theorie längst gezeigt, dass menschliches Verhalten durch unterschiedliches "Risikoverhalten" charakterisierbar ist, nämlich durch "Risiko-Sympathie, -Neutralität und -Aversion", das sich durch die Form der Nutzenfunktion beschreiben lässt, Risikoneutralität beispiels-

¹⁾Vergleiche z.B. Epstein, 1967, S. 54, oder Lavallo, 1967.

weise durch eine lineare Funktion²⁾. Darüberhinaus ist die Vermutung durchaus begründet, dass risiko-aversives Verhalten mindestens ebenso häufig ist wie risiko-neutrales³⁾ und eine dadurch implizierte (streng) konkave Funktion als "ebenso objektiv" angesehen werden müsste wie eine lineare.

Um solchem unfruchtbaren Streit zu entgehen, werden wir im folgenden keine expliziten funktionalen Formen annehmen, sondern nur die durch bestimmtes Risikoverhalten den Funktionen auferlegten Restriktionen voraussetzen und - davon ausgehend - den Einfluss der subjektiven Wahrscheinlichkeitsabschätzungen auf die Wetteinsätze untersuchen. Insbesondere interessiert der Fall, dass beide Spieler risiko-aversiv sind, denn von Leuten, die wetten, wird man im allgemeinen annehmen, sie "suchten das Risiko". Dass eine Wette in diesem Fall möglich ist, wurde in Abschnitt 3.2 gezeigt, wenn auch dort der Zusammenhang zwischen Risiko-Aversion und (streng) konkaver Nutzenfunktion noch nicht behandelt wurde.

Für die folgenden Ableitungen ist es von Vorteil, die Eigenschaft der Nutzenfunktionen auszunutzen, d.h. sie derart linear zu transformieren, dass $u(0) = 0$ ist. Dann ergibt sich aus (9):

$$(10) \quad p_i u_i^*(x_{3-i}) + (1-p_i) u_i^*(-x_i) > 0 \quad i = 1, 2,$$

wobei u^* die vollzogene Transformation anzeigt.

²⁾ Ausführliche Definitionen in den folgenden Abschnitten.

³⁾ Raiffa, 1968, Kapitel 4.

3.5 Wetten zwischen risiko-aversiven Spielern

Wir nehmen an, dass beide Spieler eine Präferenzstruktur besitzen, die Risiko-Aversion ausdrückt. Diese äussert sich in der Konkavität der Nutzenfunktionen. Genauer ist die folgende (auf unsere Zwecke zugeschnittene)

(11) Definition: Eine bis auf positiv lineare Transformationen eindeutige Funktion u beschreibt den Fall der Risiko-Aversion, wenn gilt:

$$p \cdot u(y) + (1-p) \cdot u(-x) < u \left[p \cdot y + (1-p)(-x) \right]$$

$(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$

Wegen der Monotonizität von u ist auch

$$(12) \quad u^{-1} \left[p u(y) + (1-p) u(-x) \right] < p \cdot y + (1-p)(-x)$$

eindeutig definiert. Den Ausdruck links vom Ungleichheitszeichen bezeichnet man als "Sicherheitsäquivalent".

Speziell für unsere linear transformierten Nutzenfunktionen u^* lässt sich Risikoaversion auch durch

$$(13) \quad -u^*(-x) > u^*(x) \quad \text{für beliebiges } x > 0$$

definieren.

Für Bedingung (10) ergibt sich wegen (13):

$$(14) \quad p_i u_i^*(x_{3-i}) > -(1-p_i) u_i^*(-x_i) > (1-p_i) u_i^*(x_i)$$

$$i = 1, 2 .$$

Dies Ergebnis ermöglicht es, über das Zustandekommen von Wetten einige Bemerkungen zu machen, die sich auf die Wahrscheinlichkeitsabschätzungen beider Spieler beziehen.

Beschränken wir uns vorerst auf den Fall, dass nur solche Wetten zugelassen sind, in denen beide Spieler gleich hohe Einsätze wetten können. Dann ergibt sich folgendes Resultat:

(15) Für Spieler mit Risikoaversion, die eine Wette eingehen, bei der die Einsätze gleich gross sind (sein müssen), ist notwendige, aber in keinem Fall hinreichende Bedingung, dass für beide Spieler gilt:

$$p_i \{\text{günstiges Ereignis}\} > 1/2, \quad i = 1, 2.$$

Die Notwendigkeit ergibt sich direkt aus (14); dass (15) nicht hinreichend ist, sieht man, wenn man die zu (10) äquivalente Bedingung (für den Fall $x_i = x_{3-i}$)

$$(16) \quad u_i^{*-1} \left[p_i u_i^*(x) + (1-p_i) u_i^*(-x) \right] > 0 \quad i = 1, 2$$

mit der Definition für Risikoaversion in der Form (12) verbindet. Daraus ergibt sich

$$(17) \quad 0 < u_i^{*-1} \left[p_i u_i^*(x) + (1-p_i) u_i^*(-x) \right] < p_i x + (1-p_i)(-x) \\ i = 1, 2.$$

Demnach muss für das Zustandekommen einer Wette die Wahrscheinlichkeit p_i beider Spieler um soviel den Wert $1/2$

überschreiten, dass auch das Sicherheitsäquivalent grösser als 0 ist.

Man kann (15) als Informationsproblem auffassen: Beide Spieler verfügen über Informationen, die für ihre Wahrscheinlichkeitsabschätzungen relevant sind¹⁾. Allerdings sind ihre Informationen derart verschieden, dass beide die Wahrscheinlichkeit für das für sie günstige Ereignis grösser als 1/2 abschätzen. Auch wenn sie über dieselbe Information verfügen, mag das Ergebnis⁽¹⁵⁾ für den Fall zutreffen, dass die Likelihoodfunktion, die bedingte Wahrscheinlichkeitsaussagen von der Art

$p\{\text{Information ist durch das Ereignis E bewirkt}\}$

spezifiziert, für beide Spieler sehr unterschiedlich ist; diese Bemerkung wird durch die Erwägungen unterstützt, dass man Wetten von der beschriebenen Art wahrscheinlich nie beispielsweise über den Anteil defekter Stücke in einer Produktionsserie abschliessen würde, für die die Likelihoodfunktion theoretisch festgelegt ist (Bernoulli-Prozess)²⁾.

Allerdings darf man diese Aussage nicht überschätzen, die in solcher Allgemeinheit nur für den Fall gleicher Einsätze beider Spieler möglich ist. Denn wenn man die Beschränkung fallen lässt und beiden Spielern beliebige Einsätze zubilligt - nur dies entspricht einer Wette im Sinne

-
- 1) Würden sie über gar keine Information verfügen, so sollten sie gemäss dem "Prinzip des unzureichenden Grundes" Gleichwahrscheinlichkeit annehmen, d.h. $p_i = 1-p_i$ ($i = 1,2$).
- 2) Voraussetzung ist dabei, dass man nur die Anzahl defekter Stücke in einer Stichprobe aus dieser Serie als "Information" zulässt.

von Abschnitt 3.1 - dann ergibt sich eine Aussage, die sich nur noch auf einen Spieler bezieht.

- (18) Für Spieler mit Risikoaversion, die eine Wette eingehen, ist notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung, dass für den Spieler mit dem höheren Einsatz (d.h. i' derart, dass $x_{i'} > x_{3-i'}$) gilt:

$$p_{i'}(\text{günstiges Ereignis}) > 1/2 .$$

Dies ergibt sich aus (14), wenn man berücksichtigt, dass u^* eine streng monoton wachsende Funktion ist; denn dann lässt sich die Gleichung des in (18) genannten Spielers folgendermassen formulieren:

$$(19) \quad \frac{p_{i'}}{1-p_{i'}} > \frac{u_{i'}^*(x_{i'})}{u_{i'}^*(x_{3-i'})} > 1, \quad i' \text{ derart, dass } x_{i'} > x_{3-i'}$$

Über die Wahrscheinlichkeitsabschätzungen des Spielers i'' ($i'' = 3-i'$) mit dem kleineren Einsatz lassen sich keine Aussagen in entsprechender Allgemeinheit machen. Seine Wahrscheinlichkeit (des für ihn günstigen Ereignisses) $p_{i''}$ kann sehr wohl über 1/2 (bis hin zu 1) liegen, d.h. sehr stark von der Wahrscheinlichkeitsabschätzung des ersten Spielers abweichen. Andererseits kann $p_{i''}$ aber auch unter 1/2 liegen, allerdings nur solange die Gleichung (14) gilt, d.h. solange

$$(1-p_{i''})u_{i''}^*(x_{i''}) < p_{i''}u_{i''}^*(x_{3-i''})$$

wobei $u_{i''}^*(x_{3-i''}) > u_{i''}^*(x_{i''})$ ist. Es kann also im Einzelfall eintreten, dass $p_{i'} = 1-p_{i''}$ ist oder - anders gesagt -

dass die Wahrscheinlichkeitsabschätzungen der beiden Spieler identisch sind¹⁾.

Deshalb wird auch hier das im Zusammenhang mit (15) diskutierte Informationsproblem auftreten können. Ob es vorliegt, lässt sich allerdings nicht feststellen - zumindest nicht unter den gemachten Annahmen.

3.6 Wetten bei anderem Risikoverhalten

Wir haben in Abschnitt 3.5 die restriktive Annahme benutzt, dass beide Spieler risiko-aversiv sind. Was geschieht, wenn einer oder beide Spieler nicht risiko-aversiv sind ?

(20) Definition: Eine Nutzenfunktion u drückt Risiko-Neutralität aus, wenn gilt:

$$u^{-1}\left[pu(y) + (1-p)u(x)\right] = p \cdot y + (1-p) \cdot x$$

Sie drückt Risiko-Sympathie aus, wenn gilt:

$$u^{-1}\left[pu(y) + (1-p)u(x)\right] > p \cdot y + (1-p) \cdot x$$

Entsprechend (13) liesse sich Risiko-Neutralität auch durch

$$(21) \quad -u^*(-x) = u^*(x) \quad , \quad x > 0$$

und Risiko-Sympathie durch

$$(22) \quad -u^*(-x) < u^*(x) \quad , \quad x > 0$$

definieren.

¹⁾ p_i schätzt das komplementäre Ereignis von p_i . Siehe Seite 14.

Da die Bedingung

$$-u(-x) \geq u(x) \quad \text{für } x > 0$$

Risiko-Neutralität und -Aversion zulässt, kann man in diesem Fall (14) folgendermassen schreiben:

$$(14') \quad p_i u_i^*(x_{j-i}) > (1-p_i) u_i^*(-x_i) \geq (1-p_i) u_i^*(x_i), \quad i = 1, 2$$

An der Ungleichung zwischen den beiden äusseren Ausdrücken ändert sich demnach nichts gegenüber (14). Deshalb ergibt sich bei Beschränkung auf gleich grosse Wetteinsätze, dass (15) auch dann gültig ist, wenn einer oder beide Spieler (zumindest in bestimmten Bereichen) risiko-neutral sind. Für den speziellen Fall, dass beide Spieler stets risiko-neutral sind, d.h. lineare Nutzenfunktionen haben, ergibt sich die Bedingung

$$p_i \{\text{günstiges Ereignis}\} > 1/2 \quad ; \quad i = 1, 2$$

aus (15) nicht nur als notwendig, sondern auch als hinreichend. Dies sieht man, wenn man die Definition (20) für Risiko-Neutralität mit der hinreichenden Bedingung (16) verbindet:

$$(23) \quad 0 > u_i^{*-1} \left[p_i u_i^*(x) + (1-p_i) u_i^*(-x) \right] = p_i x + (1-p_i)(-x)$$

d.h. (23) ist nur für $p_i > 1/2$ erfüllt.

Ebenso ergibt sich aus (14') bei beliebigen Wetteinsätzen, dass (18) auch dann gilt, wenn einer oder beide Spieler ganz oder teilweise risiko-neutral sind. Darüberhinaus

lässt sich die Aussage aus (18), die sich nur auf den Spieler mit dem höheren Einsatz bezog, dann auf beide Spieler beziehen, wenn man annimmt, dass beide stets risiko-neutral sind:

(24) Für risiko-neutrale Spieler, die eine Wette eingehen, ist notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung, dass gilt:

$$p_i \{\text{günstiges Ereignis}\} > 1/2 \quad ; \quad i = 1, 2 .$$

Man beachte die Übereinstimmung mit (15). Dort wird angenommen, beide Spieler wetteten nur gleich grosse Einsätze.

Man erhält (24), indem man (14') explizite für beide Spieler schreibt, dann für einen der (übereinstimmenden) Einsätze annimmt, er sei mindestens so gross wie der andere, und daraus unter Berücksichtigung der Risiko-Neutralität ableitet:

$$(25) \quad \frac{p_1}{1-p_1} > \frac{x_1}{x_2} \geq 1 \geq \frac{x_2}{x_1} > \frac{1-p_2}{p_2} \quad , \quad x_1 \geq x_2 \quad .$$

Diese Gleichung ist bei geeigneter Nummerierung der (risiko-neutralen) Spieler stets gültig.

Aus (25) geht ausserdem hervor, dass die Wahrscheinlichkeitsabschätzungen nur dann hinreichend gross sind, wenn sie über das Verhältnis der Wetteinsätze x_i und x_{j-i} "hinausgehen". Demnach ist auch für Leute mit linearen Nutzenfunktionen die Annahme einer sogenannten "fairen"

Wette nicht vorteilhaft¹⁾.

Betrachten wir nun noch kurz den Fall der Risiko-Sympathie. Man findet hier keine Aussagen in Form von Ungleichungen, die denen für den Fall der Risiko-Aversion (einschliesslich Risiko-Neutralität) entsprechen. Also ist dieser Fall theoretisch "unergiebig"; in der ausgesprochenen Spielsituation, in der Wetten im allgemeinen angesiedelt sind, dürfte andererseits dieser Fall weit häufiger sein als der der Risiko-Aversion. Es scheint müssig, darüber zu diskutieren, ob für Spieler, die eine Wette abschliessen, die Annahme von Risiko-Aversion überhaupt sinnvoll ist. Darüber könnten allenfalls empirische Untersuchungen entscheiden, die nachweisen, dass risiko-aversives Verhalten unabhängig davon ist, ob man wettet oder nicht. Die damit zusammenhängenden Probleme können wir hier nicht weiter behandeln.

3.7 Wetten und unliebsame Ereignisse

Nehmen wir an, der Spieler i wolle mit seinem Gegenspieler über zwei verschiedene Ereignisse (zwei verschiedene) Wetten abschliessen. Es sei bekannt, dass der Spieler beide Ereignisse für gleich wahrscheinlich halte. Trotzdem spezifiziere er für beide Wetten unterschiedliche Wettangebote gemäss Abbildung 3. Gleichzeitig erkläre er, beide Wetten würde er gleich gern eingehen, d.h. er sei zwischen ihnen indifferent.

¹⁾ Diese Aussage ist durch die Annahme (6) bedingt, dass die Einsätze stets derart gewählt werden, dass der Nutzen der Wette grösser ist als der Nutzen der augenblicklichen Vermögenssituation. Vergleiche auch Abschnitt 2.4 wegen des Begriffs der "fairen" Wette.

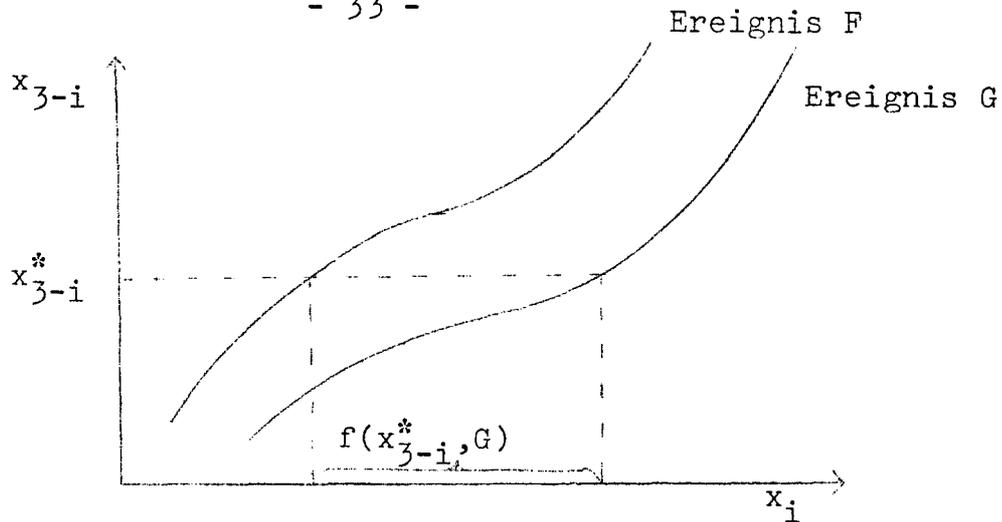


Abbildung 3 - Wettangebote eines Spielers
für die Ereignisse F und G.

Ganz offensichtlich ist die Spezifikation nicht unabhängig von dem jeweiligen Ereignis erfolgt. Für Ereignis G ist der Spieler bereit, jeweils einen höheren Einsatz für bestimmten Einsatz des Gegenspielers zu wagen. Kann solches Verhalten "rational" sein? Eine im Zusammenhang mit Wetten nicht unplausible Erklärung ist die folgende:

Das Ereignis F berührt den Spieler nicht, er lässt sich dabei nur von seinem Geldnutzen u_i und seiner Wahrscheinlichkeitsabschätzung beeinflussen. Das Ereignis G dagegen empfindet er als unangenehm und sein Nichteintreten wäre ihm "einen Haufen Geld" wert, d.h. er wäre bereit, einen höheren Verlust als beim Ereignis F zu tragen, ohne damit die Wahrscheinlichkeit für G beeinflussen zu können.

Da nicht ausgeschlossen werden kann, dass dieser "Zuschlag" auch von der Höhe des gegnerischen Einsatzes abhängig ist, müsste eine Bedingung für das Zustandekommen der Wette (bezüglich des betrachteten Spielers i) jetzt lauten:

$$p_i u_i(x_{3-i}) + (1-p_i) u_i(-(x_i + f(E, x_{3-i}))) > u_i(0) ,$$

wobei die Funktion f positive oder negative Werte annimmt je nachdem, ob das Ereignis unangenehm oder angenehm ist. (Für Ereignisse ohne Einfluss wäre $f = 0$.) Siehe auch Abbildung 3.

Es ist also möglich, dass ein Einsatz, der ohne Beachtung des "Charakters" des Ereignisses kleiner als der Einsatz des Gegenspielers spezifiziert wurde, bei Beachtung grösser als der gegnerische Einsatz angegeben wird. Der Einfluss dieses Phänomens auf die Ergebnisse in den Abschnitten 3.5 und 3.6 ist unübersehbar. Man vergleiche z.B. Gleichung (25).

Das Problem mehrerer Komponenten ("multiattribute problem"), die alle in die (von Neumann-Morgenstern-) Nutzenfunktion eingehen, ist wohlbekannt, aber weitgehend ungelöst. Raiffas Bemerkungen¹⁾ dazu scheinen den augenblicklichen Stand der Forschung zu charakterisieren - gesehen vom Standpunkt der Entscheidungstheorie. Wir haben es hier mit einem degenerierten Fall zu tun: Zwar wird als zweite Komponente neben den Geldauszahlungen der "Charakter" des Ereignisses betrachtet, doch da nur zwei Naturzustände E und \bar{E} vorhanden sind, hat diese Komponente nur zwei Werte. Dagegen betrachtet Raiffa Fälle, in denen beide Komponenten durch die Menge aller (nicht notwendigerweise positiven) reellen Zahlen darstellbar und Substitutionsbeziehungen mittels Indifferenzkurven bestimmbar sind.²⁾

1) 1968, S. 246-255.

2) "if we have an indifference map (and this is a big if)..." (Raiffa, 1968, S. 249).

Ähnlich wie die Frage nach dem Zusammenhang zwischen Risiko-Aversion und Wette (Seite 32) scheint auch die Frage, wie gross der Einfluss weiterer Komponenten im Vergleich zur monetären Komponente ist, nur mit Hilfe empirischer Daten beantwortbar zu sein. Der am Anfang dieses Abschnitts beschriebene Vergleich zwischen verschiedenen Ereignissen könnte dabei als Versuchsanordnung dienen.

4 Zusammenfassung

In einem Überblick wird dargestellt, welche Rolle als Modell die Wette bei der Formulierung der Begriffe "Nutzen" und "subjektive Wahrscheinlichkeit" gespielt hat. Dabei wurde sie nur aus der Sicht eines Spielers betrachtet. Wir nennen die entsprechende Theorie "einseitig".

Unter Bezug auf diese Theorie wird ein "zweiseitiges" Modell für Wetten zwischen zwei Spielern formuliert. Diese benötigen für das Zustandekommen einer Wette einen Schiedsrichter, der Wettangebote entgegennimmt und aus kongruenten Wettangeboten stochastisch "die Wette" auswählt. Die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Wetten für bestimmte Formen der Nutzenfunktionen wird untersucht. Anschliessend daran wird der Einfluss der subjektiven Wahrscheinlichkeitsabschätzungen auf die Wetteinsätze für gegebenes "Risiko-Verhalten" (das für die Form der Nutzenfunktionen bestimmte Beschränkungen bedeutet) analysiert. Das Problem mehrerer in die Nutzenfunktion eingehenden Komponenten ("multi-attribute problem") wird diskutiert.

Das Modell hat seine Bedeutung für bestimmte Arten von Märkten, nämlich Auktionsmärkte, wenn auch nur bei Verallgemeinerung auf n Personen. Dem Schiedsrichter entspricht dort der Auktionator. Die bestehende Literatur¹⁾ hat sich auf den Fall linearer Nutzenfunktionen, die ein bestimmtes Risikoverhalten beinhalten, beschränkt.

¹⁾ Siehe Abschnitt 1.

Appendix I (siehe Seite 19)

1) Voraussetzung:

$$(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

$$pu(x) + (1-p)u(-y) = E = \text{const.}$$

$$u'(t) > 0, \quad u''(t) < 0$$

$$y = \varphi(x)$$

Behauptung:

$$u'(t) > 0 \quad \implies \quad \varphi'(t) > 0 \quad (\text{A-1a})$$

$$u'(t) > 0, \quad u''(t) < 0 \quad \implies \quad \varphi''(t) < 0 \quad (\text{A-1b})$$

Beweis:

$$(a) \quad pu'(x) + (1-p)u'(-y)(-\varphi'(x)) = 0$$

d.h.

$$\varphi'(x) = \frac{pu'(x)}{(1-p)u'(-y)}$$

Für $u'(t) > 0$ ist $\varphi'(t) > 0$

$$(b) \quad \varphi''(x) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{u''(x)u'(-y) + u'(x)u''(-y) \frac{pu'(x)}{(1-p)u'(-y)}}{u'(-y)^2}$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \left[\frac{u''(x)}{u'(-y)} + \frac{p}{1-p} \cdot \frac{u'(x)^2 u''(-y)}{u'(-y)^3} \right]$$

Für $u'(t) > 0$ und $u''(t) < 0$ ist $\varphi''(t) < 0$.

2) Für den anderen Spieler, d.h. bei vertauschten Einsätzen x und y muss gelten¹⁾:

¹⁾ p und u sind nicht mit den gleichen Symbolen in 1) identisch. Aus Gründen der Vereinfachung wurden die Indizes weggelassen.

$$pu(y) + (1-p)u(-x) = E = \text{const.}$$

und es sei $y = \psi(x)$. Dann lässt sich analog zum Beweis von (A-1) zeigen:

$$u'(t) > 0, u''(t) < 0 \implies \psi'(t) > 0, \psi''(t) > 0 \quad (\text{A-2})$$

Demnach ergibt sich bei (streng) konkaven Nutzenfunktionen der Spieler eine Beziehung zwischen M_1^* und M_2^* gemäss Abbildung 2 (Seite 18), wobei M_1^* und M_2^* die Graphen der Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ sind. (Für (x_1, x_2) im Text haben wir im Appendix (x, y) benutzt.)

- 3) Es bleibt zu zeigen, dass wie in Abbildung 2 angedeutet die beiden Funktionen höchstens 2 Schnitt- bzw. Berührungspunkte miteinander haben:

Voraussetzung:

$$\varphi'(t) > 0, \varphi''(t) < 0 ; \quad \psi'(t) > 0, \psi''(t) > 0$$

Behauptung:

$\varphi(t) - \psi(t) = 0$ für maximal 2 Werte von t , d.h. es gibt maximal 2 Nullstellen.

Beweis:

$$\psi''(t) > 0 \implies -\psi''(t) < 0$$

$$\varphi''(t) < 0, \quad -\psi''(t) < 0 \implies \varphi''(t) + (-\psi''(t)) < 0$$

d.h. $g(t) \equiv \varphi(t) - \psi(t)$ ist (streng) konkav.

Angenommen nun, f besitze mehr als zwei Nullstellen, beispielsweise drei. Dann ist $g''(t) = 0$ für den "Wendepunkt" von g . Dies aber steht im Widerspruch zu der Eigenschaft von g , dass stets $g''(t) < 0$ gilt. Demnach kann g höchstens zwei Nullstellen haben.

L i t e r a t u r

- F.J. Anscombe und R.J. Aumann (1963)
A Definition of Subjective Probability.
The Annals of Mathematical Statistics,
Vol. 34, S. 199 - 205
- K.J. Arrow (1964)
The Role of Securities in the Optimal Allocation
of Risk Bearing. Review of Economic Studies,
Vol. 31, S. 91 - 96
- K.J. Arrow (1966)
Exposition of the Theory of Choice under
Uncertainty. Synthese, Vol. 16, S. 253 - 269.
- D. Bernoulli (1738/1954)
Specimen theoriae novae de mensura sortis.
Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis
Petropolitanae, Band 5, S. 175 - 192.
Englische Übersetzung: Econometrica, Vol. 22,
S. 23 - 36
- K. Borch (1962)
Equilibrium in a Reinsurance Market.
Econometrica, Vol. 30, S. 424 - 444
- R. Carnap (1950)
Logical Foundations of Probability. Chicago
- H. Chernoff (1954)
Rational Selection of Decision Functions.
Econometrica, Vol. 22, S. 422 - 443
- R.A. Epstein (1967)
The Theory of Gambling and Statistical Logic.
New York
- W. Feller (1957)
An Introduction to Probability Theory and
its Applications, 3. Auflage, New York
- E. Fels und G. Tintner (1967)
Methodik der Wirtschaftswissenschaft.
Enzyklopädie der geisteswissenschaftlichen
Arbeitsmethoden. München. 8. Lieferung:
Methoden der Sozialwissenschaften, S. 3 - 94
- Bruno de Finetti (1937)
La Prevision: ses lois logiques; ses sources
subjectives. Annales de l'Institut Henri
Poincaré, Vol. 7, S. 1 - 68.

- Bruno de Finetti (1964)
(Übersetzung von Bruno de Finetti (1937)).
Veröffentlicht in H.E. Kyburg und H.E. Smokler
(Hrsg) - Studies in Subjective Probability,
New York, S. 95 - 158
- P.C. Fishburn (1967)
Preference - Based Definitions of Subjective
Probability. Annals of Mathematical Statistics,
Vol. 38, S. 1605 - 1617
- P.C. Fishburn (1970)
Utility Theory for Decision Making. New York
- J. Grayson (1960)
Decisions under Uncertainty: Drilling Decisions
by Oil and Gas Operators. Cambridge (Mass.)
- J.C. Harsanyi (1968)
Games with Incomplete Information Played by
"Bayesian" Players. Management Science, Vol. 14,
S. 159 - 182 (Part I), S. 320 - 334 (Part II),
S. 486 - 502 (Part III)
- J. Kemeny (1955)
Fair Bets and Inductive Probabilities.
Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, S. 263 - 273
- H.E. Kyburg und H.E. Smokler (1964)
Introduction, in: (dieselben)(Hrsg.) -
Studies in Subjective Probability, New York,
S. 1 - 15
- I.H. Lavalley (1967)
A Bayesian Approach to an Individual Player's
Choice of Bid in Competitive Sealed Auctions.
Management Science, Vol. 13, S. 584 - 597
- R.D. Luce und H. Raiffa (1957)
Games and Decisions. Introduction and Critical
Survey. New York
- F. Mosteller und P. Noguee (1951)
An Experimental Measurement of Utility.
Journal of Political Economy, Vol. LIX,
S. 371 - 401
- J. von Neumann und O. Morgenstern (1953)
Theory of Games and Economic Behavior.
Princeton, 3. Auflage
- J.W. Pratt, H. Raiffa und R.O. Schlaifer (1964)
The Foundations of Decisions under Uncertainty.
An Elementary Exposition. Journal of the
American Statistical Association, Vol. 59,
S. 353 - 375

- J.W. Pratt, H. Raiffa und R.O. Schlaifer (1965)
Introduction to Statistical Decision Theory
(Preliminary Edition). New York
- H. Raiffa (1968)
Decision Analysis. Introductory Lectures
on Choices under Uncertainty. Reading (Mass.)
- F.P. Ramsey (1926)
Truth and Probability. Veröffentlicht in:
The Foundations of Mathematics and Other
Logical Essays. Herausgegeben von R.B.
Braithwaite. London 1931
- M.H. Rothkopf (1969)
A Model of Rational Competitive Bidding.
Management Science, Vol. 15, S. 362 - 373
- L.J. Savage (1954)
The Foundations of Statistics. New York
- A. Shimony (1955)
Coherence and the Axioms of Confirmation.
Journal of Symbolic Logic, Vol. 20, S. 1 - 28