

Läufer, Nikolaus K. A.

Working Paper

Komparative Statik, Stabilitätsanalyse und Korrespondenzprinzip bei gemischten Differentialgleichungssystemen

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 128

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Läufer, Nikolaus K. A. (1979) : Komparative Statik, Stabilitätsanalyse und Korrespondenzprinzip bei gemischten Differentialgleichungssystemen, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 128, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78134>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Komparative Statik, Stabilitätsanalyse
und Korrespondenzprinzip bei gemischten
Differentialgleichungssystemen

Nikolaus K. A. Läufer

Serie A - Nr. 128

DISKUSSIONSBEITRÄGE

D-7750 Konstanz
Postfach 7733

Serie A

Volkswirtschaftliche Beiträge

Nr. 128

Komparative Statik, Stabilitätsanalyse
und Korrespondenzprinzip bei gemischten
Differentialgleichungssystemen

Nikolaus K. A. Läufer

Serie A - Nr. 128

Oktober 1979

AK 6357 79
Wirtschaft
Kiel

I. Zur Beziehung zwischen komparativ-statischer und dynamischer Analyse (Korrespondenzprinzip) bei gemischten Differentialgleichungssystemen (DGS)

Es ist jedem ökonomischen Theoretiker geläufig, daß in der komparativ-statischen Gleichgewichtsanalyse bei der Bestimmung der Wirkungen, die von Veränderungen in exogenen Variablen auf die endogenen Variablen eines Modells ausgehen, gegenläufige Einzeleffekte auftreten können. Bei einer rein qualitativen Analyse, in der nur die Richtung, aber nicht die zahlenmäßige Stärke von Wirkungen ermittelt werden soll, müssen dann die Gesamteffekte deswegen unbestimmt bleiben, weil die einander entgegengesetzten Einzeleffekte ohne numerischer Spezifikation nicht saldiert werden können. Spätestens seit Samuelson das Korrespondenzprinzip ¹⁾ formulierte, ist auch bekannt, daß sich solche Unbestimmtheiten durch Auswertung von Stabilitätsbedingungen zumindest einschränken, wenn nicht sogar beseitigen lassen. Erfüllte Stabilitätsbedingungen charakterisieren Gleichgewichte als stabile Lagen, zu denen das mit dem statischen Gleichgewichtssystem (ein Gleichungssystem) korrespondierende dynamische Ungleichgewichtssystem (ein Differentialgleichungssystem) konvergiert. Die Samuelsonschen Sätze "One interested only in fruitful statics must study dynamics." ²⁾ und "We find ourselves confronted with this paradox: in order for the comparative-statics analysis to yield fruitful results, we must first develop a theory of dynamics." ³⁾ sind wohl bekannt.

Bei der Anwendung des Samuelsonschen Korrespondenzprinzips lassen sich u. a. folgende Beziehungen (Eigenschaften) ausnutzen:

1. Die System- oder Funktionsdeterminante des komparativ-statischen linearen bzw. linearisierten Gleichgewichtsmodells ist, abgesehen von einigen positiven oder negativen und konstanten Proportionalitätsfaktoren (Anpassungsgeschwindigkeiten) gleich der System- oder

Funktionaldeterminante des korrespondierenden dynamischen Ungleichgewichtssystems (linearen Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten).

2. Die Systemdeterminante des korrespondierenden dynamischen Ungleichgewichtssystems läßt sich allein als Produkt der Lösungen (Eigenwerte) der charakteristischen Gleichung des dynamischen Systems darstellen.
3. Bei Stabilität des dynamischen Systems muß das Produkt der Eigenwerte notwendigerweise positiv bzw. negativ sein, wenn die Anzahl der Eigenwerte (Ordnung der Systemmatrix) geradzahlig bzw. ungeradzahlig ist.
4. Für stabile Systeme läßt sich aufgrund von 1. bis 3. das Vorzeichen der Systemdeterminante des komparativ-statischen Gleichgewichtsmodells bestimmen.

Die Kenntnis des Vorzeichens der Systemdeterminante des komparativ-statischen Gleichgewichtsmodells ist bei mathematischer komparativ-statischer Analyse unbedingt notwendig zur Bestimmung der Wirkungsrichtung von Ursachen.

Nicht selten stößt man in der komparativ-statischen Analyse bei der Formulierung des korrespondierenden Ungleichgewichtssystems auf gemischte Differentialgleichungssysteme (DGS). In gemischten DGS treten im Gegensatz zu reinen DGS neben Differentialgleichungen auch gewöhnliche Gleichungen auf, d. h. es kommen auch Gleichungen ohne Differentialquotienten als Variable vor. Den gemischten DGS fehlt im allgemeinen die Eigenschaft 2. Die gemischten DGS lassen sich zwar durch Variablenelimination auf reine DGS reduzieren, es geht aber dabei die Eigenschaft 1 verloren. Will man die Eigenschaft 1 bei einer Reduktion des dynamischen Systems beibehalten, dann muß man auch das komparativ-statische Gleichungssystem entsprechend über eine Elimination von Variablen reduzieren. Auf diese Weise würde allerdings die Aussagefähigkeit der komparativ-statischen Analyse entweder eingeschränkt oder aber, die Analyse bei dem Versuch, die Einschränkungen infolge der Variablenelimination wieder rückgängig zu machen, technisch enorm kompliziert. Es besteht daher offensichtlich ein Bedarf an einem einfachen Verfahren zur

stabilitätstheoretischen Bestimmung des Vorzeichens der Systemdeterminante von komparativ-statischen Gleichgewichtssystemen, deren korrespondierende dynamische Ungleichgewichtssysteme DGS vom gemischten Typ sind.

II. Ein brauchbarer Satz für die Stabilitätsanalyse bei gemischten Differentialgleichungssystemen (DGS)

A bzw. B seien Matrizen der Ordnung $n \times n$ bzw. $n \times \ell$ mit konstanten Elementen. x_1 sei ein Vektor mit $m (< n)$ Komponenten und x_2 ein Vektor mit $n - m > 0$ Komponenten. Der Vektor z habe ℓ Komponenten. Das folgende lineare DGS

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} - Bz$$

nennen wir, auch ohne den inhomogenen Teil Bz , ein gemischtes DGS. Die Null auf der linken Seite von (1) repräsentiert einen Vektor bestehend aus $n - m > 0$ Nullen, besitzt also die gleiche Anzahl von Komponenten wie der Vektor x_2 . A sei nichtsingulär. Die steady-state-Lösung x^S des Systems (1) ist definiert durch

$$(2) \quad 0 = Ax^S - Bz \quad \text{bzw.} \quad x^S = A^{-1}Bz$$

Der Einfluß von z auf die steady-state-Lösung wird in der komparativ-statischen Analyse untersucht. Bei der Analyse der Stabilität eines komparativ-statischen Gleichgewichts genügt es, den homogenen Teil eines DGS zu betrachten. In den folgenden DGS wird daher die inhomogenisierende Komponente Bz unterdrückt und x ist als Abweichung vom steady-state-Wert x^S zu interpretieren. Bei einer im Anhang näher definierten m -Zerlegung der Matrix A kann man den homogenen Teil des gegebenen gemischten DGS auch wie folgt schreiben:

$$(3) \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \end{pmatrix}$$

Der "untere" Teil dieses Systems besteht aus ganz gewöhnlichen linearen Gleichungen, die man nach x auflösen kann.

Wir unterstellen, daß $|A_{22}| \neq 0$. Als eindeutige Lösung für x_2 erhält man dann:

$$(4) \quad x_2 = -A_{22}^{-1} A_{21} x_1.$$

Mit dieser Lösung für x_2 kann das gemischte DGS auf ein reines DGS reduziert werden. Das reduzierte System lautet:

$$(5) \quad \frac{dx_1}{dt} = \bar{A}_{11} x_1 \quad \text{wobei} \quad \bar{A}_{11} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

Im folgenden sei unterstellt, daß $|\bar{A}_{11}| \neq 0$.

Als charakteristische Gleichung des gemischten Systems haben wir:

$$(6) \quad \left| A - \lambda \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Darin ist I_{11} eine Einheitsmatrix der Ordnung $m \times m$.

Die charakteristische Gleichung des reduzierten Systems lautet:

$$(7) \quad |\bar{A}_{11} - \lambda I_{11}| = 0.$$

Nach Satz 1 des Anhanges erhält man für die charakteristischen Gleichungen der beiden Systeme die gleichen Lösungen (m Eigenwerte). Ein anschaulicher Grund für dieses Ergebnis: Das dynamische Verhalten eines Systems kann nicht von seiner speziellen mathematischen Darstellungsform (extensive oder reduzierte Form) abhängen.

Bei paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i ($i = 1, \dots, m$) lautet die allgemeine Lösung des DGS (1):

$$(8) \quad x_1(t) = c^1 v_1^1 e^{\lambda_1 t} + c^2 v_1^2 e^{\lambda_2 t} + c^3 v_1^3 e^{\lambda_3 t} + \dots + c^m v_1^m e^{\lambda_m t}$$

$$(9) \quad x_2(t) = -A_{22}^{-1} A_{21} x_1(t)$$

Darin sind c^i beliebige, durch Anfangsbedingungen zu bestimmende Konstanten und v_1^i sind die den λ_i zugeordneten Eigenvektoren der Matrix \bar{A}_{11} bzw. jeweils der die ersten m -Komponenten umfassende Teil der Eigenvektoren der charakteristischen Gleichung (6). Bei mehrfachen Nullstellen der charakteristischen Gleichungen sind die Eigenwerte nicht mehr alle verschieden. (8) ist dann durch Polynome zu modifizieren ⁴⁾. Das DGS (1) ist nur dann stabil, wenn die Realteile sämtlicher Eigenwerte negativ sind.

Zum gemischten DGS (1) korrespondiert das Gleichungssystem (10) für die komparativ-statische Gleichgewichtsanalyse:

$$(10) \quad Ax^S = Bz \quad x^S = (x_1^S, x_2^S)$$

mit B als Konstanten-Matrix der Ordnung $n \times l$ und z als Vektor von l Parametern. Wir vernachlässigen zunächst die Möglichkeit, daß die Systemmatrix des DGS und die die des korrespondierenden komparativ-statischen Gleichgewichtssystems sich durch zeilenweise verschiedene Proportionalitätsfaktoren (Marktanpassungsgeschwindigkeiten) unterscheiden können. Die Marktanpassungsgeschwindigkeiten seien also alle durch geeignete Wahl von Maßeinheiten für die x_i -Variablen auf 1 normiert.

Zweck der komparativ-statischen Analyse ist die Bestimmung der Quotienten dx_1^S / dz_j . Die Lösung des Gleichungssystems (10) in Differentialform lautet:

$$(11) \quad dx^S = A^{-1} B dz = \frac{1}{|A|} \hat{A} B dz.$$

\bar{A} ist hierbei die Adjunkte von A . Offensichtlich ist die Kenntnis des Vorzeichens der Systemdeterminante $|A|$ notwendig zur Bestimmung des Vorzeichens von dx_i^s / dz_j . Leider ist selbst dann, wenn das Vorzeichen jedes einzelnen Elementes der Matrix A durch theoretische oder a priori Überlegungen bestimmt werden kann, das Vorzeichen der Determinante von A in vielen Fällen noch unbestimmt. Hier kommt nun das Samuelsonsche Korrespondenzprinzip zum Zuge. Das Vorzeichen von $|A|$ läßt sich durch die Annahme der Stabilität des korrespondierenden DGS wie folgt bestimmen.

Kennt man das Vorzeichen der Determinante $|A_{22}|$, dann ergibt sich das Vorzeichen der Determinante $|A|$ für ein stabiles DGS aus der Gleichung (12)

$$(12) \quad |A| = |A_{22}| \prod_{i=1}^m \lambda_i$$

Diese Gleichung gilt nach Satz 2 des Anhangs ⁵⁾. Die λ_i sind hier Eigenwerte sowohl des gemischten DGS mit Systemmatrix A , als auch der reduzierten Fassung dieses Systems mit Systemmatrix \bar{A} , denn sowohl intuitiv als auch nach Satz 1 des Anhangs können die Stabilitätseigenschaften des gemischten Systems und die des zugehörigen reduzierten Systems nicht verschieden sein. Bekanntlich ist bei Stabilität eines Systems das Produkt der Eigenwerte seiner charakteristischen Gleichung notwendigerweise positiv bei gerader Zahl m und negativ bei ungerader Zahl m der Eigenwerte ⁶⁾.

Es gilt daher folgender Satz H:

Bei einem positiven (negativen) Wert der Determinante $|A_{22}|$ folgt aus der Annahme der Stabilität des gemischten DGS, daß bei geradem m die Determinante $|A|$ des komparativ-statischen Gleichungssystems positiv (negativ) und bei ungeradem m die Determinante $|A|$ negativ (positiv) ist. ●

Für den Fall nichtnormierter Marktreaktionsgeschwindigkeiten unterscheidet sich die Systemmatrix C des gemischten DGS von der Matrix A des korrespondierenden komparativ-statischen Gleichungssystems in den ersten m -Zeilen zeilenweise durch Proportionalitätsfaktoren k_i , die im allgemeinen von 1 verschieden sind. Die

Systeme seien annahmegemäß so geordnet, daß die Beziehung zwischen den Elementen der Matrizen C und A sich wie folgt darstellen läßt:

$$(13) \quad \begin{aligned} c_{ij} &= k_i a_{ij} & i &= 1, \dots, m \\ c_{ij} &= a_{ij} & i &= m+1, \dots, n \end{aligned}$$

Bei einer entsprechenden m-Zerlegung von C und A gilt also:

$$C_{22} = A_{22}.$$

In diesem Fall besteht zwischen der Systemdeterminante $|C|$ des gemischten DGS. und der Systemdeterminante des korrespondierenden komparativ-statischen Gleichungssystems $|A|$ die Beziehung

$$(14) \quad |C| = \left(\prod_{i=1}^m k_i \right) |A|.$$

Die Anwendung von Satz 2 des Anhangs liefert

$$(15) \quad |C| = |C_{22}| \prod_{i=1}^m \lambda_i = |A_{22}| \prod_{i=1}^m \lambda_i;$$

so daß man schließlich einen Gleichung (12) verallgemeinernden Ausdruck

$$(16) \quad |A| = \frac{|A_{22}|}{\prod_{i=1}^m k_i} \prod_{i=1}^m \lambda_i$$

erhält, indem nun die λ_i Lösungen der charakteristischen Gleichungen

$$(17) \quad \left| C - \lambda \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left| \bar{C}_{11} - \lambda I_{11} \right| = 0$$

und nicht der charakteristischen Gleichungen:

$$(18) \quad \left| A - \lambda \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left| \bar{A}_{11} - I_{11} \right| = 0$$

darstellen.

Im Fall nichtnormierter Marktreaktionsgeschwindigkeiten gilt daher folgender Satz H':

Bei einem positiven (negativen) Wert des Quotienten

$$\frac{|A_{22}|}{\prod_{i=1}^m k_i}$$

folgt aus der Annahme der Stabilität des gemischten DGS, daß bei geradem m die Determinante $|A|$ des komparativ-statischen Gleichungssystems positiv (negativ) und bei ungeradem m die Determinante $|A|$ negativ (positiv) ist. ●

Die Annahme von Stabilität und die Kenntnis des Vorzeichens der Determinante $|A_{22}|$ sowie der Marktreaktionsgeschwindigkeiten k_i reichen also hin, um das Vorzeichen der Systemdeterminante $|A|$ zu bestimmen. In den Anwendungen läßt sich das Vorzeichen von $|A_{22}|$ oft sehr leicht bestimmen. Das ist auch im noch folgenden Beispiel der Fall.

Ist das Vorzeichen von $|A_{22}|$ nicht schon durch die Vorzeichen der Elemente von A_{22} festgelegt, dann ist der hier vorgeschlagene Weg zur Bestimmung des Vorzeichens der Determinante $|A|$ nicht direkt gangbar. Ist das Vorzeichen von $|A_{22}|$ unbestimmt, dann kann man das Vorzeichen von $|A|$ auch nicht anhand des charakteristischen Polynoms und der Descartesschen Vorzeichenregel bestimmen. Ein denkbarer Ausweg besteht darin, das Subsystem

$$(19) \quad A_{22} x_2(t) = -A_{21} x_1(t)$$

als steady-state-Lösung eines gemischten DGS zu betrachten, dessen Konvergenzgeschwindigkeit wesentlich größer ist als die des übergeordneten Ausgangssystems, so daß man für die Zwecke der Analyse des Gesamtsystems das Sub-DGS in jedem Zeitpunkt sich als bereits im steady-state befindend betrachten und durch das korrespondierende komparativ-statische Gleichungssystem, die steady-state-Lösung im Zeitpunkt t , darstellen kann. Für dieses isolierte Subsystem könnte man das zugehörige reine oder gemischte DGS formulieren und das Vorzeichen von $|A_{22}|$ durch analoge Anwendung von Satz H bzw. Satz H' bestimmen. Dieser zweistufige Weg setzt allerdings voraus, daß im komparativ-statischen Subsystem (19) Verhaltensgleichungen und Marktgleichgewichtsbedingungen und nicht nur Definitionsgleichungen enthalten sind, so daß die Formulierung von Differentialgleichungen (Anpassungsgleichungen) sachlich überhaupt gerechtfertigt bzw. sinnvoll ist.

III. Ein Anwendungsbeispiel

Zur Demonstration der Anwendung unseres Satzes H' benutzen wir ein bekanntes Modell von Metzler ⁷⁾. Es besteht aus einer Gütermarktgleichgewichtsbedingung

$$(20) \quad S(r, w) = I(r),$$

einer Geldmarktgleichgewichtsbedingung (Portfoliogleichgewichtsbedingung)

$$(21) \quad L(r) = \frac{m}{q a},$$

einer Definition des realen privaten Vermögens

$$(22) \quad w = a + m,$$

und einer Definition des realen Wertes der kaufkraftgesicherten Wertpapiere (Aktien)

$$(23) \quad a = \frac{c y_0}{r}$$

Dabei repräsentiert

r den Zinssatz,

m den Realwert der privaten Kassenhaltung,

qa den Realwert der von Privaten gehaltenen kaufkraftgesicherten Wertpapiere (Anteil q am gesamten privaten und staatlichen Bestand),

w den Realwert des privaten Sparens,

S, I den Realwert des laufenden Sparens, der laufenden Investition

cy_0 den realen Wert der Profite (Anteil c am Vollbeschäftigungssozialprodukt);

q ist ein Parameter für Offenmarktpolitik.

Die differenzierte Form dieses Systems lautet:

$$(24) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & S_r - I_r & S_w & 0 \\ -\frac{1}{qa} & L_r & 0 & \frac{m}{qa^2} \\ \hline 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & -\frac{a}{r} & 0 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} dm \\ dr \\ dw \\ da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m}{q^2 a} dq \\ -a dq \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das korrespondierende DGS ist vom gemischten Typ:

$$(25) \quad \frac{dm}{dt} = k_1 [S(r, w) - I(r)]$$

$$(26) \quad \frac{dr}{dt} = k_2 \left[L(r) - \frac{m}{qa} \right]$$

$$(27) \quad w = qa + m$$

$$(28) \quad a = \frac{cy_0}{r}$$

k_1 und k_2 sind positive Marktreaktionsgeschwindigkeiten. Die linearisierte Fassung des korrespondierenden DGS hat die folgende Gestalt:

$$(29) \begin{pmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{dr}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & k_1(S_r - I_r) & k_1 S_w & 0 \\ -k_2 \frac{1}{qa} & k_2 L_r & 0 & k_2 \frac{m}{qa^2} \\ 1 & 0 & -1 & q \\ 0 & -\frac{a}{r} & 0 & -1 \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} m - m_0 \\ r - r_0 \\ w - w_0 \\ a - a_0 \end{pmatrix}$$

Definitionsgemäß haben wir in diesem Beispiel:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -1 & q \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen von $|A_{22}|$ ist positiv. Wegen positiver k_1, k_2 ist auch $|A_{22}|/k_1 k_2$ positiv. $m = 2$ ist gerade. Wendet man nun Satz H' an, dann zeigt sich, daß die Determinante $|A|$ bei Stabilität des korrespondierenden gemischten DGS notwendigerweise positiv ist. Dieses Ergebnis läßt sich bei der komparativ-statischen Analyse ausbeuten. Mit Hilfe der Cramerschen Regel erhält man aus (24) z. B.

$$(28) \quad \frac{dr}{dq} = - \frac{S_w}{|A|} \left(\frac{1}{q} + \frac{m}{q^2 a} \right)$$

Für eine expansive Offenmarktpolitik ($dq < 0$) kann man mit $|A| > 0$ und unter Beachtung von $S_w < 0$ eindeutig einen Rückgang des Zinssatzes ableiten. Ohne die Ausnutzung der notwendigen Stabilitätsbedingung wäre die Richtung der Zinsreaktion unbestimmt.

V. Mathematischer Anhang 8)

1. m-Zerlegung von quadratischen Matrizen

Unter der m-Zerlegung $n \times n$ ($m \leq n$) verstehen wir im folgenden eine Aufspaltung von A in vier Untermatrizen: A_{11} , A_{12} etc. Der Trennungsstrich zwischen den Teilen verläuft zwischen der m-ten und der (m + 1)-ten Zeile und Spalte.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n} \\ \hline a_{m+1,1} & \dots & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,m} & a_{n,m+1} & \dots & a_{n,n} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & & & A_{12} \\ \hline & & & \\ A_{21} & & & A_{22} \end{array} \right)$$

Ist A die Einheitsmatrix, dann bezeichnen wir die Matrix A mit I und die Untermatrizen A_{11} etc. mit I_{11} etc. Die Matrizen I_{12} und I_{21} sind demnach Nullmatrizen.

2. Eigenschaft (*) einer quadratischen Matrix

Hat eine quadratische Matrix A von der Ordnung $n \times n$ die folgende Gestalt,

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 & \dots & 0 \\
 \\
 a_{m+1,1} & \dots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 a_{m+2,1} & \dots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \dots & 0 \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \dots & a_{n,m} & a_{m,m+1} & \dots & \dots & a_{nn}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 A_{11} & 0 \\
 A_{21} & A_{22}
 \end{bmatrix}$$

mit $\prod_{j=m+1}^n a_{jj} \neq 0$ ($m < n$),

dann sagen wir, sie besitze die Eigenschaft (*). Die Eigenschaft (*) bedeutet bei einer m-Zerlegung der Matrix A, daß A_{12} eine Nullmatrix ist, daß die Matrix A_{22} untere Dreiecksmatrix ist, d. h. in der Diagonalen lauter von Null verschiedene Elemente und nordöstlich der Diagonalen nur Nullelemente besitzt, während die übrigen Elemente von A beliebig sind.

3. Lemma 1

Für eine m-zerlegte, quadratische Matrix A mit der Eigenschaft (*) gilt:

$$|A| = |A_{11}| \cdot |A_{22}|$$

Beweis:

Ist $|A_{11}| = 0$, dann gilt die Gleichung trivialerweise. Denn die Eigenschaft (*) impliziert stets $|A_{12}| = 0$ und mit $|A_{11}| = 0$ auch $|A| = 0$. Ist aber $|A_{11}| \neq 0$, dann läßt sich durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten m Zeilen von A zu den letzten n-m Zeilen erreichen, daß

$$|A| \stackrel{\text{id}}{=}
 \begin{vmatrix}
 A_{11} & | & 0 \\
 \hline
 & & \\
 A_{21} & | & A_{22}
 \end{vmatrix}
 =
 \begin{vmatrix}
 A_{11} & | & 0 \\
 \hline
 0 & | & A_{22}
 \end{vmatrix}$$

Nach einem wohlbekannten Satz ⁹⁾ ist aber

$$\left| \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right| = |A_{11}| |A_{22}|,$$

so daß

$$|A| = |A_{11}| |A_{22}|$$

w. z. b. w.

4. G-Transformation der Matrix A

Wenn eine quadratische Matrix der Ordnung $n \times n$ die Eigenschaft (*) noch nicht besitzt, dann kann man sie unter gewissen Voraussetzungen durch geeignete Transformationen, die wir hier abkürzend als G-Transformation (G für Gauß) bezeichnen, in eine Matrix mit der Eigenschaft (*) überführen.

Die G-Transformation besteht aus folgenden Schritten:

1. Addition eines geeigneten Vielfachen der j -ten Zeile von A zu der Zeile i von A, wobei $j = m+1, \dots, n$ und $i = 1, \dots, m$.
2. Vertauschung zweier Zeilen k und l , $k \neq l$, für $m+1 \leq k, l \leq n$.

Damit eine Matrix G-transformierbar ist, muß bei einer m -Zerlegung der Matrix A die Voraussetzung $|A_{22}| \neq 0$ erfüllt sein.

5. Definition der Matrizen mit Querstrich (Definition Q)

Mit \bar{A} bezeichnen wir eine quadratische Matrix, die die Eigenschaft (*) besitzt und die durch G-Transformation aus der quadratischen Matrix A der Ordnung $n \times n$ hervorgegangen ist. \bar{A}_{11} , \bar{A}_{12} etc. sind die entsprechenden Untermatrizen der m -zerlegten Matrix \bar{A} . Beachte: \bar{A}_{11} etc. sind nicht G-Transformierte von A_{11} etc.!

Mit v bezeichnen wir die Anzahl der Zeilenvertauschungen im Zuge der G-Transformation.

7. Lemma 2

Voraussetzungen:

Es gelte die definitonische Vereinbarung Q. Die quadratische Matrix A der Ordnung $n \times n$ sei G-transformierbar. Für A und \bar{A} gebe es m-Zerlegungen, wobei $m < n$. Unter diesen Voraussetzungen gelten die folgenden Behauptungen:

1. \bar{A} besitzt die Eigenschaft (*)

2. $(-1)^v |A| = |\bar{A}|$

3. $(-1)^v |A_{22}| = |\bar{A}_{22}|$

4. $|\bar{A}| = |\bar{A}_{11}| |\bar{A}_{22}|$

5. $(-1)^v |A| = |\bar{A}_{11}| |A_{22}|$

6. $|A| = |\bar{A}_{11}| |A_{22}|$

Beweis: zu 1: gilt ex definitione;
zu 2: folgt aus der Konstruktion von \bar{A}
(Anwendung der G-Transformation auf A);
zu 3: siehe Beweis zu 2;
zu 4: folgt aus der Anwendung von Lemma 1 auf $|\bar{A}|$
zu 5: folgt aus 2 und 4;
zu 6: folgt aus 3 und 5.

8. Satz 1

Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 besitzen die folgenden charakteristischen Gleichungen a), b) und c) gleiche Eigenwerte:

a)
$$\left| A - \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

b)
$$\left| \bar{A} - \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$c) \quad \left| \bar{A}_{11} - \lambda I_{11} \right| = 0$$

Dabei ist I_{11} eine Einheitsmatrix der Ordnung $m \times m$ mit $m < n$ und λ die Eigenwertvariable.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß die charakteristischen Gleichungen zueinander proportional sind. Nach den Voraussetzungen ist A und daher auch B G -transformierbar, wobei

$$B \stackrel{G}{=} A - \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Unter Anwendung der definitonischen Vereinbarung Q auf die Matrix B gilt dann nach Aussage 2 von Lemma 2

$$(-1)^V |B| = |\bar{B}| \tag{2}$$

und nach Aussage 6 von Lemma 2

$$|B| = |\bar{B}_{11}| |B_{22}| \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich

$$(-1)^V |B| = |\bar{B}| = (-1)^V |\bar{B}_{11}| |B_{22}| \tag{4}$$

Eine nähere Betrachtung von B und der Nachvollzug der einzelnen Schritte einer G -Transformation zeigen, daß

$$B_{22} = A_{22} \tag{5}$$

$$\bar{B} = \bar{A} - \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\bar{B}_{11} = \bar{A}_{11} - \lambda I_{11} \tag{7}$$

Aus (1), (4) und (5) bis (7) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} (-1)^V \left| A - \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| &= \left| \bar{A} - \begin{pmatrix} \lambda I_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= (-1)^V \left| \bar{A}_{11} - \lambda I_{11} \right| \left| A_{22} \right| \end{aligned}$$

(Beachte: G-Transformierbarkeit von A impliziert $|A_{22}| \neq 0$).

w. z. b. w.

Anmerkungen und Interpretationen zu Satz 1

1. Ist A die Matrix der "extensiven" Form eines gemischten DGL-Systems, dann ist \bar{A}_{11} die Matrix der reduzierten Form des gemischten DGL-Systems.
2. Satz 1 besagt, daß die reduzierte Form die gleichen Eigenwerte besitzt wie die extensive Form des gemischten DGL-Systems. Die Reduktion eines DGL-Systems verändert also das dynamische Verhalten eines Systems nicht.

9. Satz 2

Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 gilt für die Determinante der Matrix A:

$$\begin{aligned} |A| &= |A_{22}| \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_m \\ &= |A_{22}| \prod_{i=1}^m \lambda_i \quad m < n \end{aligned}$$

wobei die λ_i gleichzeitig Lösungen der charakteristischen Gleichungen a), b) und c) (siehe Satz 1) sind.

Beweis:

Bekanntlich gilt für die Lösungen λ_i (Eigenwerte) der charakteristischen Gleichung c), daß

$$|\bar{A}_{11}| = \prod_{i=1}^m \lambda_i \quad m < n$$

Zusammen mit Aussage 6 von Lemma 2 folgt dann die Behauptung.

Anmerkung zu Satz 2:

Wenn $m = n$, d. h. wenn $A = A_{11}$, dann gilt $|A| = \lambda_1 \dots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$
mit λ_i als Lösungen der charakteristischen Gleichung $|A - \lambda I| = 0$.

Fußnoten

- 1) Siehe P. A. Samuelson, The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics, *Econometrica*, Vol. 9, 1941, S. 97 - 120, und ders.; The Stability of Equilibrium: Linear and Nonlinear Systems, *Econometrica*, Vol. 10, 1942, S. 1 - 25.
- 2) P. A. Samuelson, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge 1947, S. 5.
- 3) a. a. O., S. 263.
- 4) Zu (7) und seiner Modifikation siehe L. S. Pontrjagin, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Berlin 1965, S. 81 - 83.
- 5) Die Anwendung der im Anhang definierten G-Transformation (G für Gauß) auf die Matrix A, bis sie die ebenfalls im Anhang definierte Eigenschaft (*) erreicht hat, liefert eine Matrix \bar{A} , deren Teilmatrix \bar{A}_{11} , die bei einer wiederum im Anhang definierten m-Zerlegung entsteht, mit der in (5) definierten Matrix \bar{A}_{11} des reduzierten DGS identisch ist. Daher können die Sätze, die im Anhang für ein \bar{A}_{11} formuliert werden, welches durch G-Transformation aus A gewonnen wurde, auch auf das \bar{A}_{11} in (5) angewandt werden.
- 6) Siehe z. B. Don Patinkin:
2. Auflage, New York 1965, S. 496 - 498.
- 7) L. A. Metzler, Wealth, Saving, and the Rate of Interest, *The Journal of Political Economy*, Vol. 59, 1951, S. 93 - 116, insbes. S. 115 f.
- 8) Für Vorschläge zur Verbesserung dieses Anhanges danke ich den Herren Manfred Hessel, Hermann Hoch, Karl Ringwald und Ruprecht Witzel.
- 9) Siehe E. Sperner, *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*, 1. Teil, Göttingen 1959, S. 127 - 129.