

Läufer, Nikolaus K. A.

Working Paper

Ist die VES-Produktionsfunktion "überbestimmt"?

Diskussionsbeiträge, No. 35

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Läufer, Nikolaus K. A. (1973) : Ist die VES-Produktionsfunktion "überbestimmt"?, Diskussionsbeiträge, No. 35, Universität Konstanz, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/78133>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Ist die
VES - Produktionsfunktion
"überbestimmt" ?

35

Nikolaus K.A. Läufer

Mai 1973

Diskussionsbeiträge des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Konstanz

Nr. 35

Einleitung

Unter dem Titel " Die CES- und VES-Produktionsfunktion: Eine kritische Gegenüberstellung" erschien im Kyklos 1971 eine kurze Arbeit der Autoren F.H.FLECK, B.FINKBEINER und R.CASUTT. (im folgenden FFC genannt)¹⁾, in der behauptet wird, die VES-Produktionsfunktion von LU und FLETSCHER²⁾ sei unter neoklassischen Annahmen "überbestimmt".

In einem späteren Kommentar von J.BARTNICK und B.GAHLEN (im folgenden BG genannt) wird³⁾ diese FFC-Behauptung kurzerhand als "grober mathematischer Fehlschluß" abgetan.

Im folgenden wollen wir in aller Kürze versuchen, der Behauptung von FFC einen klaren Sinn zu geben, um sie dann ebenfalls als unbegründet zurückzuweisen. Es zeigt sich dabei, daß FFC zwar keinen "groben mathematischen Fehlschluß" begehen, daß sie aber einer terminologischen Konfusion erlegen sind.

I.

Wir verwenden die folgenden Symbole :

V	=	Output
L	=	Arbeit
K	=	Kapital
X	=	$\frac{K}{L}$ = Kapitalintensität
Y	=	$\frac{V}{L}$ = durchschnittliche Arbeitsproduktivität
w	=	Lohnsatz
t	=	Zeit
u,v,e	=	stochastische Fehlerterme

Durchgehend sei $V = F(K, L)$ eine neoklassische Produktionsfunktion. Sie sei linear homogen und deshalb gelte

$$\frac{V}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right),$$

wofür wir dann

$$Y = f(X)$$

schreiben.

II

FFC wissen, daß bei Profitmaximierung unter den Bedingungen der vollständigen Konkurrenz

$$w = Y - X Y' \quad (1a)$$

$$\text{bzw. } w = f(X) - X f'(X) \quad (1b)$$

gilt.

Es existiert deshalb unter neoklassischen Regularitätsbedingungen eine Funktion

$$X = g(w). \quad (2)$$

In der Regressionsgleichung für die LU-FLETSCHER-VES-Funktion⁴⁾

$$\log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log \frac{K}{L} + u \quad (3)$$

kann deshalb X nicht unabhängig von w variieren bzw. es gibt, abgesehen von u , nur eine einzige

$$\log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log g(w) + u \quad (4)$$

unabhängige Variable, w .

FFC meinen nun, daß durch das gleichzeitige Auftreten von w und $\frac{K}{L} = X$ als "unabhängigen" Variablen auf der rechten Seite in der Regressionsgleichung (3) eine "Unabhängigkeit" von w und X behauptet werde, die mit der defacto-Abhängigkeit zwischen X und w gemäß (2) kollidiere.

Wir prüfen nun zwei Interpretationen dieser Kollisions-
these.

1. Interpretation

Die Annahme der VES-Produktionsfunktion bedeutet die
Behauptung der gleich-
zeitigen Gültigkeit der folgenden Aussagen A und B.

A: w und X sind voneinander (funktional) unabhängig.

B: w und X sind durch das Profitmaximierungsverhalten,
ausgedrückt durch Gleichung (1a) voneinander (funktional)
abhängig.

Den Behauptungen A und B entsprechen die folgenden beiden
Systeme.

System 1 :

a) $\log \frac{Y}{L} = \log a + b \log w + c \log X + u$ (5)

b) w und X sind voneinander unabhängig (wählbar)
(2 Freiheitsgrade)

System 2 :

a) $\log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log X + u$ (6)

b) w und X sind voneinander abhängig nach Maßgabe der
Funktion (2) wählbar (1 Freiheitsgrad).

Zwischen den gegebenen Formulierungen der Systeme 1
und 2 besteht hinsichtlich der Teile b) ein direkter
Widerspruch, der sich unter Verzicht z.B. auf das
System 1 leicht beseitigen läßt.

2. Interpretation

Die Annahme der VES-Produktionsfunktion bedeutet die Behauptung der gleichzeitigen Gültigkeit der folgenden Aussagen C und D :

C: w und X sind unabhängige Variable der Regressionsgleichung (3)

D: w und X sind voneinander (funktional) abhängig.

Den Behauptungen C und D entsprechen die folgenden beiden Systeme.

System 3 :

$$a) \log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log X + u \quad (7)$$

b) w und X sind unabhängige Variable, d.h. es gibt zwei Gleichungen

$$w = \bar{w}_{\text{exogen}} \quad (8)$$

$$X = \bar{X}_{\text{exogen}} \quad (9)$$

System 4 :

$$a) \log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log X + u$$

b) X ist abhängig von w gemäß Gleichung (2), d.h.

$$X = g(w) \quad (10)$$

$$\text{und } w = \bar{w}_{\text{exogen}} \quad (11)$$

Die Annahme der gleichzeitigen Gültigkeit der Systeme 3 und 4 würde die Formulierung des folgenden Systems 5 erlauben.

System 5 :

$$a) \log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log X + u \quad (12)$$

$$b) w = \bar{w}_{\text{exogen}} \quad (13)$$

$$X = \bar{X}_{\text{exogen}} \quad (14)$$

$$c) X = g(w) \quad (15)$$

Im System 5 gibt es 4 Gleichungen zur Bestimmung von 3 Unbekannten ($\frac{V}{L}$, w , X). System 5 ist mathematisch überbestimmt. Das meinen m.E. FFC, wenn sie schreiben ⁵⁾:

"Durch die Angabe des Wertes von w ist die CES- bzw. VES-Produktionsfunktion eindeutig bestimmt. Man kann deshalb nicht unabhängig vom Lohnsatz w der Kapitalintensität $\frac{K}{L}$ einen Wert erteilen, respektive $\frac{K}{L}$ als eine weitere unabhängige Variable einführen, wie das bei der VES-Produktionsfunktion im Regressionsansatz der Fall ist. Nach unserer Auffassung ist somit durch die unabhängige Angabe von w und $\frac{K}{L}$ in der Regressionsgleichung

$$\log \frac{V}{L} = \log a + b \log w + c \log \frac{K}{L} + u$$

die VES-Produktionsfunktion überbestimmt."
(Hervorhebungen von FFC.)

III.

Kritisch ist gegen FFC einzuwenden, daß der Ausgangspunkt falsch gewählt ist. Das Anschreiben der Regressionsgleichung (3) impliziert noch lange nicht die Behauptung, daß w und X voneinander funktional (mathematisch) unabhängig(wählbar) sind⁶⁾.

Anders formuliert:

Das Anschreiben bzw. die Verwendung der Regressionsgleichung (3) impliziert noch lange nicht die gleichzeitige Annahme der Gleichungen (8), (9), (10) und (11), bzw. impliziert noch lange nicht die gleichzeitige Annahme der Gleichungen (13), (14) und (15).

Zwei Variable, die im Sinne des klassischen statistischen Regressionsmodells als unabhängige Variable gelten, können durchaus gegenseitig voneinander funktional abhängen.

w und X sind im Regressionsmodell (3) unabhängige Variable nur in dem Sinne, daß sie beide $\frac{V}{L}$ bestimmen, daß aber um-

$\frac{V}{L}$ nicht w und nicht X beeinflusst. Noch genauer: w und X sind beide im Gegensatz zu $\frac{V}{L}$ vom stochastischen Fehlerterm u stochastisch unabhängig. Das wären sie dann nicht, wenn wir wüßten, daß $\frac{V}{L}$ auf w und X zurückwirkt.⁷⁾

Stochastische Unabhängigkeit von w und X gegenüber u bedeutet zunächst, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Zufallsvariable u von den Variablen w und X funktional (mathematisch) unabhängig ist. Für den Fall, daß auch w und X stochastische Variable sind, bedeutet stochastische Unabhängigkeit von X und w gegenüber u auch, daß die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für X und w von der (stochastischen) Variablen u funktional (mathematisch) unabhängig ist.

Durch die Interpretation der Regressionsgleichung (3) als klassisches Regressionsmodell wird stochastische Unabhängigkeit von w und X gegenüber u angenommen. Diese Annahme impliziert aber noch lange nicht die Annahme der gleichzeitigen Gültigkeit der Gleichungen (8) und (9) bzw. (13) und (14). Mit der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit von w und X gegenüber u ist der Wegfall der Gleichung (8) bzw. (13) durchaus vereinbar. Es besteht keine Notwendigkeit eine der beiden Gleichungen beizubehalten.

Die stochastische Unabhängigkeit von X gegenüber u wird umgekehrt nicht durch die Gleichung (10) bzw. (15) verletzt. X wäre unter der Annahme des Bestehens einer funktionalen Beziehung zwischen X und w dann von u stochastisch abhängig, wenn es auch w wäre.

Eine andere Möglichkeit für eine stochastische Abhängigkeit von X gegenüber u bestünde darin, daß Gleichung (10) bzw. (15) eine stochastische und keine deterministische Beziehung darstellte. (15) könnte als stochastische Beziehung die folgende Form (16)

$$X = g(w) + v \quad (16)$$

mit der Zufallsvariablen v haben. Die stochastische Variable

v müßte dann allerdings ihrerseits wieder von u in (12) stochastisch abhängen. Wenn andererseits u und v stochastisch voneinander unabhängig wären, würde selbst die stochastisierte Neuformulierung von (15) nichts daran ändern, daß X von u stochastisch unabhängig ist, sobald auch w von u stochastisch unabhängig ist.

Mir scheint, daß die Autoren die zwei verschiedenen Bedeutungen von Unabhängigkeit nicht klar genug voneinander getrennt haben. Im nächsten Abschnitt soll der Fehler von FFC nochmals an einem einfacheren Beispiel demonstriert werden.

IV.

Ausgangspunkt sei die quadratische Trendgleichung

$$y = a + bt + ct^2 + e \quad (17)$$

Im Sinne der klassischen Regressionstheorie sind

t und t^2 die unabhängigen Variablen. Sie sind jedoch gegenseitig keineswegs voneinander unabhängig im funktionalen (mathematischen) Sinn, denn schließlich ist

$$t = \sqrt{t^2} \quad (18)$$

$$\text{und } t^2 = [t]^2 \quad (19)$$

Man begeht keinen Fehler, wenn man in Gleichung (17) t^2 durch

$$z = t^2 \quad (20)$$

ersetzt, so daß man für (17) auch schreiben kann

$$y = a + bt + cz + e \quad (21)$$

wobei $z = t^2$ (22)

In (21) sind nun t und z die unabhängigen Variablen im Sinne der klassischen Regressionstheorie. Die stochastische Unabhängigkeitseigenschaft von t und t^2

gegenüber e schließt jedoch nicht die mathematische Abhängigkeitsbeziehung (20) aus. D.h. durch die Neuformulierung von Gleichung (17), wie sie mit Gleichung (21) erfolgt ist, schließt man nicht automatisch aus, daß auch Gleichung (22) gilt.

Andererseits verlangt die Interpretation von t und z als unabhängigen Variablen im Sinne der klassischen Regressionstheorie keineswegs, daß man unter der Voraussetzung (22) auf der Annahme der gleichzeitigen Gültigkeit der folgenden drei Gleichungen bestehen muß:

$$t = \bar{t}_{\text{exogen}} \quad (23)$$

$$z = \bar{z}_{\text{exogen}} \quad (24)$$

$$z = t^2 \quad (25)$$

Man kann ohne weiteres auf die Gleichung (24) verzichten bzw. muß auf diese Gleichung verzichten, wenn man an (25) und (23) festhält und Überbestimmtheit vermeiden will.

Schlußbemerkung

Es erscheint uns sachlich nicht richtig, wenn BG davon sprechen, daß FFC einen groben mathematischen Fehlschluß begehen. Gerade die mathematische Seite des Problems (gemäß Interpretation 2) spräche für die Argumentation von FFC, wenn diese Autoren nicht von Anfang an einer rein terminologischen Konfusion erlegen wären.

Sie unterscheiden nicht zwischen funktionaler (mathematischer) und stochastischer (statistischer) Abhängigkeit und interpretieren die stochastische Unabhängigkeit von X gegenüber u als funktionale Unabhängigkeit von X gegenüber w . Auf diese Weise wird das Bestehen eines Freiheitsgrades behauptet, der andererseits durch die Annahme der Beziehung (2) gerade ausgeschlossen ist. Mit dieser letzten

Formulierung, in der wir das Wort Freiheitsgrad verwenden, wollen wir darauf hinweisen, daß zwischen den beiden Interpretationen, die wir für die Aussage von FFC gegeben haben, eine Äquivalenzbeziehung besteht, sofern man bereit ist, funktionale und stochastische Unabhängigkeit zu konfundieren.

Abschließend sei bemerkt, daß wir aus den dargelegten Gründen die im Titel dieses Papiers ausgesprochene Frage mit nein beantworten müssen.

Anmerkungen

- 1) Kyklos Bd. 24 (1971) S.65-76
- 2) Y.LU und L.B.FLETSCHER, A Generalization of the CES Production Function, Review of Economics and Statistics, Bd.50 (1968)
- 3) Kyklos Bd.25 (1972) S.133-137.
- 4) LU u. FLETSCHER, a.a.O. S.449
- 5) Kyklos, Bd.24 (1971), S.71
- 6) Die Besonderheit der LU-FLETSCHER Funktion besteht u.a. darin, daß die Funktion

$$\frac{V}{L} = f(w) \quad (1)$$

dadurch spezifiziert wird, daß sie zuerst in zwei Faktoren

$$\frac{V}{L} = g_1(w) g_2(w) \quad (2)$$

zerlegt wird, und daß danach die beiden Faktoren durch

$$g_1(w) = a \cdot w^b \quad (3)$$

$$g_2(w) = X^c \quad (4)$$

spezifiziert werden.

Aus (4) folgt (5)

$$X = \left[g_2(w) \right]^{\frac{1}{c}} \quad (5)$$

Ersetzt man $g_2(w)$ in (2) durch (4), dann leugnet man dadurch keineswegs die Gültigkeit von (5).

- 7) Es ist für die Klärung der von FFC aufgeworfenen Frage unerheblich, daß zumindest auf der makroökonomischen Ebene solche Rückwirkungen bestehen können, daß also auf der makroökonomischen Ebene Bedenken bezüglich der Gültigkeit der Annahmen des klassischen Regressionsmodells und somit der Regressionsgleichung (3) bestehen können.