ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of
ZBW
Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Rousseva, Luba; Volkart, Rudolf; Zeder, Markus

Working Paper

Intuitive Betrachtung der Zusammenhänge wichtiger Optionsbewertungsansätze

Working Paper, No. 35

Provided in Cooperation with:
Swiss Banking Institute, University of Zurich

Suggested Citation: Rousseva, Luba; Volkart, Rudolf; Zeder, Markus (2004) : Intuitive Betrachtung der Zusammenhänge wichtiger Optionsbewertungsansätze, Working Paper, No. 35, Universität Zürich, Institut für schweizerisches Bankwesen, Zürich

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/76035

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Universität Zürich
Institut für schweizerisches Bankwesen

Working Paper

Januar 2004 *Nr. 35*

Intuitive Betrachtung der Zusammenhänge wichtiger Optionsbewertungsansätze

lic. rer. pol. Luba Rousseva
Prof. Dr. oec. publ. Rudolf Volkart
lic. oec. publ. Markus Zeder

Institut für schweizerisches Bankwesen der Universität Zürich
Plattenstrasse 14
CH-8032 Zürich
Telefon: 01/634 29 51
Fax: 01/634 49 03
http://www.isb.unizh.ch

Copyright © 2004 by Rousseva / Volkart / Zeder. Jede Art der Vervielfältigung ohne Genehmigung der Autoren ist unzulässig.

Intuitive Betrachtung der Zusammenhänge wichtiger Optionsbewertungsansätze

LUBA ROUSSEVA RUDOLF VOLKART MARKUS ZEDER*

1. Version: September 2003
Aktuelle Version: Januar 2004

Abstract

Ziel dieses Beitrages ist es, die Zusammenhänge zwischen den Binomialmodellen der Optionsbewertung (Replikation bzw. Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten) und dem Black/Scholes Modell aufzuzeigen und zu analysieren. Die Äquivalenz der beiden Binomialmodelle – mit Beweis der Bedingungen, unter denen die numerischen Herleitungen zum gleichen Resultat führen – sollen explizit dargestellt und ihre Parameter zu den Parametern des B/S-Modells in Beziehung gesetzt werden. Zusätzlich wird eine Illustration der effektiven Ausübungswahrscheinlichkeiten ausserhalb der risikoneutralen Modellwelt aufgezeigt. Ein umfassendes Beispiel mit gleichbleibenden Ausgangsdaten über die gesamte Arbeit ermöglicht eine übersichtliche Darstellung der zu zeigenden Zusammenhänge.

JEL classification: G13

A. Einleitung

Die Optionspreistheorie mit ihren verschiedenen Modellansätzen stellt einen der "mächtigsten" Bausteine der Modern Finance Theory dar. Sie ist nicht nur zur theoretischen Bewertung von derivativen Finanzinstrumenten unentbehrlich, sondern auch zur Analyse verschiedenster finanz- und investitionspolitischer Sachverhalte, allen voran die Gestaltung der Kapitalstruktur und die Bewertung von Realoptionen.[1]

Grundsätzlich existieren für die Bestimmung des theoretischen Optionswerts drei

Theorien:[2] der arbitrage approach, der equilibrium approach und der utility approach. Der *arbitrage approach* geht von der Annahme aus, dass keine Arbitragemöglichkeiten vorhanden sind (no-arbitrage condition) und bestimmt den Optionswert[3] entweder über die Bildung eines risikolosen Portfolios (Replikation) oder über risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten[4]. Der *equilibrium approach* hingegen leitet den Optionswert über die folgendende Gleichgewichtsbedingung der Märkte her: Der Optionspreis ist derjenige Preis, bei welchem Angebot und Nachfrage dieser Option im Gleichgewicht sind (market clearing condition). Beim *utility approach* resultiert der Optionswert aus der Maximierung der Nutzenfunktionen der Marktteilnehmer (utility maximization program). Unter der Annahme perfekter und vollkommener Märkte führen alle drei Ansätze zum selben Ergebnis. Zeichnen sich die Märkte allerdings durch imperfekte Strukturen aus, eignet sich nur noch der utility approach. Im folgenden sollen perfekte und vollkommene Märkte angenommen und der Fokus auf den arbitrage approach gesetzt werden.

Die Optionsbewertungsansätze werden hinsichtlich der zeitlichen Dimensionen wie folgt unterteilt: einerseits in Modelle mit *diskreter Zeit* (mit messbaren Zeitabständen) und andererseits in Modelle mit *kontinuierlicher Zeit* (mit unendlich kleinen Zeitabständen). In Bezug auf das mathematische Verfahren lässt sich der Optionswert anhand *analytischer* oder *numerischer Verfahren* herleiten (vgl. Abschnitt B).

Der (binomielle) Replikationsansatz sowie Binomial-Modelle mit einer geringen Anzahl Stufen gehören zu den diskreten analytischen Verfahren. Höherstufige, bzw. Binomialmodelle mit unendlich vielen Stufen[5] gehören zu den (approximativ) kontinuierlichen analytischen Verfahren. Das Black/Scholes Modell[6] ist ein klassisches Beispiel für den Replikationsansatz in kontinuierlicher Zeit und reiht sich unter die analytischen Verfahren ein. Numerische Verfahren (wie beispielsweise das Monte Carlo Modell sowie die “finite difference method”[7]) werden in diesem Beitrag nicht behandelt.

Ziel dieses Beitrags ist es, zu einem vertieften Modellverständnis beizutragen, indem folgende Zusammenhänge anhand eines Zahlenbeispiels analysiert werden:

- *Zusammenhang zwischen den Parametern beider Binomialmodelle – der Replikation bzw. der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten (vgl. Abschnitt C & D).*
- *Zusammenhang zwischen den Parametern der Binomialmodelle und denen des Black/Scholes Modells (vgl. Abschnitt E).*

Diese Zusammenhänge werden unter der Annahme vollständiger Kapitalmärkte darge-

stellt. Anschliessend wird diese Annahme vollständiger Kapitalmärkte (risikoneutrale Investoren) gelockert und es werden einige Aspekte der Optionsbewertung beim Verlassen der risikoneutralen Modellwelt diskutiert (vgl. Abschnitt F).

Ein Quervergleich der zu betrachtenden Parameter in Bezug auf die “moneyness” einer Option findet sich in Abschnitt G.

B. Methodik und Erkenntnisse zur Bewertung von Optionen

Der Wert einer Option hängt vom aktuellen Preis (S) und der Volatilität (σ) des Underlying (des zugrundeliegenden Finanzinstruments) sowie vom Ausübungspreis (X), der Restlaufzeit der Option (t) und dem risikolosen Zinssatz (i)[8] ab. Die Dividenden sollen der Einfachheit halber in den folgenden Betrachtungen ausgeklammert werden.

Da die Entwicklung der Wertschriftenpreise unsicher ist, muss diese *in einem ersten Schritt* modelliert werden: Verschiedene mögliche Bewegungspfade der Preise werden konstruiert und diesen bestimmte Wahrscheinlichkeiten zugeordnet. Hierzu müssen gewisse Annahmen über die Qualität, die Strukturen der Kapitalmärkte und die Investorenpräferenzen getroffen werden. *In einem zweiten Schritt* werden die zwei Funktionen, die für die Optionsbewertung von zentraler Bedeutung sind, bestimmt. Zuerst wird der Optionswert als Funktion der oben genannten Parameter (S, X, σ, t, i) dargestellt. Anschliessend werden die ausschliessliche Abhängigkeit des Optionspreises am Verfalltag vom Wert des Underlying und vom Ausübungspreis verwendet[9] ($MAX(S-X,0)$) und *im letzten Schritt* die möglichen Endwerte der Option auf den heutigen Zeitpunkt diskontiert. Hier stellt sich die Frage, mit welchem Zinssatz die Diskontierung erfolgen muss (vgl. Tab. 1).

Tabelle 1: Methodik zur Bewertung von Optionen

erster Schritt	zweiter Schritt	dritter Schritt
- Modellierung der Entwicklung des Underlyingpreises	- Bestimmung des Optionspreises als f(S, X, σ, i, t) - Ermittlung des Endwertes	- Diskontierung auf den heutigen Zeitpunkt

Bei der Modellierung der Funktion im zweiten Schritt gibt es grundsätzlich zwei

Ansätze – die Replikationsmethode und die Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten. Beide basieren auf der Annahme vollständiger und perfekter Kapitalmärkte, womit Arbitragemöglichkeiten ausgeschlossen werden. Bei der Replikationsmethode wird der Preis einer Call-Option (C) aus einer bestimmten Anzahl der Underlying-Wertschrift (Δ) und gleichzeitiger Finanzierung durch eine risikolose Anleihe (Leverage) repliziert. Der Anteil des Underlying (Δ) wird so gewählt, dass der Wert der Option und der Wert des replizierenden Portfolios zu jedem Zeitpunkt in jedem möglichen zukünftigen "Umweltzustand" (d.h. unabhängig von den Szenarien für die Preisentwicklung des Underlying und der Option) identisch sind:

$$C = S \cdot \Delta - Leverage \tag{1}$$

Das Portfolio $V = S \cdot \Delta - C = Leverage$ ist risikolos, da das Delta (Δ) über die Zeit angepasst wird und somit das Portfolio gegen Kursänderungen des Underlying abgesichert ist (delta hedging). Wichtig ist nochmals zu unterstreichen, dass die Bildung eines risikolosen Portfolios deswegen möglich ist, weil Arbitragemöglichkeiten ausgeschlossen sind. Die Rendite des Portfolios entspricht dem risikolosen Zinssatz.

Bei der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten setzt man sich, im Gegensatz zur Replikationsmethode, explizit mit den (risikoneutralen) Wahrscheinlichkeiten der Preisentwicklungen auseinander.[10] Es wird angenommen, dass die Investoren risikoneutral sind. Da sich die Märkte im Gleichgewicht befinden (laut der Annahme perfekter und vollständiger Märkte), gilt für den risikoneutralen Investor, dass die erwartete Rendite jeder Wertschrift gleich dem risikolosen Zinssatz sein muss. Die Preisentwicklung des Underlying wird deshalb um die jeweilige Risikoprämie bereinigt und die entsprechenden risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelt. Der Wert einer Option wird dann berechnet, indem man den unter den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ermittelten Erwartungswert bei Verfall mit dem risikolosen Zinssatz diskontiert.

Da beide Methoden Arbitragemöglichkeiten ausschliessen, wird der risikolose Zinssatz als Diskontierungsfaktor verwendet. Bei der ersten Methode rentiert das Portfolio $V = S \cdot \Delta - C = Leverage$ zum risikolosen Zinssatz unter der Bedingung, dass keine Arbitrage möglich ist. Bei der zweiten Methode dagegen werden die Wertschriftenpreisbewegungen explizit mit risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten modelliert, was die Diskontierung des Endwertes (der Option) mit dem risikolosen Zinssatz erfordert.

Es kann gezeigt werden, dass in einem arbitragefreien Modell immer ein risikoneu-

trales Wahrscheinlichkeitsmass existiert. Unter der Annahme der vollständigen Märkte kann jede Option über beide Methoden bewertet werden, und beide Methoden führen zum gleichen Resultat.[11]

Tabelle 2: Überblick der behandelten Ansätze

Modellierung der Zeit	Ansatz	Formale Betrachtung
1-stufig	Replikation	$C = S \cdot \Delta - \frac{\Delta \cdot S(down)}{(1+i)}$
	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$C = \frac{p \cdot C(up) + (1-p) \cdot C(down)}{(1+i)}$
mehrstufig	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$C = S \cdot \Phi[a;n,p'] - PV(X) \cdot \Phi[a;n,p]$
stetig	B/S-Modell	$C = S \cdot N(d_1) - PV(X) \cdot N(d_2)$

Die erwähnten Ansätze und deren grundlegende Formeln werden als Ausgangspunkt der folgenden Ausführungen tabellarisch in Tabelle 2 aufgezeigt. Aus dieser Darstellung werden die Zusammenhänge der verschiedenen Ansätze nicht direkt ersichtlich. Das Ziel der Ausführungen der nachfolgenden Abschnitte ist es zu zeigen, dass der Wert einer Option bei allen drei Ansätzen aus denselben Komponenten besteht – einem bestimmten Anteil des Underlying abzüglich eines Leverage (vgl. Tab. 3.). Diese zwei Komponenten können weiter aufgeschlüsselt werden:

$$C = S \cdot \Delta - PV(X) \cdot p \tag{2}$$

In Tabelle 4 werden die zwei zu betrachtenden Modellparameter – das Delta (Δ) und die Pseudowahrscheinlichkeit (p) – separat dargestellt und für die verschiedenen Ansätze bzw. Modellierungen der Zeit miteinander verglichen.

Die Replikation bzw. die Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zeigen das Delta und die Pseudowahrscheinlichkeit als einfache Funktionen der Up- und Down-Bewegungen. Beim Uebergang zu einer mehrstufigen Betrachtung werden die Parameter als Funktionen der Binomialverteilung ausgedrückt. Wenn die Perioden nicht mehr zählbar sind, d.h. wenn $n \to \infty$ und somit zur stetigen Zeitbetrachtung übergangen wird,

werden das Delta und die Pseudowahrscheinlichkeit als Funktionen der Normalverteilung der Grössen d_1 und d_2 ausgedrückt.[12] Unter welchen Bedingungen die Normalverteilung eine Approximation der Binomialverteilung ist, d.h. wann das Binomial-Delta zum B/S-Delta bzw. die Binomial-Pseudowahrscheinlichkeit zu der B/S-Pseudowahrscheinlichkeit konvergiert, haben Cox/Ross/Rubinstein (1979) gezeigt.

Tabelle 3: Vertiefte Betrachtung der behandelten Ansätze

Modellierung der Zeit	Ansatz	Formale Betrachtung
	Grundform	$C = Aktienposition - Leverage$
1-stufig	Replikation[a]	$C = S \cdot \left[\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}\right] - PV(X) \cdot \left[\frac{\frac{S}{X} - d}{u - d}\right]$
	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten[b]	$C = S \cdot p' - PV(X) \cdot p$
mehrstufig	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$C = S \cdot \Phi[a;n,p'] - PV(X) \cdot \Phi[a;n,p]$
stetig	B/S-Modell	$C = S \cdot N(d_1) - PV(X) \cdot N(d_2)$

a. Der Subtrahend wurde durch algebraische Umformung des in Tab. 2 gezeigten Subtrahenden gewonnen (vgl. Anhang A).
b. Der zweite Summand gemäss Tab. 2 wurde mit 0 unterstellt (C(down) = 0) und der Wert C(up) entspricht der Differenz zwischen dem Kurs des Underlying und dem Ausübungspreis. Ferner gilt: $p' = (p \cdot u)/(1+i)$.

Tabelle 4: Überblick über die Modellparameter

Modellierung der Zeit	Ansatz	Delta	Pseudowahrscheinlichkeit
1-stufig	Replikation	$\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$	$\frac{\frac{S}{X} - d}{u - d}$
	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$p' = \frac{p \cdot u}{(1+i)}$	p
mehrstufig	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$\Phi[a;n,p']$	$\Phi[a;n,p]$
stetig	B/S-Modell	$N(d_1)$	$N(d_2)$

Anhand eines vereinfachenden Beispiels sollen die zu diskutierenden Zusammenhänge numerisch aufgezeigt und nachgewiesen werden. Zur Berechnung der Optionswerte sollen folgende Annahmen und Ausgangsdaten gelten:

- Aktienkurs in t_0: $S = 100$
- Ausübungspreis $X = 100$
- risikoloser Zinssatz $i = 0\,\%$
- Volatilität des Aktienkurses $\sigma = 22.3\,\%$
- Laufzeit der Option $t = 1$ Jahr

Die Option ist in t_0 "at the money" (S=X). Die Annahme, dass der risikolose Zinssatz $0\,\%$ ist, soll die Berechnungen vereinfachen.

C. Diskrete Binomialbetrachtung mittels Replikation

Im vorliegenden Beispiel wird in einem ersten Schritt die Aktienkursbewegung modelliert. Die up- bzw. down Bewegungen lassen sich gemäss folgenden Formeln berechnen:

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\frac{t}{n}}} \tag{3}$$

$$d = e^{-\sigma \cdot \sqrt{\frac{t}{n}}} \tag{4}$$

wobei n die Anzahl Binomialstufen, und $d = 1/u$ ist. Für unser Beispiel ergeben sich die folgenden Werte: $u = e^{0.223 \cdot \sqrt{\frac{1}{1}}} = 1.25$ bzw. $d = 1/1.25 = 0.8$. Der Aktienkurs $S = 100$ im Zeitpunkt t_0 kann sich somit in unserem Beispiel im positiven Szenario in t_1 auf 125 bzw. im negativen Szenario auf 80 entwickeln.

In t_1 ergibt sich der Wert einer Call-Option mit einem Ausübungspreis $X = 100$ aus der Randbedingung Max($S_1 - X$, 0). Der Call hat einen Wert von 25 ($125 - 100 = 25$) oder 0 (da $80 - 100$ negativ ist). Die Call-Ausübung würde in letzterem Fall unterbleiben (vgl. Abb. 1). Wie hoch auch der Preis des Calls in t_0 ist, stets gelten in diesem Beispiel die Resultate gemäss Tabelle 5 für die Aktie und den Call im Zeitpunkt t_1.

Es lässt sich nun ohne weiteres erkennen, dass das Downside-Risiko des Calls ($-100\,\%$) fünf Mal so gross wie dasjenige der Aktie ($-20\,\%$) ist. Weiter sieht man, dass die absolut gemessene Rückfluss-Spannweite des Calls mit 25 gerade $5/9 = 0.555$ derjenigen

Abbildung 1: Aktienkursbewegungen und Callpreis

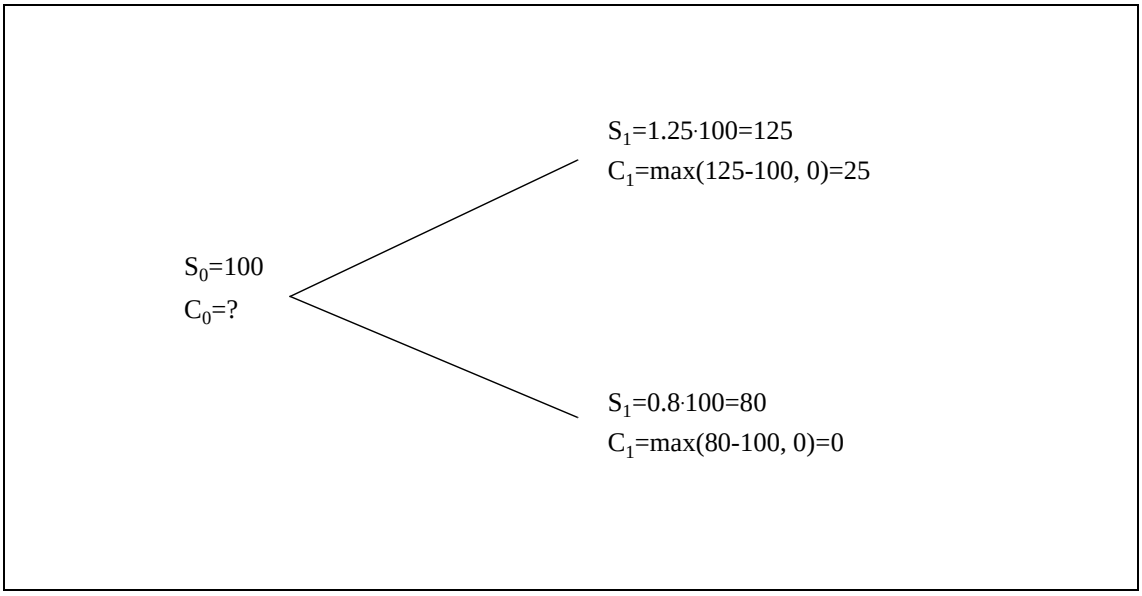

Tabelle 5: Spannweite der Aktie vs. Spannweite der Option

Spannweite Aktienresultat	$125 - 80 = 45$
Rendite Aktie	**+ 25%** oder **– 20%**
Spannweite Optionsresultat	$25 - 0 = 25$
Rendite Option	$+\left[\frac{25}{C} \cdot 100\right]\%$ oder **– 100%**

der Aktie (45) beträgt. Die Rückfluss-Spannweite des Calls im Verhältnis zur Rückfluss-Spannweite der Aktie bezeichnet man auch als Delta (Δ) einer Option. Das Delta besagt folgendes:

- Relative Änderung des Optionswerts bei einer Änderung des Kurswerts S der Aktie.
- Bruchteil an Aktien, den man benötigt, um ein den Call replizierendes Portfolio zu bilden, welches neben dem Aktienanteil aus einem bestimmten Anteil an Fremdfinanzierung (Leverage) besteht.

Eine Investition in $\Delta = 0.555$ Anzahl Aktien hat einen anfänglichen Wert von $0.555 \cdot 100 = 55.55$ und somit die gleiche Rückfluss-Spannweite ($69.44 - 44.44 = 25$) wie die Investition in einen Call. Verschieden wäre allerdings die absolute Höhe der Anlagen und ihre möglichen Rückflüsse.

Beim Call-Investment beträgt der Rückfluss 25 oder 0, beim Aktien-Investment liegt er bei 0.555 von 125 oder 80, d.h. bei 69.44 oder 44.44. Um im negativen Fall eine Auszahlung von 0 zu erhalten – wie bei der Call-Option – finanziert man das Aktieninvestment im Zeitpunkt t_1 im Umfang von gerade 44.44 mit Fremdkapital (Annahme: $i = 0\,\%$). Der Present Value in t_0 dieser Finanzierung beträgt bei dem unterstellten i von 0% ebenfalls 44.44. Auf diese Weise erhält man für unser Beispiel das Replikationsportfolio.

In Anbetracht der jetzt identischen Rückflussstruktur müssen der Call und das Replikationsportfolio in t_0 denselben Wert $C = \Delta \cdot S - Leverage = \frac{5}{9} \cdot 100 - 44.44 = 11.11$ haben, um eine Arbitragemöglichkeit auszuschliessen. Würde der Marktpreis des Calls vom theoretisch richtigen Wert von 11.11 abweichen, so würden Arbitrageprozesse – die Möglichkeit von Free Lunches[13] – den Call-Kurs auf den arbitragefreien Kurs führen.

Die Wertherleitung basiert somit auf folgender Call-Formel:

$$C = \Delta \cdot S - Leverage = \Delta \cdot S - \frac{\Delta \cdot S(down)}{(1+i)} \tag{5}$$

Durch Umformen des Leverage[14] können die 2 grundlegenden Parameter Delta und Pseudowahrscheinlichkeit gefunden werden, was die Vergleichbarkeit mit den anderen Ansätzen erheblich erleichtert:

$$C = S \cdot \left[\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}\right] - PV(X) \cdot \left[\frac{\frac{S}{X} - d}{u - d}\right] \tag{6}$$

D. Einstufige und mehrstufige Binomialbetrachtung mittels risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten

Eine Alternative zur Replikationsmethode besteht darin, mit einer risikoneutralen DCF-Bewertung zu arbeiten. Das Konzept basiert ebenfalls auf einer binomiellen Betrachtung. Ausgehend von den auch im Rahmen der Replikationsmethode verwendeten Akti-

enkurs-Szenarien gilt es in einem ersten Schritt, den “heutigen” Wert der Aktie für risikoneutrale Investoren zu erklären. Dabei werden die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten[15] (p und $(1-p)$) aus den mit dem risikolosen Zinssatz diskontierten Rückflussszenarien des Underlying abgeleitet. Aus dem Aktienwert in t_0:

$$S = \frac{p \cdot S(up) + (1-p) \cdot S(down)}{(1+i)} \tag{7}$$

ermittelt man p wie folgt:

$$p = \frac{i - r(down)}{r(up) - r(down)} \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{(1+i) - d}{u - d} \tag{8}$$

wobei $r(up)$, die positive Aktienrendite, $= (u-1)$ und $r(down)$, die negative Aktienrendite, $(d-1)$ ist (im Beispiel r(up) = 25% und r(down) = -20%).

Diese Wahrscheinlichkeiten sind ebenfalls für die anschliessende Bewertung der Option entscheidend. Man diskontiert den Erwartungswert des Calls am Verfall auf den heutigen Zeitpunkt (wobei in unserem Beispiel $C(down) = 0$ ist):

$$C = \frac{p \cdot C(up) + (1-p) \cdot 0}{(1+i)} \tag{9}$$

was dem erwarteten positiven inneren Wert des Calls am Verfall auf den heutigen Zeitpunkt diskontiert entspricht:

$$C = \frac{p \cdot S(up) - p \cdot X}{(1+i)} \tag{10}$$

Für das Beispiel ergeben sich folgende Pseudowahrscheinlichkeiten p für das “up” und $(1-p)$ für das “down”:

$$p = \frac{0-(-0.20)}{0.25-(-0.20)} = \frac{0.20}{0.45} = \frac{4}{9} \quad \text{bzw.} \quad 1-p = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9} \tag{11}$$

Ausgehend vom Nachweis des Aktienwertes in t_0

$$S = \frac{\frac{4}{9} \cdot 125 + \frac{5}{9} \cdot 80}{(1+0)} = 100 \tag{12}$$

leitet sich der Wert der Call-Option gemäss Formel (9) bzw. (10) wie folgt her: (13)

$$C = \frac{\frac{4}{9} \cdot 25 + \frac{5}{9} \cdot 0}{(1+0)} = 11.11 \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{\frac{4}{9} \cdot 125 - \frac{4}{9} \cdot 100}{(1+0)} = 11.11 \tag{14}$$

Dieser Wert entspricht genau demjenigen, welcher mit Hilfe der Replikation ermittelt wurde. Beide Ansätze bedienen sich somit einer 1-stufigen Binomialbetrachtung, jedoch mit unterschiedlichen Herleitungswegen.

Durch Umformen von Formel (10) können die 2 grundlegenden Parameter Delta (p') und Pseudowahrscheinlichkeit (p) gezeigt werden:

$$C = S \cdot \left[\frac{p \cdot u}{(1+i)}\right] - PV(X) \cdot p \tag{15}$$

Definiert man:[16]

$$p' = \frac{p \cdot u}{(1+i)} \tag{16}$$

so erhält man

$$C = S \cdot p' - PV(X) \cdot p \tag{17}$$

Formel (17) trägt auch zum Verständnis des Übergangs vom einstufigen zum mehrstufigen Binomialmodell bei.

In der Realität kann ein Aktienkurs im Zeitpunkt t_1 nicht nur zwei mögliche Werte, sondern eine unendlich grosse Anzahl von Werten annehmen, die mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu gewichten sind. Diese Verfeinerung des Modells lässt sich durch eine Erhöhung der Anzahl Stufen bei gleichzeitiger Reduktion der Zeitabstände erreichen. Bei einem 2-stufigen Binomialmodell ergeben sich 3 mögliche Aktienkurse in t_1 und im Beispiel ein Callwert von 7.87[17] resp. bei einem 3-stufigen Binomialmodell 4 mögliche Aktienkurse und im Beispiel ein Callwert von 9.63.[18]

Allgemein folgt für die Bewertung einer Call-Option über n Anzahl Stufen:[19]

$$C = S \cdot \Phi[a;n,p'] - PV(X) \cdot \Phi[a;n,p] \tag{18}$$

wobei $\Phi[\ldots]$ die binomiale Distributionsfunktion, n die Anzahl Perioden sowie a die kleinste Anzahl Up-Bewegungen bezeichnen, welche der Aktienkurs in den nächsten n Perioden bis zum Ausübungszeitpunkt des Calls macht, damit der Call am Verfalltag in-the-money ist.[20]

Lässt man die Anzahl der Stufen gegen unendlich gehen, strebt die Stufendauer (Zeitabstände) gegen Null und entspricht der in der Einführung angesprochenen stetigen Betrachtung mit infinitesimal kleinen Zeitabständen. Die Binomialverteilung konver-

giert bei $n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung (N). Es folgt daraus das im nächsten Abschnitt zu betrachtende Black/Scholes-Modell:[21]

$$C = S \cdot N(d_1) - PV(X) \cdot N(d_2) \tag{19}$$

E. Stetige Betrachtung mittels Black/Scholes-Modell

Im Black/Scholes-Modell (B/S-Modell) mit kontinuierlicher Zeit ist die zukünftige Aktienkursentwicklung als Geometrisch Brownsche Bewegung modelliert und die Aktienkurse sind lognormalverteilt. Diese Annahme impliziert, dass der Aktienkurs – ausgehend von einem Wert S in t_0 – nur bis auf Null fallen (Kapitalgesellschaft mit Ausschluss der persönlichen Haftung der Anteilseigner), nach oben aber beliebig hoch steigen kann. Die Aktienrenditen sind jedoch normalverteilt.

Als Bindeglied zwischen dem B/S-Modell und dem Binomialmodell dienen die Formeln (3) und (4). Während im Rahmen einer diskreten Binomialbetrachtung die Grössen u und d die Schwankungsbreite des Aktienkurses und damit das Risiko der Aktie (Volatilität[22]) zum Ausdruck bringen, ist dies im B/S-Modell die Standardabweichung der Rendite.

Zu beachten ist, dass das Resultat aus einer einstufigen Binomialbetrachtung für den Wert des Calls nicht mit dem B/S-Resultat übereinstimmt; dies ist erst bei einer höheren Anzahl Binomialstufen – idealerweise gegen unendlich strebend – der Fall. Diesem Zusammenhang tragen Formeln (3) und (4) Rechnung[23].

Der Wert einer Call-Option mittels B/S-Modell berechnet sich gemäss:

$$C = S \cdot N(d_1) - e^{-it} X \cdot N(d_2) \tag{20}$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + (i + \sigma^2/2) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}} \tag{21}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t} \tag{22}$$

wobei $N(d_i) \quad i = 1, 2$ die kumulierte Standard-Normalverteilung im Punkt (d_i) ist.[24] Die

weitere Notation ist in Tabelle 6 erläutert.

Tabelle 6: Elemente der Black/Scholes-Formel

C	Call-Wert in t_0
S	Aktienkurs in t_0
$N(d_1)$	"Delta" der Call-Option
$PV(X) = e^{-it}X$	Barwert von X in t_0
$N(d_2)$	Pseudowahrscheinlichkeit für die Ausübung des Call, wenn die Investoren risikoneutral sind
$PV(X) \cdot N(d_2)$	"Leverage" (Kreditaufnahme bei der Replikation)

Im Beispiel ergibt sich folgender Wert der Call-Option:

$$C = 100 \cdot \underbrace{0.5444}_{\text{Delta}} - 100 \cdot \underbrace{0.4556}_{\text{Pseudowahrscheinlichkeit}} = 8.88$$

wobei

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{100}\right) + (0 + 0.223^2/2) \cdot 1}{0.223 \cdot \sqrt{1}} = 0.112\,,\ N(d_1) = 0.544 \tag{23}$$

$$d_2 = 0.112 - 0.223 \cdot \sqrt{1} = -0.112\,,\ N(d_2) = 0.456 \tag{24}$$

Interessant ist bezüglich der Grösse $N(d_2)$ auch folgende Überlegung. Im Zusammenhang mit erweiterten Anwendungen von Optionspreismodellen kann man aus der Pseudowahrscheinlichkeit beispielsweise die Wahrscheinlichkeit von Kreditausfällen bei Banken oder die Wahrscheinlichkeit eines Defaults risikobehafteter Bonds abschätzen.

Der Begriff Pseudowahrscheinlichkeit bedeutet, dass diese Wahrscheinlichkeit nur für den der B/S-Formel zugrundeliegenden theoretischen Fall risikoneutraler Investoren gilt. Die B/S-Formel basiert auf einer risikolosen und nicht auf einer risikogerechten Renditeforderung. Die tatsächliche, in der effektiv risikoaversen Welt auftretende Wahrscheinlichkeit lässt sich nicht direkt ablesen, sie muss auf besondere Weise – ausserhalb des B/S-Modells – hergeleitet werden (vgl. Abschnitt F).

Bei der mathematischen Herleitung der B/S-Formel wird die Risikoprämie "heraus-

gekürzt".[25] Implizit ist sie in der B/S-Formel dennoch existent, da der Aktienkurs S alle Informationen der Wertbildung der effektiv risikoaversen Investoren enthält. Die tatsächliche Ausübungswahrscheinlichkeit lässt sich nur bei Kenntnis bzw. Annahme der risikogerechten Rendite der unterliegenden Aktie zusätzlich ermitteln. Diese Wahrscheinlichkeit liegt höher als $N(d_2)$, und zwar zwischen $N(d_2)$ und dem stets grösseren $N(d_1)$.[26]

Tabelle 7: Verbindungen zwischen dem B/S- Modell und der Replikationsmethode bzw. dem B/S-Modell und der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten

B/S-Modell: $C = S \cdot N(d_1) - PV(X) \cdot N(d_2)$	B/S-Modell: $C = S \cdot N(d_1) - PV(X) \cdot N(d_2)$
Replikation: $C = S \cdot \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} - PV(X) \cdot \left[\frac{\frac{S}{X} - d}{u - d}\right]$	risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten: $C = S \cdot p' - PV(X) \cdot p$ (1-stufig) $C = S \cdot \Phi[a;n,p'] - PV(X) \cdot \Phi[a;n,p]$ (mehrstufig) wobei bei $n \to \infty$ folgendes gilt: $\Phi[a;n,p'] \to N(d_1)$ $\Phi[a;n,p] \to N(d_2)$

Der in der B/S-Formel enthaltene Term $PV(X) \cdot N(d_2)$ wird auch als Leverage bezeichnet. Dieser bildet neben dem Delta die zweite zentrale Grösse zur Bildung eines Replikationsportfolios. Dieses Replikationsportfolio besteht aus 0.5444 (Delta) Aktien, die im Umfang von $0.4556 \cdot 100 = 45.56$ (Leverage) fremdfinanziert werden, was einem Investitionsbetrag von $0.5444 \cdot 100 - 45.56 = 8.88$ – d.h gerade dem Alternativinvestment in die Call-Option – entspricht.

Eine (marginale) Veränderung des Aktienkurses (von z.B. 1, d.h. von 100 auf 101) würde sowohl im "geleveragten" Aktienportfolio als auch bei der Call-Option zu einem Wertanstieg von 0.5444 ($Delta \cdot 1$) führen. Der Wert stiege folglich von 8.88 auf rund 9.43. Diese Überlegung steht auch hinter der Entwicklung der B/S-Formel. Eine Call-Option ist in jedem Zeitpunkt dann richtig bewertet, wenn eine Preisveränderung der unterlie-

genden Aktie im Replikationsportfolio dieselbe Wertveränderung bewirkt wie für den Optionswert selber.

In Tabelle 7 werden die gezeigten Verbindungen zwischen dem B/S-Modell und der Replikation bzw. dem B/S-Modell und der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zusammengefasst.

F. Binomialbetrachtung in einer risikoaversen Welt

Optionspreismodelle erfordern – aufgrund des delta hedging – selbst in einer risikoaversen Welt keine expliziten Informationen über die risikogerechten Diskontierungssätze[27] (Risikoprämie) des Underlying bzw. der Option. Dasselbe trifft auf die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten zu; im Rahmen der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten wird lediglich die Herleitung von Pseudowahrscheinlichkeiten notwendig. Die von den Investoren geforderte Risikoprämie ist jedoch implizit im Aktienkurs enthalten. Der Wert der Option ändert sich durch die gleichzeitige Verwendung von Pseudowahrscheinlichkeiten und risikofreiem Zinssatz anstelle von effektiven Wahrscheinlichkeiten und risikogerechten Renditeforderungen nicht.[28]

Für bestimmte praktische Anwendungen, aber auch zur Gewinnung eines vertieften Verständnisses des OPM-Ansatzes, ist ein Blick auf die bei expliziter Berücksichtigung der Risikoaversion notwendigen Modellmodifikationen sinnvoll. Dazu werden zusätzlich die Formeln benötigt, welche Risikoaversion berücksichtigen (vgl. Tab. 8). Der risikogerechte Diskontierungssatz sei im Beispiel für den aktuellen Aktienwert S mit $k_S = 10\,\%$ und der risikofreie Zinssatz mit $5\,\%$ berücksichtigt.[29]

Die risikogerechte Renditeerwartung für den Call k_c ist $26\,\%$ (26% = 5% + 4.2 · 5%). Dies entspricht einem Risikozuschlag von $k_c - i = 21\,\%$ (im Vergleich Aktie $k_s - i = 5\,\%$). Dies deshalb, weil das Downside der Option 4.2 mal so gross ist wie jenes der Aktie.[30] Im Vergleich zu einer sicheren Anlage liegt die Aktienrendite im negativen Fall mit $-20\,\%$ um $25\,\%$-Punkte unter dem risikofreien Zinssatz von $5\,\%$. Für die Option macht dies $-100\,\%$ (Totalverlust) bzw. $-105\,\%$ im Vergleich zu einer sicheren Anlage aus. Das Downside der Option ($-105\,\%$) beläuft sich somit auf das 4.2-fache desjenigen der Aktie ($-25\,\%$): $(-105)/(-25) = 4.2$.

Der risikogerechte Kapitalkostensatz der Call-Option k_c wird mit der folgenden Formel berechnet:[31]

$$k_c = i + \frac{(k_s - i) \cdot (1 + i)}{i - r(down)} \tag{25}$$

$$k_c = 0.05 + \frac{(0.10 - 0.05) \cdot 1.05}{0.05 + 0.20} = 0.26 \rightarrow 26\,\% \tag{26}$$

Das Upside des Calls macht ebenfalls das 4.2-fache desjenigen der Aktie aus, nämlich $\frac{25 - 13.2}{13.2} - 0.05 \approx 0.84 \rightarrow 84\,\%$ im Vergleich zu *25% - 5% = 20%*.[32]

Die Call-Preisformel für risikoaverse Investoren lässt sich nun durch Ersetzen von k_c in die Formel für risikoneutrale Investoren (vgl. Formel (10)) überführen:

$$C = \frac{\tilde{p} \cdot (S(up) - X)}{(1 + k_c)} \tag{27}$$

$$= \frac{\tilde{p} \cdot (S(up) - X)}{1 + i + \frac{(k_s - i) \cdot (1 + i)}{i - r(down)}} = \frac{\tilde{p} \cdot (S(up) - X) \cdot (i - r(down))}{(1 + i) \cdot (i - r(down) + k_s - i)} = \frac{\tilde{p} \cdot (S(up) - X) \cdot (i - r(down))}{(1 + i) \cdot (k_s - r(down))} \tag{28}$$

Wenn man $\tilde{p}$ durch $p \cdot \frac{k_s - r(down)}{i - r(down)}$ ersetzt, erhält man für C:

$$C = \frac{(p \cdot k_s - r(down) \cdot (S(up)) - X)) \cdot (i - r(down))}{(i - r(down)) \cdot (1 + i) \cdot (k_s - r(down))} = \frac{p \cdot (S(up) - X)}{(1 + i)} \tag{29}$$

Die Anwendung eines für die risikoaverse Welt modifizierten Optionspreismodells ermöglicht in bestimmten Anwendungen erweiterte Einsichten. Dies ist beispielsweise im Zusammenhang mit der Analyse risikobehafteter Fremdkapitalkontrakte, insbesondere Bankkredite und Anleihen, der Fall.[33] Die Kreditvergabe einer Bank ist stets mit einer impliziten Put-Option (Put short für die Bank) verbunden, da das Management bzw. die Eigner der kreditnehmenden Gesellschaft (Annahme: Kapitalgesellschaft) unter Umständen ihren Schuldverpflichtungen nicht nachkommen und die Gesellschaft in Konkurs gehen lassen. In diesem Fall geht die Gesellschaft an die Gläubiger über (Ausübung dieser Put-Option). Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses – des sogenannten "default" – entspricht nun theoretisch der *tatsächlichen* Ausübungswahrscheinlichkeit der im Kredit implizit enthaltenen Put-Option.[34] Die im B/S-Modell bzw. im risikoneutralen DCF-Ansatz auftretende Pseudowahrscheinlichkeit würde hier zu einer falschen,

d.h. zu optimistischen Einschätzung führen.

Tabelle 8: Vergleich zwischen den risikoneutralen und risikoaversen Formeln

risikoneutral (einstufig)	**risikoavers (einstufig)**
$S = \frac{p \cdot S(up) + (1-p) \cdot S(down)}{(1+i)}$	$S = \frac{\tilde{p} \cdot S(up) + (1-\tilde{p}) \cdot S(down)}{(1+k_s)}$
$p = \frac{i - r(down)}{r(up) - r(down)}$	$\tilde{p} = \frac{k_s - r(down)}{r(up) - r(down)}$
Beispiel: $p = \frac{0.05 + 0.20}{0.45} = \frac{5}{9}$	Beispiel: $\tilde{p} = \frac{0.10 + 0.20}{0.45} = \frac{2}{3}$
Beispiel: $S = \frac{\frac{5}{9} \cdot 125 + \frac{4}{9} \cdot 80}{1.05} = 100$	Beispiel: $S = \frac{\frac{2}{3} \cdot 125 + \frac{1}{3} \cdot 80}{1.10} = 100$
$C = \frac{p \cdot (S(up) - X)}{(1+i)}$	$C = \frac{\tilde{p} \cdot (S(up) - X)}{(1+k_s)}$
Beispiel: $C = \frac{\frac{5}{9} \cdot (125 - 100)}{1.05} \approx 13.2$	Besipiel: $C = \frac{\frac{2}{3} \cdot (125 - 100)}{1.26} \approx 13.2$

G. Quervergleich der betrachteten Parameter in Bezug auf die “moneyness” einer Option

Die in den Abschnitten C und D betrachteten Optionsbewertungsansätze im Rahmen einer einstufigen binomiellen Optionsbewertung werden nachfolgend zusätzlich in Bezug auf die “moneyness” der Option (in-the-money, at-the-money, out-of-the-money) miteinander verglichen.[35]

Im Beispiel gemäss Abschnitt C und D ergaben sich folgende Werte:[36]

Replikation $C = 100 \cdot \frac{5}{9} - 80 \cdot \frac{5}{9} = 55.55 - 44.44 = 11.11$ (Delta = $\frac{125 - 100}{125 - 80} = \frac{5}{9}$)

Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $C = 100 \cdot \frac{5}{9} - 100 \cdot \frac{4}{9} = 55.55 - 44.44 = 11.11$ (X=100)

Im Beispiel wurden $i = 0\%$ und $X = S$ (at-the-money) angenommen, um die Vergleichbarkeit der numerischen Herleitungen zu erleichtern. Ändert man nun beispielsweise den Ausübungspreis auf $X = 110$ (out-of-the-money), so ergeben sich folgende Call-Werte:

Replikation $C = 100 \cdot \frac{1}{3} - 80 \cdot \frac{1}{3} = 33.33 - 26.66 = 6.66$ $\left(\text{Delta} = \frac{125-110}{125-80} = \frac{1}{3}\right)$

Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $C = 100 \cdot \frac{5}{9} - 110 \cdot \frac{4}{9} = 55.55 - 48.88 = 6.66$ (X=110)

Senkt man den Ausübungspreis auf $X = 90$ (in-the-money), so ergeben sich folgende Call-Werte:

Replikation $C = 100 \cdot \frac{7}{9} - 80 \cdot \frac{7}{9} = 77.77 - 62.22 = 15.56$ $\left(\text{Delta} = \frac{125-90}{125-80} = \frac{7}{9}\right)$

Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $C = 100 \cdot \frac{5}{9} - 90 \cdot \frac{4}{9} = 55.55 - 40 = 15.56$ (X=90)

Beide Ansätze führen ungeachtet der “moneyness” der Option zum selben Resultat, aber die Summanden der jeweiligen Berechnungen stimmen, wenn die Option nicht at-the-money ist,[37] nicht mehr überein. Bei der Replikation ändert sich nur das Delta, die anderen Werte bleiben konstant, wohingegen bei der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten die Wahrscheinlichkeiten konstant bleiben und sich nur der zweite Term mit dem Ausübungspreis ändert.

H. Zusammenfassung

Das Ziel unseres Beitrags war es, die Zusammenhänge zwischen den Binomialmodellen der Optionsbewertung (Replikation bzw. Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten) und dem Black/Scholes Modell mathematisch sowie intuitiv darzustellen.

In Abschnitt 2 wurde deshalb die grundsätzliche, für alle Ansätze geltende Formel aufgezeigt:

$$C = S \cdot \Delta - Leverage \text{ bzw.} \tag{30}$$

$$C = S \cdot \Delta - PV(X) \cdot p \tag{31}$$

Die Call-Option entspricht grundsätzlich einer long Position in einem bestimmten Anteil des Underlying (Delta) sowie einer short Position in einem risikolosen Bond (Leverage). Die für die Bewertung entscheidenden Parameter sind das Delta (Δ) bzw. die Pseudowahrscheinlichkeit (p).

Tabelle 9: Überblick über die Modellparameter

Modellierung der Zeit	**Ansatz**	**Delta**	**Pseudowahrscheinlichkeit**
1-stufig	Replikation	$\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$	$\frac{\frac{S}{X} - d}{u - d}$
	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$p' = \frac{p \cdot u}{(1+i)}$	p
mehrstufig	Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten	$\Phi[a;n,p']$	$\Phi[a;n,p]$
stetig	B/S-Modell	$N(d_1)$	$N(d_2)$

Dies gilt für alle behandelten Ansätze gleichermassen, ist jedoch nicht in jedem Fall direkt ersichtlich. Bei der Replikation wird das Delta, bei der Methode der risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten die Pseudowahrscheinlichkeit unmittelbar ersichtlich. In der B/S-Formel werden beide Grössen direkt ersichtlich. Deshalb wurde in den Abschnitten C, D und E gezeigt, dass die Unterschiede zwischen den verschiedenen Optionsbewertungsansätzen sowohl in der Herleitung und Berechnung der einzelnen Parameter Delta und des Leverage bzw. der Pseudowahrscheinlichkeit als auch auf der unterschiedlichen Modellierung der Zeit beruhen. Tabelle 9 soll dies zusammenfassend verdeutlichen.
In Abschnitt F wurden zusätzlich der risikogerechte Kapitalkostensatz einer Call-Option und die effektiven Ausübungswahrscheinlichkeiten ausserhalb der risikoneutralen Modellwelt gezeigt sowie deren praktische Aussagekraft anhand eines Beispiels (Kreditvergabe) erläutert. Abschliessend zeigte Abschnitt G einen Quervergleich der Modellparameter über die “moneyness” einer Option.

Anmerkungen

* Rudolf Volkart, Prof. Dr. oec. publ., ist Ordinarius für Betriebswirtschaftslehre und Direktor des Swiss Banking Institute der Universität Zürich. Luba Rousseva, lic. rer. pol., sowie Markus Zeder, lic. oec. publ., sind Research Assistants am Swiss Banking Institute der Universität Zürich.
Wir möchten Wolfgang Bauer für seine hilfreichen Kommentare und Verbesserungsvorschläge besonders danken.

1) Eine didaktisch integrierte Darstellung findet sich beispielsweise in Volkart (2001), S. 77-100 sowie S. 253-288.
2) Vgl. Jouini (2001).
3) Bei imperfekten Märkten kann sich der Preis vom Wert eines Gutes unterscheiden, weshalb in diesem Beitrag der theoretisch gültige Wert als Optionswert bezeichnet wird.
4) In der Fachliteratur wird auch oft der synonyme Begriff "martingale probabilities" verwendet.
5) In der Praxis erreichen bereits 100-stufige Binomialmodelle eine sehr gute Näherung.
6) Vgl. Black/Scholes (1973).
7) Vgl. Hull (2003), S. 410-414 sowie S. 418-427.
8) Entsprechend der Modellierung der Zeit wird ein diskreter oder kontinuierlicher Zinssatz angewandt.
9) Am Verfalltag besteht keine Unsicherheit. Insofern sind für den Optionswert nur noch der Kurs des Underlying am Verfall und der Ausübungspreis entscheidend.
10) Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979).
11) Die mathematische Begründung dieser Aussage sowie eine weitere gründliche Ausführung über die Zusammenhänge zwischen risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmassen und Ausschluss von Arbitrage werden in der Fachliteratur zu diesem Thema behandelt. Vgl. beispielsweise Jouini (2001).
12) Die B/S-Formel wird ausführlich in Abschnitt E behandelt.
13) "Free Lunches" sind risikofreie Kapitalgewinne, welche ohne Investition von Geld (Bezahlung) realisiert werden können.
14) Die ausführliche Herleitung befindet sich in Anhang A.

15) Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten werden auch “Pseudowahrscheinlichkeiten” genannt. Die Bezeichnung bringt zum Ausdruck, dass es sich nicht um die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten, sondern um ModellWahrscheinlichkeiten handelt.

16) Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979), S. 239.

17) u=1.171, d=0.854, $C = \frac{0.21 \cdot (137.1 - 100)}{(1+0)} = 7.87$

18) u=1.137, d=0.879, $C = \frac{0.10 \cdot (147.1 - 100) + 0.36 \cdot (113.7 - 100)}{(1+0)} = 9.63$

19) Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979), S. 239.

20) a ist die kleinste nichtnegative Zahl, die grösser als $Log\left(\frac{X}{Sd^n}\right) / Log\left(\frac{u}{d}\right)$ ist. Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979), S. 239.

21) Bei einer Betrachtung des Binomialmodells mit unendlich vielen Stufen konvergiert die Binomialverteilung zur Normalverteilung. Die B/S-Formel und die Binomialformel bestehen aus den gleichen Elementen:

B/S-Fomel: $C = S \cdot N(d_1) - PV(X) \cdot N(d_2)$

Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten: $C = S \cdot \Phi[a;n,p'] - PV(X) \cdot \Phi[a;n,p]$,

Sowohl das Delta als auch die Pseudowahrscheinlichkeit sind bei beiden Ansätzen unter gewissen Voraussetzungen äquivalent, d.h. es kann gezeigt werden, dass: $\Phi[a;n,p'] \to N(d_1)$ und $\Phi[a;n,p] \to N(d_2)$. Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979).

22) Die Volatilität entspricht aus Sicht des CAPM dem systematischen und unsystematischen Risiko.

23) D.h. bei steigender Anzahl Binomialstufen verkleinert sich der Wert von u pro Zeitabstand und entspricht somit eher einer kontinuierlichen Betrachtung mit unendlich kleinen Veränderungen.

24) Bei Anwendung eines in der Praxis oft üblichen diskreten Zinssatzes kann dieser zuerst in einen kontinuierlichen Zinssatz umgerechnet oder direkt mit folgenden Formeln angewandt werden:

$C = S \cdot N(d_1) - \frac{X}{(1+i)^t} \cdot N(d_2)$, wobei $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{PV(X)}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{t}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{t}}{2}$ sowie $d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$.

In Zeder (2000) ist die Überleitung der Formel bei diskreter Verzinsung in die Formel bei stetiger Verzinsung erläutert.

25) Es verbleibt somit nur der risikolose Zinssatz.

26) Falls $N(d_1) \approx N(d_2) \approx 1$ beträgt die Wahrscheinlichkeit natürlich auch 1.

27) Der risikogerechte Diskontierungssatz (Kapitalkostensatz) entspricht gemäss CAPM der von den Investoren erwarteten Rendite. Selbstverständlich ist der risikolose Zinssatz in einer risikoneutralen Welt (Optionspreistheorie) in dem Sinne risikogerecht, als die Risikoprämie gleich Null ist.

28) Der Leser mag sich in Analogie dazu an ein Corporate Finance Konzept erinnern – die sogenannten certainty equivalents (CEQ). Bei einer Unternehmensbewertung kann man den Net Present Value des Unternehmens ermitteln, indem man entweder die erwarteten Cash Flows mit dem risikogerechten Kapitalkostensatz des Unternehmens diskontiert oder indem man die erwarteteten Cash Flows in Sicherheitsäquivalente (certainty equivalents) umrechnet und diese anschliessend mit dem risikolosen Kapitalkostensatz diskontiert. Vgl. Volkart (2003), S. 186-188.

29) Der resultierende Optionswert entspricht deshalb nicht mehr dem im Beispiel zuvor ermittelten Wert (mit $i = 0\,\%$).

30) Dieses Downside ist von dem in den vorherigen Abschnitten besprochenen verschieden, da jetzt $i = 5\,\%$ angenommen wurde.

31) Durch Umformen von Formel (25): $k_c = i + \frac{(1+i)}{i - r(down)} \cdot (k_s - i) = 0.05 + 4.2 \cdot 0.05 = 0.26$ kann die Analogie zur obenstehenden Berechnung der risikogerechten Renditeerwartung gezeigt werden.

32) k_c lässt sich auch wie folgt definieren: $k_c = i + \frac{(k_s - i) \cdot (1 + k_c)}{k_s - r(down)}$ d.h. $0,05 + \frac{0,05 \cdot 1,26}{0,3} = 0,26 \rightarrow 26\,\%$. Der Beweis hierzu wird in Anhang B geführt.

33) Vgl. dazu die ausführlichen Darlegungen in Volkart (2001) S. 49-76.

34) Anknüpfend an die vorhergehenden Ausführungen kann diese Put-Option über die Put-Call-Parität auch als Call-Position interpretiert werden.

35) Der folgende numerische Vergleich beschränkt sich auf die einstufige Binomialbetrachtung, deren Ansätze aufgrund derselben Modellierung der Zeit dieselben Optionswerte ergeben. Aufgrund der stetigen Modellierung der Zeit weicht der Optionswert des B/S-Modell von den beiden vorher genannten ab und lässt daher keinen numerisch exakten Vergleich zu.

36) Rechts neben den Optionswerten wird der jeweils einzige, sich ändernde Term speziell hervorgehoben.

37) Dies gilt für das Beispiel mit einem $i = 0\%$. Genauer und allgemeiner ist folgende Bedingung: die Option ist leicht out-of-the-money, indem der Ausübungspreis gerade $X = S(1+i)^t$ beträgt bzw. $PV(X) = \frac{X}{(1+i)^t} = S$ entspricht.

Literaturverzeichnis

BLACK, F. / SCHOLES, M. (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, 81 (May-June 1973), S. 637-654.

COX, J. C. / ROSS, S. A. / RUBINSTEIN, M. (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, in: Journal of Financial Economics, September 1979, S. 229-263.

HULL, J. C. (2003): Options, Futures and other Derivatives, 5th edition, Prentice Hall International Editions, London.

JOUINI, E. (2001): Arbitrage and Control Problems in Finance, in: Journal of Mathematical Economics, 35 (2001), S. 167-183.

NEFTCI, S. N. (2000): An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, 2nd edition, Academic Press.

SUNDARAM, R. K. (1997): Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing: An Expository Note, in: The Journal of Derivatives, Fall 1997, S.85-98.

VOLKART, R. (2001): Kapitalkosten und Risiko – Cost of Capital als zentrales Element der betrieblichen Finanzpolitik, Versus Verlag, Zürich.

VOLKART, R. (2003): Corporate Finance – Grundlagen von Finanzierung und Investition, Versus Verlag, Zürich.

ZEDER, M. (2000): Optionsbewertung nach Black/Scholes – Diskrete vs. stetige Verzinsung, Arbeitspapier Swiss Banking Institute, Zürich.

Anhang

A. Der Leverage bei der Replikationsmethode

Die Herleitung erfolgt über einige einfache Umformungsschritte. Ausgehend von

$$Leverage = \frac{S(up) - X}{S(up) - S(down)} \cdot \frac{S(down)}{(1+i)} \tag{32}$$

erhält man über

$$Leverage = \frac{S \cdot u - X}{S \cdot u - S \cdot d} \cdot \frac{S \cdot d}{(1+i)} \tag{33}$$

$$Leverage = \frac{S \cdot u \cdot d - \frac{S \cdot d \cdot X}{S}}{u - d} \cdot \frac{1}{(1+i)} \tag{34}$$

$$Leverage = \frac{S - d \cdot X}{u - d} \cdot \frac{1}{(1+i)} \tag{35}$$

$$Leverage = \frac{\frac{S}{X} - d}{u - d} \cdot \frac{X}{(1+i)} = PV(X) \cdot \left[\frac{\frac{S}{X} - d}{u - d}\right] \tag{36}$$

schliesslich die in Tabelle 7 gezeigte Formel.

B. Der Kapitalkostensatz der Option

Beweis: Durch Umformen kann die Formel

$$k_c = i + \frac{(k_s - i) \cdot (1 + k_c)}{k_s - r(down)} \tag{37}$$

in die Formel (25) überführt werden:

$$k_c \cdot (k_s - r(down)) = i \cdot (k_s - r(down)) + (k_s - i) + k_c \cdot (k_s - i) \tag{38}$$

$$k_c \cdot (k_s - r(down) - k_s + i) = i \cdot (k_s - r(down)) + (k_s - i) \tag{39}$$

$$k_c = \frac{i \cdot (k_s - r(down)) + (k_s - i)}{i - r(down)} = \frac{i \cdot (k_s - i - r(down) + i)}{i - r(down)} + \frac{k_s - i}{i - r(down)} \tag{40}$$

$$= \frac{i \cdot (k_s - i)}{i - r(down)} + \frac{i \cdot (i - r(down))}{i - r(down)} + \frac{k_s - i}{i - r(down)} = i + \frac{(k_s - i) \cdot (1 + i)}{i - r(down)} \tag{41}$$

Summary

The aim of the paper is to present an intuitive and mathematical view of the connections between the parameters of two option pricing models - the binomial model (replication and risk neutral method) and the Black/Scholes model. Basically a call option can be replicated by taking a long position in a certain quantity of the underlying (delta) and going short in one unit of a riskless bond (leverage). The parameter delta (Δ) and the risk neutral probability (p) are the two value relevant parameters in the discussed option pricing models but not both of them are always obviously recognized. Therefore we showed that the differences between the models arise due to the derivation of the parameters delta, the leverage and the risk neutral probability resp. and the time concept. In addition the risk adjusted cost of capital of a call option and the real probability of exercise are presented under relaxing the assumption of risk neutrality. A sensitivity analysis of the option pricing parameters with respect to the moneyness of the option is shown in the last section of the paper.

Universität Zürich
Institut für schweizerisches Bankwesen

Working Paper Serie

In der Working Paper Serie werden gegenwärtig aktuelle Research-Projekte auszugsweise vorgestellt und dem interessierten Publikum zugänglich gemacht.

Working Papers können am Institut für schweizerisches Bankwesen, Plattenstrasse 14, 8032 Zürich zu einem Preis von Fr. 5.-- (zuzüglich Versandkosten und MWST) bezogen werden.

Nr. Autor(en), Titel

1 Christoph Auckenthaler/Alfred Mettler, "Chaos-Theorie und Finanzmarktforschung" (Zürich 1994)

2 Alfred Mettler, "Formalisierte Bonitätsprüfungsverfahren und Credit Scoring" (Zürich 1994)

3 Linard Nadig/Rudolf Volkart, "Marktzinsmethode und betriebliche Investitionsanalyse" (Zürich 1994)

4 Rudolf Volkart, "Wertkommunikation, Aktienkursbildung und Managementverhalten - Kritische Eckpunkte im Shareholder Value-Konzept" (Zürich 1996)

5 Katharina Bibus, "Liquiditätsverhalten von Banken im Rahmen eines Real-Time-Gross-Settlement-Systems: ein spieltheoretischer Ansatz" (Zürich 1996)

6 Rudolf Volkart, "Missverständnisse und Interpretationsprobleme im Zusammenhang mit der Methodenanwendung von DCF-Analysen " (Zürich 1997)

7 Christoph Auckenthaler/Jürg Gabathuler, "Gedanken zum Konzept eines Total Enterprise Wide Risk Management (TERM)" (Zürich 1997)

8 Rudolf Volkart/Peter Labhart/Reto Suter, "Unternehmensbewertung auf 'EVA'-Basis – neue Möglichkeiten der Informationsvertiefung" (Zürich 1997)

9 Rudolf Volkart, "Optionswertbildung und Optionspreistheorie – Versuch einer integrierten 'didaktischen' Darstellung" (Zürich 1998)

10 Rudolf Volkart, "Optionstheoretische Überlegungen zur Kapitalstrukturgestaltung und zur Kreditfinanzierung" (Zürich 1998)

11 Hans Geiger, "Die Zeit der Banken" (Zürich 1998)

12 Peter Lautenschlager/Alfred Mettler/Rudolf Volkart, „Neue Wege für das inländische Kreditgeschäft“ (Zürich 1998)

13 Rudolf Volkart, "Optionstheoretische Analyse von Fremdkapitalkontrakten und alternative Credit Risk Spread-Bestimmung – eine integrierte Darstellung" (Zürich 1999)

14 Rudolf Volkart, „Aktienrückkäufe und Eigenkapitalabsetzungen – Wertkonsequenzen aus analytischer Sicht“ (Zürich, Dezember 1998)

15 Rudolf Volkart, „Adjusted Present Value und Tax Shield im Rahmen des DCF-Konzeptes – Zur analytischen Umsetzung aus theoretischer und praktischer Sicht“ (Zürich, Dezember 1998)

16 Rudolf Volkart, „Risikobehaftetes Fremdkapital und WACC-Handhabung aus theoretischer und praktischer Sicht“ (Zürich, Februar 1999)

17 Rudolf Volkart, „High Yield Debt als Finanzierungsinstrument – Kapitalkosten, Risiko-Rendite-Struktur und Agency-Aspekte“ (Zürich, März 1999)

18 M. Crameri, „Smart Micro Pay – Ein Broker-basiertes Micropayment-Schema zum Bundling von Transaktionen“ (Zürich, März 1999)

19 Hans Geiger, „ Die Risikopolitik der Banken – Eine Vorlage“ (Zürich, August 1999)

20 Rudolf Volkart/Peter Labhart, „Invested Capital & Equity – Kritische Grössen im Rahmen der Wertbetrachtung“ (Zürich, März 2000)

21 Christine Hirszowicz/Dean Jovic, „New BIS Capital Framework“ (Zürich, März 2000)

22 Christine Hirszowicz, „Stellenwert einer wirksamen Bankenaufsicht im Rahmen der internationalen Finanzarchitektur“ (Zürich, Mai 2000)

23 Hans Geiger, „Globalisation and Payment Intermediaion“ (Zürich, Juni 2000)

24 Teodoro Cocca, „Das Zuteilungsdilemma der Emissionsbank-Finanztheoretische und regulatorische Aspekte“ (Zürich, August 2000)

25 Teodoro Cocca/Florian Linner/Marzena Podleswski/Peter Stapfer, „Virtuelle Finanzportale vs. Universalbanken-Sind die Tage der Universalbank gezählt?“ (Zürich, Oktober 2000)

26 Hans Geiger, „Regulating and Supervising Operational Risk for Banks“ (Zürich, November 2000)

27 Hans Geiger, „ Lob dem Geld: Zur Effizienz des Handels und Bezahlens“ (Zürich, November 2000)

28 Teodoro Cocca/Rudolf Volkart, „Aktionärsverhalten in der Schweiz“ (Zürich, Mai 2001)

29 Christoph Auckenthaler/Reto Rauschenberger/Stephan Skaanes, „Mehrwert für Aktionäre von ISO 14001-zertifizierter Unternehmen“ (Zürich, Mai 2001)

30 Christine Hirszowicz, „Fiskalpolitischer Aktivismus auf internationaler Ebene: kostspielig und ineffizient“ (Zürich, Mai 2001)

31 Teodoro D. Cocca/Peter Csoport, “Positionierung des schweizerischen Bankwesens im internationalen Strukturwandel des Finanzsektors - Hypothesen, Visionen und Strategien für die Zukunft“ (Zürich, Januar 2002)

32 Peter Csoport/Florian Linner, “Shareholder Value: Instrument zur Nutzenmaximierung des Managements?” (Zürich, August 2002)

33 Christoph Auckenthaler/Stephan Skaanes/Cristina Marin, „Hedge Funds im Urteil von Anbietern und Investoren: Eine kritische Analyse“ (Zürich, November 2002)

34 Christoph Auckenthaler/Stephan Skaanes, „Stabilität der Korrelationen bedeutender Anlageklassen“ (Zürich, März 2003)

35 Luba Rousseva/Rudolf Volkart/Markus Zeder, „Intuitive Betrachtung der Zusammenhänge wichtiger Optionsbewertungsansätze“ (Zürich, Januar 2004)

36 Géza Kovács/Markus Zeder, „Underpricing von Bonds im Emissionszeitpunkt“ (Zürich, Dezember 2003)