

Berninghaus, Siegfried; Ramser, Hans Jürgen

Working Paper

Projektwahl bei unvollständiger Information

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 137

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Berninghaus, Siegfried; Ramser, Hans Jürgen (1980) : Projektwahl bei unvollständiger Information, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 137, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78138>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Projektwahl bei
unvollständiger Information

S. Berninghaus und H.J. Ramser

Serie A - Nr. 137

DISKUSSIONSBEITRÄGE

D-7750 Konstanz
Postfach 5560

Serie A

Volkswirtschaftliche Beiträge

Nr. 137

Projektwahl bei
unvollständiger Information

S. Berninghaus und H.J. Ramser

Serie A - Nr. 137

Referat gehalten anlässlich der Sitzung des
Ausschusses für Unternehmenstheorie und -politik
in Erfstadt-Liblar am 25./26. April 1980.

Ag 31 06 80
Wirtschaft
Kf. Kiel

April 1980

C 97058

Projektwahl bei unvollständiger Information

I. Einführung

In der betriebswirtschaftlichen Theorie der Investition, d.h. der Theorie der Projektselektion (capital budgeting), wird üblicherweise davon ausgegangen, daß die Zahlungscharakteristika (Einzahlungs- und Auszahlungsreihe) jedes relevanten Projekts in deterministischem oder stochastischem Sinn (Dichtefunktion) bekannt sind¹⁾. Da Existenz und Verfügbarkeit von Informationen trivialerweise stets an geeignete Aktivitäten gebunden ist, wird also unterstellt, daß die entsprechenden Kosten der Informationsbeschaffung und -verarbeitung vernachlässigenswert gering sind. Inwieweit diese Annahme zumindest approximativ vertretbar erscheint, ist letztlich immer nur quaestio facti. Vermutlich spielen Informationskosten bei der Entscheidung über alternative Investitionsprojekte i.a. dann keine bedeutende Rolle, wenn der Rahmen traditioneller, d.h. erprobter Technologien und/oder Produktsortimente nicht verlassen wird. Mit i.d.R. erheblichen Informationskosten dagegen ist die Entscheidung über Investitionsprojekte verbunden, die einen Wechsel von Produktionsverfahren und/oder Sortiment bedeuten. Ausdruck des in diesem Zusammenhang bestehenden Informationsbedarfs bzw. unmittelbar als Informationskosten interpretierbar sind die Ausgaben für Forschung und Entwicklung.

In den nachfolgenden Ausführungen wird das bei unvollständiger

1) Insofern beschränkte sich die beim Übergang vom deterministischen zum stochastischen Ansatz diskutierte Problematik auch nur auf die Frage der angemessenen Berücksichtigung des Risikos (Verwendung von Sicherheitsäquivalenten vs. Risikoprämie beim Ansatz des Kalkulationszinssatzes).

Information auftretende Entscheidungsproblem eines Investors unter verschiedenen Annahmen betrachtet. In seinen Grundzügen läßt es sich wie folgt paraphrasieren:

Gegeben eine Menge von Investitionsprojekten, über deren Zahlungscharakteristika sich der Investor nur im Rahmen eines gezielten und Kosten verursachenden Explorationsvorgangs informieren kann. Wann bzw. nach Erkundung wievieler und ggf. welcher Projekte wird der Informationsstand als ausreichend betrachtet und welche Projekte werden auf dieser Basis durchgeführt?

Diese Kennzeichnung verdeutlicht, daß die Projektselektion bei unvollständiger Information ein sequentielles Entscheidungsproblem definiert, bei dessen Lösung daher auf Ergebnisse der allgemeinen Theorie sequentieller Entscheidungen und insbesondere der Theorie optimaler Stoppregeln zurückgegriffen werden kann¹⁾. Dieser Weg wird im folgenden besprochen. Dabei wird in Teil II zunächst ein einfaches Grundmodell betrachtet²⁾. Wie in Teil III ausgeführt, sind die in diesem Ansatz verwendeten Annahmen in verschiedener Hinsicht relativ eng; sie lassen sich aber - wenn auch bei mehr oder minder weitgehender Modifizierung der Entscheidungsregel - ohne weiteres abschwächen. Dies wird beispielhaft für einige u.E. starke Hypothesen demonstriert.

II. Ein einfaches Modell der Projektwahl

1. Annahmen

Die erforderlichen Annahmen beziehen sich allgemein auf die Eigenschaften des opportunity set sowie die Zielsetzung des

1) Ein erster in diese Richtung gehender Vorschlag stammt von McCALL (1965). Die von ihm behandelte Problemstellung unterscheidet sich von der oben skizzierten allerdings insofern, als der Investor ohne eingenes Zutun mit einer durch einen Zufallsprozeß generierten Abfolge von Investitionsprojekten konfrontiert wird. Möglicherweise ist dieses prima vista unrealistisch scheinende Szenario Grund dafür, daß die Anregungen von McCALL u.W. ohne jede Resonanz geblieben sind.

2) Vgl. dazu RAMSER (1979).

investierenden Unternehmens (kurz: Investor). Dabei werden die Eigenschaften des opportunity set durch relevante quantitative Merkmale zur Verfügung stehender Projekte einerseits sowie durch den Informationsstand des Investors und den Möglichkeiten (incl. Kosten) seiner Verbesserung andererseits charakterisiert. Im einzelnen wird von folgenden Annahmen ausgegangen:

- (A.1) Jedem Investor steht eine unbegrenzte Menge sich gegenseitig ausschließender Investitionsmöglichkeiten resp. Projekte zur Verfügung. Jedes Projekt ist durch seine spezifischen Zahlungscharakteristika gekennzeichnet; sie werden durch den mit seiner Realisierung maximal erreichbaren Erwartungsnutzen des Kapitalwerts x gemessen. Das i -te Projekt habe einen maximal erreichbaren Erwartungsnutzen x_i .
- (A.2) Das projektspezifische x_i kann nur im Zuge eines "Suchprozesses", d.h. durch eine Kosten verursachende Untersuchung des i -ten Projekts in Erfahrung gebracht werden. Die Periodenkosten des Suchprozesses (Suchkosten) sollen $c = \text{const.} > 0$ betragen, wobei pro Periode nur ein Projekt untersucht werden kann und untersucht wird. Daher kann im folgenden mit i sowohl die Anzahl der Untersuchungsperioden wie die Anzahl untersuchter Projekte gezählt werden.
- (A.3) Der maximal erzielbare Erwartungsnutzen x ist im Intervall $[0, \infty)$ verteilt, seine Verteilungsfunktion $F(x)$ wird als absolut stetig angenommen; außerdem soll für die Momente $\mu, \sigma < \infty$.
- (A.4) $F(x)$ ist zeitinvariant.
- (A.5) Die "entdeckten" projektspezifischen x_i sind voneinander unabhängig; damit läßt sich das Ergebnis eines Suchprozesses jeweils durch eine Folge $\{x_i\}$ von unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen x_i - mit Verteilungsfunktion $F(x)$ - charakterisieren.
- (A.6) Der Investor kennt $F(x)$.
- (A.7) Die zulässige Dauer des Suchprozesses ist unbegrenzt.
- (A.8) Bei Beendigung des Suchprozesses kann irgendeines der bis dahin analysierten Projekte realisiert werden (Suche mit Rückgriffsmöglichkeit).
- (A.9) Der Investor maximiert den Erwartungsnutzen des "Suchertrags", d.h. des Kapitalwerts der Differenz von projektgebundenem Kapitalwert abzüglich aller Suchkosten. Der Investor sei risikoneutral, seine Nutzenfunktion also linear.

Zu (A.1) ist zu bemerken, daß ein Investitionsprojekt i.d.R. nicht eindeutig bezüglich seiner Nettoeinzahlungsreihe ist. Die Kennzeichnung durch den zugehörigen maximalen Erwartungsnutzen des Kapitalwerts bzw. - aufgrund (A.9) - durch den zugehörigen maximalen erwarteten Kapitalwert setzt also normalerweise die Lösung eines hier nicht näher betrachteten Optimierungsproblems voraus. Dabei kann es sich u.a. - beispielsweise bei Existenz konvexer Anpassungskosten - um ein Kontrollproblem handeln.

2. Entscheidungsregel

(A.1) - (A.9) definieren ein relativ einfaches suchtheoretisches Entscheidungsproblem, dessen Struktur u.a. aus der Theorie des job search bekannt ist (s. LIPPMAN/McCALL, 1976).

Angenommen zunächst, daß es überhaupt ökonomisch ist, einen Suchprozeß einzuleiten und nicht einfach ohne vorherige Suche eine Zufallswahl zu treffen. Die Suche kann dann grundsätzlich nach einem sequentiellen oder einem nicht-sequentiellen Verfahren erfolgen. Dabei versteht man unter einem nicht-sequentiellen Verfahren einen Suchprozeß mit im vorhinein festgelegter Anzahl von Untersuchungsperioden bzw. explorierter Projekte; bei einem sequentiellen Verfahren wird diese Entscheidung im Verlaufe des Suchprozesses selbst getroffen. Aus (A.2) folgt, daß ein sequentielles Suchverfahren nicht sub-optimal sein kann; daher brauchen im folgenden nur sequentielle Verfahren betrachtet zu werden.

Aufgrund von (A.8) lautet der Suchertrag bei Beendigung der Suche nach dem n-ten Suchschritt

$$Y_n = \max(x_1, \dots, x_n) - n \cdot c \quad (\text{II.2.1})$$

Es ist dann eine Stoppzeit t zu finden, die $E(Y_t)$ maximiert, wobei $Y_t = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \mathbb{1}_{\{t=n\}}$. Es läßt erstens sich zeigen (s.

Anhang 1, Theorem 2), daß unter den gemachten Annahmen eine

optimale Stoppregel existiert. Zweitens kann bewiesen werden, daß sie wie folgt definiert ist

$$t^* = \min\{n \mid x_n \geq s\} \quad (\text{II.2.2})$$

wobei s die Lösung von

$$\int_s^{\infty} (x-s)dF(x) := H(s) = c \quad (\text{II.2.3})$$
$$H'(s) = -[1-F(s)] < 0$$

darstellt (s. Anhang 1, Ausführungen zu Theorem 3). Die Stoppregel hat also einmal "myopischen" Charakter: das Ergebnis der n -ten Exploration entscheidet über Beendigung des Suchprozesses oder Fortsetzung i.S. der Exploration des nächsten, d.h. des $(n+1)$ -ten Projekts¹⁾. Zum anderen hat die optimale Politik "Reservations"-Eigenschaft. D.h. es existiert ein kritischer oder eben "Reservations"-Kapitalwert s ²⁾, bei dessen erstmaliger Realisierung oder Überschreitung die Suche beendet, andernfalls aber fortgesetzt wird.

Die Bestimmung von s gemäß (II.2.3) läßt sich wie folgt plausibel machen. Angenommen, das bis zu Beginn der n -ten Periode, d.h. vor Exploration des n -ten Projekts, entdeckte beste Projekt liefere einen Kapitalwert in Höhe von w . Dann ist mit der Exploration des n -ten Projekts ein marginaler erwarteter Suchertrag vor Abzug der Suchkosten in Höhe von

$$E[\max(x_n, w)] - w = \int_w^{\infty} (x-w)dF(x) \quad (\text{II.2.4})$$

$$:= H(w), \quad H'(w) < 0$$

1) Myopische Entscheidungsregeln kennt man u.a. aus der Ersatztheorie.

2) Kapitalwerte sollen hier wie im folgenden stets, ohne daß es noch ausdrücklich erwähnt ist, als projektbezogen maximale erwartete Kapitalwerte verstanden werden.

zu erwarten. Sofern $H(w) \leq c$, wird die Suche beendet und das mit w verbundene Projekt realisiert; sofern $H(w) > c$ wird die Suche zumindest um eine Periode, d.h. auf Exploration zumindest eines weiteren Projekts ausgedehnt. Der erwartete marginale Nettoertrag nach Suchkosten, d.h. $H(w) - c$, ist aber wegen $H'(w)$ grundsätzlich dann negativ, wenn das beste bisher entdeckte Projekt $w \geq s$ mit s als Lösung von $H(s) - c = 0$ erfüllt. Daher ist die Suche sofort dann zu beenden, wenn ein Projekt mit einem Kapitalwert von mindestens s entdeckt ist¹⁾.

Aus diesen Überlegungen folgt weiter, daß der mit Befolgung der optimalen Politik verbundene erwartete Suchertrag mit der Höhe des kritischen Kapitalwerts s übereinstimmt. Das kann man direkt unter Verwendung der Entscheidungsregel in $E_s(Y_{t^*})$ einsehen. Da die Dauer der Suche bis zur Auffindung eines Projekts mit einem Kapitalwert von mindestens s eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $E_s(t^*) = [1 - F(s)]^{-1}$ ist, gilt

$$\begin{aligned} E_s(Y_{t^*}) &= \left[\int_s^{\infty} x dF(x) - c \right] / [1 - F(s)] \\ &= \left[\int_s^{\infty} x dF(x) - c + s(1 - F(s)) - s(1 - F(s)) \right] / [1 - F(s)] \\ &= \left[\int_s^{\infty} (x - s) dF(x) - c \right] / [1 - F(s)] + s = s \quad (\text{II.2.5}) \end{aligned}$$

da definitionsgemäß $H(s) - c = 0$, d.h. die eckige Klammer im letzten Ausdruck gleich Null ist. In Erweiterung der eingangs gemachten Einschränkung ist also festzustellen, daß Suche überhaupt nur dann ökonomisch ist, wenn $E_s(Y_{t^*}) = s \geq 0$. Nimmt man zusätzlich zu (A.1)-(A.9) an, daß alternative Investitionsmög-

1) Daraus wie bereits aus (II.2.2) folgt natürlich, daß (A.8) im vorliegenden Entscheidungsproblem irrelevant ist..

lichkeiten existieren, die ohne Suchaufwand einen Kapitalwert in Höhe von ϵ , $\epsilon > 0$, garantieren, so ist Suche selbstverständlich nur für $s \geq \epsilon > 0$ interessant.

Für eine einfache Ableitung der Konsequenzen einiger Erweiterungen des hier diskutierten Grundmodells ist es zweckmäßig, den Reservations-Kapitalwert, d.h. den erwarteten Suchertrag bei optimalem Stoppverhalten, durch einen Funktionalgleichungsansatz zu charakterisieren. Wie aus den voranstehenden Ausführungen folgt, läßt sich die optimale Politik in der ersten Suchperiode damit beschreiben, daß die Suche beendet bzw. "gestoppt" wird, wenn $x_1 \geq s$, der Suchvorgang auf die nächste Periode ausgedehnt bzw. "ein weiterer Suchschritt" vorgenommen wird, wenn $x_1 < s$. Da auf jeden Fall Suchkosten in Höhe von c anfallen, kann man den erwarteten Wert der optimalen Suchpolitik, d.h. nach (II.2.5) den kritischen oder Reservations-Kapitalwert s mit Hilfe von

$$s = E[\max(x_1, s)] - c \quad (\text{II.2.6})$$

darstellen.

3. Einfluß von Datenänderungen

Der optimale erwartete Suchertrag, d.h. der optimale kritische Kapitalwert s hängt ab von

- der Höhe der Suchkosten c und
- den Eigenschaften der Verteilung der Kapitalwerte $F(x)$ zur Verfügung stehender Projekte.

Der Einfluß einer Veränderung dieser Daten wird von den Eigenschaften von $H(w)$ bestimmt. Insgesamt erhält man

$$\left\{ \begin{array}{l} H'(w) = -[1-F(w)] \leq 0, \quad H''(w) = f(w) \geq 0 \\ \lim_{w \rightarrow \infty} H(w) = 0, \quad \lim_{w \rightarrow 0} H(w) = E(x) = \mu \end{array} \right. \quad (\text{II.3.1})$$

Damit hat $H(w)$ etwa den in Fig. 1 dargestellten Verlauf

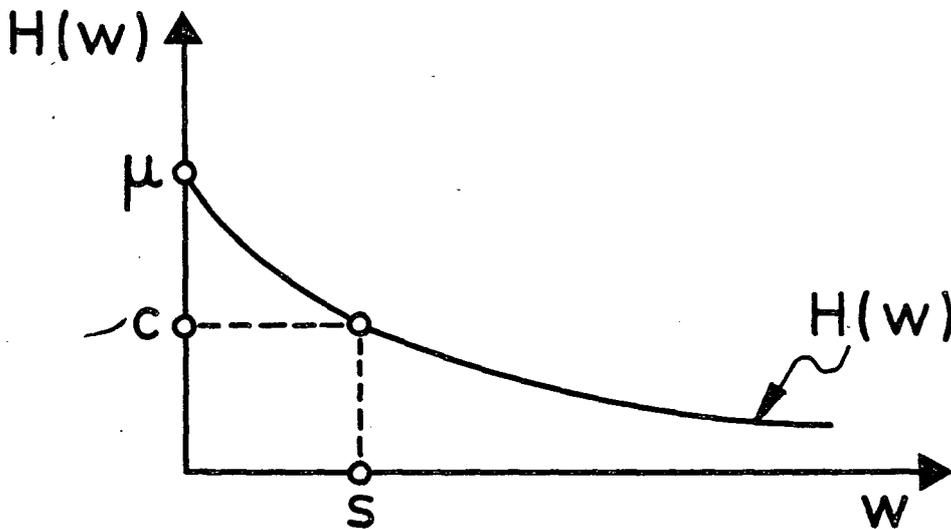


Fig. 1: Kritischer Kapitalwert

Daraus folgt zunächst, daß zunehmende Suchkosten auf die Höhe des kritischen Kapitalwerts s , die erwartete Dauer der Suchzeit $E_s(t^*)$ bzw. die erwartete Anzahl zu untersuchender Projekte und die erwarteten Suchkosten $c \cdot E_s(t^*)$ folgende Auswirkungen haben:

$$\frac{ds}{dc} = - \frac{1}{[1-F(s)]} < 0$$

$$\frac{\partial E_s(t^*)}{\partial c} = \frac{F'(s)}{[1-F(s)]^2} \cdot \frac{ds}{dc} < 0 \quad \text{für } F(s) < 1 \quad (\text{II.3.2})$$

$$\frac{\partial [c \cdot E_s(t^*)]}{\partial c} = E_s(t^*) + c \cdot \frac{\partial E_s(t^*)}{\partial c} \gtrless 0$$

Die Reaktion auf die erwarteten Suchkosten ist also nicht eindeutig. Ferner ist offenbar die o.e. Bedingung $s \geq 0$ resp. $s \geq \epsilon > 0$ dafür, daß es ökonomisch ist, überhaupt einen Suchprozeß in Gang zu setzen, gleichbedeutend mit $H(0) = E(x) \geq c$ resp. $H(\epsilon) \geq c$.

Unter den zahlreichen Möglichkeiten einer Veränderung von $F(x)$ sollen hier Veränderungen betrachtet werden, die als

- (a) "allgemeine Verbesserung" der Verteilung zufolge zunehmender durchschnittlicher Kapitalwerte (bzw. vice versa),
- (b) "allgemeine Verschlechterung" der Verteilung zufolge zunehmender "Unsicherheit" (bzw. vice versa)

interpretierbar sind.

Zu (a): Eine allgemeine Verbesserung der Ertragssituation, wie sie sich z.B. in einer konjunkturell bedingten Verbesserung des "Investitionsklimas" dokumentiert, kann man sinnvoll mit Hilfe des Konzepts der stochastischen Dominanz erster Ordnung erfassen. Formal definiert man die Ordnung durch

$$G \succ_1 F \iff F(x) \geq G(x) \quad \forall x \in [0, \infty),$$

wobei $G \neq F$ angenommen ist. Eine allgemeine Verbesserung der Ertragssituation i.S. dieser Definition liegt dann vor, wenn F die "ursprüngliche", G die "neue" Verteilung ist und $G \succ_1 F$ gilt¹⁾. Unter diesen Umständen folgt aus einem Resultat von FISHBURN/VICKSON (1978)

$$\int (x-s)^+ dF(x) \leq \int (x-s)^+ dG(x),$$

da $(x-s)^+$ nicht-fallend auf $[0, \infty)$ ist (s. Anhang 3, Theorem 1). Die Veränderung der Verteilung wirkt sich in Fig. 1 in einer Rechtsverschiebung des Graphen von $H(w)$, d.h. des marginalen erwarteten Suchertrags (brutto) aus. Diese Situation ist noch einmal in Fig. 2 verdeutlicht²⁾; man sieht unmittelbar, daß der kritische Kapitalwert steigt, genauer

$$G \succ_1 F \implies s_G \geq s_F \quad (\text{II.3.3})$$

wobei $H_i(s_i) - c = 0$, $i=F, G$.

-
- 1) Eine \succ_1 -dominierende Verteilung hat gleichzeitig auch den größeren Erwartungswert; das Umgekehrte gilt nicht.
 - 2) Die Indizes F und G weisen auf die jeweilig relevanten Verteilungen hin.

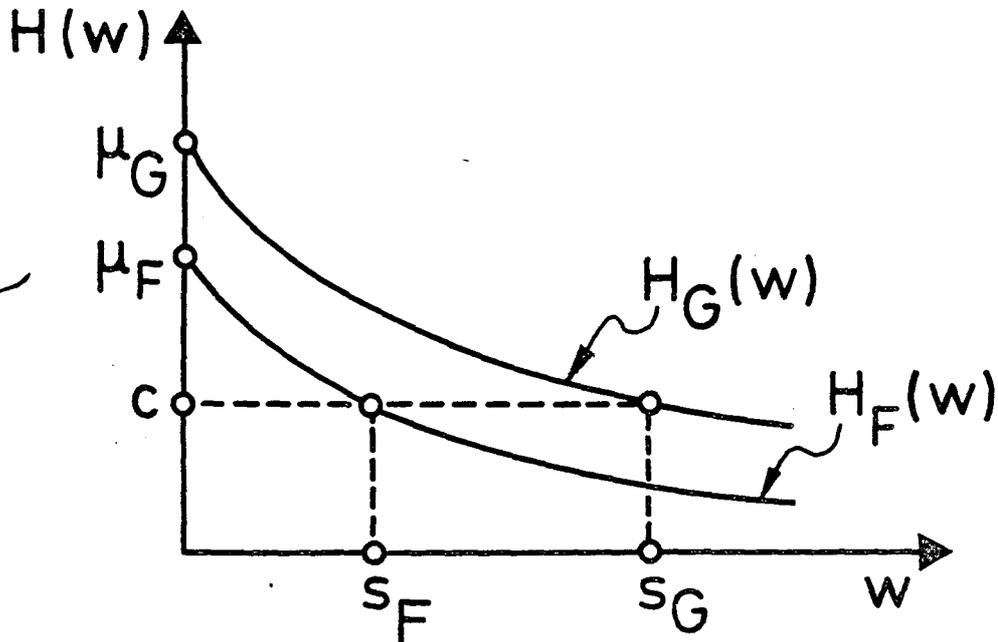


Fig. 2: Veränderung der Verteilung i.S. von (a).

Zu (b): Zur Erfassung zunehmender Unsicherheit der Verteilung bietet sich entsprechend das Konzept der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung¹⁾ an. Im folgenden sollen nur Verteilungen mit gleichem Mittelwert nach dem Grad ihrer Unsicherheit geordnet werden, so daß eine Erhöhung der Unsicherheit einem mean preserving spread i.S. von ROTHSCCHILD/STIGLITZ (1970) entspricht²⁾. Die formale Definition der Ordnung lautet für Verteilungen F, G ³⁾ mit $\mu_F = \mu_G$

- 1) Beide hier verwendeten Dominanzkonzepte sind in der Investitionstheorie durchaus gebräuchliche Ordnungsrelationen (vgl. z.B. LEVY/SARNAT, 1978, Ch. 10).
- 2) Eine Verteilung mit größerem spread hat gleichzeitig auch die größere Varianz; das Umgekehrte gilt nicht.
- 3) Die folgenden Ergebnisse gelten für Verteilungen, die auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}_+$, z.B. $[0, b]$, konzentriert sind.

$$F \succ_2 G \iff \int_0^x F(t)dt \leq \int_0^x G(t)dt \quad \forall x \in [0, b] .$$

Eine Erhöhung der Unsicherheit i.S. dieser Definition hat dann stattgefunden, wenn F die "ursprüngliche", G die "neue" Verteilung ist und $F \succ_2 G$ gilt. Unter diesen Umständen folgt

$$\int (x-s)^+ dG(x) \geq \int (x-s)^+ dF(x) ,$$

da $(x-s)^+$ konvex und nicht-abnehmend auf $[0, b]$ ist (s. Anhang 3, Theorem 2). Geometrisch wirkt sich infolgedessen die Erhöhung der Unsicherheit in einer im Ordinaten-schnittpunkt erfolgenden Drehung des $H(w)$ -Graphen entgegen dem Uhrzeigersinn aus. Der Fall ist in Fig. 3 veranschaulicht. Man erkennt unmittelbar, daß auch hier der kritische

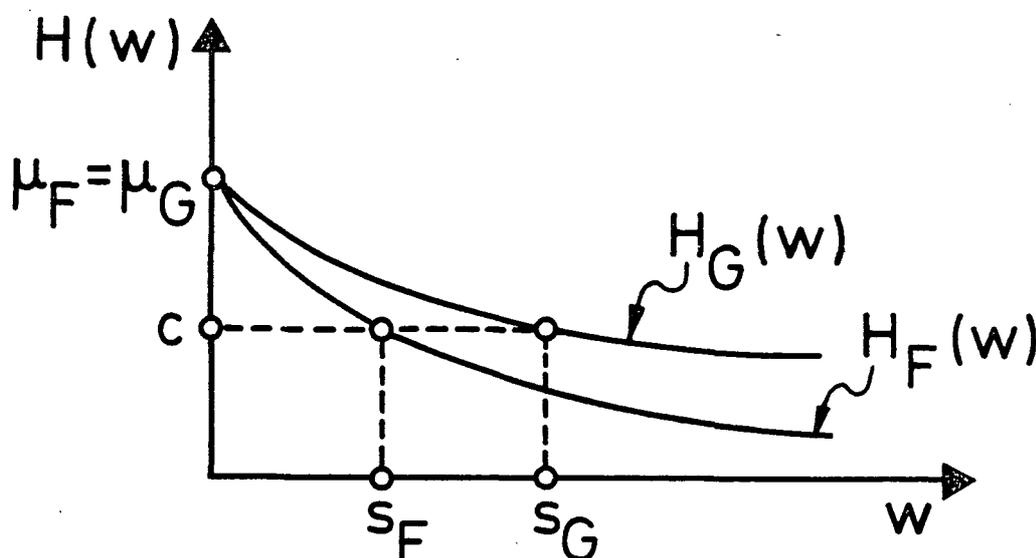


Fig. 3: Veränderung der Verteilung i.S. von (b).

Kapitalwert steigt, genauer

$$F \succ_2 G \Rightarrow s_F \leq s_G \quad (\text{II.3.4})$$

wobei $H_i(s_i) - c = 0$, $i = F, G$. Also ist ein Anwachsen der "Unsicherheit" der Verteilung insofern von Vorteil für den Investor, als der erwartete Suchertrag steigt. Diese Implikation ist intuitiv leicht dadurch erklärbar, daß bei steigendem spread die Masse der Verteilung auf die Verteilungs-"Enden" (tails), in diesem Fall auf $[s, \infty)$ geschoben wird: damit muß der erwartete Suchertrag steigen.

III. Erweiterungen

1. Revisionsbedürftige Annahmen

Der bisher behandelte Annahmenkomplex mag im Einzelfall durchaus passend sein. In der Regel allérdings dürfte sich eine Reihe von Annahmen als zu restriktiv erweisen.

Zur Kostensituation zunächst erscheint (A.2) in mehrfacher Hinsicht unbefriedigend. Erstens dürften die Suchkosten pro Projekt nicht selten stochastischer Natur, d.h. bei gegebenen Periodenkosten c die Anzahl pro Periode explorierter Projekte eine stochastische Variable sein. Zweitens lassen sich ohne weiteres Beispiele und Gründe für die Hypothese zunehmender wie abnehmender (jetzt: erwarteter) Suchkosten pro Projekt anführen. De facto zunehmende Suchkosten geben sich ceteris paribus allein schon bei einer Diskontierung. Drittens hat man grundsätzlich davon auszugehen, daß der Investor die (erwartete) Anzahl explorierter Projekte pro Periode durch geeignete Veränderung seiner Suchintensität beeinflussen kann - natürlich mit entsprechenden kostenmäßigen Konsequenzen.

Die verschiedenen Annahmen zur Verteilung der Kapitalwerte

können als Ausdruck der Ertragssituation betrachtet werden. Dann ist erstens (A.6), d.h. die Annahme über den Informationsstand bezüglich der Ertragssituation im Zweifel nicht gerechtfertigt. Normalerweise wird man davon auszugehen haben, daß die Verteilung der Kapitalwerte nicht bekannt ist, so daß das Ergebnis einer Projektanalyse gleichzeitig auch Einsichten in die objektive Verteilung der Kapitalwerte liefert. In diesem Zusammenhang ist dann zweitens von Bedeutung, daß mit (A.8) stets Rückgriffsmöglichkeiten auf früher analysierte Projekte konzidiert werden. Andererseits ist drittens aber die Ertragssituation günstiger zu beurteilen, wenn man beachtet, daß im Zweifel die analysierten Projekte resp. ihre Kapitalwerte im Gegensatz zu (A.5) nicht unabhängig voneinander sind. Schließlich wird man viertens nicht in jedem Falle annehmen können, daß die Verteilung entsprechend (A.4) im Zeitablauf stationär ist. (A.4) ist ebenso wie (A.8) nicht zuletzt aus Gründen der Konkurrenz häufig nicht haltbar.

Die dritte Klasse von Annahmen, die u.U. abzuschwächen sind, betrifft die unterstellte Zielfunktion einschl. eventueller Nebenbedingungen. Bekanntlich wird im Gegensatz zu (A.9) in praktischen Planungsansätzen insbesondere im Rahmen von Diversifikationserwägungen üblicherweise mit irgendeiner Hypothese der Risikoaversion argumentiert. Ferner wird der Suchprozeß im Regelfall - nicht zuletzt aus Gründen der Finanzierung - im Gegensatz zu (A.7) zeitlich oder eben budgetmäßig limitiert sein.

Grundsätzlich können mit mehr oder minder großem Aufwand alle erwähnten Annahmen abgeschwächt werden. Im folgenden soll dies beispielhaft für jeden der drei Annahmenkomplexe gezeigt werden. Dabei wurden im Rahmen der Kostenbetrachtungen alle drei angeschnittenen Aspekte behandelt. Zur Ertragssituation wird nur auf den zweifellos wichtigen Fall unbekannter Verteilung, im Zusammenhang mit der Berücksichtigung zusätzlicher Nebenbedingungen auf das Problem budgetmäßiger Beschränkung der Suchaktivität eingegangen.

2. Kosten des Suchprozesses

(a) Selbst bei "technologisch" konstanten Suchkosten wird die Suche mit zunehmender erwarteter Suchzeit teurer, wenn Zinskosten berücksichtigt werden, d.h. spätere Sucherfolge entsprechend diskontiert kalkuliert werden. Wenn man davon ausgeht, daß die Suchkosten grundsätzlich zu Beginn einer Periode anfallen, die Projektcharakteristika aber erst am Periodenende voll "entdeckt" sind, lautet die den kritischen Kapitalwert definierende Funktionalgleichung (II.2.6) mit r als Zinssatz hier

$$s = E[\max(x_1, s)] / (1+r) - c \quad (\text{III.2.1})'$$

Da $E[\cdot] - s = H(s)$, impliziert dies, daß s die Lösung von

$$H(s) = c \cdot (1+r) + rs := K(c, s) \quad (\text{III.2.1})$$

sein muß. Diskontierung bewirkt also *ceteris paribus* im Vergleich mit dem früher behandelten Fall $r=0$ eine Einschränkung der Suchzeit als Folge der Rücknahme des kritischen Kapitalwerts. Die sonstigen komparativ-statischen Eigenschaften der Lösung werden nicht berührt. Die mit $K(c, s)$ abgekürzte rechte Seite von (III.2.1) ist die Summe sämtlicher marginaler erwarteter Suchkosten, hier: "technologische" Suchkosten plus Zinskosten, wobei Diskontierung offenbar den Effekt hat, daß $K_s(\cdot) > 0$, d.h. die erwarteten marginalen Kosten ansteigen.

Diese Überlegungen setzen voraus, daß auch bei den veränderten Annahmen die bisherige optimale Stopppregel Gültigkeit behält, so daß (II.2.6) in der dargestellten Form analog verwendet werden kann. Dies scheint nach den in Anhang 1 gemachten Ausführungen allerdings nicht gesichert.

(b) Ansteigende "technologische" Kosten der Suche schlagen sich in sinkendem kritischen Kapitalwert nieder. Angenommen,

diese Kosten betragen in der n-ten Periode $c \cdot n^\alpha$, $c > 0$, $\alpha \geq 1$; $\alpha = 1$ beschreibt den bisher behandelten Fall. Diskontierung werde vernachlässigt und - wie vorher - unterstellt, daß die optimale Stoppregele nicht variiert¹⁾. Die (II.2.6) zugrundeliegende Gleichheit erwarteten marginalen Suchertrags mit den marginalen Suchkosten führt hier (s. Anhang 1.2.1) zu folgender Bestimmungsgleichung für den kritischen Kapitalwert s_n

$$H(s_n) = c[(n+1)^\alpha - n^\alpha] \quad (\text{III.2.2})$$

Da für $\alpha > 1$ die marginalen Suchkosten pro Periode steigen, erhält man eine nicht-steigende Folge von Reservationskapitalwerten $\{s_n\}$. Dabei ist zu bemerken, daß sich auch die Form der Stoppregele gegenüber der in Teil II angegebenen ändert und hier

$$t^* = \min\{n \mid \max\{x_1, \dots, x_n\} \geq s_n\}$$

lautet (s. Anhang 1.2.2).

(c) Die insgesamt erwarteten Suchkosten können gegenüber der im Grundmodell behandelten Situation aber auch dann höher ausfallen, wenn aufgrund zufälliger Einflüsse der in c zum Ausdruck kommende Ressourceneinsatz u.U. nicht ausreicht, um ein Projekt erschöpfend zu analysieren. Angenommen, bei gegebenen Suchkosten c pro Periode sei die Zahl der pro Periode analysierbaren Projekte eine Zufallsvariable T mit dem Wertebereich $\{0, 1\}$ und der Wahrscheinlichkeitsdichte $(1-p, p)$, $0 \leq p \leq 1$, so daß $E(T) = p$. Die Funktionalgleichung (II.2.6) kann dann für die modifizierte Problemstellung wie folgt formuliert werden

$$s = E(\max\{x_1, s\}) - cE(\tau) \quad (\text{III.2.3})$$

1) Der Beweis wird auch für diesen Fall in Anhang 1 gegeben. Dabei wird u.a. gezeigt, daß die optimale Stoppregele für $0 < \alpha < 1$ ihren myopischen Charakter verliert.

Dabei bezeichnet τ die - geometrisch verteilte - Wartezeit bis zum ersten erfolgreichen Abschluß eines Forschungsprojekts. Wegen $E(\tau) = \frac{1}{p}$ erhält man aus (III.2.3) sofort

$$H(s) = \frac{c}{p} \quad (\text{III.2.4})$$

Die komparativ-statischen Effekte einer Veränderung von p entsprechen denen von c mit umgekehrtem Vorzeichen.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die in Anhang 1 entwickelte Theorie des optimalen Stoppens auch für den vorliegenden Fall gültig ist. Anstelle der Folge $\{x_i\}$ von gleichverteilten Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ betrachtet man die Folge $\{\tilde{x}_i\}$ mit der Verteilungsfunktion

$$\tilde{F}(x) = (1-p)F_0(x) + pF(x) ,$$

wobei $F_0(x)$ die Verteilungsfunktion der im Nullpunkt konzentrierten Einpunkt-Verteilung ist. $\{\tilde{x}_i\}$ hat offenbar alle verlangten Eigenschaften, und es gilt

$$H_{\tilde{F}}(s) = \int_s^{\infty} (x-s)d\tilde{F}(x) = pH(s) \quad (\text{III.2.4})$$

(d) Bisher wurde unterstellt, daß die (erwartete) Anzahl pro Periode explorierbarer Projekte ein Datum für die Unternehmung ist. Tatsächlich ist dies natürlich normalerweise nicht der Fall. Eine Abschwächung dieser Annahme liegt insbesondere bei Unsicherheit über die Anzahl pro Periode untersuchbarer Projekte nahe und könnte modellhaft beispielsweise so erfaßt werden, daß man p zu einer Entscheidungsvariablen deklariert und gleichzeitig eine zusätzliche Kostenkomponente $\theta(p)$, $\theta' > 0$, $\theta(0) = 0$, postuliert. Man kann diese Kosten als monetäres Äquivalent des Ressourceneinsatzes interpretieren, der zur Erstellung einer geeigneten "Technologie" oder "Infrastruktur der

Suche" erforderlich ist. Der Einfachheit halber setzt man $p = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$ ($0 \leq \mu \leq \bar{\mu} < 1$, $\lambda > 0$), wobei μ als Entscheidungsvariable für die Suchintensität betrachtet wird. Beispielhaft soll hier nur der Fall ohne Rückgriffsmöglichkeit untersucht werden; ferner soll angenommen werden, daß die Suche nach höchstens \bar{n} Schritten beendet sein muß¹⁾.

Man erhält dann für $\gamma_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x)$, d.h. für den maximalen erwarteten Ertrag, wenn noch $(\bar{n}-n)$ Suchschritte möglich sind, und der Ertrag x auf Stufe n vorliegt,

$$\begin{aligned} \gamma_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x) = \max \left\{ x, \max_{0 \leq \mu \leq \bar{\mu}} \left[-\theta(\mu) + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \gamma_{\bar{n}+1}^{\bar{n}}(0) + \right. \right. & \text{(III.2.5)} \\ & \left. \left. + \frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_0^{\infty} \gamma_{\bar{n}+1}^{\bar{n}}(y) dF(y) \right] \right\} \end{aligned}$$

für $n=1, \dots, (\bar{n}-1)$

$$\gamma_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x) \equiv x.$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\gamma_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x) \equiv \max\{x, s_n\} \quad \text{(III.2.6)}$$

für $n=1, \dots, (\bar{n}-1)$ sieht man sofort ein, daß - analog dem schon bekannten Modell der Suche bei beschränktem Budget - die Reservationskapitalwerte $\{s_n\}$ im Zeitablauf nicht steigen. Die noch offene Frage nach dem optimalen Verlauf der Suchintensität wird mit Hilfe der folgenden Proposition beantwortet:

1) Dieser Fall wird weiter unten systematischer betrachtet.

Proposition 1: Bezeichne μ_n^* die optimale Suchintensität auf Stufe n , dann gilt

$$\mu_1^* \leq \mu_2^* \leq \dots \leq \mu_{\bar{n}-1}^* \quad 1)$$

Damit ist gezeigt, daß es offenbar nicht optimal ist, schon auf der ersten Stufe die Suchintensität so weit wie möglich auszudehnen. Vielmehr ist es ökonomisch sinnvoll, die Suche im Zeitablauf zu intensivieren, um den Einfluß gleichzeitig sinkender Reservationskapitalwerte zu kompensieren.

1) Beweis: Es bezeichne $\gamma_n^{\bar{n}}$ den maximal erwarteten Ertrag, wenn höchstens $(\bar{n}-n)$ Suchschritte möglich sind und auf der Stufe n kein Erfolg der Suche eingetreten ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \gamma_n^{\bar{n}} &= \max_{0 \leq \mu \leq \bar{\mu}} \left\{ -\theta(\mu) + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \gamma_{n+1}^{\bar{n}} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_0^{\infty} \max\{x, \gamma_{n+1}^{\bar{n}}\} dF(x) \right\} = \\ &= \max_{0 \leq \mu \leq \bar{\mu}} \left\{ -\theta(\mu) + \frac{\lambda}{\mu+\lambda} \gamma_{n+1}^{\bar{n}} + \frac{\mu}{\mu+\lambda} \left[\gamma_{n+1}^{\bar{n}} + \int_{\gamma_{n+1}^{\bar{n}}}^{\infty} (x - \gamma_{n+1}^{\bar{n}}) dF(x) \right] \right\} = \\ &= \max_{0 \leq \mu \leq \bar{\mu}} \left\{ -\theta(\mu) + \frac{\mu}{\mu+\lambda} \int_{\gamma_{n+1}^{\bar{n}}}^{\infty} (x - \gamma_{n+1}^{\bar{n}}) dF(x) \right\} + \gamma_{n+1}^{\bar{n}} = \\ &= \max_{0 \leq \mu \leq \bar{\mu}} \left\{ -\theta(\mu) + \frac{\mu}{\mu+\lambda} H(\gamma_n^{\bar{n}}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{\mu+\lambda} \underbrace{(H(\gamma_{n+1}^{\bar{n}}) - H(\gamma_n^{\bar{n}}))}_{\geq 0} \right\} + \gamma_{n+1}^{\bar{n}} \end{aligned}$$

Wegen $\gamma_{n+1}^{\bar{n}} \leq \gamma_n^{\bar{n}}$ und der Eigenschaften von $H(\cdot)$ folgt

$$\mu_{n-1}^* \leq \mu_n^* .$$

q.e.d.

3. Zusätzliche Informationsmängel.

(a) Im Regelfall ist davon auszugehen, daß der Investor die Verteilung der Kapitalwerte der zur Verfügung stehenden Projekte nicht vollständig kennt, d.h. (A.6) nicht gegeben ist. Unter diesen Umständen führt eine Projektanalyse nicht nur zu Erkenntnissen über die Zahlungscharakteristika des betrachteten Projekts, sondern liefert auch eine Information über den Charakter der (objektiven) Verteilung der Kapitalwerte. Damit kann der nächste Explorationsvorgang auf der Grundlage eines verbesserten Informationsstands erfolgen. Von besonderem Interesse ist, ob auch in diesem Falle eine ähnlich einfache Entscheidungsregel optimal ist wie im Grundmodell - insbesondere also, ob die "Reservations"-Eigenschaft in Verbindung mit dem myopischen Stoppscheid erhalten bleibt.

(b) Grundsätzlich wird bei genügend allgemeiner Betrachtung die optimale Stoppregel ihre "Anschaulichkeit" verlieren, wenn man davon ausgeht, daß dem Suchenden die Verteilung $F(x)$ der erwarteten Kapitalwerte nicht bekannt ist. Daher wird es in diesem Fall zweckmäßig sein, explizite Verteilungsannahmen einzuführen. Unter diesen Umständen ist es i.d.R. möglich, praktikable und ökonomisch interpretierbare Grenzen für die kritischen Kapitalwerte abzuleiten. Man kann zeigen, daß die Analyse bei Gültigkeit bzw. Ungültigkeit von (A.8) zu jeweils verschiedenen Ergebnissen führt. Die folgenden Überlegungen beschränken sich auf die Suche mit Rückgriffsmöglichkeit, da in diesem Fall der myopische Charakter der Stoppregel unter bestimmten Annahmen an die Suchkosten gewährleistet werden kann.

Das Problem soll dann wie folgt präzisiert werden. Die Verteilung $F(x)$ ist in dem Sinne nicht bekannt, daß der Investor zwar über ihren Verteilungstyp informiert ist, aber mindestens ein Verteilungsparameter unbekannt ist. Über den unbekanntem Parameter besteht eine a priori-Verteilung. Im vorliegenden

Fall wird $F(x)$ als Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert θ , aber bekannter Präzision $\tau:1/\sigma^2=1$ angenommen. Über θ besteht eine a priori-Verteilung, die wiederum eine Normalverteilung $N(\mu, \tau)$ ist, deren Verteilungsparameter bekannt sind. Die spezielle Annahme über die a priori-Verteilung vereinfacht die Behandlung des Problems, da Normalverteilungen als a priori-Verteilung und als Verteilung der beobachteten Variablen bei "unabhängiger" Beobachtung zueinander "konjugierte" Verteilungen bilden, d.h. die a posteriori-Verteilung über θ ist wiederum eine Normalverteilung, deren Parameter durch die Ergebnisse der beobachteten Variablen "korrigiert" sind (s. Anhang 3.2) und die man explizit angeben kann. Bei jedem Suchschritt wird nun neben den Suchkosten auch die Information über den Parameter von $F(x)$ wachsen. Es ist intuitiv klar, daß der kritische Kapitalwert für ein solches Problem, vorausgesetzt man kann seine Existenz zeigen, einen im Zeitablauf "unberechenbaren" Verlauf annehmen kann. So kann ein bestimmtes Ergebnis je nach Erfahrungsstand unterschiedlich beurteilt werden, und es ist ohne weiteres möglich, daß man bei einem Ergebnis stoppt, das man zu einem früheren Zeitpunkt als unzureichend abgelehnt hat. Man kann aber zeigen, daß sich für den gegebenen Rahmen wenigstens Untergrenzen für die kritischen Kapitalwerte ableiten lassen, die sich "regulär" verhalten, und daß in einem Spezialfall die Stoppregel bei Gültigkeit von (A.8) sogar die in Teil II angegebene Form annimmt.

Zur Lösung des Problems wird ein Funktionalgleichungsansatz verwendet und die Existenz der Lösung aufgrund der Annahmen von Teil II vorausgesetzt. Auf jeder Stufe kann der Informationsstand des Experimentators durch ein Tripel (\bar{x}, μ, τ) charakterisiert werden, wobei \bar{x} das bisher vorliegende maximale x ist, μ und τ die Parameter der a posteriori-Verteilung über θ , die dann gleichzeitig a priori-Verteilung für die nächste Stufe ist. Wird eine weitere Beobachtung x gemacht, dann wird

(\bar{x}, μ, τ) transformiert zu $(\bar{x}(x), \frac{\tau\mu+x}{\tau+1}, \tau+1)$ (s. Anhang 3.2, Theorem 3), wobei $\bar{x}(x) = \max\{\bar{x}, x\}$ gesetzt wird. x besitzt bei dem vorliegenden Informationsstand (μ, τ) die Verteilung $N(\mu, \tau/\tau+1)$ (s. Anhang 3.2, Theorem 4). Bezeichne $V(\bar{x}, \mu, \tau)$ den erwarteten Gewinn der optimalen Politik, wenn vom Informationsstand (\bar{x}, μ, τ) gestartet wird; dann gilt für $V(\cdot)$ die Funktionalgleichung

$$V(\bar{x}, \mu, \tau) = \max\left\{\bar{x}, E[V[\bar{x}(x), \mu(x), \tau+1]] - c\right\} \quad (\text{III.3.1})$$

wobei $\mu(x) = \frac{\tau\mu+x}{\tau+1}$. Gleichung (III.3.1) wird nun derart transformiert, daß sie für Zufallsvariable x mit $\mu=0$ gilt, so daß man in der Ausgangsposition jeweils den Informationsstand $(\bar{x}, 0, \tau)$ hat. Dies ist möglich, da offenbar für $V(\cdot)$ die Invarianz-Beziehung

$$V(\bar{x}-K, \mu-K, \tau) = V(\bar{x}, \mu, \tau) - K \quad (\text{III.3.2})$$

gilt. Man definiert $U(\bar{x}, \tau) := V(\bar{x}, 0, \tau)$; dann gilt für den erwarteten Wert der optimalen Politik bei transformierter Variablen x mit $N(0, \frac{\tau}{\tau+1})$ beim Informationsstand (\bar{x}, τ)

$$U(\bar{x}, \tau) = \max\left\{\bar{x}, E[U[\bar{x}(x) - \frac{x}{\tau+1}, \tau+1]] - c\right\} \quad (\text{III.3.3})$$

Die Gültigkeit von (III.3.3) folgt leicht aus (III.3.1):

$$\begin{aligned} U(\bar{x}, \tau) &= V(\bar{x}, 0, \tau) = \max\left\{\bar{x}, E[V[\bar{x}(x), \frac{x}{\tau+1}, \tau+1]] - c\right\} = \\ &= \max\left\{\bar{x}, E[V[\bar{x}(x) - \frac{x}{\tau+1}, 0, \tau+1] + \frac{x}{\tau+1}] - c\right\} = \\ &= \max\left\{\bar{x}, E[U[\bar{x}(x) - \frac{x}{\tau+1}, \tau+1]] - c\right\} \end{aligned}$$

da x verteilt ist nach $N(0, \frac{\tau}{\tau+1})$.

Man kann nun zeigen, (s. DE GROOT, 1970, S. 342), daß

$$U(\bar{x}, \tau) > \bar{x} \Rightarrow U(x_1, \tau) > x_1 \quad \forall x_1 < \bar{x} .$$

Dieses Ergebnis ist nicht-trivial, da der Erwartungswert auf der rechten Seite von (III.3.3) wiederum von \bar{x} abhängt. Bezeichne $s^*(\tau)$ den kritischen Kapitalwert, dann folgt aus den bisherigen Überlegungen, daß es optimal ist, beim Informationsstand (\bar{x}, μ, τ) nicht zu stoppen, wenn

$$\bar{x} - \mu < s^*(\tau) .$$

Zur Bestimmung von $s^*(\tau)$ hat man das folgende Ergebnis:

Proposition 2: Es gilt für $\tau > 0$

$$s^*(\tau) \geq \Psi^{-1}(\tau'c)/\tau' , \quad (\text{III.3.4})$$

wobei $\tau' := \left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, und $\Psi(c) := \int_c^{\infty} (x-c)dF(x)$, F ist die Standard-Normalverteilung (s. Anhang 3.3).

Beweis: Es sei $U_1(\bar{x}, \tau) = E\left\{U[\bar{x}(x) - \frac{x}{\tau+1}, \tau+1]\right\} - c$.

Dann wird (III.3.3) zu

$$U(\bar{x}, \tau) = \max\left\{\bar{x}, U_1(\bar{x}, \tau)\right\} .$$

Daraus folgt $U(\bar{x}, \tau) \geq \bar{x}$. Also erhält man mit $\bar{x} = (\bar{x}(x) - \frac{x}{\tau+1})$

$$\begin{aligned} U_1(\bar{x}, \tau) &\geq E[\max\{\bar{x}, x\} - \frac{x}{\tau+1}] - c = \\ &= \bar{x} + \frac{\Psi(\tau'\bar{x})}{\tau'} - c , \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus $E(x)=0$ und Theorem 5 in Anhang 3.3 folgt.

Angenommen $\frac{\Psi(\tau'\bar{x})}{\tau'} > c$, dann gilt $U(\bar{x}, \tau) > \bar{x}$; also darf die optimale Politik auf dieser Stufe nicht stoppen. Daraus folgt $\bar{x} < s^*(\tau)$. Also erhält man durch Auflösung nach \bar{x}

$$\tau' \bar{x} > \Psi^{-1}(\tau' c)$$

und

$$s^*(\tau) \geq \frac{\Psi^{-1}(\tau' c)}{\tau'} \quad . \quad \text{q.e.d.}$$

Ein interessantes Ergebnis dieses Kapitels besteht darin, daß unter einer speziellen Annahme an die Suchkosten die in Proposition 1 angegebene Untergrenze für den Reservationskapitalwert mit $s^*(\tau)$ zusammenfällt. Dies folgt aus

Lemma (DeGROOT, 1970, S. 343): Wenn die Ungleichung

$$\frac{\tau}{\tau+1} \geq 2(1-\pi c^2) \quad \text{(III.3.5)}$$

erfüllt ist, gilt

$$s^*(\tau) = \frac{\Psi^{-1}(\tau' c)}{\tau'} \quad .$$

(c) Zusammenfassend erhält man also für das in diesem Kapitel diskutierte Problem die folgende Stopp-Regel: Gegeben der Informationsstand (\bar{x}, μ, τ) und es gilt Ungleichung (III.3.5), dann soll

- gestoppt werden, wenn $\bar{x} - \mu \geq \frac{\Psi^{-1}(\tau' c)}{\tau'}$,
- nicht gestoppt werden, wenn $\bar{x} - \mu < \frac{\Psi^{-1}(\tau' c)}{\tau}$.

Ist Ungleichung (III.3.5) nicht erfüllt, dann kann man immerhin aussagen: Es soll

- nicht gestoppt werden, wenn $\bar{x} - \mu < \frac{\Psi^{-1}(\tau' c)}{\tau'}$.

Nimmt man $\frac{\Psi^{-1}(\tau' c)}{\tau'}$ als kritischen Kapitalwert, dann wird man höchstens zu früh stoppen, da er Untergrenze für $s^*(\tau)$ ist.

Aus der Definition von $\Psi(\cdot)$ folgt, daß (s. Theorem 5, Anhang 3.3)

der kritische Kapitalwert s^* , der sich aus $\int_{s^*}^{\infty} (x-s^*)dF(x)=c$ ergibt, wenn $F(x)$ die Verteilungsfunktion von $N(0,\tau')$ ist, durch $\frac{1}{\tau} \Psi^{-1}(\tau'c)$ berechenbar ist. Damit kann das Ergebnis des Lemmas dahingehend interpretiert werden, daß die optimale Stoppregel bei Gültigkeit von (III.3.5) den myopischen Charakter hat, durch den die optimale Stoppregel im Falle der Suche bei bekannter Verteilung $F(x)$ charakterisiert werden konnte (Teil II). Dabei wird jeweils $F(x)$ als "bekannt" mit $N(0,\tau')$ vorausgesetzt und $s^*(\tau)$ aus der bekannten Gleichung $H(s^*(\tau))-c=0$ bestimmt. Folglich hängt $s^*(\tau)$ vom jeweiligen Informationsstand ab.

Wie man aus Ungleichung (III.3.5) sofort erkennt, ist der myopische Charakter der Stoppregel auf jeden Fall gewährleistet, wenn die Suchkosten c groß genug sind, d.h. genauer $c \geq \frac{1}{\pi^{1/2}}$; für $c \geq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$ ist (III.3.5) immer noch für genügend große τ erfüllt. Das bedeutet, daß man um so eher die Gültigkeit einer myopischen Entscheidungsregel erwarten kann, je größer die durch die Präzision τ gemessene subjektive Sicherheit, d.h. je kleiner die Varianz der a priori-Verteilung über den unbekanntem Parameter θ ist.

4. Budgetbeschränkungen

(a) Grundsätzlich hat natürlich die Entscheidung über Annahme oder Ablehnung eines Projekts in Verbindung mit der Länge des Suchvorgangs bzw. der Höhe der insgesamt für Forschung und Entwicklung eingesetzten Ressourcen im Rahmen und im Zusammenhang mit den sonstigen unternehmerischen Entscheidungen zu erfolgen. Wenn hier also ein Teilproblem isoliert betrachtet wird, dann hat man davon auszugehen, daß eine Reihe von Nebenbedingungen zu beachten ist, die i.S. einer möglicherweise iterativ realisierten Simultanentscheidung formuliert sind. Als Beispiel soll hier der Fall einer Finanzierungsgrenze

betrachtet werden. Konkret wird unterstellt, daß das maximal für Forschung und Entwicklung zur Verfügung stehende Budget nach oben beschränkt ist. Bei monetärem Ansatz heißt das, daß bei den im übrigen dem Grundmodell entsprechenden Annahmen die zulässige Anzahl der Suchperioden bzw. die zulässige Anzahl explorierbarer Projekte eine feste Obergrenze nicht überschreiten darf¹⁾.

(b) Gesetzt den Fall, daß auch hier wieder die ursprüngliche optimale Stoppregel Gültigkeit behält, ist die Ableitung der Entscheidungsregel relativ einfach, wenn auf die mit (A.8) geforderte Rückgriffsmöglichkeit verzichtet wird. Der Netto-Ertrag der Suche wird dann durch die Folge $\{Y_n\}$ mit $Y_n = x_n - cn$ ($n=1, \dots, \bar{n}$) angegeben. Wie in Anhang 2 gezeigt, hat die optimale Stoppregel "Reservations-Eigenschaft", d.h. es wird auf der n-ten Stufe gestoppt, wenn

$$x_n \geq s_n,$$

wobei s_n den erwarteten Netto-Ertrag des "Nicht-Stoppens" bei Befolgung der optimalen Stopp-Politik bezeichnet. Mit $\tilde{\gamma}_n^{\bar{n}}(x)$ soll der maximale Netto-Ertrag auf der Stufe n bezeichnet werden, d.h. wenn noch (N-n) Suchschritte möglich sind. Dann folgt sofort, daß $\tilde{\gamma}_n^{\bar{n}}(x)$ in Form folgender Funktionalgleichung gegeben werden kann:

$$\tilde{\gamma}_n^{\bar{n}}(x) = \max \left\{ x, -c + \int_0^{\infty} \tilde{\gamma}_{n+1}^{\bar{n}}(y) dF(y) \right\} \quad (\text{III.4.1})$$

für $n=1, \dots, (\bar{n}-1)$,

$$\tilde{\gamma}_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x) = x \quad (\text{III.4.2})$$

Dabei bezeichnet $s_n = -c + \int_0^{\infty} \tilde{\gamma}_{n+1}^{\bar{n}}(y) dF(y)$ ($s_{\bar{n}}=0$) den kritischen

1) Unüblich, aber durchaus sinnvoll wäre im übrigen, diese Obergrenze i.S. eines Erwartungswertes zu bestimmen.

Kapitalwert auf der n-ten Stufe des Suchprozesses. Aus (III.4.1) folgt sofort, daß der kritische Kapitalwert im Zeitablauf abnimmt, d.h. $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\bar{n}-1}$. Aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
 s_n &= -c + \int_0^{\infty} \tilde{\gamma}_{n+1}^N(y) dF(y) = & \text{(III.4.3)} \\
 &= -c + \int_0^{\infty} \max\{y, s_{n+1}\} dF(y) = \\
 &= [-c + H(s_{n+1})] + s_{n+1}
 \end{aligned}$$

folgt $s_n \leq s$ für alle n, wobei $H(s)=c$, d.h. s der Reservationskapitalwert bei unbeschränkter Suchzeit ist. Denn aus $s_n > s$ für wenigstens ein n folgt $H(s_{n+1})-c < 0$, also $s_n < s_{n+1}$ im Widerspruch zu der vorher abgeleiteten Beziehung $s_n \geq s_{n+1}$.

Eine kurze Überlegung zeigt, daß die komparativ-statischen Eigenschaften der Entscheidungsregel des Grundmodells - hier bezogen auf einen gegebenen Zeitpunkt n - unverändert bleiben: Eine Erhöhung der Suchkosten pro Periode c läßt s_n für alle n sinken (nach Definition von s_n). Die Veränderungen von $F(x)$ gemäß den in Teil II definierten Relationen \langle_1, \langle_2 ergibt die gleichen Ergebnisse, da $\tilde{\gamma}_n^{\bar{n}}(x)$ offenbar nicht fallend und konvex ist.

Wesentlich schwieriger wird das Entscheidungsproblem bei Beibehaltung von (A.8). Wie man den Ausführungen von Anhang 2 entnehmen kann, ist die "Reservations-Eigenschaft" der Stopp-Regel nicht von vornherein klar. In Anhang 4 wird ausführlich gezeigt, daß auch bei Gültigkeit von (A.8) eine Folge von Reservations-Kapitalwerten $\{s_n^*\}$ existiert mit $s_1^* \geq \dots \geq s_{\bar{n}+1}^*$. Man benutzt dabei die folgende Funktionalgleichung ($\tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x)$ bezeichne den maximalen Netto-Ertrag der Suche, wenn $(\bar{n}-n)$ mögliche Suchschritte übrig bleiben)

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x) &= \max \left\{ x, -c + \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x)F(x) + \int_x^{\infty} \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(y)dF(y) \right\} = \\ &= \max \{ x, z_n(x) \} \end{aligned} \quad (\text{III.4.4})$$

für $n=1, \dots, (\bar{n}-1)$,

$$\tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x) = x ,$$

und definiert die s_n^* durch

$$s_n^* = \min \left\{ x \mid x \geq z_n(x) \right\} \quad (\text{III.4.5})$$

Als interessantes Ergebnis (s. Anhang 4 kann man zeigen, daß für alle n gilt $s_n^* = s$, wobei s der Reservations-Kapitalwert bei Suche mit unendlichem Zeithorizont ist und sich gemäß (II. bestimmen läßt. D.h. also bei Gültigkeit von (A.8) haben Budgetbeschränkungen keinen Einfluß auf die Eigenschaften der Stopp-Regel, außerdem wird wegen $s_n^* = s \geq s_n$ niemals früher (höchstens später) gestoppt als bei der Suche ohne Rückgriffsmöglichkeit.

IV. Fazit und weitere Probleme

Auf Optimierungskalkülen beruhende Entscheidungsregeln haben i.d.R. nur dann Chancen einer breiteren Anwendung in der betrieblichen Praxis, wenn sie einfach strukturiert und möglichst ohne nennenswerten administrativen Aufwand exekutierbar erscheinen. Diese Voraussetzungen erfüllt eine myopisch-sequentielle Entscheidungsregel ohne Frage, sieht man einmal von der Problematik der Datenbeschaffung ab. Bedauerlicherweise ist aber die im Rahmen des Grundmodells gültige Maxime nur begrenzt robust, wie die Diskussion verschiedener Erwei-

terungen erwiesen hat. Insofern wäre von einigem Interesse zu untersuchen, ob und unter welchen Umständen die unter den Annahmen von Teil II korrekte, d.h. optimale Entscheidungsregel bei "vertretbaren" Fehlern auch unter nicht "passenden" Bedingungen benutzt werden kann - dann natürlich i.S. einer Daumenregel. Insbesondere ist in diesem Zusammenhang an den wichtigen Fall unbekannter Verteilung zu denken.

Abgesehen von einer systematischen Analyse der einleitend zu Teil III erwähnten, aber von uns nicht im einzelnen behandelten Fragestellungen, läßt sich eine Reihe weiterer, mehr oder minder spezieller Szenarios vorstellen, deren Untersuchung im einzelnen Anwendungsfall von Bedeutung sein kann. Von allgemeinerem Interesse allerdings schiene uns der Versuch, das Verfahren der Projektwahl bei unvollständiger Information zu einem Verfahren der Bestimmung eines optimalen Projekt-"Portfolios" bzw. Investitionsprogramms bei unvollständiger Information zu erweitern. Dabei ergeben sich u.U. höchst komplexe intertemporale Entscheidungsprobleme, da natürlich gleichzeitig auch über eine in ersatztheoretischem Sinn geeignete zeitliche Strukturierung des Investitionsprogramms zu befinden ist. Offensichtlich besteht hier ein enger Zusammenhang mit dynamischen Aspekten der Diversifikationsentscheidung und damit allgemein mit der Wachstumsentscheidung einer Unternehmung bei unvollständiger Information.

A N H A N G

1. Das Problem des optimalen Stoppens¹⁾

Ziel dieses Abschnittes ist es, den formalen Hintergrund für die in Teil II gemachten Annahmen über Existenz und Form von optimalen Stoppregeln in einem möglichst allgemeinen Rahmen darzustellen. Gegeben sei eine "stochastische Folge" $\{Y_n, \mathcal{F}_n\}$, d.h. eine Folge von reellen Zufallsvariablen $Y_n: (\Omega, \mathcal{F}_n) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ und eine Menge von Stoppzeiten C , d.h. eine Menge von Abbildungen

$T: \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der Eigenschaft

$$\{t=n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \quad ,$$

$$P\{t < \infty\} = 1 \quad ,$$

$$E(Y_t^-) \neq \infty \quad .$$

Dann entstehen zwei Probleme. Einmal muß gezeigt werden, ob überhaupt ein $t^* \in C$ existiert, so daß

$$E(Y_{t^*}) = \sup_{t \in C} E(Y_t) \quad ,$$

zum anderen muß geprüft werden, welche "Form" die optimale Stoppregel hat, d.h. welches Kriterium sie einem Entscheider gibt, der den Prozeß $\{Y_n\}$ "optimal" stoppen will. Dabei wird im folgenden gezeigt, daß die optimale Stoppregel "myopischen" Charakter für sog. monotone, stochastische Folgen hat, und daß die im Text verwendeten Folgen monoton sind. Aus der speziellen Annahme der Unabhängigkeit der x_i (s. (A.5)) und der konstanten Suchkosten folgt die "Reservations"-Eigenschaft von t^* .

1) Die folgenden Ausführungen stützen sich auf Arbeiten von CHOW/ROBBINS (1961, 1963, 1971).

1.1. Existenz einer optimalen Stoppregel

Für die Existenz von optimalen Stoppregeln für eine stochastische Folge gilt der folgende Satz

Theorem 1 (CHOW/ROBBINS, 1963, S. 36): Gegeben sei eine stochastische Folge $\{Y_n, F_n\}$ mit den Eigenschaften

$$(a) \quad Y_n = Y_n' - Y_n'' \quad (Y_n', Y_n'' \text{ sind } F_n\text{-meßbar})$$

$$(b) \quad E[\sup(Y_n')]^+ = B < \infty$$

$$(c) \quad Y_n'' \geq 0, \quad \lim_n Y_n'' = \infty.$$

Dann existiert eine Stoppzeit $t^* \in C$, so daß

$$E(Y_{t^*}) = \sup_{t \in C} E(Y_t).$$

Man kann nun zeigen, daß die im Text definierten Zufallsvariablen $Y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\} - n \cdot c$ den Bedingungen des Theorems genügen. Um allgemeinere Fälle behandeln zu können, wird dies für Nettoertragsvariable Y_n mit steigenden Suchkosten $Z(n)$ (also $Z(n+1) - Z(n) > 0$) formuliert. Explizit soll für unsere Zwecke angenommen werden, daß¹⁾

$$Z(n) = cn^\alpha \quad (\alpha > 0, c > 0).$$

Theorem 2: Die $\{x_i\}$ seien unabhängig und identisch verteilt mit $E[|X_i|] < \infty$, $E[(X_i^+)^{1+\alpha}] < \infty$, dann existiert eine optimale Stoppzeit für die Folge $Y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\} - cn^\alpha$.

Beweisskizze: Man muß zeigen, daß für die speziell definierte Folge $\{Y_n\}$ die Bedingungen von Theorem 1 erfüllt sind. Offenbar sind (a), (c) erfüllt mit

1) In Teil II wurde der Spezialfall $\alpha=1$ diskutiert.

$$Y_n' = \max\{x_1, \dots, x_n\} - \frac{cn^\alpha}{2}$$

$$Y_n'' = \frac{cn^\alpha}{2} .$$

Um die Gültigkeit von (b) nachzuweisen, benötigt man das folgende technische Lemma

Lemma (CHOW/ROBBINS, 1963, S. 43): Gegeben sei eine Folge x_1, x_2, x_3, \dots von unabhängigen, gleichverteilten, nicht-negativen Zufallsvariablen, und es sei für $\alpha, c > 0$

$$Z := \sup_n [\max\{x_1, \dots, x_n\} - cn^\alpha] .$$

Dann gilt

$$P\{Z < \infty\} = 1 \iff E(x^{1/\alpha}) < \infty \quad (1.1.1)$$

und für

$$\beta > 0: E(Z^{1/\beta}) < \infty \iff E(x^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}) < \infty \quad (1.1.2)$$

Nun gilt

$$\sup_n \left[\max\{x_1, \dots, x_n\} - \frac{cn^\alpha}{2} \right] \leq \sup_n \left[\max\{x_1^+, \dots, x_n^+\} - \frac{cn^\alpha}{2} \right] .$$

Also folgt aus (1.1.2) mit $\beta=1$, $x=x^+$

$$E \left[\sup_n \left[\max\{x_1, \dots, x_n\} - \frac{cn^\alpha}{2} \right] \right] < \infty ,$$

d.h. Bedingung (b) von Theorem 1 ist erfüllt.

q.e.d.

Für $\alpha=1$ (s. Teil II) impliziert (A.1) offenbar die in Theorem 2 benötigten Annahmen x.

1.2. Form einer optimalen Stopppregel

Das Problem der Existenz einer optimalen Stopppregel kann für die hier benötigten Fälle als gelöst gelten. Es bleibt zu zeigen, daß die optimale Stopppregel tatsächlich die in Teil II angenommene Form hat. Dazu benötigt man folgende Definition.

Definition: Die stochastische Folge $\{Y_n, F_n\}$ heißt "monoton", wenn

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

mit

$$B_n := \{E(x_{n+1} | F_n) \leq x_n\} .$$

M.a.W.: Ist bei einer monotonen, stochastischen Folge auf einer Stufe n das Ereignis $\{E(Y_{n+1} | F_n) \leq Y_n\}$ eingetreten, dann ist die Folge vom Zeitpunkt n ab ein Supermartingal.

Für monotone Folgen nimmt die optimale Stopppregel folgende ("myopische") Form an:

Theorem 3 (CHOW/ROBBINS, 1963, S. 39): Gegeben sei eine stochastische, monotone Folge $\{Y_n, F_n\}$ mit $Y_n = Y_n' - Y_n'' = Y_n^* - Y_n^{**}$, wobei

- (a) $E[\sup(Y_n')^+] = B < \infty$
- (b) $0 \leq Y_1'' \leq Y_2'', \dots \quad \lim_n Y_n'' = \infty$
- (c) $(Y_n^*)^-$ ist gleichförmig integrierbar
- (d) $Y_n^{**} \leq KY_n''$ für ein $K \in]0, \infty[$,

dann existiert eine optimale Stopppzeit t^* , die wie folgt definiert werden kann

$$t^* = \min\{n \mid E(Y_{n+1} | F_n) \leq Y_n\} .$$

Unter den Voraussetzungen von Theorem 2 kann man leicht zeigen, daß für die Folge $\{Y_n\}$ mit $Y_n = \max\{x_1, \dots, x_n\} - cn^\alpha$ die Voraussetzungen (a) - (d) von Theorem 3 erfüllt sind:
Man nimmt nur

$$Y_n' = \max\{x_1, \dots, x_n\} - \frac{cn^\alpha}{2} ,$$

$$Y_n'' = \frac{cn^\alpha}{2} ,$$

$$Y_n^* = \max\{x_1, \dots, x_n\} , \quad Y_n^{**} = cn^\alpha ,$$

dann ist offenbar (a), (b) erfüllt; mit $K=2$ ist auch (d) erfüllt.

Wegen

$$[\max\{x_1, \dots, x_n\}]^- \leq x_1^-$$

und $E(|x|) < \infty$ sind offenbar die $\{Y_n^{*-}\}$ gleichförmig integrierbar.

Es soll nun gezeigt werden, daß die oben definierte Folge $\{Y_n\}$ für bestimmte Werte von α monoton ist, womit Theorem 3 anwendbar ist, und daß die in Theorem 3 definierte Stoppzeit t^* für $\{Y_n\}$ die folgende Form annimmt

$$t^* = \min\left\{n \mid \max\{x_1, \dots, x_n\} \geq s_n\right\} ,$$

wobei s_n Lösung von $\int (x - s_n)^+ dF(x) = Z(n)$ ist.

Dazu berechnet man

$$E(Y_{n+1} | F_n) - Y_n = \int (x - \max\{x_1, \dots, x_n\})^+ dF(x) - c((n+1)^\alpha - n^\alpha) \quad (1.2.1)$$

wegen der Unabhängigkeit der $\{X_i\}$.

Definiert man s_n durch

$$\int (x-s_n)^+ dF(x) = c((n+1)^\alpha - n^\alpha),$$

dann folgt offenbar aus (1.2.1)

$$E(Y_{n+1} | F_n) \leq Y_n \iff \max\{x_1, \dots, x_n\} \geq s_n \quad (1.2.2)$$

Da $\max\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \geq \max\{x_1, \dots, x_n\}$ und $c[(n+2)^\alpha - (n+1)^\alpha] \geq c[(n+1)^\alpha - n^\alpha]$ für $\alpha \geq 1$ gilt $s_{n+1} \leq s_n$. Demnach ist die oben definierte Folge x_n für $\alpha \geq 1$ monoton. Also ist Theorem 3 anwendbar, und aus (1.2.2) folgt, daß t^* die oben angegebene Form hat. Für den in Teil II behandelten Spezialfall $\alpha=1$ gilt offenbar $s_n = s_{n+1} = s$ und

$$t^* = \min\{n | x_n \geq s\}.$$

Ein Spezialfall ergibt sich durch Betrachtung der Folge

$$\{Y_n, F_n\} \text{ mit } Y_n = \beta^n \max\{x_1, \dots, x_n\} - \sum_{t=1}^n \beta^{t-1} c, \text{ wobei } \beta \in]0, 1[.$$

Dies entspricht dem in Teil III besprochenen Fall der Diskontierung, in dem Kosten jeweils zu Beginn, Erträge am Ende einer Periode anfallen. Die (1.2.1) entsprechende Gleichung ergibt hier (mit $m_n := \max\{x_1, \dots, x_n\}$)

$$\begin{aligned} E(\beta^n (\beta m_{n+1} - m_n) | F_n) - \beta^n c &= \beta^n [E(\beta m_{n+1} - m_n | F_n) - c] = \\ &= \beta^n [\beta \int (x - m_n)^+ dF(x) - (1 - \beta)m_n - c] \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Wegen $m_{n+1} \geq m_n$ ist $\{Y_n\}$ monoton; mit der Definition von s durch

$$\beta H(s) = c + (1 - \beta)s \quad (1.2.4)$$

erhält man die in Teil III.2 angenommene Stopp-Regel. Allerdings ist nicht gesichert, daß hier überhaupt gestoppt wird; die Bedingung (b) von Theorem 3 ist für Y_n offenbar nicht erfüllt.

2. Das Stopp-Problem bei beschränkter Suchzeit

In Anhang 1 wurden nur Stoppzeiten t betrachtet, die nicht beschränkt sind, es wurde lediglich $P\{t < \infty\} = 1$ gefordert. In diesem Abschnitt soll die Menge C der zu betrachtenden Stoppzeiten eingeschränkt werden auf

$$C^N := \{t \in C \mid t \leq N\} .$$

Damit kann das Problem des optimalen Stoppens einer stochastischen Folge $\{Y_n, F_n\}$ analog zu Abschnitt I formuliert werden: Man suche ein $t^* \in C^N$, so daß

$$E(Y_{t^*}) = \sup_{t \in C^N} E(Y_t) .$$

Für dieses Problem kann man intuitiv die Lösung durch "backward induction" angeben. Bei Beachtung einer optimalen Stopp-Politik geht man wie folgt vor: Auf der N -ten Stufe muß auf jeden Fall gestoppt werden mit dem "Ertrag" Y_N ; auf der $(N-1)$ -ten Stufe wird gestoppt, wenn $E(Y_N | F_{N-1}) \leq Y_{N-1}$; es wird eine weitere Stichprobe genommen, wenn $E(Y_N | F_{N-1}) > Y_{N-1}$, sofern man eine optimale Stopp-Politik befolgt. Allgemein wird die Zulässigkeit dieses Verfahrens in folgendem Theorem bewiesen.

Theorem 1 (CHOW/ROBBINS, 1971, S. 50): Man definiere

$$\gamma_N^N := Y_N$$

$$\gamma_n^N := \max\{Y_n, E(\gamma_{n+1}^N | F_n)\}$$

für $n=1, 2, \dots, N-1$,

dann ist die Stoppzeit $t^* \in C^N$, definiert durch

$$t^* := \min\{n \mid Y_n = \gamma_n^N\} ,$$

optimal in C^N für die stochastische Folge $\{Y_n, F_n\}$.

Mit Hilfe von Theorem 1 ist sowohl die Existenz als auch die Form der optimalen Stoppzeit bei beschränkter Suchzeit gegeben.

Ist $Y_n = x_n - nc$ ($c > 0$) gegeben mit $F_n = F(x_1, \dots, x_n)$, wobei die $\{x_n\}$ eine Folge von unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen bilden, dann nimmt die optimale Stopp-Regel, die in Theorem 1 gegeben ist, eine einfache Form an. Da die x_n unabhängig sind, gilt

$$t^* = \min\{n \mid Y_n \geq E(\gamma_{n+1}^N)\} ,$$

wobei die γ_n definiert sind durch

$$\gamma_n^N := \max\{Y_n, E(\gamma_{n+1}^N)\} .$$

Offenbar gilt $E(\gamma_1^N) \geq E(\gamma_2^N) \geq \dots \geq E(Y_N)$. Für die Ausführungen in Teil III ist das folgende Resultat wichtig: Ist die stochastische Folge $\{Y_n, F_n\}$ wie oben gegeben durch $Y_n = x_n - nc$, dann ist die optimale Stoppzeit gegeben durch

$$t^* = \min\{n \mid x_n \geq s_n\} ,$$

mit $s_n = E(\tilde{\gamma}_{n+1}^N) - c$ für $n=1, \dots, N-1$, $s_N = 0$, wobei

$$\tilde{\gamma}_{n+1}^N := \gamma_{n+1}^N + (n+1)c .$$

3. Verschiedene Hilfsmittel

3.1. Stochastische Dominanz

Die folgenden Theoreme sind von FISHBURN/VICKSON (1978) bewiesen worden.

Theorem 1: Es gilt die Äquivalenzrelation

$$\int_0^{\infty} u(x) dF(x) \geq \int_0^{\infty} u(x) dG(x) \iff$$
$$\iff G(x) \geq F(x) \quad \forall x \in [0, \infty)$$

für alle nicht-abnehmenden, endlichen reellen Funktionen $u(\cdot)$ auf $[0, \infty)$.

Theorem 2: Für F, G , die auf einem endlichen Intervall $[0, b]$ konzentriert sind mit $\mu_F = \mu_G$ gilt die Äquivalenzrelation

$$\int_0^b u(x) dF(x) \geq \int_0^b u(x) dG(x) \iff \int_0^x G(t) dt \geq$$
$$\geq \int_0^x F(t) dt \quad \forall x \in [0, b]$$

für alle nicht zunehmenden, endlichen, konkaven, reellen Funktionen auf $[0, b]$.

3.2. Konjugierte Familien von Normalverteilungen

Theorem 3 (De GROOT, 1971, S. 167): Gegeben sei eine mit $N(\theta, r)$ -verteilte Zufallsvariable x . Dabei ist die Präzision r bekannt, über den Mittelwert θ besteht eine a priori-

Verteilung $N(\mu, \tau)$, dann ist die a posteriori-Verteilung über θ bei Vorliegen einer Beobachtung x eine Normalverteilung mit den Parametern

$$\mu' = \frac{\tau\mu + r x}{\tau + r}, \quad \tau' = \tau + r.$$

Theorem 4 (De GROOT, 1971, S. 239): Die Dichte der bedingten Verteilung einer Zufallsvariablen x sei $N(\theta, 1)$, dabei ist θ eine Zufallsvariable, die verteilt ist gemäß $N(\mu, \tau)$, dann ist die Randverteilung von x gegeben durch $N(\mu, \frac{\tau}{\tau+1})$.

3.3. Eigenschaften der Funktion $\Psi(\cdot)$:

Ist $F(x)$ die Verteilungsfunktion von $N(0, 1)$, dann bezeichnet man speziell $H_F(\cdot)$ mit $\Psi(\cdot)$; mit Hilfe von $\Psi(\cdot)$ kann man explizite Lösungen für Reservations-Kapitalwerte von normalverteilten Zufallsvariablen leicht angeben. Im Text werden die folgenden Eigenschaften von $\Psi(\cdot)$ benutzt:

Theorem 5 (De GROOT, 1971, S. 247/48): Für die Funktion $\Psi(\cdot)$ gilt

a) ist F die Verteilungsfunktion von $N(\mu, \tau)$, dann gilt

$$H_F(x) = \frac{\Psi(\tau^{\frac{1}{2}}(x-\mu))}{\tau^{\frac{1}{2}}}.$$

b) $\Psi(\bar{x}) + \bar{x} = E[\max\{x, \bar{x}\}]$.

4. Suche mit Rückgriff bei beschränkter Suchzeit

Im folgenden wird mit Hilfe eines Funktionalgleichungsansatzes der Reservations-Kapitalwert s_n^* direkt bestimmt. Bezeichne $\tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x)$ den maximalen Netto-Ertrag der Suche mit "Rückgriff", wenn $(\bar{n}-n)$ mögliche Suchschritte übrig bleiben. Dann definiert man

$$\tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x) = \max \left\{ x, -c + \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x)F(x) + \int_x^{\infty} \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(y)dF(y) \right\} \quad (4.1)$$

für $n=1, \dots, (\bar{n}-1)$

$$\tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x) = x .$$

Aus der Darstellung von (III.4.1) als

$$\tilde{\beta}_n^{\bar{n}}(x) = \max \{x, Z_n(x)\} \quad (4.2)$$

wird sofort ersichtlich, daß eine einfache Definition von s_n wie im Falle ohne Rückgriffsmöglichkeit hier nicht möglich ist. Die folgende Proposition zeigt, daß durch

$$s_n^* := \min \{x | x \geq Z_n(x)\} \quad (4.3)$$

auch für diesen Fall eine Folge von Reservations-Kapitalwerten existiert.

Proposition: Für das oben definierte Problem existiert eine Folge von Reservations-Kapitalwerten $\{s_n^*\}_1^{\bar{n}}$, so daß auf Stufe n genau dann gestoppt wird, wenn $x_n \geq s_n^*$.

Beweis: Man definiere mit $Z_n(x) := -c + \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x)F(x) + \int_x^{\infty} \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(y)dF(y)$

$$s_N^* = 0$$

$$s_n^* := \min \{x | x \geq Z_n(x)\} .$$

s_n^* ist offenbar ein Reservations-Kapitalwert, wenn gezeigt werden kann

$$x \geq s_n^* \iff x \geq Z_n(x) .$$

Nach Definition von s_n^* ist die Implikation

$$x \geq s_n^* \leftarrow x \geq Z_n(x)$$

offensichtlich. Für den Beweis der umgekehrten Richtung genügt es zu zeigen, daß $(x - Z_n(x))$ nicht abnehmend in x ist. Dies geschieht durch Induktion wie folgt:

Offenbar ist

$$x - Z_{N-1}(x) = x - [-c + xF(x) + \int_x^\infty y dF(y)] = c - \int_x^\infty (y-x) dF(y) = c - H(x)$$

nicht abnehmend in x , da $H(\cdot)$ nicht zunehmend in x ist. Angenommen, $(x - Z_{n+1}(x))$ ist nicht abnehmend in x , dann gilt

$$x - Z_n(x) = c + x - \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x) - \int_x^\infty [\tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(y) - \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x)] dF(y) .$$

Offenbar ist $(x - Z_n(x))$ nicht abnehmend in x , da

$$(x - \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x)) = \min\{0, x - Z_{n+1}(x)\}$$

nicht abnehmend in x und $\int_x^\infty [\tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(y) - \tilde{\beta}_{n+1}^{\bar{n}}(x)] dF(y)$ nicht zunehmend in x ist.

Da offenbar $Z_n(x) \geq Z_{n+1}(x) \geq \dots$, gilt für die Reservations-Kapitalwerte $s_n^* \geq s_{n+1}^* \geq \dots$. Darüber hinausgehend kann man durch eine leichte Überlegung sogar zeigen, daß $s_1^* = s_2^* = \dots = s_n^* = s$, wobei s - wie oben - der kritische Kapitalwert bei unbeschränkter Suchzeit ist. Dies folgt aus der Definition von $Z_n(x)$ als

$$Z_n(x) = x + (H(x) - c) \quad (4.4)$$

für $x \geq s_{n+1}^*$,

der Eigenschaft von $H(\cdot)$ (strikt fallend), $H(s) - c = 0$ und der Definition von s_n^* als

$$s_n^* = \min\{x \mid H(x) - c \leq 0\} \quad (4.5)$$

Daraus resultiert sofort $s_n^* \geq s_n$ und man kann schließen: s_n ist nach Definition der erwartete Ertrag bei fortgesetzter optimaler Suche für \bar{n} Suchschritte; s_n^* übersteigt diesen Ertrag, folglich wird in diesem Fall auch später gestoppt.

Literatur

- CHOW, Y.S., ROBBINS, H., 1961, A martingale system theorem and applications. Proceedings fourth Berkeley Symp.Math.Statist.Prob., vol. 1.
- " - , - " - , 1963, On optimal stopping rules, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2.
- " - , - " - , 1971, Great Expectations: The theory of optimal stopping. Houghton Mifflin Comp.
- De GROOT, M., 1970, Optimal Statistical Decisions. New York, St. Louis.
- FISHBURN, P.C., VICKSON, R.G., 1978, Theoretical Foundations of Stochastic Dominance. In: WHITMORE, G.A., FINDLAY, M.C., eds., Stochastic Dominance. Lexington, Toronto. 37-113.
- LEVY, H., SARNAT, M., 1978, Capital Investment and Financial Decisions. Engelwood Cliffs.
- LIPPMAN, S.A., McCALL, J.J., 1976, The Economics of Job Search: A Survey. Economic Inquiry, vol. 14, 155-189.
- McCALL, J.J., 1965, The Economics of Information and Optimal Stopping Rules. Journal of Business, vol. 38, 310-317.
- RAMSER, H.J., 1979, Investition, Unsicherheit und unvollständige Information. Konstanz. Erscheint in: BOMBACH, G., et al., Hrsg., Neuere Entwicklungen in der Theorie des Investorenverhaltens. Tübingen 1980.
- ROTHSCHILD, M., STIGLITZ, J.E., 1970, Increasing Risk. I: A Definition. Journal of Economic Theory, vol. 2, 225-243.