

Sauter-Servaes, Florian

**Working Paper**

## Der Übergang von einer erschöpfbaren Ressource zu einem synthetischen Substitut

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 126

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Sauter-Servaes, Florian (1979) : Der Übergang von einer erschöpfbaren Ressource zu einem synthetischen Substitut, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 126, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78161>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

FAKULTÄT FÜR  
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND STATISTIK  
UNIVERSITÄT KONSTANZ

---

Der Übergang von einer  
erschöpfbaren Ressource  
zu einem synthetischen Substitut.

Florian Sauter-Servaes

Serie A - Nr. 126

DISKUSSIONSBEITRÄGE

D-7750 Konstanz  
Postfach 7733

Der Übergang von einer  
erschöpfbaren Ressource  
zu einem synthetischen Substitut.

Florian Sauter-Servaes

Serie A - Nr. 126

Juli 1979

Ag 4767 79  
Weltwirtschaft  
Kf

## 1. Einleitung

Die ökonomischen Aspekte des Übergangs von einer erschöpfbaren Ressource zu einem vollkommenen Substitut sind während der letzten Jahre in der Literatur unter verschiedenen Gesichtspunkten behandelt worden. GILBERT und GOLDMAN (1977) beschreiben das Verhalten eines Monopolisten, der den gesamten Vorrat einer Ressource kontrolliert und vom Markteintritt von Wettbewerbsanbietern eines Substituts bedroht ist. Sie kommen zu dem Schluß, daß der potentielle Wettbewerb den Monopolisten nicht notwendigerweise zu einer gesellschaftlich höher bewerteten intertemporalen Allokation des Ressourcenvorrats veranlaßt. DASGUPTA und STIGLITZ (1975) zeigen, daß Marktstrukturen mit unvollständiger Konkurrenz zu einem langsameren als dem gesellschaftlich optimalen Verbrauch des Ressourcenvorrats führen.

In allen mir bekannten Arbeiten über dieses Thema wird von einer Technologie ausgegangen, die die Produktion des Substituts in beliebigen Mengen unter konstanten Grenzkosten ermöglicht. Diese Vorstellung wurde von NORDHAUS (1973) eingeführt, der eine solche Technologie "Backstopptechnologie" nannte. DASGUPTA und STIGLITZ zeigen, daß ihre Resultate auch dann gelten, wenn der Zeitpunkt, zu dem eine solche Backstopptechnologie zur Verfügung steht, unsicher ist. HOEL (1978) bestimmt eine gesellschaftlich optimale intertemporale Allokation des Ressourcenvorrats bei Unsicherheit über die Kosten, unter denen die Backstopptechnologie arbeitet.

Die Annahme einer Backstopptechnologie für die Substitutproduktion führt immer zu einer strikten zeitlichen Trennung zwischen Ressourcenabbau und Substitutproduktion. Wenn der Ressourcenvorrat erschöpft ist, sinkt der Abbau der Ressource abrupt auf Null, während im gleichen Zeitpunkt die Substitutproduktion von Null auf ein Niveau steigt, das sie ad infinitum beibehält.

In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, daß das Substitut nur unter steigenden Grenzkosten produziert werden kann. Diese Annahme führt zu wesentlich anderen Verläufen des Ressourcenabbaus und der Substitutproduktion. Erstens erhält man eine Übergangsphase, in der sowohl die Ressource als auch bereits das Substitut verbraucht wird, und zweitens sind nun Situationen möglich, in denen der Ressourcenvorrat von einem Monopolisten schneller, als es gesellschaftlich optimal wäre, abgebaut wird.

Im einzelnen wird dazu wie folgt vorgegangen: In Abschnitt 2 wird ein allgemeiner Optimierungsansatz zur Bestimmung optimaler intertemporaler Allokationen des Ressourcenvorrats und entsprechender Produktionsmengen des Substituts durchgeführt. Dessen Lösung wird in Abschnitt 3 dazu verwendet, für einen Referenzfall, "gesellschaftliches Optimum", die optimale Allokation zu bestimmen. In Abschnitt 4 wird aus dem allgemeinen Optimierungsansatz das Verhalten eines Monopolisten, der sowohl den Ressourcenvorrat als auch die Substituttechnologie kontrolliert, abgeleitet. Im Abschnitt 5 werden die beiden Fälle miteinander verglichen. Gemeinsame Grundlage der beiden Fälle, die eine Vergleichbarkeit ermöglicht, ist eine gegebene Nachfragefunktion nach der Ressource bzw. dem Substitut. Das gesellschaftliche Optimum ist durch die momentane Zielfunktion, Konsumentenplus Produzentenrente, charakterisiert und der Monopolist durch die Erlösfunktion.

## 2. Allgemeiner Optimierungsansatz

Der Vorrat einer natürlichen Ressource betrage  $S$ . Dieser Vorrat kann abgebaut werden, ohne daß dabei direkte Abbaukosten entstehen. Die Rate, mit der die Ressource im Zeitpunkt  $t$  abgebaut wird, wird mit  $x_t$  bezeichnet. In jedem Fall gilt dann die Restriktion

$$(1) \quad \int_0^{\infty} x_t dt \leq S$$

Ein perfektes Substitut für die natürliche Ressource kann in beliebigen Mengen produziert werden, jedoch entstehen bei der Produktion des Substituts Kosten. Die Rate, mit der das Substitut im Zeitpunkt  $t$  produziert wird, wird mit  $y_t$  bezeichnet. Die Kostenfunktion der Substitutproduktion sei  $k(y_t)$  mit

$$(2) \quad k' > 0 \quad \text{und} \quad k'' > 0 .$$

Der Verbrauch der Ressource bzw. des Substituts beeinflusst direkt den Wert der momentanen Zielfunktion,  $u$ , die im folgenden momentane Nutzenfunktion genannt wird, wobei offen bleibt, wessen Nutzen sie angibt. Über die Funktion  $u$  werden übliche Annahmen gemacht:

$$(3) \quad u' > 0 , \quad u'' < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$$

Zukünftiger Nutzen wird mit der Rate  $\delta > 0$  diskontiert. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet nun:

$$\text{Maximiere} \quad \int_0^{\infty} (u(x_t + y_t) - k(y_t)) \cdot e^{-\delta t} dt \quad \text{unter den}$$

$$\text{Nebenbedingungen} \quad \int_0^{\infty} x_t dt \leq S \quad \text{und}$$

$$x_t \geq 0 \quad \text{und} \quad y_t \geq 0 .$$

Dies ist ein isoperimetrisches Variationsproblem mit Nebenbedingungen in Ungleichungsform. Zur Lösung definiert man die

Lagrange-Funktion

$$(4) \quad L = (u(x_t + y_t) - k(y_t)) \cdot e^{-\delta t} - p \cdot x_t + q_t x_t + r_t y_t$$

mit den noch unbestimmten Faktoren  $p$ ,  $q_t$  und  $r_t$ . Zu bemerken ist, daß der Multiplikator  $p$  zeitunabhängig gewählt ist, da die Nebenbedingung (1), für die er steht, eine globale zeitunabhängige Restriktion ist, während die Multiplikatoren  $p_t$  und  $q_t$  zeitabhängig sind, da die Restriktionen,  $x_t \geq 0$  und  $y_t \geq 0$ , für die sie stehen, über den ganzen Zeitraum hinweg erfüllt sein müssen.

Notwendige Bedingungen für eine Optimallösung dieses Problems lauten nun wie folgt: Sind  $\hat{x}_t$ ,  $\hat{y}_t$  im obigen Sinne optimale Verlaufspfade des Ressourcenabbaus bzw. der Substitutproduktion, dann existieren Multiplikatorfunktionen  $\hat{q}_t$  und  $\hat{r}_t$  und ein Multiplikator  $\hat{p}$ , die zusammen mit  $\hat{x}_t$  und  $\hat{y}_t$  die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllen:

$$(\alpha) \quad \frac{\partial L}{\partial x_t} = e^{-\delta t} \cdot u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t) - \hat{p} + \hat{q}_t = 0$$

$$(\beta) \quad \frac{\partial L}{\partial y_t} = e^{-\delta t} (u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t) - k'(\hat{y}_t)) + \hat{r}_t = 0$$

$$(\gamma) \quad \hat{q}_t \cdot \hat{x}_t = 0 \quad \text{und} \quad \hat{r}_t \cdot \hat{y}_t = 0, \quad \text{und} \quad \hat{q}_t, \hat{r}_t \geq 0$$

Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen können wichtige Eigenschaften der Optimallösung abgeleitet werden.

Eine erste Folgerung lautet: Das Substitut wird nur produziert, wenn der Grenznutzen des Verbrauchs gleich den Grenzkosten der

Substitutproduktion ist, denn es gilt

$$\hat{y}_t > 0 \Rightarrow \underset{(\gamma)}{\hat{r}_t} = 0 \Rightarrow \underset{(\beta)}{u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t)} = k'(\hat{y}_t);$$

und speziell folgt daraus

$$\hat{y}_0 > 0 \Rightarrow u'(\hat{x}_0 + \hat{y}_0) = k'(\hat{y}_0) > k'(0),$$

was bedeutet, daß das Substitut nur von Anfang an produziert wird, wenn von Anfang an die verbrauchte Menge so klein ist, daß der Grenznutzen des Verbrauchs größer als die minimalen Grenzkosten der Substitutproduktion ist. Dies ist jedoch nicht notwendigerweise der Fall. Es kann eine Anfangsphase geben, in der der gesamte Verbrauch aus dem Ressourcenvorrat gedeckt wird; dieser Verbrauch also so groß ist, daß der Grenznutzen des Verbrauchs kleiner ist als die minimalen Grenzkosten der Substitutproduktion. Man könnte sagen, daß dies eine Phase ist, in der die Ressource (trotz ihres begrenzten Vorrats) relativ reichlich vorhanden ist, und daher die Substitutproduktion (noch) unwirtschaftlich ist. Eine solche Aussage kann jedoch nur im Zusammenhang mit dem Optimierungskalkül, das hier durchgeführt wird, gemacht werden und ist in seinem Rahmen zu verstehen.

In einer solchen Anfangsphase gilt also  $\hat{x}_t > 0$ <sup>1)</sup> und  $\hat{y}_t = 0$  und es folgt aus  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  und  $(\gamma)$

$$(\gamma)' \quad \hat{q}_t = 0$$

$$(\alpha)' \quad u'(\hat{x}_t) = \hat{p} \cdot e^{\delta t}$$

$$(\beta)' \quad u'(\hat{x}_t) = k'(0) - e^{\delta t} \hat{r}_t$$

---

1)  $\hat{x}_t > 0$  folgt aus der Annahme  $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$

Aus  $(\alpha)'$  folgt, daß in der Anfangsphase die optimale Rate, mit der die Ressource abgebaut wird, monoton sinkt, und zwar gerade in der Art, daß der Grenznutzen mit der Rate  $\delta$  exponentiell steigt. Er nähert sich dabei von unten den minimalen Grenzkosten der Substitutproduktion  $(k'(0))$ , so daß wegen  $(\beta)'$   $\hat{r}_t$  entsprechend monoton fallend sein muß.

Das Ende der Anfangsphase (der Zeitpunkt  $t_1$ ) ist dadurch charakterisiert, daß der Grenznutzen des Verbrauchs gleich den minimalen Grenzkosten der Substitutproduktion ist, daß also gilt

$$(5) \quad u'(\hat{x}_{t_1}) = k'(0) .$$

Im Zeitpunkt  $t_1$  beginnt die Substitutproduktion, d.h.  $\hat{y}_t > 0$  für  $t > t_1$ . Dies folgt aus den Euler-Lagrange-Gleichungen, indem man umgekehrt annimmt, es gäbe ein  $t > t_1$  mit  $\hat{y}_t = 0$ .

Dann folgt aus  $(\alpha)$

$$\begin{aligned} u'(\hat{x}_t) &= \hat{p} \cdot e^{\delta t} = \hat{p} \cdot e^{\delta t_1} \cdot e^{\delta(t-t_1)} = \underset{(\alpha)'}{u'(\hat{x}_{t_1})} \cdot e^{\delta(t-t_1)} \\ &= k'(0) \cdot e^{\delta(t-t_1)} > k'(0) . \end{aligned} \quad (5)$$

Damit folgt aus  $(\beta)$

$$\begin{aligned} 0 < u'(\hat{x}_t) - k'(0) &= -e^{\delta t} \cdot \hat{r}_t \\ \Rightarrow \hat{r}_t &< 0 , \end{aligned}$$

was im Widerspruch zu  $(\gamma)$  steht. Also gilt tatsächlich

$$(6) \quad \hat{y}_t > 0 \quad \text{für alle } t > t_1 .$$

Es hängt nun vom Verlauf der Grenzkostenkurve der Substitutproduktion ab, in welchem Maße der Verbrauch durch das Substitut gedeckt wird. Im Extremfall konstanter Grenzkosten der Substitutproduktion (d.h.  $k'(y) = k'(0)$  für alle  $y > 0$ ) wird ab dem Zeitpunkt  $t_1$  der Verbrauch vollständig durch das Substitut gedeckt, und der Ressourcenvorrat ist im Zeitpunkt  $t_1$  gerade erschöpft. Dieser Fall wurde, wie erwähnt, in der Literatur bisher betrachtet.

Im Falle steigender Grenzkosten der Substitutproduktion gibt es eine zweite Phase  $(t_1, t_2)$ , in der sowohl  $\hat{x}_t$  als auch  $\hat{y}_t$  positiv ist. Der Verlauf der Optimalpfade ergibt sich weiterhin aus den Euler-Lagrange-Gleichungen, die in der 2. Phase die folgende Gestalt annehmen

$$(\alpha)'' \quad u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t) = e^{\delta t} \cdot \hat{p}$$

$$(\beta)'' \quad u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t) = k'(\hat{y}_t)$$

$$(\gamma)'' \quad \hat{q}_t = 0 \quad \text{und} \quad \hat{r}_t = 0$$

Aus  $(\alpha)''$  folgt, daß der Verbrauch  $(\hat{x}_t + \hat{y}_t)$  monoton sinkt, und aus  $(\beta)''$  folgt, daß die Substitutproduktion  $(\hat{y}_t)$  monoton steigt. Der Anteil der Substitutproduktion am Verbrauch wird also während der zweiten Phase ständig größer. Wegen  $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$  und

$k'(y) < \infty$  für  $y < \infty$  gibt es einen Zeitpunkt  $t_2$ , für den gilt

$$(7) \quad \hat{x}_{t_2} = 0.$$

Im Zeitpunkt  $t_2$  wird demnach gerade der gesamte Verbrauch durch die Substitutproduktion gedeckt. Für  $t > t_2$  gilt  $\hat{x}_t = 0$ . Nimmt man nämlich an, es gäbe ein  $t > t_2$  mit  $\hat{x}_t > 0$ , so folgt

aus (γ)  $\hat{q}_t = 0$ . Nun folgt aus (α) und (β)

$$\hat{p} \cdot e^{\delta t} = \hat{p} \cdot e^{\delta t_2} \cdot e^{\delta(t-t_2)} = u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t)$$

$$\Rightarrow u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t) > \hat{p} \cdot e^{\delta t_2} \stackrel{(\alpha)''}{=} u'(\hat{x}_{t_2} + \hat{y}_{t_2}) \stackrel{(7)}{=} u'(\hat{y}_{t_2}) \stackrel{(\beta)''}{=} k'(\hat{y}_{t_2})$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} \hat{x}_t + \hat{y}_t < \hat{y}_{t_2} \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_t < \hat{y}_{t_2} \quad (\text{da } \hat{x}_t > 0, \text{ laut Annahme})$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} k'(\hat{y}_t) < k'(\hat{y}_{t_2}) .$$

Aus (β) folgt aber, da wegen (6)  $\hat{r}_t = 0$  gilt,

$$k'(\hat{y}_t) = u'(\hat{x}_t + \hat{y}_t) ,$$

was im Widerspruch zu obigem steht.

Ab dem Zeitpunkt  $t_2$  geht die Ressource also nicht mehr in den Verbrauch ein, und der Vorrat an ihr muß nun gerade erschöpft sein, da es nicht optimal ist, die Ressource, die kostenlos zur Verfügung steht, ungenutzt auf Lager liegen zu lassen; d.h. es muß gelten

$$(8) \quad \int_0^{t_2} \hat{x}_t dt = S .$$

Diese Bedingung wird gesichert, indem der Verbrauch der ersten Periode geeignet gewählt wird. Aus ihr ergibt sich also, in welchem Punkt des bisher geschilderten Verlaufs das betrachtete System tatsächlich beginnen soll, ob es also z.B. eine Anfangsphase gibt, in der nur die Ressource verbraucht wird, oder ob das System gleich in einem Punkt der 2. Phase beginnt. Man sieht

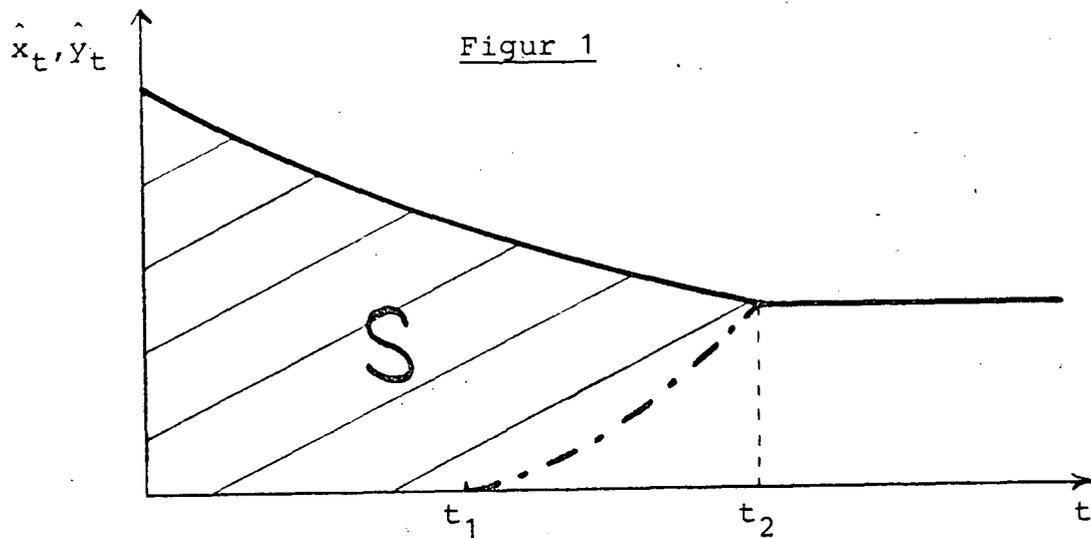
nun deutlicher, daß bei der Beurteilung der Frage, wie reichlich eine Ressource vorhanden ist, drei Größen ausschlaggebend sind, der Ressourcenvorrat, die Nutzenfunktion und die Kostenfunktion der Substitutproduktion.

Für  $t > t_2$  gilt nun  $\hat{x}_t = 0$  und  $\hat{r}_t = 0$ . Damit folgt aus (3)

$$(9) u'(\hat{y}_t) = k'(\hat{y}_t) \Rightarrow \hat{y}_t \equiv \hat{y} \quad (\text{für alle } t \geq t_2)$$

Ab dem Zeitpunkt  $t_2$  nimmt die Substitutproduktion einen stationären Verlauf. Dies ist nicht verwunderlich, da, sobald der Ressourcenvorrat verbraucht ist, das Substitut sich durch nichts mehr von einem "normalen" produzierbaren Gut unterscheidet. Gleichung (9) besagt, daß das Substitut nun nach der Optimalitätsregel, Grenzkosten der Produktion gleich Grenznutzen des Verbrauchs, produziert wird.

Die optimalen Verläufe von Ressourcenabbau und Substitutproduktion sind in Figur 1 graphisch dargestellt. Der Gesamtverbrauch der Ressource und des Substituts ( $\hat{x}_t + \hat{y}_t$ ) fällt, solange die Ressource noch abgebaut wird (so daß der Grenznutzen des Verbrauchs gerade mit der Rate  $\delta$  wächst), und wird ab dem Zeitpunkt  $t_2$  konstant. Im Zeitpunkt  $t_1$  beginnt die Substitutproduktion und wächst dann monoton (so daß die Grenzkosten der Substitutproduktion gerade mit der Rate  $\delta$  steigen), bis sie im Zeitpunkt  $t_2$  gleich dem Gesamtverbrauch ist. Der Ressourcenabbau ist in der ersten Phase  $(0, t_1)$  gleich dem Gesamtverbrauch, in der zweiten Phase  $(t_1, t_2)$  gleich der Differenz aus Gesamtverbrauch und Substitutproduktion und in der dritten Phase  $(t_2, \infty)$  gleich Null. Der Inhalt der schraffierten Fläche, die durch die beiden Achsen, die Gesamtverbrauchskurve und die Kurve der Substitutproduktion eingegrenzt ist, entspricht dem Ressourcenvorrat  $S$ .



— : Kurve des Gesamtverbrauchs  $(\hat{x}_t + \hat{y}_t)$   
 - - - : Kurve der Substitutproduktion  $(\hat{y}_t)$

### 3. Das gesellschaftliche Optimum

Gegeben sei eine Nachfragefunktion

$$(10) \quad p = p(c) ,$$

wobei  $c$  die nachgefragte Menge der Ressource bzw. des Substituts und  $p$  den Preis bezeichnen. Als momentane gesellschaftliche Nutzenfunktion wird die Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente gewählt,

$$(11) \quad u^g(c_t) = \int_0^{c_t} p(c) dc \quad 1)$$

1) Der hochgestellte Index  $g$  zeigt an, daß es sich hier um die gesellschaftliche momentane Nutzenfunktion handelt.

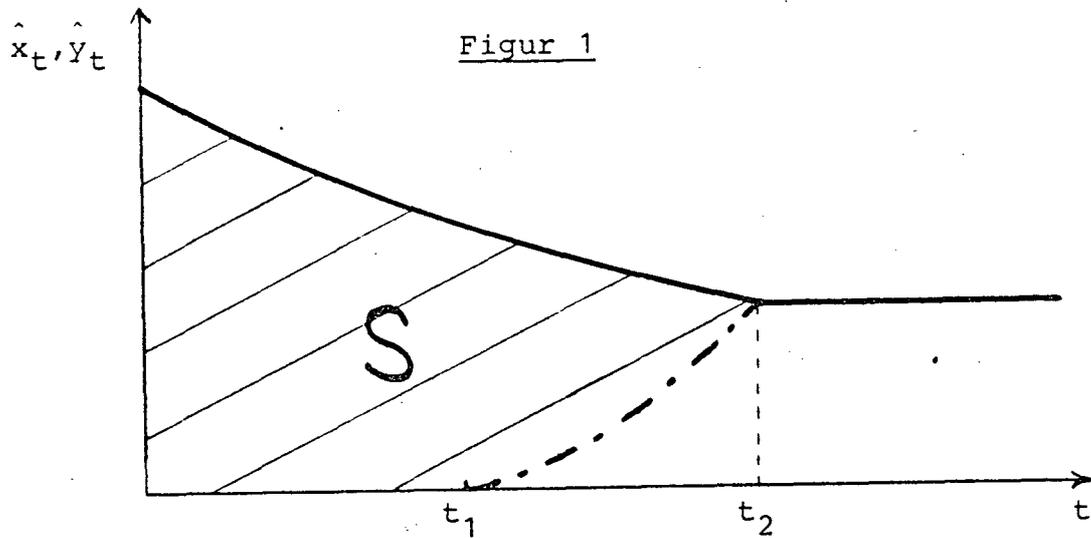
nun deutlicher, daß bei der Beurteilung der Frage, wie reichlich eine Ressource vorhanden ist, drei Größen ausschlaggebend sind, der Ressourcenvorrat, die Nutzenfunktion und die Kostenfunktion der Substitutproduktion.

Für  $t > t_2$  gilt nun  $\hat{x}_t = 0$  und  $\hat{r}_t = 0$ . Damit folgt aus (8)

$$(9) \quad u'(\hat{y}_t) = k'(\hat{y}_t) \Rightarrow \hat{y}_t \equiv \hat{y} \quad (\text{für alle } t \geq t_2)$$

Ab dem Zeitpunkt  $t_2$  nimmt die Substitutproduktion einen stationären Verlauf. Dies ist nicht verwunderlich, da, sobald der Ressourcenvorrat verbraucht ist, das Substitut sich durch nichts mehr von einem "normalen" produzierbaren Gut unterscheidet. Gleichung (9) besagt, daß das Substitut nun nach der Optimalitätsregel, Grenzkosten der Produktion gleich Grenznutzen des Verbrauchs, produziert wird.

Die optimalen Verläufe von Ressourcenabbau und Substitutproduktion sind in Figur 1 graphisch dargestellt. Der Gesamtverbrauch der Ressource und des Substituts ( $\hat{x}_t + \hat{y}_t$ ) fällt, solange die Ressource noch abgebaut wird (so daß der Grenznutzen des Verbrauchs gerade mit der Rate  $\delta$  wächst), und wird ab dem Zeitpunkt  $t_2$  konstant. Im Zeitpunkt  $t_1$  beginnt die Substitutproduktion und wächst dann monoton (so daß die Grenzkosten der Substitutproduktion gerade mit der Rate  $\delta$  steigen), bis sie im Zeitpunkt  $t_2$  gleich dem Gesamtverbrauch ist. Der Ressourcenabbau ist in der ersten Phase  $(0, t_1)$  gleich dem Gesamtverbrauch, in der zweiten Phase  $(t_1, t_2)$  gleich der Differenz aus Gesamtverbrauch und Substitutproduktion und in der dritten Phase  $(t_2, \infty)$  gleich Null. Der Inhalt der schraffierten Fläche, die durch die beiden Achsen, die Gesamtverbrauchskurve und die Kurve der Substitutproduktion eingegrenzt ist, entspricht dem Ressourcenvorrat  $S$ .



————— : Kurve des Gesamtverbrauchs  $(\hat{x}_t + \hat{y}_t)$   
 - - - - - : Kurve der Substitutproduktion  $(\hat{y}_t)$

### 3. Das gesellschaftliche Optimum

Gegeben sei eine Nachfragefunktion

$$(10) \quad p = p(c) ,$$

wobei  $c$  die nachgefragte Menge der Ressource bzw. des Substituts und  $p$  den Preis bezeichnen. Als momentane gesellschaftliche Nutzenfunktion wird die Summe aus Konsumenten- und Produzentenrente gewählt,

$$(11) \quad u^g(c_t) = \int_0^{c_t} p(c) dc \quad 1)$$

---

1) Der hochgestellte Index  $g$  zeigt an, daß es sich hier um die gesellschaftliche momentane Nutzenfunktion handelt.

Es ist  $u^g'(c_t) = p(c_t)$  ; der momentane gesellschaftliche Grenznutzen ist also gerade gleich dem Preis. Um Voraussetzung (3) zu erfüllen, muß man folgende Annahmen an die Nachfragefunktion machen,

$$(12) \quad p(c) > 0, \quad p'(c) < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{c \rightarrow 0} p(c) = \infty.$$

Die gesellschaftlich optimale intertemporale Allokation des Ressourcenvorrats und die optimale Entwicklung der Produktionsrate des Substituts kann man nun direkt aus den Ergebnissen des allgemeinen Optimierungsansatzes ablesen: In einer ersten Phase  $[0, t_1^g]$  wird der gesamte Konsum durch den Ressourcenabbau gedeckt; das Substitut wird nicht produziert. Der Preis steigt mit der gesellschaftlichen Diskontrate  $\delta$  und die Konsumrate bzw. Abbaurrate sinkt entsprechend. Da der Preis mit konstanter Rate steigt, "lohnt" sich schließlich die Substitutproduktion, und dies markiert den Beginn der zweiten Phase  $(t_1^g)$ , in der Ressource und Substitut nebeneinander verbraucht werden. Der Preis steigt weiterhin mit der Rate  $\delta$  und entsprechend steigt die Produktionsrate des Substituts, und sinkt die Konsumrate, bis schließlich der gesamte Konsum durch das Substitut gedeckt wird. Der Anfangspreis der Ressource muß gerade so gewählt worden sein, daß zu diesem Zeitpunkt  $(t_2^g)$  der Ressourcenvorrat erschöpft ist. Für den Rest der Zeit bleibt der Konsum auf konstantem Niveau  $(\hat{y}^g)$ , das sich aus der Optimalitätsbedingung, Grenzkosten der Substitutproduktion gleich Grenznutzen des Konsums, bestimmt.

#### 4. Das Gewinnoptimum eines Monopolisten

Es wird nun davon ausgegangen, daß ein Wirtschaftssubjekt Eigentümer des Ressourcenvorrats ist und als einziger das Recht (oder die Fähigkeit) hat, das Substitut zu produzieren. Dieser Monopolist steht der gleichen Nachfragekurve, wie sie in Kapitel 3. verwendet wurde, gegenüber. Seine momentane Nutzenfunktion ist der Erlös, den er aus dem Verkauf der Ressource bzw. des Substituts bezieht.

$$(13) \quad u^m(c_t) = c_t \cdot p(c_t) \quad 1)$$

Der momentane Grenznutzen des Monopolisten ist sein Grenzerlös.

$$(14) \quad u^{m'}(c_t) = p(c_t) (1 + \eta(c_t)) ,$$

wobei  $\eta(c_t)$  gleich dem Kehrwert der Nachfrageelastizität im Bezug auf den Preis ist. Um Voraussetzung (3) zu sichern, muß man zusätzlich zu (12) noch folgende Annahmen über die Nachfragefunktion machen,

$$(15) \quad 0 < |\eta(c)| < 1 \quad \text{für alle } c, \quad \lim_{c \rightarrow 0} |\eta(c)| < 1 \quad \text{und}$$

$$p'(c)(1 + \eta(c)) + p(c) \cdot \eta'(c) < 0. \quad 2)$$

Außerdem wird angenommen, daß der Monopolist zukünftige Gewinne mit der gleichen Rate ( $\delta$ ) diskontiert, mit der die Gesellschaft Nutzen aus zukünftigem Konsum diskontiert.

Der optimale Verlauf (im Sinne einer Gewinnmaximierung für den Monopolisten) des Ressourcenabbaus und der Substitutproduktion und der dementsprechende Verlauf des Preises ergeben sich direkt aus den Ergebnissen des allgemeinen Optimierungsansatzes. In einer ersten Phase  $[0, t_1^m)$  verkauft der Monopolist nur aus seinem Ressourcenvorrat und produziert das Substitut nicht. Sein Absatz sinkt kontinuierlich, so daß der Grenzerlös mit der Rate  $\delta$  steigt. Im Zeitpunkt  $t_1^m$  erreicht der Grenzerlös das Minimum der

---

1) Der hochgestellte Index  $m$  zeigt an, daß es sich hier um die momentane Nutzenfunktion eines Monopolisten handelt.

2) Diese Bedingungen werden z.B. von Nachfragefunktionen mit konstanter Elastizität  $|\eta| < 1$  erfüllt.

Grenzkosten der Substitutproduktion ( $k'(o)$ ), und der Monopolist beginnt auch das Substitut zu produzieren. In der 2. Phase  $[t_1^m, t_2^m)$  steigt der Anteil der Substitutproduktion am Gesamtumsatz kontinuierlich an, bis im Zeitpunkt  $t_2^m$  nur noch das Substitut verkauft wird, und der Grenzerlös gerade gleich den Grenzkosten der Substitutproduktion ist. Sein Ressourcenvorrat ist nun gerade aufgebraucht, und er produziert das Substitut auf demselben Niveau ( $\hat{y}^m$ ) weiter, da er nun ein "normaler" Monopolist ist.

#### 5. Vergleich der beiden Fälle

Beide Fälle zeigen sehr ähnliche Mengen- und Preisverläufe. Es gibt jeweils drei Phasen, eine erste, in der nur die Ressource verbraucht wird, eine zweite, in der sowohl Ressource als auch Substitut verbraucht werden, und eine dritte Phase, in der das Substitut auf jeweils konstantem Niveau verbraucht wird.

Zunächst kann man feststellen, daß im gesellschaftlichen Optimum in der dritten Phase die Substitutproduktion größer ist als im monopolistischen Optimum. Es gilt nämlich

$$\hat{y}_{t_2^g}^g = \hat{y}^g \quad \text{und} \quad \hat{y}_{t_2^m}^m = \hat{y}^m ,$$

da in  $t_2$  jeweils der stationäre Verlauf beginnt. Des Weiteren folgt aus (9)

$$u^{g'}(\hat{y}^g) = p(\hat{y}^g) = k'(\hat{y}^g) \quad \text{und}$$

(16)

$$u^{m'}(\hat{y}^m) = p(\hat{y}^m)(1 + \eta(\hat{y}^m)) = k'(\hat{y}^m).$$

Da  $k'$  eine monoton wachsende Funktion ist und außerdem

$$(17) \quad \text{für alle } y \quad p(y)(1 + \eta(y)) < p(y) ,$$

folgt aus (16),

$$(18) \quad \hat{y}^m < \hat{y}^g .$$

In beiden Fällen ist die zweite Phase dadurch charakterisiert, daß die Grenzkosten der Substitutproduktion vom Anfangswert  $k'(0)$  mit der Rate  $\delta$  steigen. Im Optimum des Monopolisten steigen sie, bis sie den Wert  $k'(\hat{y}^m)$  erreicht haben und im gesellschaftlichen Optimum, bis sie den Wert  $k'(\hat{y}^g)$  erreicht haben. Aus (18) folgt damit, daß die Dauer der zweiten Phase im gesellschaftlichen Optimum größer ist als im monopolistischen Optimum, d.h.

$$(19) \quad t_2^m - t_1^m < t_2^g - t_1^g .$$

Da in beiden Fällen die Grenzkosten der Substitutproduktion den gleichen Verlauf haben, werden in beiden Fällen in der 2. Phase die gleichen Mengen des Substituts produziert, mit dem Unterschied, daß im gesellschaftlichen Optimum der Verlauf der Substitutproduktion höher ansteigt als im Optimum des Monopolisten, da im ersten Fall die 2. Phase ja länger dauert. Formal ausgedrückt gilt

$$(20) \quad \hat{y}_{t_1+\tau}^m = \hat{y}_{t_1+\tau}^g \quad \text{für } \tau \in [0, t_2^m - t_1^m] .$$

Für  $\tau \in [0, t_2^m - t_1^m]$  gilt weiter,

$$\begin{aligned} k'(\hat{y}_{t_1+\tau}^m) &= u^{m'}(\hat{x}_{t_1+\tau}^m + \hat{y}_{t_1+\tau}^m) \\ &= p(\hat{x}_{t_1+\tau}^m + \hat{y}_{t_1+\tau}^m) (1 + \eta(\hat{x}_{t_1+\tau}^m + \hat{y}_{t_1+\tau}^m)) \end{aligned}$$

und

$$k'(\hat{y}_{t_1+\tau}^g) = u^{g'}(\hat{x}_{t_1+\tau}^g + \hat{y}_{t_1+\tau}^g) = p(\hat{x}_{t_1+\tau}^g + \hat{y}_{t_1+\tau}^g),$$

woraus wegen (20) und (17) folgt,

$$(21) \quad \hat{x}_{t_1+\tau}^g > \hat{x}_{t_1+\tau}^m \quad \text{für } \tau \in [0, t_2^m - t_1^m].$$

In Zeitpunkten der zweiten Phasen, die sich einander entsprechen, ist die Abbaurate der Ressource demnach im gesellschaftlichen Optimum größer als im Optimum des Monopolisten. Da die zweite Phase im gesellschaftlichen Optimum dazu noch länger dauert als im Optimum des Monopolisten, wird im gesellschaftlichen Optimum während der zweiten Phase insgesamt eine größere Ressourcenmenge verbraucht als im Optimum des Monopolisten. Formal läßt sich dieses Resultat wie folgt zeigen:

$$(22) \quad \int_0^{t_2^m - t_1^m} \hat{x}_{t_1+\tau}^m d\tau < \int_0^{t_2^m - t_1^m} \hat{x}_{t_1+\tau}^g d\tau < \int_0^{t_2^g - t_1^g} \hat{x}_{t_1+\tau}^g d\tau$$

Am Ende der 2. Phase muß aber in beiden Fällen der gesamte Ressourcenvorrat aufgebraucht sein, was wegen (22) zur Folge hat, daß in der 1. Phase des Monopolisten eine größere Ressourcenmenge verbraucht wird als in der des gesellschaftlichen Optimums, d.h.

$$(23) \quad \int_0^{t_1^m} \hat{x}_t^m dt > \int_0^{t_1^g} \hat{x}_t^g dt.$$

Ein Vergleich der Abbaumengen in den beiden Fällen während der ersten Phase ist nur für die Dauer der kürzeren der beiden Anfangsphasen möglich. Für  $0 \leq \tau \leq \min \{ t_1^m, t_1^g \}$  gilt nämlich,

$$(24) \quad u^{g'} \left( \hat{x}_{t_1^g - \tau}^g \right) = k'(0) \cdot e^{-\delta \tau} \quad \text{und}$$

$$u^{m'} \left( \hat{x}_{t_1^m - \tau}^m \right) = k'(0) \cdot e^{-\delta \tau} ,$$

und daraus folgt wegen (17)

$$(25) \quad \hat{x}_{t_1^g - \tau}^g > \hat{x}_{t_1^m - \tau}^m \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq \min \{ t_1^m, t_1^g \}. 1)$$

Zusammen mit (23) impliziert dies, daß die Dauer der ersten Phase im gesellschaftlichen Optimum größer ist als im Optimum des Monopolisten, d.h.

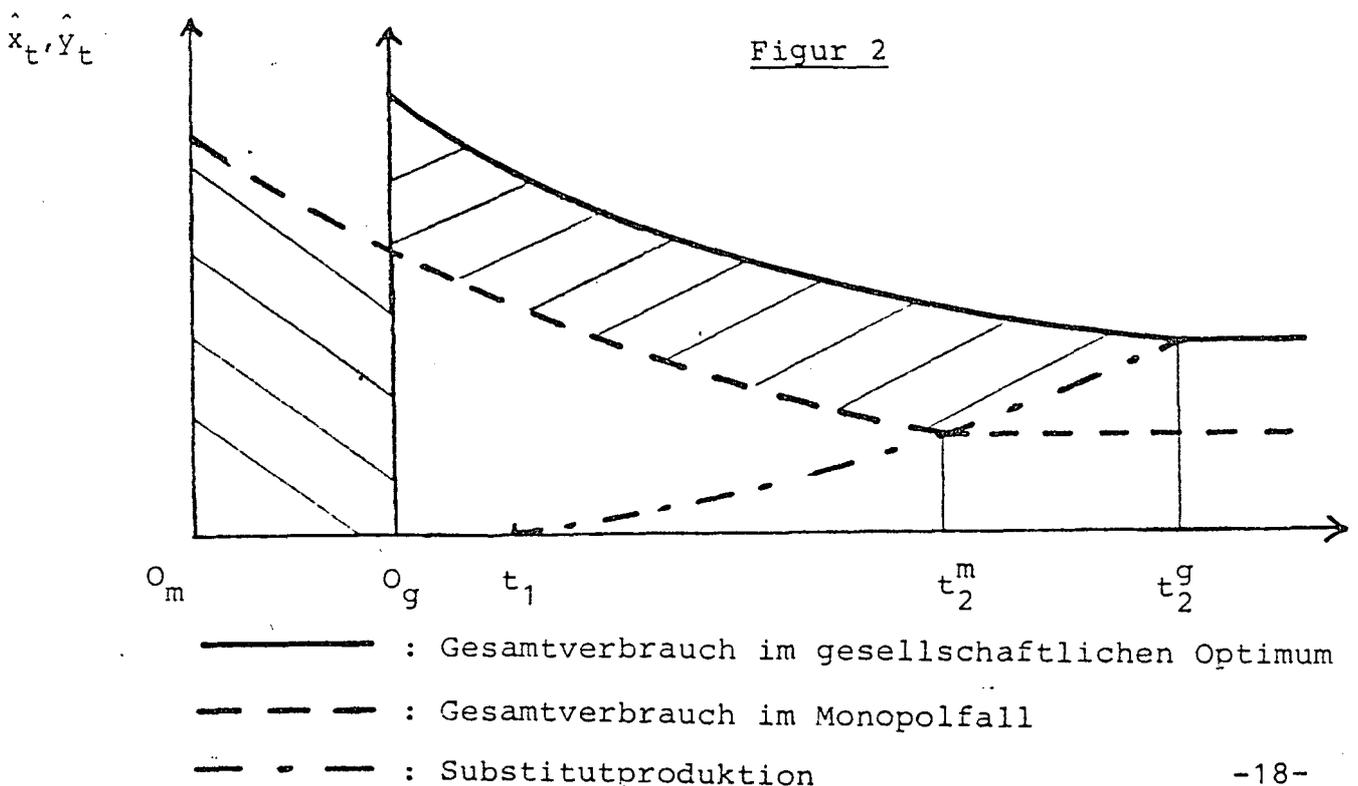
$$(26) \quad t_1^m > t_1^g .$$

Die Ungleichungen (19) und (26) lassen nun keinen Schluß darüber zu, ob der Monopolist den Ressourcenvorrat über einen kürzeren oder längeren Zeitraum verteilt als gesellschaftlich optimal wäre.

---

1) Unter der zusätzlichen Annahme, daß die Nachfrageelastizität die Bedingung,  $\eta'(c) \leq 0$ , erfüllt, läßt sich mittels einer dynamischen Preisbetrachtung leicht nachweisen, daß die Abbau-mengen im monopolistischen Optimum auch vom Anfang der ersten Phase an kleiner sind als im gesellschaftlichen Optimum (d.h.  $\hat{x}_\tau^m < \hat{x}_\tau^g$  für  $\tau \in [0, t_1^g]$ ); denn ist  $\eta'(c) \leq 0$  so wächst der Optimalpreis während der ersten beiden Phasen im Monopol-fall mit einer kleineren Rate als im gesellschaftlichen Optimum.

Die Ergebnisse des Vergleichs der beiden Fälle sind in Figur 2 zusammengefasst. In der Graphik sind die Verläufe des Gesamtverbrauchs ( $\hat{x}_t + \hat{y}_t$ ) und der Substitutproduktion in den beiden Fällen zeitlich zueinander verschoben eingetragen, und zwar gerade so, daß die Anfangszeitpunkte der zweiten Phasen ( $t_1$ ) aufeinanderliegen. Entsprechend liegt der Nullpunkt für das gesellschaftliche Optimum ( $O_g$ ) auf der Zeitachse rechts vom Nullpunkt des Monopolisten ( $O_m$ ), da  $t_1^m$  größer als  $t_1^g$  ist. Es wurde gezeigt, daß die Kurve der Substitutproduktion im Intervall  $[t_1, t_2^m]$  in beiden Fällen identisch ist und im Monopolfall in  $t_2^m$  horizontal weiterläuft, während sie im gesellschaftlichen Optimum noch weiter ansteigt, bis sie in  $t_2^g$  horizontal wird. Weiter wurde gezeigt, daß in Figur 2 die Kurve des Gesamtverbrauchs für das gesellschaftliche Optimum oberhalb derer für den Monopolfall liegt. Die schraffierte Fläche zwischen diesen beiden Kurven entspricht der Ressourcenmenge, die der Monopolist im Vergleich zum gesellschaftlichen Optimum weniger verbraucht, da er geringere Mengen zu höheren Preisen absetzt. Die andere schraffierte Fläche, diejenige zwischen den Achsen und der Kurve des Gesamtverbrauchs im Monopolfall, entspricht der Ressourcenmenge, die der Monopolist im Vergleich zum gesellschaftlichen Optimum mehr verbraucht, weil er die Substituttechnologie später einsetzt. Da in beiden Fällen der Ressourcenvorrat vollständig verbraucht wird, haben die beiden schraffierten Flächen den gleichen Inhalt.



## 6. Folgerungen

Die erzielten Resultate lassen berechtigte Zweifel an der seit HOTELLING (1931) vorherrschenden Meinung zu, daß Monopolisten einen Ressourcenvorrat langsamer als gesellschaftlich optimal verbrauchen. Angesichts einer Substituttechnologie mit steigenden Grenzkosten der Produktion ist, wie gezeigt wurde, das Gegenteil möglich.

Steigende Grenzkosten der Substitutproduktion implizieren immer die Existenz einer Übergangsphase, in der sowohl die Ressource abgebaut, als auch das Substitut produziert wird. HANSON (1977) erklärt die Existenz einer solchen Übergangsphase bei konstanten Grenzkosten der Substitutproduktion (Backstoptechnologie) mit Beschränkungen der Investitionen in die Backstoptechnologie.

Weitere Untersuchungen unter der Annahme steigender Grenzkosten der Substitutproduktion erscheinen vielversprechend; insbesondere sollten gemischte Marktstrukturen untersucht werden, und außerdem sollten Kosten für den Ressourcenabbau eingeführt werden.

LITERATUR

DASGUPTA, P. und J.E. STIGLITZ, Uncertainty and the Rate of Extraction under Alternative Institutional Arrangements, SEER Technical Report No. 8, Stanford University, 1975

GILBERT, R.J. und S.M. GOLDMAN, Potential Competition and the Monopoly Price of an Exhaustible Resource, Journal of Economic Theory 17, 1978, 319-331

HANSON, D.A., Competitive Price Behavior of an Exhaustible Resource where the Rate of Substitution is Constrained, International Economic Review, Vol. 18, No.1, 1977, 135-149

HOEL, M., Resource Extraction when a Future Substitute has an Uncertain Cost, Review of Economic Studies, Vol. 45, 1978, 637-644

HOTELLING, H., The Economics of Exhaustible Resources, The Journal of Political Economy, Vol. 39, 1931, 137-175

NORDHAUS, W.D., The Allocation of Energy Resources, Brookings Papers on Economic Activity, 3: 1973, 529-570