

Davies, Laurie; Ronning, Gerd

**Working Paper**

## Einige exakte und asymptotische Ergebnisse für das Standardmodell der Portefeuille-Auswahl innerhalb einer Periode

Diskussionsbeiträge, No. 41

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Davies, Laurie; Ronning, Gerd (1974) : Einige exakte und asymptotische Ergebnisse für das Standardmodell der Portefeuille-Auswahl innerhalb einer Periode, Diskussionsbeiträge, No. 41, Universität Konstanz, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78182>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

320

Einige exakte und asymptotische  
Ergebnisse für das Standardmo-  
dell der Portefeuille-Auswahl  
innerhalb einer Periode

100\*

Laurie Davies

Gerd Ronning

104a

425

Januar 1974

457

Diskussionsbeiträge

des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften

der Universität Konstanz; 41

010 Nr. 41

040

Einige exakte und asymptotische Ergebnisse für  
das Standardmodell der Portefeuille-Auswahl  
innerhalb einer Periode

Laurie Davies und Gerd Ronning

1 Einleitung

1.1 Das gewöhnliche Portfeuilleauswahl-Problem für eine Periode kann wie folgt beschrieben werden: Ein Anleger mit einer Nutzenfunktion  $u(x)$  (wobei  $x$  der Betrag des Vermögens ist) und Anfangsvermögen  $Y$  wählt aus  $n$  Wertpapieren  $(A_v)_1^n$  ein Portfeuille in der Weise aus, daß der erwartete Nutzen des Vermögens, das sich nach Ablauf einer Periode ergibt, maximiert wird. Wenn  $y_v$  der Betrag ist, den der Anleger im Wertpapier  $A_v$  investiert, dann ist es sein Ziel, den Ausdruck  $E(u(\sum_{v=1}^n y_v X_v))$  zu maximieren, wobei die nicht-negativen Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  die Werte der entsprechenden Wertpapiere  $(A_v)_1^n$  pro Einheit des investierten Vermögens am Ende der betrachteten Periode bezeichnen. Man beachte dabei, daß in dieser Formulierung die Möglichkeit der Kreditaufnahme und der Anlage in anderen Wertpapieren als  $(A_v)_1^n$  ausgeschlossen ist.

Wir möchten gleich zu Beginn dieses Aufsatzes darauf hinweisen, daß wir stärker als bisher in der Literatur üblich

die Beschränkung der Zufallsvariablen auf nichtnegative Werte betonen werden; bisher wurde oft nicht darauf geachtet, daß negative Werte für die oben definierten Zufallsvariablen negative Preise der Aktien bedeuten würden bzw. daß man mehr verliert als man investiert hat.

1.2 In [ 4 ] wurde unter Verwendung recht schwacher Annahmen gezeigt, daß dies Problem eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, die wir im folgenden mit  $(y_v^*)_1^n$  bezeichnen wollen. Explizite Lösungen scheinen jedoch nur in sehr wenigen Fällen bekannt zu sein; zwei davon seien hier erwähnt:

- (1) Die Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  seien austauschbar (exchangeable) und linear unabhängig, und  $u(x)$  sei beschränkt und streng konkav. Dann ist

$$y_v^* = Y/n \quad , \quad v = 1, \dots, n \quad ,$$

die eindeutig bestimmte Lösung (siehe [ 4 ]).

- (2) Die Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  seien unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswerten  $(\mu_v)_1^n$  und Varianzen  $(\sigma_v^2)_1^n$ . Angenommen, die Nutzenfunktion sei  $u(x) = 1 - \exp(-nx)$  ,  $n > 0$  , dann ist für genügend großes  $Y$  (siehe § 2)

$$y_v^* = \frac{Y + n^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^n (\mu_v - \mu_j) \sigma_j^{-2} \right\}}{\sigma_v^2 \left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-2} \right\}}$$

die eindeutig bestimmte Lösung.

Im zweiten Beispiel ist die Bedingung, daß die  $(X_{\nu})_1^n$  positiv sind, verletzt; es wurde trotzdem angegeben, weil die Annahme der Normalverteilung sehr häufig behandelt wird. Über die Wirkung, die die negativen Werte auf die optimale Auswahl haben, berichten wir in § 2 .

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, analog zu dem Ergebnis (2) Lösungen für andere Verteilungen als die Normalverteilung zu bestimmen. Dabei werden wir weiterhin annehmen, daß die Nutzenfunktion von der Form  $u(x) = 1 - \exp(-nx)$  ,  $n > 0$  , ist. In § 2 werden die Gamma-Verteilung und die Poisson-Verteilung sowie positive stabile Verteilungen untersucht. Manchmal ist es möglich, die exakte asymptotische Auswahl, d.h.  $\lim_{Y \rightarrow \infty} y_{\nu}^*/Y$  , anzugeben, selbst wenn die exakte Auswahl für festes  $Y$  nicht bestimmbar ist. Über solche Fälle berichten wir in § 3 .

1.3 Die Ergebnisse in § 2 und § 3 werden stark von den Annahmen beeinflußt, daß die Zufallsvariablen voneinander unabhängig sind und daß die Nutzenfunktion  $u(x)$  von der Form  $1 - \exp(-nx)$  ist. Wir wollen jetzt in aller Kürze diese beiden Annahmen besprechen.

Es ist klar, daß in der Realität die Annahme der Unabhängigkeit verletzt ist. Die folgende schwächere Annahme bietet sich an, obwohl auch sie keine befriedigende Lösung darstellt: Jede Zufallsvariable  $X_{\nu}$  ist durch zwei Zufallsvariablen,  $Z_0$  (Marktkomponente) und  $Z_{\nu}$  (Störvariable), bestimmt und zwar so, daß entweder

$$(3) \quad X_v = \mu_v + Z_0, \quad v = 1, \dots, n$$

oder

$$(4) \quad X_v = Z_v Z_0, \quad v = 1, \dots, n$$

gilt, wobei die Zufallsvariablen  $(Z_v)_0^n$  voneinander unabhängig sind. (Für Ansatz (3) siehe z.B. [6].)

Verwendet man (3) gemeinsam mit der Nutzenfunktion  $u(x) = 1 - \exp(-\eta x)$ , dann spielt die Zufallsvariable  $Z_0$  keine Rolle und es ist möglich, mit den Methoden dieser Arbeit exakte und asymptotische Lösungen zu erhalten. Allerdings ist es schwierig, eine vernünftige Bedingung für die Nicht-Negativität der Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  anzugeben.

Im Gegensatz dazu steht die Annahme (4). Die Nicht-Negativität der  $(X_v)_1^n$  stellt jetzt kein Problem dar, weil man nur annehmen muß, daß alle Zufallsvariablen  $(Z_v)_0^n$  positiv sind. Exakte Lösungen des Portefeuilleauswahl-Problems hängen nun aber von der Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $Z_0$  ab und sind deswegen schwer zu bestimmen. Es scheint auch in diesem Fall möglich zu sein, asymptotische Lösungen zu erhalten. Wir wollen jedoch hier auf diese Frage nicht eingehen.

Wenden wir uns nun der Frage der Nutzenfunktion zu. Es ist bekannt, daß die Nutzenfunktion  $1 - \exp(-\eta x)$  "konstante Risiko-Aversion" des Anlegers beschreibt (siehe [12]) und deswegen von ökonomischer Bedeutung ist. In vielen Fällen wäre jedoch "abnehmende Risiko-Aversion" plausibler. Allerdings ist es in diesem Fall schwierig, exakte oder asymptoti-

sche Lösungen zu erhalten. Zu ersten ist es im allgemeinen selbst für den Fall unabhängiger Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  unmöglich, eine geschlossene Form für die Verteilung der Summe  $\sum_{v=1}^n y_v X_v$  anzugeben. Die einzige Ausnahme davon bildet die Familie stabiler Verteilungsfunktionen, die zum Teil aus diesem Grund, oft in der Literatur behandelt wird (siehe z.B. [ 2, 6, 11, 13 ] ).

Andererseits würde, auch wenn diese Verteilung in einem bestimmten Fall bekannt wäre, die Berechnung von  $E(u(\sum_{v=1}^n y_v X_v))$  nur in sehr wenigen Fällen möglich sein. Es wäre sehr interessant zu wissen, wie robust die optimale Auswahl  $(y_v^*)_1^n$  bezüglich dieser Annahme einer bestimmten Nutzenfunktion ist.

1.4 In § 2 und § 3 wird weiterhin einschränkend angenommen, daß eine Anlage in Bargeld (oder einem Wertpapier, daß einen bestimmten Betrag mit Sicherheit liefert) nicht möglich ist. Dies geschieht, weil die Hinzunahme eines solchen Wertpapiers die Analyse über den Zusammenhang zwischen den übrigen Wertpapieren verwischt. In § 4 beweisen wir unter sehr schwachen Annahmen, daß die Gleichung  $\lim_{Y \rightarrow \infty} y_0^*/Y = 1$  für eine umfangreiche Klasse von Nutzenfunktionen gilt, wobei  $y_0$  die Nachfrage nach Geld bezeichnet.

## 2 Exakte Lösungen

2.1 Wir wollen zuerst die Definition und einige Eigenschaften der (einseitigen) Laplace-Transformation einer positiven Zufallsvariablen  $X$  rekapitulieren. Für positives  $\lambda$  ist die

Laplace-Transformation  $\chi(\lambda)$  von  $X$  durch

$$(5) \quad \chi(\lambda) = E\left[\exp(-\lambda X)\right] = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx)$$

definiert, wobei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$  ist. Da stets  $\lambda > 0$  gilt, ist klar, daß  $\chi(\lambda)$  existiert und (beliebig oft) differenzierbar ist. Diese Eigenschaften werden wir später benutzen.

Es seien  $(X_\nu)_1^n$  voneinander unabhängige Zufallsvariable mit Laplace-Transformationen  $(\chi_\nu)_1^n$ . Dann erhalten wir für die Summe  $\sum_{\nu=1}^n y_\nu X_\nu$ ,  $y_\nu \geq 0$ ,  $\nu = 1, \dots, n$  als Laplace-Transformation

$$(6) \quad \chi(\lambda) = \prod_{\nu=1}^n \chi_\nu(\lambda y_\nu)$$

Wenden wir uns nun dem Portefeuilleauswahl-Problem zu. Wenn die Nutzenfunktion des Anlegers  $u(x) = 1 - \exp(-nx)$ ,  $n > 0$ , ist und wenn er jeweils einen Betrag  $y_\nu$  in Wertpapier  $A_\nu$  investiert, dann beträgt sein erwarteter Nutzen am Ende der Periode

$$E\left[u\left(\sum_{\nu=1}^n y_\nu X_\nu\right)\right] = 1 - E\left[\exp\left(-n \sum_{\nu=1}^n y_\nu X_\nu\right)\right] = 1 - \chi(n)$$

wobei  $\chi$  die Laplace-Transformation von  $\sum_{\nu=1}^n y_\nu X_\nu$  ist. Angenommen, die Zufallsvariablen  $(X_\nu)_1^n$  sind voneinander unabhängig und besitzen Laplace-Transformation  $(\chi_\nu)_1^n$ ; dann folgt aus (6), daß der erwartete Nutzen des Anlegers durch  $\prod_{\nu=1}^n \chi_\nu(ny_\nu)$  gegeben ist. Das Portefeuilleauswahl-Problem ist deshalb äquivalent mit der Minimierung von



$$(7) \quad \sum_{v=1}^n \log(x_v(ny_v))$$

unter Beachtung der Restriktionen

$$(8) \quad \sum_{v=1}^n y_v = Y$$

und

$$(9) \quad y_v \geq 0, \quad v = 1, \dots, n$$

Dies ist ein Problem des nichtlinearen Programmierens und wurde in größerer Allgemeinheit in [ 3 ] behandelt. Deshalb geben wir hier die auf unser spezielles Problem übertragene Lösung ohne Beweis an:

Man ordnet zuerst die Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  nach den Erwartungswerten derart, daß

$$(10) \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n, \quad \mu_v = E(X_v), \quad v = 1, \dots, n$$

gilt. Dann existiert eine ganze Zahl  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , mit den folgenden Eigenschaften:

E1 Die  $m+1$  Gleichungen

$$(11) \quad \sum_{v=1}^n y_v = Y, \quad ,$$

$$(12) \quad \frac{x_v'(ny_v)}{x_v(ny_v)} = -y_0, \quad v = 1, \dots, m$$

besitzen eine eindeutig bestimmte Lösung  $(y_v^S)_0^m$ , für die

$$(13) \quad y_v^s > 0, \quad v = 1, \dots, m$$

gilt. ( $y_0^s$  ist der Lagrange-Multiplikator.)

E2 Es gilt

$$\mu_v \leq y_0^s, \quad v = m+1, \dots, n.$$

E3 Die Lösung  $(y_v^*)_1^n$  von (7), (8) und (9) wird durch

$$y_v^* = \begin{cases} y_v^s & , \quad v = 1, \dots, m \\ 0 & , \quad v = m+1, \dots, n \end{cases}$$

gegeben.

Wir werden deshalb in dieser Arbeit nur die allgemeine Lösung von (11) und (12) angeben, weil die Bedingungen  $y_v^* \geq 0, v=1, \dots, n$  ohne Schwierigkeiten berücksichtigt werden können. Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die Lösung von (11) und (12) in vielen Fällen einfach ist. Wir geben dann nur das Resultat an.

## 2.2 Die Normalverteilung

Die Lösung für die Normalverteilung wurde in § 1 gegeben. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Wirkung der (unzulässigen) negativen Werte der Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  auf die optimale Auswahl.

Für großes  $Y$  gilt für die optimale Auswahl  $(y_v^*)_1^n$

$$(14) \quad y_v^* \approx Y \sigma_v^{-2} / \left( \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-2} \right)$$

Dies folgt direkt aus (2). Demnach ist die optimale Auswahl annähernd gleich der Auswahl, die die Varianz des Gesamt-Portefeuilles unabhängig von dessen Erwartungswert minimiert. Man betrachte nun den Anteil, den die positiven Werte der Zufallsvariablen  $X_v$  an  $\chi_v(\lambda)$ , der Laplace-Transformation von  $X_v$ , haben. Dieser ist durch

$$(2\pi\sigma_v^2)^{-1/2} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_v}{\sigma_v}\right)^2) dx$$

gegeben, wofür sich auch schreiben läßt:

$$(15) \quad (2\pi)^{-1/2} \exp(-\mu_v \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma_v^2) \int_{\sigma_v \lambda - \mu_v / \sigma_v}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx$$

Für großes  $Y$  folgt aus (14), (15) und der asymptotischen Gleichung

$$\int_y^{\infty} \exp(-x^2/2) dx = y^{-1} \exp(-y^2/2) \quad ,$$

daß

$$\chi_v(\eta y_v^*) \approx \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\eta y_v^* \sigma_v - \mu_v / \sigma_v)^2)}{\sqrt{2\pi} (\eta y_v^* \sigma_v - \mu_v / \sigma_v)}$$

gilt. Deshalb ist der Anteil der positiven Werte von  $X_v$  am erwarteten Nutzen ungefähr

$$1 - \frac{\exp(-\frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \mu_v^2 / \sigma_v^2) \left( \sum_{v=1}^n \sigma_v^{-2} \right)^n \prod_{v=1}^n \sigma_v}{(2\pi)^{n/2} (\eta Y)^n}$$

während der wirkliche erwartete Nutzen ungefähr

$$1 - \exp\left(\frac{1}{2} \frac{n (nY)^2}{\sum_{v=1}^n \sigma_v^{-2}}\right)$$

ist. Daraus folgt, daß für großes Anfangskapital der erwartete Nutzen zum überwiegenden Teil durch die - für unser Modell unzulässigen - negativen Werte von  $X_v$  bestimmt wird. Wenn also in Anwendungsfällen angenommen wird, daß die Zufallsvariablen normalverteilt sind, dann ist bei hohem Anfangsvermögen  $Y$  darauf zu achten, daß der Einfluß der negativen Werte von  $(X_v)_1^n$  bedeutend sein kann. In § 3.2 werden wir zeigen, daß, wenn normalverteilte Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  nur positive Werte annehmen, für die optimale Auswahl

$$(16) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^*/Y = 1/n \quad , \quad v = 1, \dots, n$$

gilt - im Gegensatz zu (14) .

### 2.3 Stabile Verteilungen

In den letzten Jahren sind, beginnend mit Mandelbrots Arbeit [1] stabile Verteilungen sehr ausführlich im Zusammenhang mit der Portefeuille-Analyse diskutiert worden. Für die folgenden Ausführungen übernehmen wir die Bezeichnungsweise aus dem Artikel von Fama [5] und verweisen auch bezüglich der Definition und Eigenschaften der Verteilung sowie der Interpretation der Parameter auf diese Arbeit.

Für unser Portefeuilleauswahl-Problem beschränken wir uns auf solche stabilen Verteilungen, deren Masse auf der positiven Halbachse konzentriert ist. Notwendig und hinreichend dafür ist

daß

$$\delta \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \beta = 1$$

ist. Da unter diesen Bedingungen die Dichtefunktion für  $x \leq \delta$  verschwindet, betrachten wir nur den Fall  $\delta = 0$ . Die Laplace-Transformation  $\chi(\lambda)$  der stabilen Verteilung mit  $\delta = 0, 0 < \alpha < 1, \beta = 1$  ist durch

$$\chi(\lambda) = \exp(-\gamma \lambda^\alpha \operatorname{cosec}(\pi\alpha/2))$$

gegeben, woraus sich folgendes Ergebnis leicht ableiten läßt:

Satz 1. Es seien  $(X_\nu)_1^n$  stabile Zufallsvariable, für die  $\delta_\nu = 0, \beta_\nu = 1, \gamma_\nu > 0, \alpha_\nu = \alpha, 0 < \alpha < 1, \nu = 1, \dots, n$ , gilt. Dann ist die optimale Portefeuilleauswahl durch

$$(17) \quad y_\nu^* = \frac{\gamma_\nu^{1/(1-\alpha)}}{\sum_{j=1}^n \gamma_j^{1/(1-\alpha)}}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

gegeben.

Dies Ergebnis impliziert, daß umso mehr von einem Wertpapier  $A_\nu$  gekauft wird, je größer der Wert des Streuungsparameters  $\gamma_\nu$  der Zufallsvariablen  $X_\nu$  ist. Leider sind die Eigenschaften der Dichtefunktion einer stabilen Verteilung noch nicht genügend bekannt, um die Wirkung einer Erhöhung von  $\gamma_\nu$  genau abschätzen zu können. Möglicherweise wird dadurch eine Abflachung der Kurve bewirkt, die, da die Dichtefunktion für negatives  $x$  verschwindet, die Masse an das rechte Ende der Verteilung drückt. Dies bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit für hohe Werte zunimmt, während die für niedrige Werte abnimmt, was einer objektiven Verbesserung des Wertpapiers gleichkommt. Selbst wenn dies wahr wäre, müßte das Argument mit Vorsicht benutzt werden. Denn wir

werden sehen, daß in manchen Fällen die Verbesserung der Bedingungen, die eine Aktie bietet, dazu führen kann, daß von ihr weniger gekauft wird (siehe § 3.3).

#### 2.4 Die Gamma-Verteilung

Man sagt, eine Zufallsvariable sei gammaverteilt, wenn sie eine Dichtefunktion besitzt, für die

$$(18) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} & , x > 0 \end{cases}$$

gilt, wobei  $\alpha, \theta > 0$  Konstante sind. Als Erwartungswert und Varianz erhalten wir

$$E(X) = \alpha/\theta \quad , \quad V(X) = \alpha/\theta^2 \quad .$$

Die Laplace-Transformation  $\chi(\lambda)$  ist durch

$$\chi(\lambda) = (1 + \lambda/\theta)^{-\alpha}$$

gegeben. Für die optimale Auswahl erhält man in diesem Fall:

Satz 2. *Es seien  $(X_\nu)_1^n$  gammaverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $(\mu_\nu)_1^n$  und Varianz  $(\sigma_\nu^2)_1^n$ . Dann ist die optimale Auswahl durch*

$$(19) \quad y_\nu^* = \frac{\mu_\nu^2}{\sigma_\nu^2} \left( \frac{Y + \eta^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \mu_j / \sigma_j^2 \right)}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2 / \sigma_j^2} \right) - \frac{\mu_\nu}{n \sigma_\nu^2}$$

gegeben.

Daraus folgt unmittelbar, daß

$$(20) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{y_v^*}{Y} = \frac{\mu_v^2}{\sigma_v^2} \left( \sum_{j=1}^n \mu_j^2 / \sigma_j^2 \right)^{-1}$$

ist, d.h. für voneinander unabhängig gammadaverteilte Zufallsvariablen wird die optimale Auswahl annähernd durch  $E(X_v)^2/V(X_v)$  bestimmt, was im Gegensatz zum Ergebnis (2) für die Normalverteilung steht.

Es läßt sich zeigen, daß nur für  $\alpha > 1$  der Modalwert größer als Null ist. Da für Aktien im allgemeinen die Annahme wenig plausibel ist, daß ein Totalverlust am wahrscheinlichsten ist, sollte man vor allem Gamma-Verteilungen mit  $\alpha > 1$  betrachten. Im Gegensatz zur stabilen und Normal-Verteilung existieren bisher keine entsprechenden Untersuchungen für die Gamma-Verteilung darüber, wie gut sie die möglichen Erträge aus Aktien beschreibt, obwohl diese Verteilung unseres Erachtens von der Form her für diesen Zweck geeignet wäre. Für ein weiteres Argument zugunsten der Gamma-Verteilung siehe § 3.4 .

## 2.5 Die Poisson-Verteilung

Eine Zufallsvariable ist Poisson-verteilt, wenn

$$(21) \quad P(X = v) = \frac{\mu^v}{v!} \exp(-\mu) \quad , \quad \mu > 0 \quad , \quad v = 0, 1, 2, \dots$$

gilt. Für Erwartungswert und Varianz der Verteilung erhalten wir

$$(22) \quad E(X) = V(X) = \mu$$

sowie für die Laplace-Transformation

$$(23) \quad \chi(\lambda) = \exp(\mu(\exp(-\lambda)-1))$$

Satz 3. Es seien  $(X_\nu)_1^n$  Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $(\mu_\nu)_1^n$ . Dann ist die optimale Auswahl durch

$$(24) \quad y_\nu^* = \frac{Y}{n} + n^{-1}(\log \mu_\nu - \frac{1}{n}(\sum_{j=1}^n \log \mu_j))$$

gegeben.

Da für das von uns betrachtete Auswahlproblem eines optimalen Portefeuilles die Poisson-Verteilung keine Anwendungsmöglichkeiten zu besitzen scheint, werden wir diese Verteilung im folgenden nicht weiter betrachten. Wir weisen jedoch darauf hin, daß sich das obige Ergebnis ohne weiteres auf den Fall der Zufallsvariablen  $X_\nu/\delta_\nu$ ,  $\delta_\nu > 0$ , übertragen läßt.

### 3. Asymptotische Ergebnisse

3.1 Unter asymptotischen Ergebnissen verstehen wir Ergebnisse, die für großes Anfangsvermögen  $Y$  gelten. Wie bereits erwähnt, sind solche Ergebnisse auch in Fällen anwendbar, in denen die genaue Form der Laplace-Transformation nicht bekannt ist. Dies rührt daher, daß das asymptotische Verhalten der Laplace-Transformation vom Verhalten der Verteilungsfunktion nur in der Nachbarschaft des Ursprungs abhängt (siehe [ 7 ]). Um jedoch diesen Zusammenhang ausnützen zu können, müssen wir zuerst beweisen, daß für jedes  $\nu$  der Ausdruck  $y_\nu^*$  gegen Unendlich strebt, wenn  $Y$  gegen Unendlich strebt. Dazu benötigen wir den folgenden



Hilfssatz 1. Es sei  $\chi(\lambda)$  die einseitige Laplace-Transformation der positiven Zufallsvariablen  $X$ . Ist

$$P(X \leq \varepsilon) = \delta(\varepsilon) > 0$$

für alle  $\varepsilon > 0$ , dann gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = 0$$

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß

$$(25) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx)}{\int_0^{\varepsilon} \exp(-\lambda x) F(dx)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} x \exp(-\lambda x) F(dx)}{\int_0^{\varepsilon} x \exp(-\lambda x) F(dx)} = 1$$

für alle  $\varepsilon > 0$  gilt, wobei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion von  $X$  ist. Offensichtlich ist

$$(26) \quad \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx)}{\int_0^{\varepsilon} \exp(-\lambda x) F(dx)} \geq 1$$

Da

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx) &= \int_0^{\varepsilon} \exp(-\lambda x) F(dx) + \int_{\varepsilon}^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx) \\ &\leq \int_0^{\varepsilon} \exp(-\lambda x) F(dx) + \exp(-\lambda \varepsilon) \end{aligned}$$

und

$$\int_0^{\varepsilon} \exp(-\lambda x) F(dx) \geq \int_0^{\varepsilon/2} \exp(-\lambda x) F(dx) \geq \delta(\varepsilon/2) \exp(-\lambda \varepsilon/2)$$

gilt, erhalten wir

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx)}{\int_0^{\epsilon} \exp(-\lambda x) F(dx)} \leq 1 + \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ (\delta(\epsilon/2))^{-1} \exp(-\lambda \epsilon/2) \right\}$$

$$= 1$$

Unter Berücksichtigung von (26) folgt daraus (25), soweit es den hinteren Ausdruck in dieser Gleichung betrifft. Für den zweiten Ausdruck in (25) verläuft der Beweis analog.

Unter Benutzung von (12) erhalten wir

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\infty} x \exp(-\lambda x) F(dx)}{\int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) F(dx)} = \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\epsilon} x \exp(-\lambda x) F(dx)}{\int_0^{\epsilon} \exp(-\lambda x) F(dx)}$$

für alle  $\epsilon > 0$ . Daraus folgt der Hilfssatz 1, wenn man bedenkt daß

$$\int_0^{\epsilon} x \exp(-\lambda x) F(dx) \leq \int_0^{\epsilon} \exp(-\lambda x) F(dx)$$

gilt. Unter Verwendung dieses Hilfssatzes können wir nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 4. Sind die Zufallsvariablen  $(X_v)_1^n$  unabhängig und gilt für jedes  $X_v$

$$P(X_v \leq \epsilon) > 0, \quad v = 1, \dots, n$$

für alle  $\epsilon > 0$ , dann ist

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^*(Y) = \infty, \quad v = 1, \dots, n.$$

Beweis. Wir bezeichnen den Index des kleinsten  $y_v^*$  mit  $v_1$  und den Index des größten  $y_v^*$  mit  $v_2$ . Hilfssatz 2 impliziert, daß

$$(27) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} \eta \frac{\chi'_{v_2}(\eta y_{v_2}^*)}{\chi_{v_2}(\eta y_{v_2}^*)} = 0.$$

Wir nehmen an, daß

$$\liminf_{Y \rightarrow \infty} y_{v_1}^* < \infty$$

gilt. Wegen  $-\frac{x'_v(x)}{x_v(x)} > 0$  für  $x > 0$ ,  $v = 1, \dots, n$ , folgt

daraus, daß eine Folge  $(Y_n)_1^\infty$  existiert, die derart gegen Unendlich strebt, daß

$$(28) \quad \inf_n -n \frac{x'_{v_1}(ny_{v_1}^*(n))}{x_{v_1}(ny_{v_1}^*(n))} \geq \epsilon > 0$$

für irgendein  $\epsilon$  ist, wobei  $y_{v_1}^*(n)$  das kleinste  $y_v^*$  mit  $Y = Y_n$  bezeichnet.

Da die Auswahl  $(y_v^*)_1^n$  den Nutzen maximiert, impliziert die Methode der Lagrange-Multiplikation, daß

$$(29) \quad -\frac{x'_{v_1}(ny_{v_1}^*)}{x_{v_1}(ny_{v_1}^*)} \leq -\frac{x'_{v_2}(ny_{v_2}^*)}{x_{v_2}(y_{v_2}^*)}$$

ist, wobei die Ungleichung nur im Fall  $y_{v_1}^* = 0$  gelten kann. Da jedoch offensichtlich (27), (28) und (29) miteinander inkonsistent sind, muß

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} y_{v_1}^* = \infty$$

sein, womit Satz 4 bewiesen ist.

### 3.2 Regulär variierende Dichtefunktionen

Wir leiten zuerst asymptotische Ergebnisse für Zufallsvariable ab, deren Dichtefunktion in der Nachbarschaft des Ursprungs

regulär variieren. Zur Definition des Begriffs "regulär variieren" siehe [ 7 ] .

Satz 5. Sind  $(X_v)_1^n$  voneinander unabhängige positive Zufallsvariable mit Dichtefunktion  $(f_v)_1^n$ , für die

$$(30) \quad f_v(x) = \frac{x^{\rho_v-1}}{\Gamma(\rho_v)} L_v(x) \quad , \quad x > 0 \quad , \quad v = 1, \dots, n$$

gilt, wobei  $\rho_v > 0$  ist und  $L_v(x)$  eine langsam variierende Funktion ist ( siehe [ 7 ] ), dann gilt

$$(31) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^*/Y = \frac{\rho_v}{\sum_{j=1}^n \rho_j} .$$

Beweis. Es ist

$$\chi_v(\lambda) = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) f_v(x) dx$$

und

$$- \chi_v'(\lambda) = \int_0^{\infty} x \exp(-\lambda x) f_v(x) dx$$

Aus (30) folgt ([ 7 ] S. 275 ) , daß für großes  $\lambda$

$$\chi_v(\lambda) \sim \lambda^{-\rho_v} L_v(\lambda^{-1})$$

und

$$- \chi_v'(\lambda) \sim \rho_v \lambda^{-\rho_v-1} L_v(\lambda^{-1}) ,$$

woraus wir direkt

$$(32) \quad - \frac{\chi_v'(\lambda)}{\chi_v(\lambda)} \sim \frac{\rho_v}{\lambda}$$

erhalten. Nun folgt aus (30) und Satz 4, daß

$$(33) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^* = \infty, \quad v = 1, \dots, n$$

und deshalb

$$(34) \quad \frac{x_i^!(ny_i^*)}{x_i(ny_i^*)} = \frac{x_j^!(ny_j^*)}{x_j(ny_j^*)}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Wegen (33) erhalten wir aus (32) und (34) zusammen

$$\frac{\rho_i}{y_i^*} \sim \frac{\rho_j}{y_j^*}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(35) \quad y_i^* \sim \frac{\rho_i}{\rho_1}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion  $\sum_{v=1}^n y_v^* = Y$  folgt daraus

$$y_1^* \sim \frac{\rho_1 Y}{\sum_{j=1}^n \rho_j}.$$

Satz 5 ergibt sich jetzt bei Beachtung von (35).

Anzumerken ist, daß Satz 5 die Ergebnisse (16) und (20) als Spezialfälle einschließt: Für positiv bedingte<sup>†</sup> normalverteilte Zufallsvariablen ist  $\rho_v = 1$ ,  $v = 1, \dots, n$ , woraus sich (16)

---

† Gegeben sei die Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . Wir sagen, die Zufallsvariable ist positiv bedingt, wenn wir für  $x > 0$  Wahrscheinlichkeiten von der Art

$$P(0 \leq X \leq x) = \int_0^x f(t) dt / \int_0^{\infty} f(t) dt$$

betrachten.

direkt ergibt. (20) ist identisch mit (31), da für  $\alpha$  in (18)

$$\alpha = E(X)^2 / V(X)$$

gilt und  $e^{-x}$  eine langsam variierende Funktion für  $x \rightarrow 0$  ist.

### 3.3 Auswahl zwischen Lotterien

Wir betrachten in diesem Abschnitt Lotterien. Darunter verstehen wir solche Wertpapiere  $(A_v)_1^n$ , bei denen mit Wahrscheinlichkeit  $q_v$  das gesamte im Wertpapier  $A_v$  investierte Kapital verloren geht, während mit Wahrscheinlichkeit  $p_v = 1 - q_v$  sich für dieses Wertpapier ein Betrag (pro investierte Einheit) von  $a_v > 0$  am Ende der Periode ergibt. Als Laplace-Transformation erhalten wir deshalb

$$(36) \quad \chi_v(\lambda) = q_v + p_v \exp(-a_v \lambda)$$

Satz 6. Sind die Wertpapiere  $(A_v)_1^n$  Lotterien im oben beschriebenen Sinn und sind die  $(X_v)_1^n$  voneinander unabhängig, dann gilt

$$(37) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^* / Y = \frac{a_v^{-1}}{\sum_{j=1}^n a_j^{-1}}, \quad v = 1, \dots, n$$

Beweis. Aus (36) erhalten wir

$$(38) \quad -n \frac{\chi_v'(ny_v^*)}{\chi_v(ny_v^*)} = \frac{np_v a_v \exp(-na_v y_v^*)}{q_v + p_v \exp(-na_v y_v^*)}$$

Da die Voraussetzungen des Satzes 4 erfüllt sind, ist

$$(39) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^* = \infty, \quad v = 1, \dots, n,$$

so daß wir entsprechend dem Beweis für Satz 5 aus (38)

$$\frac{p_i a_i \exp(-n a_i y_i^*)}{q_i + p_i \exp(-n a_i y_i^*)} \sim \frac{p_j a_j \exp(-n a_j y_j^*)}{q_j + p_j \exp(-n a_j y_j^*)}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

erhalten. Weil  $a_v, p_v, q_v > 0$  ist für  $v = 1, \dots, n$  und weil (39) gilt, erhalten wir

$$a_i y_i^* \sim a_j y_j^*, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion ergibt sich daraus (37).

Aufgrund dieses Satzes läßt sich folgendes interessante Ergebnis angeben: Wenn  $q_v = q$ ,  $v = 1, \dots, n$ , dann kauft der Anleger weniger von einem Wertpapier mit hohem  $a_v$ , d.h. er "präferiert" in seiner Auswahl das objektiv schlechtere Wertpapier. Natürlich ist dies Ergebnis nur für Lotterien bewiesen, doch ist allgemein Vorsicht geboten, wenn man versucht, intuitiv zu interpretieren, warum die Auswahl  $(y_v^*)_1^n$  die beste ist. (Siehe dazu die Bemerkungen am Ende von § 2.3.)

### 3.4 Die logarithmische Normalverteilung

Man sagt, eine Zufallsvariable  $X$  sei logarithmisch normalverteilt, wenn die Dichtefunktion  $f(x)$  durch

$$(40) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x/M)}{\sigma}\right)^2\right] & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

gegeben ist, wobei  $\sigma$  und  $M$  positive Konstante sind. Das  $n$ -te Moment von  $X$  ist in diesem Fall durch

$$(41) \quad E(X^n) = \exp(nM + \frac{1}{2}n^2\sigma^2), \quad n = 1, 2, \dots$$

gegeben.

Die logarithmische Normalverteilung hat in der Literatur deshalb gewisse Bedeutung erlangt, weil unter bestimmten Annahmen (darunter z.B. die Möglichkeit kontinuierlicher Transformationen) gezeigt werden kann, daß die Wertpapier-Erträge diese Verteilung besitzen (siehe z.B. [ 8 , 9 ] ). Es ist deshalb von Interesse, die optimale Auswahl für logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable zu bestimmen. Leider ist es unmöglich, eine geschlossene Form für die Laplace-Transformation einer logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen anzugeben ferner ergibt sich aus (40), daß Satz 2 hier nicht angewandt werden kann, da  $\exp(-(\log x)^2)$  keine in der Nachbarschaft des Ursprungs regulär variierende Funktion ist. Andererseits kann man eine hinreichend gute Schätzung für das asymptotische Verhalten der Laplace-Transformation bekommen und damit die genaue asymptotische optimale Auswahl angeben. Dafür benötigen wir den

Hilfssatz 2. *Es sei  $\chi(\lambda)$  die Laplace-Transformation der logarithmischen Normalverteilung mit Parametern  $M$  und  $\sigma$ . Dann gilt*

$$- \frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} \sim \frac{\log \lambda}{\sigma^2 \lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$



Beweis. Es ist

$$\chi(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma y} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(y/M)}{\sigma}\right)^2\right) dy$$

Setzt man  $u = \lambda y$ , so läßt sich dafür schreiben:

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(\lambda M)}{\sigma}\right)^2\right) I\left(\frac{\log(\lambda M)}{\sigma^2} - 1\right),$$

wobei

$$I(\mu) = \int_0^{\infty} u^{\mu} \exp\left(-u - \frac{1}{2}\left(\frac{\log u}{\sigma}\right)^2\right) du$$

ist; entsprechend erhalten wir

$$-\chi'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma \lambda} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(\lambda M)}{\sigma}\right)^2\right) I\left(\frac{\log(\lambda M)}{\sigma^2}\right).$$

Somit gilt

$$-\frac{\chi'(\lambda)}{\chi(\lambda)} = \lambda^{-1} \frac{I\left(\frac{\log(\lambda M)}{\sigma^2}\right)}{I\left(\frac{\log(\lambda M)}{\sigma^2} - 1\right)},$$

und es genügt demnach zu zeigen, daß

$$(42) \quad I(\mu) \sim \mu I(\mu-1) \quad , \quad \mu \rightarrow \infty .$$

Dafür benötigen wir, daß für großes  $\mu$

$$\begin{aligned} I(\mu) &\geq \int_{\mu}^{\mu+1} y^{\mu} \exp\left(-y - \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right) dy \\ &\geq \mu^{\mu} \exp\left(-(\mu+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{\log(\mu+1)}{\sigma}\right)^2\right) dy \end{aligned}$$

gilt und deshalb

$$(43) \quad I(\mu) \geq \mu^{\beta\mu}$$

für alle  $\beta < 1$  und  $\mu \geq \mu_0(\beta)$  ist.

Wir schreiben

$$(44) \quad G(y) = \int_y^\infty \exp\left(-u - \frac{1}{2}\left(\frac{\log u}{\sigma}\right)^2\right) du$$

Durch partielle Integration von  $I(\mu)$  ergibt sich

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \mu \int_0^\infty y^{\mu-1} G(y) dy \\ &= I(\mu-1) + \mu \int_0^\infty y^{\mu-1} \left( G(y) - \exp\left[-y - \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right] \right) dy \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$(45) \quad \begin{aligned} &|I(\mu) - I(\mu-1)| \\ &\leq \mu \int_0^\infty y^{\mu-1} \left| G(y) - \exp\left[-y - \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right] \right| dy \end{aligned}$$

Partielle Integration von (44) ergibt

$$G(y) - \exp\left[-y - \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right] = - \int_0^\infty \frac{\log u}{\sigma^2 u} \exp\left[-u - \frac{1}{2}\left(\frac{\log u}{\sigma}\right)^2\right] du$$

Deshalb ist für genügend großes  $y$

$$\left| G(y) - \exp\left[-y - \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right] \right| \leq \frac{\log y}{\sigma^2 y} \exp\left[-y - \frac{1}{2}\left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right]$$

Setzt man dieses letzte Ergebnis in (45) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 & |I(\mu) - I(\mu-1)| \\
 & \leq \mu \int_0^{\mu^\alpha} y^{\mu-1} dy + \mu \int_{\mu^\alpha}^{\infty} y^{\mu-1} \frac{\log y}{\sigma^2 y} \exp\left(-y - \frac{1}{2} \left(\frac{\log y}{\sigma}\right)^2\right) dy \\
 & \leq \mu^{\alpha\mu} + \frac{\alpha\mu \log \mu}{\sigma^2 \mu^\alpha} I(\mu-1)
 \end{aligned}$$

für alle  $\alpha > 0$ . Daraus folgt wegen (43), daß

$$\begin{aligned}
 |I(\mu)/(\mu I(\mu-1)) - 1| & \leq \frac{\mu^{\alpha\mu}}{\mu I(\mu-1)} + \frac{\alpha \log \mu}{\sigma^2 \mu^\alpha} \\
 & \leq \mu^{\alpha\mu-1} (\mu-1)^{-\beta(\mu-1)} + \frac{\alpha \log \mu}{\sigma^2 \mu^\alpha}
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt für alle genügend großen  $\mu$ , wenn  $\beta < 1$  ist. . Setzen wir nun  $\alpha = 1/4$ ,  $\beta = 1/2$  und lassen  $\mu$  gegen Unendlich gehen, so erhalten wir (42), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Wir können nun den folgenden Satz beweisen:

Satz 7. Sind die Zufallsvariablen  $(X_\nu)_1^n$  voneinander unabhängig und logarithmisch normalverteilt mit Erwartungswert  $(\mu_\nu)_1^n$  und Varianz  $(\sigma_\nu^2)_1^n$ , dann gilt für die optimale Auswahl  $(y_\nu^*)_1^n$ :

$$(46) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_\nu^*/Y = \frac{(\log(1 + \sigma_\nu^2/\mu_\nu^2))^{-1}}{\sum_{j=1}^n (\log(1 + \sigma_j^2/\mu_j^2))^{-1}}, \nu = 1, \dots, n$$

Beweis. Unter Benutzung von Argumenten, wie wir sie in den Beweisen der beiden letzten Sätze verwendet haben, sowie unter Verwendung von Hilfssatz 2 gilt für  $(y_\nu^*)_1^n$ :

$$\frac{\log(\lambda y_i^*)}{\Sigma_i^2 y_i^*} \sim \frac{\log(\lambda y_j^*)}{\Sigma_j^2 y_j^*}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Dabei steht  $\Sigma$  nun an der Stelle des Parameters  $\sigma$  in (40). Wir erhalten deshalb:

$$\Sigma_i^2 y_i^* \sim \Sigma_j^2 y_j^*, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

daraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^*/Y = \frac{\Sigma_v^{-2}}{\sum_{j=1}^n \Sigma_j^{-2}}, \quad v = 1, \dots, n.$$

Unter Verwendung von (41) läßt sich nun aber zeigen, daß

$$\Sigma_v^2 = \log(1 + \sigma_v^2/\mu_v^2)$$

ist, womit Satz 7 bewiesen ist.

Zur Beziehung zwischen der logarithmischen Normalverteilung und der Gamma-Verteilung sei im Zusammenhang mit dem Portefeuilleauswahl-Problem folgendes festgestellt: Wenn die in Satz 7 betrachteten Varianzen  $(\sigma_v^2)_1^n$  im Verhältnis zu den Erwartungswerten  $(\mu_v)_1^n$  klein sind, dann erhalten wir bei Benutzung der Approximation  $\log(1 + x) \approx x$ ,  $x$  klein,

$$\lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^*/Y \approx \frac{\mu_v^2/\sigma_v^2}{\sum_{j=1}^n \mu_j^2/\sigma_j^2}$$

Da der Ausdruck auf der rechten Seite mit (20) identisch ist, folgt daraus, daß (für großes  $Y$ ) die optimale Auswahl beinahe diejenige ist, die man bei Zugrundelegung der Gamma-Verteilung erhalten hätte. Dieses Ergebnis überrascht wegen der starken formalen Unterschiede zwischen den beiden Verteilungen; anderer-

seits ist dies Ergebnis ein Argument , die Gamma-Verteilung (für die exakte Lösungen vorliegen) auch in Situationen zu benutzen, in denen - theoretisch gesehen - die logarithmische Normalverteilung adäquat wäre.

#### 4 Die Nachfrage nach Geld

4.1 Unsere Analyse in den bisherigen Abschnitten ging von der Annahme aus, daß der Anleger sein gesamtes Vermögen in den Wertpapieren  $(A_v)_1^n$  anlegt, wobei keines dieser Wertpapiere mit Wahrscheinlichkeit 1 einen bestimmten Betrag am Ende der Periode erreicht. Anders ausgedrückt: Bisher war dem Anleger nicht erlaubt, einen Teil seines Vermögens als Bargeld zu halten. Diese Restriktion ist durch die Tatsache motiviert, daß bei einer möglichen Anlage in Bargeld

$$(47) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_v^*/Y = 0 \quad , \quad v = 2, \dots, n$$

ist, wobei (47) nicht nur die bisher betrachtete Nutzenfunktion  $1 - \exp(-nx)$ , sondern eine weit umfangreichere Klasse von Nutzenfunktionen berücksichtigt.

Wir wollen (47) im folgenden beweisen. Dabei betrachten wir formal die Anlage in Bargeld als Investition in dem Wertpapier  $A_1$  mit der Zufallsvariablen  $X_1$ , für die  $P(X_1 = 1) = 1$  gilt. Als erstes beweisen wir den

Hilfssatz 3. Es seien  $(X_\nu)_1^n$  Zufallsvariable, für die

$$(48) \quad P\left(\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu X_\nu < 1\right) > 0$$

für alle  $(\alpha_\nu)_1^n$  mit

$$(49) \quad \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu = 1 \quad ; \quad \alpha_\nu \geq 0 \quad , \quad \nu = 1, \dots, n \quad ,$$

gilt. Dann gibt es ein  $\epsilon$  und ein  $\delta$  ( $\epsilon, \delta > 0$ ) derart, daß

$$\inf_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} P\left(\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu X_\nu \leq 1 - \epsilon\right) \geq \delta$$

ist, wobei das Infimum sich bezüglich aller  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  versteht, für die (49) erfüllt ist.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe kein solches  $\epsilon$  und kein solches  $\delta$ . Dann existiert für jedes genügend große  $j$  ein Vektor  $(\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn})$ , der (49) erfüllt und für den

$$P\left(\sum_{\nu=1}^n \alpha_{j\nu} X_\nu \leq 1 - j^{-1}\right) \leq j^{-1}$$

ist. Da die Menge der Vektoren  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , die (49) erfüllen, kompakt ist, existiert eine Unterfolge

$(\alpha_{j(m),1}, \dots, \alpha_{j(m),n})$ , die gegen einen Vektor  $\underline{\alpha}_0 = (\alpha_{01}, \dots, \alpha_{0n})$  konvergiert, wobei  $\underline{\alpha}_0$  (49) erfüllt. Wir erhalten

$$(50) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\sum_{\nu=1}^n \alpha_{j(m),\nu} X_\nu \geq 1\right) = 1$$

sowie

$$(51) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \alpha_{j(m),\nu} X_\nu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{0\nu} X_\nu \quad \text{f.s.} \quad .$$

Daraus folgt, daß für alle Stetigkeitspunkte  $x$  der Funktion

$$F(x) = P\left\{\sum_{v=1}^n \alpha_{0v} X_v < x\right\}$$

gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{v=1}^n \alpha_{j(m),v} X_v < x\right\} &= P\left\{\sum_{v=1}^n \alpha_{0v} X_v < x\right\} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

Da die Menge der Stetigkeitspunkte überall dicht ist, erhalten wir aus (50) und (51)

$$\begin{aligned} P\left\{\sum_{v=1}^n \alpha_{0v} X_v \geq 1\right\} &= \lim_{m \rightarrow \infty} P\left\{\sum_{v=1}^n \alpha_{j(m),v} X_v \geq 1\right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (48), womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist.

4.2 Wir betrachten nun im folgenden Satz die Anlage von Vermögen in Bargeld neben der möglichen Anlage in anderen Wertpapieren. Dabei sei  $A_1$  das "Wertpapier" Bargeld und  $u(x)$  bezeichne die Nutzenfunktion des Anlegers.

Satz 8. Ist  $u(x)$  positiv, beschränkt und streng konkav und gilt

$$(52) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{u} - u(\lambda x)}{\bar{u} - u(x)} = 0 \quad \text{für alle } \lambda > 1,$$

wobei  $\bar{u} = \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)$  ist, sind ferner die Zufallsvariablen  $(X_v)_2^n$  voneinander unabhängig und gilt

$$(53) \quad P\left\{\sum_{v=2}^n \alpha_v X_v < 1\right\} > 0$$

für alle  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  mit  $\sum_{v=2}^n \alpha_v = 1$  und  $\alpha_v \geq 0$ ,  $v = 2, \dots, n$ ,

dann ist

$$(54) \quad \lim_{Y \rightarrow \infty} y_1^*/Y = 1$$

Beweis. Als erstes sei angemerkt, daß die Bedingungen des Satzes implizieren, daß für jedes  $Y > 0$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $(y_v^*)_1^n$  des Portefeuilleauswahl-Problems existiert. Siehe dazu [ 4 ] .

Wir nehmen an, daß (54) falsch ist. Dann gibt es eine Folge  $(Y_m)_1^\infty$ , die gegen Unendlich strebt, und ein  $\eta > 0$  derart, daß

$$(55) \quad \frac{y_{m1}^*}{Y_m} \leq 1 - \eta, \quad m = 1, 2, \dots,$$

wobei  $y_{mv}^* = y_v^*(Y_m)$ ,  $v = 1, 2, \dots, m$  ist.

Wenn wir vereinbaren, daß

$$\alpha_{mv} = y_{m,v+1}^*/(Y_m - y_{m1}^*), \quad v = 1, \dots, n-1,$$

ist, dann folgt aus (55) und der Budgetrestriktion, daß

$\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{m,n-1}$  (49) erfüllen (mit  $n-1$  anstelle von  $n$ ).

Hilfssatz 3 und (53) implizieren demnach, daß es ein  $\epsilon$  und ein  $\delta$  ( $\epsilon, \delta > 0$ ) gibt derart, daß für alle  $m$

$$(56) \quad P\left\{\sum_{v=2}^n y_{mv}^* X_v \leq (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*)\right\} \geq \delta > 0$$

ist. Wenn wir schreiben

$$M_m = E\left\{u\left(\sum_{v=1}^n y_{mv}^* X_v\right)\right\},$$



dann erhalten wir

$$M_m = \int u(y_{m1}^* + \sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v) F(dx_2, \dots, dx_n) ,$$

wobei  $F(x_2, \dots, x_n)$  die gemeinsame Verteilungsfunktion von  $X_2, \dots, X_n$  ist. Demnach ist

$$\begin{aligned} M_m &= \bar{u} - \int (\bar{u} - u(y_{m1}^* + \sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v)) F(dx_2, \dots, dx_n) \\ &= \bar{u} - \int_{\sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v \leq (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*)} (\bar{u} - u(y_{m1}^* + \sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v)) F(dx_2, \dots, dx_n) \\ &\quad - \int_{\sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v > (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*)} (\bar{u} - u(y_{m1}^* + \sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v)) F(dx_2, \dots, dx_n) . \end{aligned}$$

Aus der Definition von  $\bar{u}$  und der Tatsache, daß  $u(x)$  nicht-abnehmend ist, ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} M_m &\leq \bar{u} - \int_{\sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v \leq (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*)} (\bar{u} - u(y_{m1}^* + \sum_{v=2}^n y_{mv}^* x_v)) F(dx_2, \dots, dx_n) \\ &\leq \bar{u} - (\bar{u} - u(y_{m1}^* + (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*))) P\left(\sum_{v=2}^n y_{mv}^* X_v \leq (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*)\right) \\ &\leq \bar{u} - (\bar{u} - u(y_{m1}^* + (1-\epsilon)(Y_m - y_{m1}^*))) \delta \end{aligned}$$

wegen (56) ist. Deshalb erhalten wir

$$(57) \quad \delta(\bar{u} - u(Y_m - \varepsilon(Y_m - y_{m1}^*))) \leq \bar{u} - M_m \\ \leq \bar{u} - u(Y_m) ,$$

da wegen der Definition von  $(y_{mv}^*)_{v=1}^n$  gilt:  $u(Y_m) \leq M_m$ .

Es ist jedoch  $y_{m1}^* \leq Y_m(1-\eta)$ , und deshalb folgt aus (57), daß

$$\delta(\bar{u} - u(Y_m - \varepsilon(Y_m - Y_m(1-\eta)))) \leq \bar{u} - u(Y_m)$$

bzw. daß

$$\frac{\bar{u} - u(Y_m)}{\bar{u} - u(Y_m(1-\varepsilon\eta))} \geq \delta > 0 .$$

Demnach erhalten wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\bar{u} - u(Y_m)}{\bar{u} - u(Y_m(1-\varepsilon\eta))} \geq \delta > 0 ,$$

was im Widerspruch zu (52) steht. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Man kann leicht beweisen, daß (52) erfüllt ist, wenn für großes  $x$

$$\bar{u} - u(x) = x^{-\gamma(x)}$$

ist, wobei  $\gamma(x)$  eine zunehmende Funktion von  $x$  ist, die mit  $x$  gegen Unendlich geht. In bestimmtem Sinne ist dies der Grenzfall, denn man sieht leicht ein, daß, wenn  $u(x) = -x^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$  ist, die Ausdrücke  $y_v^*/Y$ ,  $v = 1, \dots, n$

unabhängig von  $Y$  sind. Dies illustriert das Verhalten der konstanten Risiko-Aversion, das durch diese Nutzenfunktion dargestellt wird.

## 5 Abschließende Bemerkungen

5.1 Über die Probleme, die sich aus der Beschränkung auf die exponentielle Klasse von Nutzenfunktionen sowie die Annahme der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen ergeben, haben wir bereits in § 1 ausführlich gesprochen. Selbst unter Berücksichtigung dieser Restriktionen enthält unsere Analyse einige wichtige Ergebnisse, die hier zusammengefaßt und diskutiert werden sollen.

Aus § 2 ergibt sich, daß es nicht genügt, Erwartungswert und Varianz einer Verteilung zu betrachten, sondern daß die gesamte Verteilung eine Rolle spielt. Das kann man direkt aus einem Vergleich der Formeln der optimalen Auswahl für die verschiedenen Verteilungen ersehen.

Speziell bei der Gamma-Verteilung fällt auf, daß die optimale Auswahl von dem Quadrat des Erwartungswertes abhängt und nicht vom Erwartungswert selbst wie z.B. bei der Normal-Verteilung. Deutlicher noch sieht man den unterschiedlichen Einfluß des Erwartungswertes, wenn man die Formeln (14) und (20) vergleicht. Der große Einfluß des Erwartungswertes ist vor

allem deshalb so beachtlich, weil das Ergebnis für die exponentielle Nutzenfunktion d.h. für hohe Risiko-Aversion abgeleitet wurde. Es ist anzunehmen, daß bei sinkender Risiko-Aversion der Erwartungswert noch stärker berücksichtigt werden würde.

Selbst das Kriterium der "Dominanz" ist nicht ausreichend, um darüber zu entscheiden, wie das Vermögen zwischen den verschiedenen Wertpapieren verteilt werden soll. Man sagt, die Verteilung  $F_1$  dominiere die Verteilung  $F_2$ , wenn  $F_1(x) \leq F_2(x)$  für alle  $x$  gilt. Dieses Dominanzkriterium wurde verwandt, um in einer ersten Stufe der Auswahl eine effiziente Menge von Wertpapieren zu bestimmen [10]. Unsere Analyse ergibt, daß man aus der Dominanz nicht ohne weiteres darauf schließen kann, daß mehr von  $A_1$  (mit Verteilungsfunktion  $F_1$ ) als von  $A_2$  (mit Verteilungsfunktion  $F_2$ ) gekauft wird (siehe §3.3).

5.2 Bei einer Entscheidung darüber, ob die Normalverteilung eine für das Portefeuilleauswahl-Problem angemessene Verteilung ist, sollte beachtet werden, daß die Zulässigkeit von negativen Werten bei der Normalverteilung eine starke Verzerrung der Auswahl bedeuten kann (§ 2.2). Die Gamma-Verteilung besitzt diese nachteilige Eigenschaft nicht. Außerdem scheint sie von der Form her (für  $\alpha > 1$ ) eine plausible Verteilung zu sein (§ 2.4). Sie ist auch dort anwendbar, wo eigentlich aus theoretischen Überlegungen die logarithmische Normalverteilung passender wäre, für die jedoch keine exakte optimale Auswahl bestimmbar ist (§ 3.4).

Will man bei dem Vergleich auch die Familie der stabilen Verteilungen berücksichtigen, die in der Literatur in jüngster Zeit stark favorisiert wurden, dann muß zunächst einmal darauf hingewiesen werden, daß nur solche stabilen Verteilungen zulässig sind, bei denen negative Werte unmögliche Ereignisse darstellen und die demnach asymmetrisch sein müssen. In der Literatur sind dagegen bisher nur symmetrische Verteilungen und deren Vorzüge gegenüber der Normalverteilung dargestellt worden. Für die von uns betrachteten positiven stabilen Verteilungen existieren bisher keine Untersuchungen darüber, wie gut eine Anpassung an empirische Daten ist; das Ergebnis einer solchen Untersuchung wäre sicher interessant.

5.3 In § 4 wurde die Annahme aufgegeben, daß keine der Aktien einen bestimmten Ertrag mit Wahrscheinlichkeit 1 besitzt. Wenn Bargeld als Anlage zugelassen wird, kann man unter den Voraussetzungen des Satzes 5 zeigen, daß die Proportion des Vermögens, die der Anleger als Bargeld hält, mit wachsendem Vermögen gegen 1 strebt.

Arrow [1] hat unter der Hypothese wachsender relativer Risiko-Aversion und für nur ein Wertpapier (abgesehen von der möglichen Anlage in Bargeld) gezeigt, daß unter diesen Voraussetzungen die Einkommenselastizität der Nachfrage nach Bargeld nie kleiner als 1 ist. Die Ergebnisse aus § 4 unseres Aufsatzes hängen eng mit dem von Arrow untersuchten Problem zusammen, sind jedoch nicht direkt damit vergleichbar.

5.4 Wie bereits erwähnt, nennt man den Parameter  $\eta$  in der Nutzenfunktion  $1 - \exp(-\eta x)$  den Risiko-Aversions-Koeffizienten. Für eine Lotterie mit gleichem Gewinn- und Verlustbetrag läßt er sich recht anschaulich als die (doppelte) Wahrscheinlichkeitsprämie pro Einheit des Lotteriebetrages interpretieren, die der Entscheidungsträger (mindestens) verlangt, um die Lotterie zu akzeptieren [12]. Diese Interpretation gilt nur für fixes Vermögen. Wir haben jedoch zu diesem Aufsatz auch Aussagen für wachsendes d.h. variables Vermögen gemacht. In diesem Fall wirkt der Risiko-Aversions-Koeffizient wie ein Skalierungsfaktor des Vermögens: Ein bestimmtes Vermögen läßt sich ebensogut als kleines Vermögen bei großem Risiko-Aversions-Koeffizienten als auch als großes Vermögen bei kleinem Risiko-Aversions-Koeffizienten interpretieren.

Interessanterweise taucht der Risiko-Aversions-Koeffizient in der optimalen Auswahl für die stabile Verteilung nicht auf. Außerdem ist die Auswahlproportion  $y_v^*/Y$  von  $Y$  unabhängig. Demnach verhält sich bei Annahme einer stabilen Verteilung ein Anleger mit beliebiger konstanter Risiko-Aversion so, als ob er konstante relative Risiko-Aversion besäße.

5.5. Betrachtet man den Betrag  $y_v^*$  für eine Aktie  $A_v$  in Abhängigkeit vom Vermögen  $Y$  und stellt dies graphisch dar, so kann man die entstandenen Kurven wegen der Analogie zur Konsumtheorie als Engel-Kurven bezeichnen. Die Abbildungen 1 und 2 geben die Engel-Kurven für stabile und Gamma-Verteilung an. Man kann die Engel-Kurven direkt aus den in § 2.3 bzw. 2.4

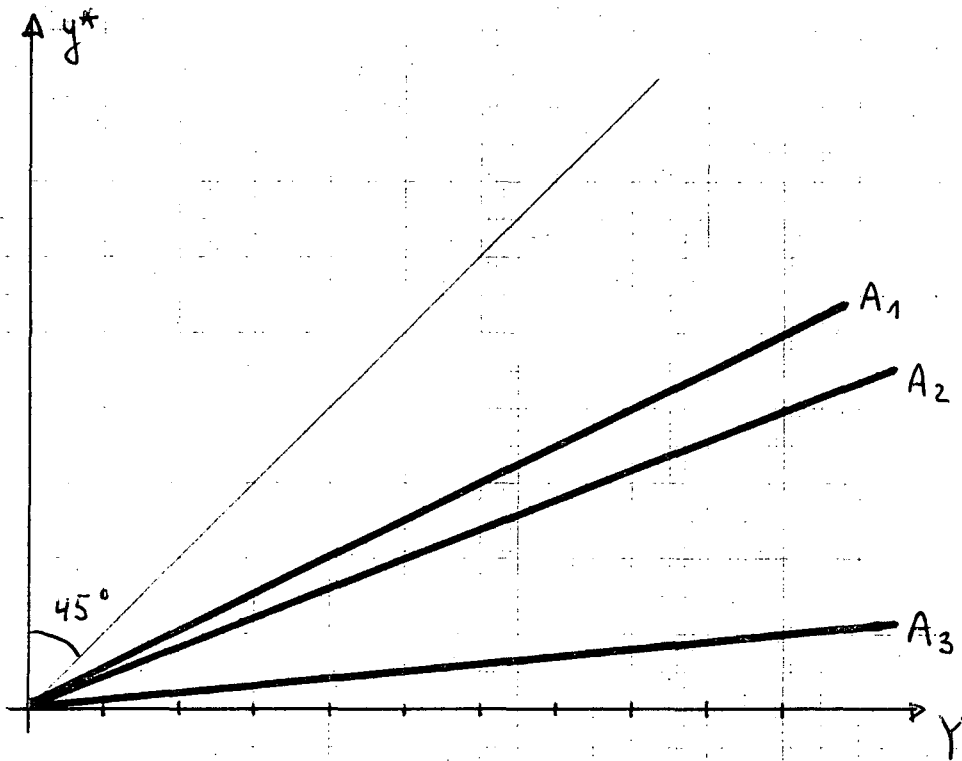


Abbildung 1 - Stabile Verteilung

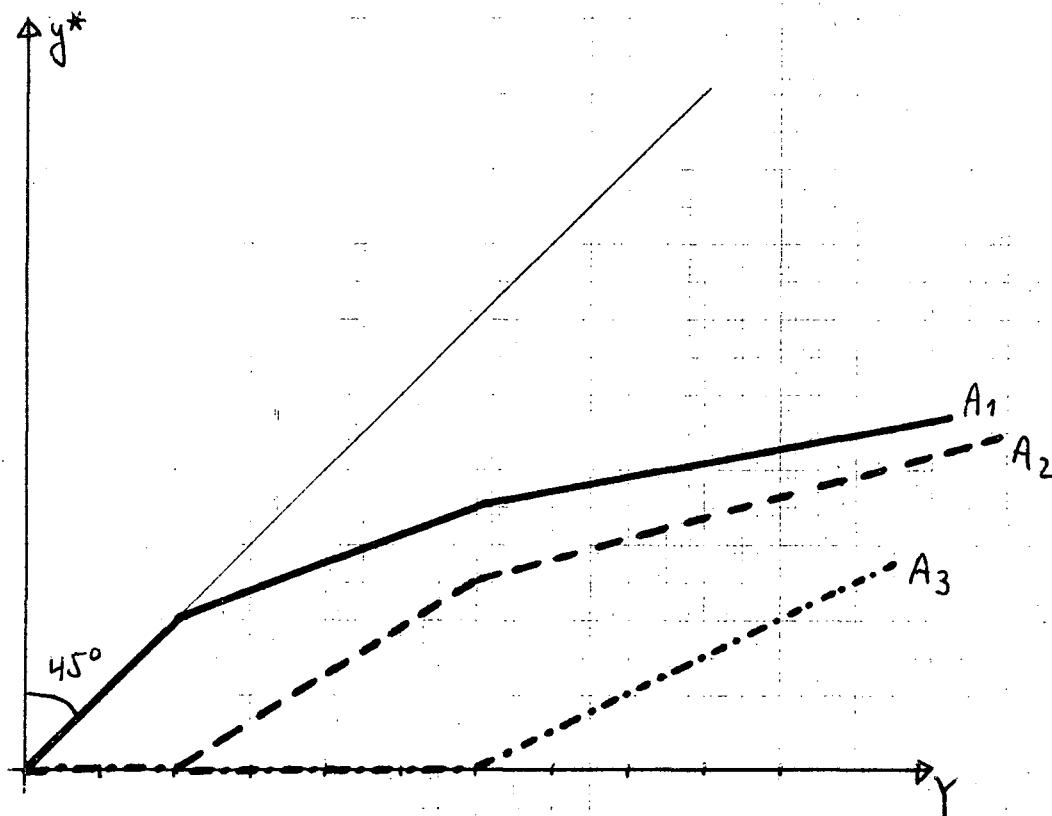


Abbildung 2 - Gamma-Verteilung

- [7] W. Feller (1966). An introduction to probability theory and its applications, Volume II. Wiley, New York
- [8] L. Fisher und J.H. Lorie (1970). Some studies of variability of returns on investments in common stocks. Journal of Business (Chicago) 43, 99 - 134
- [9] J.S. Fleming (1972). Portfolio choice and liquidity preference: A continuous time treatment. Unveröffentlichtes Manuskript
- [10] G. Hanoch und H. Levy (1969). The efficiency analysis of choices involving risk. The Review of Economic Studies 36, 335 - 346
- [11] B. Mandelbrot (1963). The variation of certain speculative prices. Journal of Business (Chicago) 36, 394 - 419
- [12] J.W. Pratt (1964). Risk aversion in the small and in the large. Econometrica 32, 122 - 136
- [13] P.A. Samuelson (1967). Efficient portfolio selection for Pareto-Lévy investments. Journal of Financial and Quantitative Analysis 2, 107 - 122

P.L. Davies  
Department of Probability & Statistics  
The University  
SHEFFIELD , S3 7RH  
England

G. Ronning  
Fachbereich Statistik  
Universität Konstanz  
775 KONSTANZ  
BRD



Abbildungen 1 und 2 ungefähr hier

angegebenen Ergebnisse erhalten. Wie in § 2.1 erklärt wurde, sind in der Abbildung 2 die Aktien nach der Größe ihres Erwartungswertes geordnet, wobei der Index 1 die Aktie mit dem größten Erwartungswert bezeichnet. Es werden jeweils Portefeuilles mit 3 Aktien betrachtet.

Literatur

- [1] K.J. Arrow (1971). Essays in the theory of risk-bearing. North-Holland, Amsterdam
- [2] J.S. Chipman (1973). On the ordering of portfolios in terms of mean and variance. Review of Economic Studies 40, 167 - 190
- [3] P.L. Davies und G. Morton (1973). Maximization of a separable utility function under budget constraints. Unveröffentlichtes Manuskript
- [4] P.L. Davies und G. Ronning (1974). Existence, uniqueness and continuity of portfolio choice. Erscheint in: Zeitschrift für Nationalökonomie
- [5] E.F. Fama (1963). Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. Journal of Business (Chicago) 36, 420 -
- [6] E.F. Fama (1971). Risk, return and equilibrium. Journal of Political Economy 79, 30 - 55