

Deissenberg, Christophe

**Working Paper**

## Globale Optimalität kurzsichtiger Entscheidungen unter Unsicherheit

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 160

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Deissenberg, Christophe (1981) : Globale Optimalität kurzsichtiger Entscheidungen unter Unsicherheit, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 160, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/75136>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

*Mein*

FAKULTÄT FÜR  
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND STATISTIK  
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Globale Optimalität kurzfristiger  
Entscheidungen unter Unsicherheit

Christophe Deissenberg

Serie A — Nr. 160

DISKUSSIONSBEITRÄGE

22. MRZ 1981  
Weltwirtschaft  
Kiel

D-7750 Konstanz  
Postfach 5560

20. AUG. 1981 Weltwirtschaft  
Kiel *lyx*

Volkswirtschaftliche Beiträge

Serie A - Nr. 160

Globale Optimalität kurzsichtiger  
Entscheidungen unter Unsicherheit

von

Christophe Deissenberg

Serie A - Nr. 160

Juli 1981

Serie A: Volkswirtschaftliche Beiträge

Serie B: Finanzwissenschaftliche Arbeitspapiere

Serie C: Betriebswirtschaftliche Beiträge

Referat für die Arbeitstagung des Vereins für Socialpolitik

"Information in der Wirtschaft" in Graz, 21. - 23. September 1981

## 1. Einführung

In dynamischen Optimierungsmodellen der Wirtschaftstheorie ist die Zielfunktion üblicherweise als Zielfunktional definiert, das den Prozessverlauf über die gesamte relevante Prozessdauer  $[0, N]$  mit  $N$  sehr groß oder unendlich bewertet. Derartigen globalen Optimierungsmodellen liegt die Vorstellung zugrunde, daß der Entscheidungsträger in seinem Optimierungskalkül in jedem Zeitpunkt  $n \in [0, N]$  alle erwarteten Folgen über die Restprozeßdauer  $[n, N]$  seiner laufenden Entscheidung bei zukünftigen optimalen Entscheidungen berücksichtigt. Er zieht also bei seiner Strategiewahl auch solche Ereignisse und Entwicklungen in Betracht, die in weitentfernter und unsicherer Zukunft liegen. So wird z.B. in Lebenszyklusmodellen davon ausgegangen, daß bereits die bei der Geburt eines Individuums anfallenden Entscheidungen optimal in Bezug auf den ganzen folgenden Lebensverlauf getroffen werden.

Indessen wird seit langem kritisch angemerkt - man vergleiche zum Beispiel MODIGLIANI und COHEN [1961], KOOPMANS [1967] -, daß in der ökonomischen Praxis nur die relativ nahe Zukunft bei der Entscheidungsbildung berücksichtigt wird. Eine derartige kurzsichtige Optimierung bedeutet formal, daß in jedem Zeitpunkt  $n$  eine Zielfunktion  $J_n$  dem Entscheidungskalkül zugrundeliegt, die lediglich das Ergebnis der unmittelbar folgenden Perioden bewertet. Dies etwa, weil die Information, die für eine globale Optimierung notwendig wäre,

übermäßig umfangreich ist. Typisches Beispiel kurzsichtiger Optimierung ist etwa die "gleitende Planung" der Wirtschaftspolitik.

Somit stellt sich unmittelbar die Frage, ob kurzsichtige Optimierung, also die sequentielle Optimierung einer Folge  $\{J_n\}_{n \in [0, N]}$  von kurzsichtigen Zielfunktionen  $J_n$ , zu einem im Sinne eines über  $[0, N]$  definierten Zielfunktional global optimalen Ergebnis führt oder nicht. Bislang ist dies nur für wenige spezifische Modelle geprüft worden. So untersucht LANDAU [1976] die Beziehungen zwischen globaler und kurzsichtiger Optimierung für ein deterministisches Preisfixierungsmodell, in dem es darum geht, den kumulierten Gewinn zu maximieren. Schon viel früher hat MOSSIN [1968] eine ähnliche Fragestellung im Rahmen eines deterministischen Investitionsmodells mit Endvermögensmaximierung untersucht. Sein Modell kann als Spezialfall des klassischen portfolio Modells mit logarithmischer Nutzenfunktion und einem neutralen asset von ARROW [1971] angesehen werden. Ferner ist die globale Optimalität kurzsichtiger Optimierung bei verschiedenen Modellen der Unternehmensforschung nachgewiesen worden, so z.B. bei Lagerhaltungsmodellen, man vergleiche etwa VEINOTT [1965].

Erst in jüngster Zeit allerdings hat TEFATSION [1980a,b], [1981] den Versuch unternommen, Bedingungen für die Äquivalenz von kurzfristiger und globaler Optimierung im Rahmen eines allgemeinen stochastischen Ansatzes mit diskreter Zeit und zeitadditivem Zielfunktional systematisch aufzustellen und zu untersuchen. Methodischer Ausgangspunkt in Tefatsions Ansatz ist die Feststellung, daß im zeitadditiven Fall die

global optimale Entscheidung in jedem Zeitpunkt  $n$  aus der Lösung eines statischen Optimierungsproblems folgt, d.h. genauer, aus der Optimierung der entsprechenden Funktionalgleichung der Dynamischen Programmierung  $T_n$ . In diesem Fall ergibt sich die optimale Lösung des globalen Optimierungsproblems genauso wie die optimale Lösung des kurzsichtigen Problems aus der sequentiellen Optimierung einer Folge von statischen Problemen. Da sich das kurzsichtige und das globale Problem nur in der Formulierung der Zielfunktion unterscheiden, die zu beachtenden Nebenbedingungen aber dieselben sind, ist somit für die Äquivalenz von kurzsichtiger und globaler Optimierung offensichtlich hinreichend und außer in degenerierten Fällen notwendig, daß in jedem Zeitpunkt  $n$  das globale Teilproblem  $T_n \rightarrow \max$  und das momentane kurzsichtige Problem  $J_n \rightarrow \max$ , zu derselben optimalen Entscheidung für die Periode  $n$  führen.

Unter Anwendung dieser Grundidee hat Tesfatsion (wie bereits erwähnt) allgemeine Bedingungen abgeleitet, die für die Äquivalenz von kurzsichtiger und globaler Optimierung in einer stochastischen Umgebung hinreichend sind. Diese Bedingungen erfordern eine gewisse "positive ökonomische Korrelation" zwischen dem Beitrag einer Periode und den Beiträgen der folgenden Perioden zum Gesamtwert des Zielfunktional. Oder anders ausgedrückt, sie sichern, daß das Ergebnis der kurz-sichtigen Optimierung in jeder Periode zu einem für die globale Zielsetzung "günstigen" Zustand führt. Eine solche positive Korrelation liegt zum Beispiel bei bestimmten Typen von Investitions/Produktionsmodellen vor, in denen es darum geht, den Output zu maximieren: Eine hohe Produktion/Investition

in einer Periode garantiert, daß in der nächsten Periode die Produktion noch höher werden kann. Oft wird allerdings die Korrelation unvollständig sein in dem Sinne, daß die Ergebnisse der kurzsichtigen Optimierung zwar in die Nähe globaler Optimalität führen, daß die Korrelation jedoch nicht ausreicht, um die exakte Äquivalenz von kurzsichtiger und globaler Optimierung sicherzustellen.

Das wesentliche Anliegen dieses Referats ist die Ableitung, und vor allem die Erörterung und Illustration der Bedingungen für eine exakte Äquivalenz von kurzsichtiger und globaler Optimierung. Die darüber hinausreichenden und in mancher Hinsicht noch interessanteren Fragen danach, wann eine kurzsichtige Politik annähernd global optimal ist oder welcher Verlust durch die Befolgung einer kurzsichtigen Politik entsteht, können hier nicht behandelt werden; vgl. dazu jedoch TEFATSION [1980a], [1981]. Im einzelnen ist diese Arbeit folgendermaßen organisiert. In Teil 2 wird der Anschaulichkeit halber Tefatsions Ansatz im deterministischen Fall durchgeführt. In Teil 3 wird das später zugrundegelegte allgemeine stochastische Modell begründet. Es wird gezeigt, daß dieses Modell zahlreiche ökonomische Modelle als Spezialfall einschließt, insbesondere die erwähnten Modelle von ARROW [1971] und LANDAU [1976]. In Teil 4 werden die wichtigsten Äquivalenzsätze abgeleitet und die Bedingungen für die Äquivalenz kurzsichtiger und globaler Optimierung an Hand verschiedener ökonomischer Modelle demonstriert. Teil 5 ist abschliessenden Bemerkungen gewidmet.



## 2. Das deterministische Problem

Um den hier verfolgten Ansatz in einem noch leicht überschaubaren Rahmen zu demonstrieren, betrachten wir zunächst den deterministischen Fall. Speziell nehmen wir an, das zu optimierende dynamische System sei beschrieben durch das deterministische Prozessmodell:

$$x_{n+1} = f_n(v_n, x_n) \quad , \quad n = 0, \dots, N \quad (1a)$$

$$x_0 = \bar{x} \quad (1b)$$

mit

$x_n$  = Zustand in  $n$ ,  $x_n \in R^q$ ,

$v_n$  = Kontrolle (Entscheidung) in  $n$ ,  $v_n \in V_n \subset R^r$ ,

$V_n$  = zulässiger Kontrollbereich in  $n$ , der auch von  $x_n$  darf,

$f_n: R^r \times R^q \rightarrow R^q$  = Übergangsfunktion in  $n$ .

a) Globale Optimierung von (1) ist dann gegeben, wenn die Zielfunktion als Zielfunktional das Gesamtverhalten von (1) über  $n = 0, \dots, N$  bewertet. Das globale deterministische Optimierungsproblem GD lautet dann unter der Annahme, das Zielfunktional sei zeitadditiv:

$$(GD) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \sum_{n=0}^N W_n(v_n, x_n) \rightarrow \max_{v^N \in V^N} \quad (2) \\ \text{unter den Nebenbedingungen (1),} \end{array} \right.$$

mit

$$v^N \equiv (v_0, \dots, v_N),$$

$$V^N \equiv V_0 \times V_1 \times \dots \times V_N,$$

$$W_n: R^r \times R^q \rightarrow R,$$

wobei  $W^n$  eine reellwertige Perioden-Bewertungsfunktion ist.

Die Struktur, die durch GD beschrieben wird, ist sehr allgemein und enthält als Spezialfälle zahlreiche (statische und dynamische) deterministische Modelle der Wirtschaftstheorie. Als wichtige Ausprägung von GD sei das sog. N-stufige Endwertproblem erwähnt, bei dem nur der Endzustand  $x_N$  und gegebenenfalls die letzte Entscheidung  $v_N$  bewertet wird ( $W_n \equiv 0$  für  $n \neq N$ ). Es handelt sich um ein nicht-triviales Globalproblem, da  $x_n$  in der Regel vom gesamten Systemverhalten vor der Periode  $N$  abhängt.

b) (Rückführung des globalen Optimierungsproblems auf die rekursive Optimierung einer Sequenz statischer Optimierungsprobleme). Aus der Theorie der Dynamischen Programmierung (BELLMAN [1957]) ist bekannt, daß die optimale Lösung von GD (bzw. im Falle mehrfacher Optima: die Menge der optimalen Lösungen von GD),  $v^{N*}$ , rekursiv als Lösung einer Sequenz von  $N+1$  statischen Optimierungsproblemen  $PD_n$  ermittelt werden kann:

$$\begin{aligned} (PD_n) \quad T_n(v_n, x_n^*) &= W_n(v_n, x_n^*) + T_{n+1}^*(f_n(v_n, x_n^*)) \\ &\rightarrow \max_{v_n \in V_n} \quad , \quad n = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

mit

$$T_n^* = \max_{v_n \in V_n} T_n \quad , \quad n = 0, \dots, N \quad (4a)$$

$$T_{N+1}^* = 0 \quad , \quad (4b)$$

$$x_{n+1}^* = f_n(v_n^*, x_n^*) \quad , \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (5a)$$

$$x_0^* = x_0 = \bar{x} \quad , \quad (5b)$$

$$v_n^* = \max_{v_n \in V_n}^{-1} T_n \quad , \quad n = 0, \dots, N \quad (6)$$

Die Funktion  $T_n$  bewertet die Auswirkungen jeder Entscheidung  $v_n$  auf den globalen Zielerreichungsgrad über die Restprozessdauer, d.h. auf  $\sum_{k=n}^N W_k(\cdot, \cdot)$ , bei gegebenem laufendem Zustand  $x_n$  und bei zukünftig optimalen Entscheidungen über  $n+1, \dots, N$ . Dadurch wird auch die Bestimmung von  $v_n^*$  als Lösung eines statischen Problems möglich.  $T_n^*$  beziffert den optimalen Beitrag der Perioden  $n, \dots, N$  zum Gesamtwert der Zielfunktion und heißt return-to-go (in  $n$ ).

c) Kurzfristige Optimierung von (1) bedeutet, daß in jeder Periode  $n = 0, \dots, N$  der Entscheidungsträger das statische Problem  $KD_n$  löst.

$$(KD_n) \quad J_n(v_n, x_n^{**}) \rightarrow \max_{v_n \in V_n} \quad (7)$$

mit

$$x_{n+1}^{**} = f_n(v_n^{**}, x_n^{**}) \quad , \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (8a)$$

$$x_0^{**} = x_0 = \bar{x} \quad (8b)$$

$$v_n^{**} = \max_{v_n \in V_n}^{-1} J_n \quad , \quad n = 0, \dots, N \quad (9)$$

und  $J_n: R^q \times R^r \rightarrow R$  eine reellwertige Bewertungsfunktion.

d) (Hinreichende Bedingungen für die Äquivalenz kurz-sichtiger und globaler Optimierung). Aus b) zusammen mit c) erkennt man, daß sowohl die optimale Lösung des globalen Problems als auch die optimale Lösung des kurz-sichtigen Problems durch eine über  $n=0, \dots, N$  definierte Sequenz von statischen Optimierungsproblemen definiert werden können, nämlich durch die Sequenzen  $\{PD_n\}$  resp.  $\{KD_n\}$ . Ein direkter Vergleich beider zeigt unmittelbar, daß die optimale Lösung des kurz-sichtigen Problems dann und nur dann optimal für das globale Problem ist, wenn an der Stelle  $x_n$  sowohl  $J_n$  als auch  $T_n$  beide durch denselben Wert von  $v_n$  maximiert werden,  $n = 0, \dots, N$ . Ansonsten kann die Gestalt von  $J_n$  und die Gestalt von  $T_n$  beliebig abweichen.

Hinreichend dafür, daß  $T_n$  und  $J_n$  ihr Maximum bei demselben Wert von  $v_n$  erreichen, ist, daß  $T_n$  eine strikt wachsende monotone Transformation von  $J_n$  an der Stelle  $\bar{x}_n = x_n^* = x_n^{**}$  ist, d.h.

$$T_n = H_{n+1}(J_n(\cdot, \bar{x}_n)) \quad (10)$$

für eine Funktion  $H_{n+1}: R \rightarrow R$  mit  $H'_{n+1} > 0$ .

Wie wir noch sehen werden, ist die Situation im stochastischen Fall etwas komplizierter. Eine der Gleichung (10) ähnliche Bedingung wird jedoch auch dann eine zentrale Bedeutung haben.

Beispiel: Betrachten wir das sehr einfache - und freilich sehr künstliche - globale "Konsum - Investments" - Problem :

$$\sum_{n=0}^N C_n(I_n, K_n) \rightarrow \max_{I_0, \dots, I_N}$$

unter den Nebenbedingungen

$$K_{n+1} = K_n + I_n, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$K_0 = \bar{K} > 0, \quad ,$$

$$0 < I_n < \alpha K_n, \quad , \quad n = 0, \dots, N,$$

wobei  $C_n = \alpha K_n - I_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ . Man prüft trivialerweise nach, daß für den ökonomisch relevanten Fall  $0 < \alpha < 1$  die optimale Lösung folgendermaßen lautet:

$$I_n^* = \alpha K_n, \quad n \leq \bar{n}, \quad \text{und} \quad I_n^* = 0, \quad n > \bar{n}, \quad \text{für ein } \bar{n} = \bar{n}(\alpha), \quad 0 \leq \bar{n} < N.$$

Es gilt für alle  $n$

$$T_n = \beta_n K_n + \gamma_n I_n,$$

$$T_n^* = \delta_n K_n,$$

mit

$$\beta_{n-1} = \delta_n + \alpha > 0, \quad n = 1, \dots, N$$

$$\beta_N = \alpha,$$

$$\gamma_{n-1} = \delta_{n-1} \begin{cases} < 0, n > \bar{n} \\ > 0, n \leq \bar{n} \end{cases}, \quad n = 1, \dots, N$$

$$\gamma_N = -1, \quad ,$$

$$\delta_n = \begin{cases} \beta_n, & n > \bar{n} \\ \beta_n + \alpha \gamma_n, & n \leq \bar{n} \end{cases}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

$$\delta_N = \alpha.$$

Da  $\gamma_n < 0$  für  $n > \bar{n}$  ( $\gamma_n > 0$  für  $n \leq \bar{n}$ ) gilt, ist  $T_n$  eine strikt monoton wachsende Transformation von  $-I_n(I_n)$ . Aus der hinreichenden Bedingung (10) folgt somit unmittelbar, daß insbesondere die Sequenz kurzfristiger Zielsetzungen  $I_n \rightarrow \min, n > \bar{n}, I_n \rightarrow \max, n \leq \bar{n}$ , in jedem Zeitpunkt  $n$  zu einer Entscheidung  $I_n^{**}$  führt, die auch im Sinne des globalen Problems optimal ist.

### 3. Das stochastische Grundmodell

Unseren weiteren Ausführungen wird das stochastische Grundmodell zugrundegelegt:

$$x_{n+1} = f_n(\omega_n, v_n, x_n) \quad , \quad n = 0, \dots, N \quad (11a)$$

$$x_0 = \bar{x} \quad (11b)$$

mit

$x_n, v_n$  wie vorher definiert,

$f_n: R^s \times R^r \times R^q \rightarrow R^q$  = stochastische Übergangsfunktion in  $n$ ,

$\omega_n$  = stochastisches Störglied in  $n$ ,  $\omega_n \in R^s$ .

Es wird angenommen, daß  $\omega_n$  einer wohldefinierten Übergangswahrscheinlichkeit  $p_n(\cdot | v_n, x_n)$  gehorcht und daß der zulässige Kontrollbereich  $V_n$  durch eine offene Menge in  $R^r$  gegeben ist,  $n = 0, \dots, N$ .

Mit  $\mathcal{I}_n$  soll ferner der Informationszustand in  $n$  bezeichnet werden, d.h., die in der Regel fehlerhafte und unvollständige Information über die Prozessvergangenheit  $(v_0, \dots, v_{n-1}, x_0, \dots, x_n)$ , die dem Entscheidungsträger zur Verfügung steht, wenn  $v_n$

optimiert wird. Es wird angenommen, daß der jeweilige Informationszustand unabhängig davon ist, ob global oder kurzfristig optimiert wird. Die optimale Entscheidung  $v_n^*$  bzw.  $v_n^{**}$  muß kausal sein in dem Sinne, daß sie nicht von (irgendeiner Teilmenge) der zukünftigen beobachteten Prozessentwicklung  $\mathcal{I}_{n+\tau} \cap \mathcal{I}_n, 0 < \tau \leq N-n$ , abhängen darf. Die optimale Entscheidung wird aber in der Regel eine (meßbare) Funktion von  $\mathcal{I}_n$  sein.

$$v_n^* = v^*(\mathcal{I}_n, n), \quad v_n^{**} = v^{**}(\mathcal{I}_n, n) \quad (12)$$

Bemerkung: In der Wirtschaftstheorie wird üblicherweise eine fehlerfreie, vollständige Kenntnis der Prozessvergangenheit angenommen, d.h.,  $\mathcal{I}_0 = \{x_0\}$ ,  $\mathcal{I}_n = \{v_0, \dots, v_{n-1}, x_0, \dots, x_n\}$ ,  $0 < n \leq N$ , und so auch in Tesfatsions Arbeit. Indessen sind in einem stochastischen Kontrollproblem sowohl die  $x_n$  wie auch in der Regel die  $v_n^*$  Zufallsvariablen. Ihr Wert kann dann nicht wie im deterministischen Fall genau vorhergesagt, sondern nur nach ihrer Realisierung durch Beobachtung festgestellt werden. Die Beobachtungen der vergangenen Werte von  $v_n$  und  $x_n$  werden darüber hinaus in vielen Fällen fehlerhaft sein. Dies gilt ganz besonders in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, wo statistisches Material über die relevanten mikro- oder makroökonomischen Variablen oft ungenau ist und verspätet bzw. unvollständig verfügbar wird. Da die optimale Lösung ganz wesentlich von den Annahmen über den Informationszustand abhängt, ist die vereinfachende Annahme fehlerfreier Beobachtungen in der Regel nicht vertretbar. Man vergleiche hierzu etwa BAR-SHALOM und TSE [1976] bzw. in einem ökonomischen Kontext KENDRICK [1981].

Als Zielfunktion des globalen stochastischen Problems nehmen wir an

$$I = E \left[ \sum_{n=0}^N W_n(\omega_n, v_n, x_n) \right] \equiv E[W^N] \quad (13)$$

mit  $W_n: R^S \times R^r \times R^q \rightarrow R$  eine kontinuierliche reellwertige Funktion.

Das globale stochastische Optimierungsproblem GS lautet somit

$$(GS) \quad \left\{ \begin{array}{l} (13) \rightarrow \max_{v^N \in V^N} \\ \text{unter den Nebenbedingungen (11) und den} \\ \text{erläuterten Informationsbeschränkungen.} \end{array} \right.$$

Das Grundmodell GS erweitert GD in offensichtlicher Weise und beschreibt wiederum eine sehr allgemeine Struktur, die zahlreiche ökonomische Optimierungsprobleme als Spezialfälle enthält. TESHATSIION [1980b] zeigt, daß es insbesondere das Team-Modell von Marschak-Radner, das Erwartungsnutzen-Modell von Savage und das Bayes-Entscheidungsmodell einschließt.

Man bemerke ferner, daß GS alle Endwertprobleme einschließt. Im übrigen sind verschiedene Erweiterungen, wie z.B. die Einbeziehung eines stochastischen Anfangszustands  $x_0$ , leicht möglich.

Die Zielfunktion des korrespondierenden kurzfristigen Problems in  $n = 0, \dots, N$  laute schließlich

$$K_n = E[J_n(\omega_n, v_n, x_n)] \quad (14)$$

d.h. auch im kurzfristigen Optimierungsproblem wird ein Erwartungswert optimiert. Die reellwertigen Perioden-Bewertungsfunktionen  $J_n: R^S \times R^r \times R^q \rightarrow R$  sollen kontinuierlich sein.



Es werden nun einige Beispiele globaler ökonomischer Optimierungsprobleme angegeben, die im Format von GS ausgedrückt werden können.

Beispiel I. Portfolio Modell (vgl. ARROW [1971], MOSSIN [1968], KALABA und TEFATSION [1978]).

In jeder Periode  $n = 0, \dots, N$  verteilt ein Anleger sein laufendes Vermögen  $x_n$  auf zwei Investitionsmöglichkeiten A und B. Es sei  $x_0 = \bar{x} > 0$ . Anlage A wirft eine Netto-Ertragsrate  $s_n$ ,  $0 < s_n \leq 1$ , mit Wahrscheinlichkeit  $p_n$ , und  $-s_n$  mit Wahrscheinlichkeit  $1-p_n$  ab; B wirft eine Netto-Ertragsrate  $r_n$  mit Wahrscheinlichkeit 1 ab. Der Anleger versucht, den erwarteten Nutzen  $E[U_N(x_{N+1})]$  seines Endvermögens zu maximieren.

Das Vermögen in  $n+1$ ,  $x_{n+1}$ , ist somit eine Funktion von  $x_n$ , von der in  $n$  realisierten Ertragsrate bei Anlage A,  $\omega_n = \pm s_n$ , und vom Betrag  $v_n \in [0, x_n] \equiv V_n(x_n)$ , der in Periode  $n$  in A angelegt wurde:

$$x_{n+1} = x_n + \omega_n v_n + r_n [x_n - v_n] \equiv f_n(\omega_n, v_n, x_n),$$

$$n = 0, \dots, N \quad (15)$$

Der Nutzen des Endvermögens ist

$$U_N(x_{N+1}) = U_N(x_N + \omega_N v_N + r_N [x_N - v_N]) \equiv W_N(\omega_N, v_N, x_N) \quad (16)$$

Das Portfolio-Problem ist also offensichtlich ein Spezialfall von GS.

Beispiel II. Gewinnmaximierung unter Unsicherheit.

Wir betrachten eine Firma, die ein verderbliches Produkt

produziert und verkauft. Am Anfang jeder Periode  $n = 0, \dots, N$  wählt die Firma einen Preis-Output-Vektor  $v_n = (d_n, q_n)$  aus einer zulässigen Menge

$$V_n(x_n) = \{(d_n, q_n) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 0 \leq c_n(q_n) \leq x_n\}, \quad (17)$$

wobei  $c_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  die Kostenfunktion der Firma in Periode  $n$  bezeichnet und  $x_n$  das in  $n$  verfügbare Budget ist, mit  $x_0 = \bar{x} > 0$ . Die Nachfrage in  $n$ ,  $\omega_n$ , folgt aus einer preisabhängigen Übergangswahrscheinlichkeit  $p_n(\cdot | d_n)$ . Der Periodengewinn  $\pi_n$  ist somit eine Funktion von  $v_n$  und  $\omega_n$ , und die Budgetentwicklung folgt der Übergangsfunktion

$$x_{n+1} = x_n + \pi_n(\omega_n, v_n) = f_n(\omega_n, v_n, x_n), \quad n=0, \dots, N \quad (18).$$

Die Unternehmung versucht, den kumulierten, mit  $r$  diskontierten erwarteten Gewinn  $E[\sum_{n=0}^N r^{-n} \pi_n(\omega_n, v_n)]$  zu maximieren. Ist  $\pi_n$  kontinuierlich in  $\omega_n$  und  $v_n$ , so ist offensichtlich, daß das Gewinnmaximierungsproblem ein Spezialfall von GS ist, mit

$$W_n = r^{-n} \pi_n(\omega_n, v_n), \quad n = 0, \dots, N \quad (19).$$

Bemerkung: Dieses Modell kann als stochastische Version eines Modells von Landau angesehen werden, siehe LANDAU [1976]. In Landaus Modell kennt die Firma die (deterministische) Preis-Nachfragefunktion für ihr Produkt und entscheidet nur über die angebotene Menge  $q_n$ . Ferner benutzt Landau den Absatz der Vorperiode,  $q_{n-1}$ , anstelle vom Budget  $x_n$  als Determinante der Produktionskapazität. Es gelten konkret  $c_n = c_n(q_{n-1}, q_n)$  und  $V_n = V_n(q_{n-1})$ . Nachfrage und Gewinn hängen auch von  $q_{n-1}$  ab,  $\omega_n = \omega_n(q_{n-1}, q_n)$  und  $\pi_n = \pi_n(q_{n-1}, q_n)$ ,

mit  $\omega_n$  deterministisch. Ferner nimmt Landau implizit an, daß  $V_n(q_{n-1})$  eine zunehmende Funktion von  $q_{n-1}$  ist. Wie noch genau erläutert wird, untersucht Landau an Hand dieses Modells die uns interessierende Frage, d.h. die mögliche Übereinstimmung von kurzfristiger und globaler Planung.

Beispiel III. Optimale makroökonomische Stabilisierungspolitik.

In den letzten Jahren sind zahlreiche Weiterentwicklungen des Theil-Tinbergen Ansatzes zur optimalen Stabilisierungspolitik, THEIL [1964], TINBERGEN [1963], vorgeschlagen worden. In diesem Zusammenhang befassten sich verschiedene Autoren mit der Optimierung eines Zielfunktionalis

$$I = E \left[ \sum_{n=0}^N U_n \right] \quad (20)$$

mit

$$U_n(v_n, x_n, x_{n+1}) = U_n(v_n, x_n, f_n(\omega_n, v_n, x_n)) \equiv W_n(\omega_n, v_n, x_n) \quad (21)$$

$U_n$  kontinuierlich, unter Einhaltung eines linearen ökonomischen Modells mit stochastischen Koeffizienten

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A_n x_n + B_n z_n + C_n v_n + \varepsilon_n \equiv \\ &\equiv f_n(\omega_n, v_n, x_n), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (22a)$$

$$x_0 = \bar{x} \quad (22b)$$

vgl. CHOW [1975], KENDRICK [1981]. Dabei ist  $x_n$  der Wirtschaftszustand in  $n$ ,  $z_n$  ein Vektor unkontrollierbarer exogener Variablen,  $v_n$  ein Vektor kontrollierbarer exogener

Variablen (Instrument- oder Entscheidungsvariablen) und  $\varepsilon_n$  ein Vektor stochastischer Störglieder in  $n$ . Stellt (22a) eine Taylor-Approximation erster Ordnung für ein nicht-lineares Modell dar, so kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\omega_n \equiv (A_n, B_n, C_n, \varepsilon_n)$  sowohl von  $v_n$  und  $x_n$  wie auch von  $n$  abhängen.

Ferner wird angenommen, daß der laufende Zustand nur ungenau über einen linearen Beobachtungsmechanismus

$$y_n = M_n x_n + n_n, \quad n = 0, \dots, N \quad (23)$$

beobachtet wird wobei  $n_n$  ein stochastisches Störglied ist. Das so beschriebene Stabilisierungsmodell ist offensichtlich ein Spezialfall unseres Grundmodells.

#### 4. Hinreichende Bedingungen für die globale Optimalität kurzfristig optimaler Entscheidungen

Im Falle eines zeitadditiven Zielfunktionalis der Form (13) kann die global optimale Lösung von GS,  $v^{N*}$ , rekursiv als Lösung folgender Sequenz von  $N + 1$  statischen Optimierungsproblemen  $PS_n$  ermittelt werden

$$(PS_n) \quad T_n = E[W_n(\omega_n, v_n, x_n) + T_{n+1}^*(f_n(\omega_n, v_n, x_n)) | \mathcal{I}_n] \rightarrow \max_{v_n \in V_n} \quad (24)$$

(siehe BELLMAN [1961], JOSEPH und TOU [1961]). Dabei sind

$$T_n^* = \max_{v_n \in V_n} T_n, \quad n = 0, \dots, N \quad (25a)$$

$$T_{N+1}^* = 0 \quad (25b)$$

und  $x_n$  in (24) ist als der laufende (realisierte) Zustand zu verstehen. Es bezeichne ferner

$$v_n^* = \max_{v_n \in V_n}^{-1} T_n^* \quad (26)$$

Die kurzfristig optimalen Entscheidungen hingegen ergeben sich jeweils aus der Optimierung des statischen Problems  $KS_n$

$$(KS_n) \quad K_n = E[J_n(\omega_n, v_n, x_n) | \mathcal{I}_n] \rightarrow \max_{v_n \in V_n} \quad (27)$$

mit  $x_n$  in (27) generiert durch (11). Es sei

$$v_n^{**} = \max_{v_n \in V_n}^{-1} K_n, \quad n = 0, \dots, N \quad (28)$$

die kurzfristig optimale Entscheidung in  $n$ .

Bemerkung: Gleitende Planungsansätze, bei denen in jedem Zeitpunkt  $n$  die Entscheidung  $v_n$  unter Berücksichtigung der Prozessentwicklung über die  $k > 1$  nächsten Perioden optimiert wird, lassen sich durch Variablentransformation als Sequenz statischer Optimierungsprobleme  $KS_n$  formalisieren.

Die Sequenzen  $\{PS_n\}$  und  $\{KS_n\}$  statischer Optimierungsprobleme definieren die Lösung des globalen respektive des kurzfristigen stochastischen Optimierungsproblems. Bei gegebenem laufendem Zustand  $x_n$  wird die optimale kurzfristige Entscheidung in  $n$ ,  $v_n^{**}$ , wiederum nur dann mit der globalen optimalen Entscheidung  $v_n^*$  übereinstimmen, wenn  $K_n$  und  $T_n$  durch denselben Wert von  $v_n$  an der Stelle  $x_n$  maximiert werden. Im Gegensatz zum deterministischen

Fall reicht jedoch eine solche lokale Übereinstimmung der Maximanden von  $T_n$  und  $K_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ , nicht aus, um die Übereinstimmung der Sequenzen  $v^{N*}$  und  $v^{N**}$  zu sichern, da nun der laufende Zustand  $x_n$  nicht mehr eindeutig, sondern nur probabilistisch von den vergangenen Entscheidungen abhängt. Die Übereinstimmung der Sequenzen  $v^{N*}$  und  $v^{N**}$  wird daher dann und nur dann gesichert, wenn  $T_n$  und  $K_n$  für alle möglichen Realisationen von  $x_n$  beide durch denselben Wert von  $x_n$  maximiert werden,  $n = 0, \dots, N$ . Darüberhinaus sind  $K_n \equiv E[J_n | \mathcal{I}_n]$  und  $T_n \equiv E[W_n + T_{n+1}^* | \mathcal{I}_n]$  bedingte Erwartungen. Damit sie beide durch die selbe Menge zulässiger Entscheidungen  $\{v_n^*\}$  maximiert werden, müssen sie sehr viel einschränkenderen Voraussetzungen gehorchen als sie die Forderung einer bloß "lokalen Übereinstimmung" der Funktionen  $J_n$  und  $W_n + T_{n+1}^*$  ohne Rücksicht auf die zugrundegelegten Wahrscheinlichkeitsverteilungen darstellt. Der folgende Satz 1, der hinreichende Bedingungen dafür angibt, daß  $K_n$  und  $T_n$  dieselbe zulässige Menge von Maximierenden  $v_n^*$  besitzen, enthält recht einschränkende Bedingungen. Es wird auch nicht behauptet, er sei mathematisch gesehen besonders allgemein. Indessen werden wir sehen, daß er im Rahmen unserer ökonomischen Problemstellungen doch umfassend genug ist. Es gilt:

Satz 1: Nehmen wir an,  $T_{n+1}^*$  habe die Form

$$T_{n+1}^*(\omega_n, v_n, x_n) = a_n(x_n) \cdot [H_{n+1}(J_n)] + b_n(x_n) \quad (29)$$

und  $W_n$  habe die Form

$$W_n = \tilde{a}_n(x_n) \cdot \tilde{H}_{n+1}(J_n) + \tilde{b}_n(x_n) \quad (30)$$

für  $n = 0, \dots, N-1$  und für beliebige Funktionen  $b_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $\tilde{b}_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ; und es gelte entweder

( $\alpha$ )  $a_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,  $H_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strikt zunehmend;

$\tilde{a}_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\tilde{H}_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-abnehmend; oder

( $\beta$ )  $a_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $H_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nicht-abnehmend;

$\tilde{a}_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ ,  $\tilde{H}_{n+1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strikt zunehmend.

Dabei ist  $\mathbb{R}_+ \equiv \{z | z \in \mathbb{R}, z \geq 0\}$ ,

$\mathbb{R}_{++} \equiv \{z | z \in \mathbb{R}, z > 0\}$ .

Dann sichert jede der folgenden Bedingungen (I) bis (V), daß eine zulässige Entscheidung  $v_n^*$  dann und nur dann optimal für  $PS_n$  bzw. äquivalent für GS ist, wenn sie auch optimal für  $KS_n$  ist:

(I) Für jedes  $n = 0, \dots, N-1$  sind die Funktionen  $H_{n+1}$  und  $\tilde{H}_{n+1}$  linear.

(II) (Deterministisches Kontrollproblem). Für jedes  $n = 0, \dots, N-1$  ist  $p_n(\cdot | v_n, x_n)$  degeneriert.

(III) Für jedes  $n = 0, \dots, N-1$  ist die kurzsichtige Bewertungsfunktion  $J_n$  unabhängig von  $\omega_n$ ,  $J_n \equiv J_n(v_n, x_n)$ .

(IV) Für jedes  $n = 0, \dots, N-1$  ist  $p_n$  unabhängig von  $v_n$ ,

$p_n \equiv p_n(\cdot | x_n)$ ;  $J_n \equiv Q_n(\omega_n, x_n) + Z_n(v_n, x_n)$ ; und

$W_n = \tilde{a}_n^0(x_n) \cdot \tilde{H}_{n+1}^0(Z_n) + \tilde{b}_n(\omega_n, x_n) \equiv \tilde{Z}_n(v_n, x_n) + \tilde{\tilde{b}}_n(\omega_n, x_n)$

mit  $\tilde{b}_n: R^S \times R^Q \rightarrow R$  beliebig und entweder

( $\alpha'$ )  $a_n > 0$ ,  $H_{n+1}$  strikt zunehmend;  $a_n^0 \geq 0$ ,  $\tilde{H}_{n+1}^0$  nicht-abnehmend;

oder

( $\beta'$ )  $a_n \geq 0$ ,  $H_{n+1}$  nicht-abnehmend;  $a_n^0 > 0$ ,  $\tilde{H}_{n+1}^0$  strikt zunehmend.

(V) Für jedes  $n = 0, \dots, N-1$  hat das Störglied  $\omega_n$  die Form

$\omega_n \equiv g_n(v_n, x_n) + \delta_n$ , wobei  $g_n$  eine deterministische Funktion und  $\{\delta_n\}$  ein seriell unkorrelierter stochastischer Prozess ist;

$J_n \equiv Q_n(x_n) \cdot \omega_n + Z_n(v_n, x_n)$ ; und  $W_n \equiv \tilde{a}_n^0(x_n) \cdot \tilde{H}_{n+1}^0(Q_n) \cdot g_n + \tilde{a}_n^1(x_n) \cdot \tilde{H}_{n+1}^1(Q_n) \cdot \delta + \tilde{a}_n^2(x_n) \cdot \tilde{H}_{n+1}^2(Z_n) + \tilde{b}_n(x_n) \equiv \tilde{Z}_n(v_n, x_n) + \tilde{b}_n(\delta, x_n)$  mit  $\tilde{b}_n: R^S \times R^Q \rightarrow R$  beliebig und entweder

( $\alpha'$ )  $a_n > 0$ ,  $H_{n+1}$  strikt zunehmend;  $\tilde{a}_n^0 \geq 0$ ,  $\tilde{a}_n^2 \geq 0$ ,  $\tilde{H}_{n+1}^1$  und  $\tilde{H}_{n+1}^2$  nicht-abnehmend; oder

( $\beta'$ )  $a_n \geq 0$ ,  $H_{n+1}$  nicht-abnehmend;  $\tilde{a}_n^0 > 0$ ,  $\tilde{a}_n^2 > 0$ ,  $\tilde{H}_{n+1}^0$  und  $\tilde{H}_{n+1}^2$  strikt zunehmend.

(VI) Sind die Verteilungen  $p(\cdot | v_n, x_n)$  unabhängig von  $v_n$ , dann können die Funktionen  $b_n(\cdot)$  und  $\tilde{b}_n(\cdot)$  sowie  $\tilde{a}_n^1(\cdot)$  ohne Nachteil für die Satzaussagen von  $\omega_n$  abhängen.

Bemerkungen: Dieser Satz erweitert TESHATSION [1980a], Satz 3.1 und 3.2, auf den Fall  $J_n \neq W_n$ . Der Satz deckt Endwertprobleme ab ( $\tilde{a}_n, \tilde{H}_{n+1}$  und  $\tilde{b}_n \equiv 0$  für  $N = 0, \dots, N-1$ ). In diesem Falle gilt ( $\alpha$ ). Man bemerke, daß der Satz neben der "indirekten" Bedingung (29) die recht einschränkende direkte Anforderung (30) an die Beziehung zwischen  $J_n$  und  $W_n$  nur für die Perioden  $n \neq N$ , nicht jedoch für die Periode  $N$  stellt.

Satz 1 verlangt für die globale Optimalität kurzsichtig optimaler Entscheidungen eine "Entkoppelung" der Wirkung von Stochastik und Entscheidung in jeder Periode  $n$ , sobald die return-to-go Funktion nicht-linear in der Periodenbewertung ist.



Die Spezifität dieses Ergebnisses läßt vermuten, daß es in einer grundlegend stochastischen, nicht-linearen Welt in der Regel keine kurzfristig optimale Politik gibt, die auch global optimal ist.

Im Rahmen des portfolio (Endwert)-Problems von Beispiel I ist Bedingung (29)-(30) mit  $W_n \equiv J_n$ ,  $b_n(x_n) \equiv b_n$ ,  $a_n(x_n) \cdot H_{n+1}(J_n) \equiv a_n J_n$  für alle  $n$  äquivalent mit Mossins hinreichender Bedingung für die globale Optimalität kurz-sichtiger Entscheidungen. Mossin kommt zu dieser Bedingung für sein portfolio Modell, indem er argumentiert,  $T_{n+1}(x_{n+1})$  und  $U_n(x_{n+1}) \equiv U(x_n + \omega_n v_n + r_n(x_n - v_n))$  sollten bei globaler Optimalität kurz-sichtiger Entscheidungen äquivalente Nutzenfunktionen darstellen.

Beweis: Es gelte (29)-(30). Man prüft unmittelbar nach, daß jede der Bedingungen (I)-(III) sichert, daß  $E[J_n | \mathcal{I}_n]$  und  $E[T_n | \mathcal{I}_n] = E[W_n + T_{n+1}^*(f_n) | \mathcal{I}_n]$  dieselbe Menge von maximierenden zulässigen Entscheidungen  $v_n$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ , haben. Dasselbe gilt auch im Falle von Bedingung (IV), da für alle zulässigen  $v_n'$ ,  $v_n''$ ,  $n = 0, \dots, N-1$

$$E[J_n(v_n') | \mathcal{I}_n] > E[J_n(v_n'') | \mathcal{I}_n] \quad (31)$$

dann und nur dann gilt, wenn

$$Z_n(v_n') > Z_n(v_n'') \quad (32)$$

Dann ist aber genau

$$\bar{Z}_n(v_n') \geq \bar{Z}_n(v_n'') \quad (33a)$$

bzw.

$$E[W_n(v'_n) | \mathcal{F}_n] \geq E[W_n(v''_n) | \mathcal{F}_n] \quad (33b)$$

wobei die Gleichheit nur im Falle  $(\alpha')$  gelten kann.

Somit ist wegen (30) in Verbindung mit der Definition von  $W_n$  in (IV) und mit  $(\alpha') | (\beta')$  genau

$$E[W_n + T_{n+1}^* | \mathcal{F}_n, v'_n] > E[W_n + T_{n+1}^* | \mathcal{F}_n, v''_n] \quad (34)$$

Entsprechend gilt im Falle von Bedingung (V)

$$E[J_n(v'_n) | \mathcal{F}_n] > E[J_n(v''_n) | \mathcal{F}_n] \quad (35)$$

dann und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} Q_n(x_n) \cdot g_n(v'_n, x_n) + Z_n(v'_n, x_n) > \\ > Q_n(x_n) \cdot g_n(v''_n, x_n) + Z_n(v''_n, x_n) \end{aligned} \quad (36)$$

Aus einem ähnlichen Argument wie im Beweis für den Fall (IV) folgert man, daß dann genau gilt

$$E[W_n | \mathcal{F}_n, v'_n] \geq E[W_n | \mathcal{F}_n, v''_n] \quad (37)$$

Somit ist auch wegen  $(\alpha'') / (\beta'')$  genau

$$E[W_n + T_{n+1}^* | \mathcal{F}_n, v'_n] > E[W_n + T_{n+1}^* | \mathcal{F}_n, v''_n] \quad (38)$$

Unter den Voraussetzungen von (VI) sind die betroffenen Summanden in  $T_n$ , d.h.  $E[b_n(\cdot) | \mathcal{F}_n]$ , etc., unabhängig von  $v_n$ . Die Aussage von (VI) folgt unmittelbar. Q.E.D.

Es kann nun gezeigt werden, daß kurzfristig optimale Entscheidungen dann global optimal sind, wenn im kurzfristigen Problem der maximale erwartete Erlös von Periode  $n+1$ ,  $K_{n+1}^*$ , eine positive (nicht-negative) linear-affine Funktion vom Erlös der Vorperiode und  $W_n$  eine nicht-negative (positive) linear-affine Funktion von  $J_n$  für alle  $n$  ist:

Korollar 2: Der maximale erwartete kurzfristige Erlös

$$K_{n+1}^* \equiv \max_{v_{n+1}} E[J_{n+1} | \mathcal{I}_{n+1}] \quad (39)$$

sei eine positive (nicht-negative) linear-affine Funktion von  $J_n$  im folgenden Sinne:

$$K_{n+1}^*(f_n(\omega_n, v_n, x_n)) = c_n(x_n) \cdot J_n(\omega_n, v_n, x_n) + d_n(x_n), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (40)$$

für Funktionen  $c_n: R^q \rightarrow R_{++}(R_+)$  und  $d_n: R^q \rightarrow R$ . Ferner sei  $W_n$  eine nicht-negative (positive) linear-affine Funktion von  $J_n$ ,

$$W_n = \tilde{c}_n(x_n) \cdot J_n + \tilde{d}_n(x_n), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (41)$$

für  $\tilde{c}_n: R^q \rightarrow R_+(R_{++})$  und  $\tilde{d}_n: R^q \rightarrow R$ .

Dann ist die kurzfristig optimale Entscheidung  $v_n^{**}$  auch optimal für das globale Problem,  $n = 0, \dots, N$ .

Sind die Verteilungen  $p_n(\cdot | v_n, x_n)$  unabhängig von  $v_n$ , dann können ohne Nachteil für obige Schlüsse die Funktionen  $d_n(x_n)$  und  $\tilde{d}_n(x_n)$  auch von  $\omega_n$  abhängen.

Beweis: Durch Induktion folgt aus (40)-(41)

$$T_{n+1}^*(\omega_n, v_n, x_n) = y_n(x_n) \cdot J_n + z_n(x_n), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (42)$$

für Funktionen  $y_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  ( $y_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}_+$ ),  $z_n: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ . Dies ist ein Spezialfall von (29) mit linearem, positivem (nicht-negativem)  $H_{n+1}$ . Ferner ist (41) ein Spezialfall von (30) mit linearem, nicht-negativem (positivem)  $\tilde{H}_{n+1}$ . Daher sichern (40)-(41), daß die Bedingungen von Satz 1 (I) gelten.

Eine Abhängigkeit der Funktionen  $d_n, \tilde{d}_n$  in (40) von  $\omega_n$  hat zur Folge, daß die  $y_n$  und  $z_n$  in (42) auch von  $\omega_n$  abhängen. Nach der letzten Aussage von Satz 1 ist dies aber ohne Bedeutung für die Äquivalenz von kurzfristiger und globaler Optimierung, solange die Verteilungen  $p_n$  unabhängig von  $v_n$  sind. Q.E.D.

Obwohl weniger allgemein als Satz 1, ist Korollar 2 besonders wichtig, da alle bislang untersuchten Fälle einer Äquivalenz von kurzfristiger und globaler Optimierung darunter fallen. Die Bedingungen (40) zusammen mit (41) können als Forderung nach einer positiven ökonomischen Korrelation zwischen dem optimalen kurzfristigen erwarteten Periodenergebnis  $K_n^*$  und der optimalen globalen Periodenbewertung oder dem return-to-go  $T_n^*$  aufgefaßt werden. Mit dem Zusatz "ökonomisch" ist dabei gemeint, daß die Korrelation nicht in Bezug auf den physischen Prozessverlauf  $f_n(\cdot)$ , sondern in Bezug auf den bewerteten Verlauf  $K_{n+1}(f_n(\cdot))$  bzw.  $T_{n+1}(f_n(\cdot))$  im jeweiligen Optimum definiert ist. Es soll nun das Beispiel eines ökonomischen Modells, das die Hypothesen von Korollar 2 erfüllt, angegeben werden.

Beispiel IV: Wir betrachten das portfolio Modell von Beispiel I und nehmen speziell an

$$\begin{aligned} J_n &= U_n(x_n) \equiv \log(x_n) \\ x_n &\in \mathbb{R}_{++} \end{aligned} \tag{43}$$

für alle  $n$ . Der kurzfristige Entscheidungsträger versuche also, den jeweiligen Periodennutzen zu maximieren. Dann ist die kurzfristig optimale zulässige Entscheidung  $v_{n+1}^{**} \in V_{n+1}(x_{n+1}) \equiv [0, x_{n+1}]$ , die den erwarteten Nutzen von Periode  $n+1$

$$E[J_{n+1}(\omega_{n+1}, v_{n+1}, x_{n+1})] = E[\log(x_{n+2})] \tag{44}$$

maximiert, gegeben durch

$$v_{n+1}^{**} = \begin{cases} 0 & \text{für } D_{n+1} < 0; \\ D_{n+1} & \text{für } 0 \leq D_{n+1} \leq x_{n+1} \\ x_{n+1} & \text{für } x_{n+1} < D_{n+1} \end{cases} \tag{45}$$

mit

$$D_{n+1} \equiv \frac{[x_{n+1} + r_{n+1}][2p_{n+1}s_{n+1} - s_{n+1} - r_{n+1}]}{[s_{n+1} - r_{n+1}][s_{n+1} - r_{n+1}]} \tag{46}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 K_{n+1}^* &\equiv \max_{v_{n+1} \in [0, x_{n+1}]} E[J_{n+1}(\omega_{n+1}, v_{n+1}, x_{n+1})] = \\
 &= p_{n+1} \log(x_{n+1} [1 + (s_{n+1} - r_{n+1}) D_{n+1}^*] + r_{n+1} + \\
 &+ (s_{n+1} r_{n+1} - r_{n+1}^2) D_{n+1}^*) + [1 - p_{n+1}] \log(x_{n+1} [ \\
 &[1 - (s_{n+1} + r_{n+1}) D_{n+1}^*] + r_{n+1} + (s_{n+1} r_{n+1} + \\
 &+ r_{n+1}^2) D_{n+1}^*) \quad (47)
 \end{aligned}$$

wobei

$$D_{n+1}^* \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } D_{n+1} < 0 \\ \frac{2p_{n+1}s_{n+1} - s_{n+1} - r_{n+1}}{[s_{n+1} + r_{n+1}][s_{n+1} - r_{n+1}]} & \text{für } 0 \leq D_{n+1} \leq x_{n+1} \\ [x_{n+1} + r_{n+1}]^{-1} & \text{für } x_{n+1} < D_{n+1} \end{cases} \quad (48)$$

Der maximale erwartete kurzfristige Erlös  $K_{n+1}^*$  ist genau dann eine positiv linear-affine Funktion des kurzfristigen Nutzen von Periode  $n$ ,  $\log(x_n)$ , wenn  $r_{n+1} = 0$ . Dann ist

$$K_{n+1}^* = \log(x_{n+1}) + L_{n+1} \quad (49)$$

wobei

$$L_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{für } [2p_{n+1} - 1] \leq 0 \\ \log(2) + p_{n+1} \log(p_{n+1}) + [1 - p_{n+1}] \log(1 - p_{n+1}) \\ & \text{für } 0 < [2p_{n+1} - 1] < s_{n+1} \\ p_{n+1} \log(1 + s_{n+1}) + [1 - p_{n+1}] \log(1 - s_{n+1}) & \text{für } s_{n+1} < [2p_{n+1} - 1] \end{cases} \quad (50)$$

Nach Korollar 2 ist also  $r_n = 0$  für alle  $n$  hinreichend dafür, daß die Sequenz  $\{v_n^{**}\} = \{v_n^{**}(x_n)\}$  kurzfristig optimaler Entscheidungen, die durch (45) definiert ist, eine optimale Politik für das globale Endwertproblem

$$E[W_N(\omega_N, v_N, x_N)] = E[\log(x_{N+1})] \rightarrow \max_{v^N \in V^N} \quad (51)$$

mit  $W_N = U_N$  bildet. Die Funktionen  $H_{n+1}$  haben hier die spezielle Form

$$H_{n+1}(J_n) = J_n \quad (52)$$

für alle  $n$ .

Dieses Beispiel ist in TESFATSION [1980a] ausgearbeitet. Dort wird auch gezeigt, unter welchen Bedingungen das makroökonomische Stabilisierungsmodell von Beispiel III die Bedingungen von Korollar 2 erfüllt.

Satz 1 kann im Einzelfall nicht oder nur schwer direkt anwendbar sein, da er eine vollständige Kenntnis der optimalen Lösung des globalen Problems verlangt. Das nächste Ergebnis, Satz 3, gibt unter der Annahme perfekter Kenntnis des laufenden Zustandes schwächere Bedingungen an, welche lediglich sichern, daß die Ausgangsbedingungen (29)-(30) mit  $(\alpha)$  oder  $(\beta)$  in Satz 1 für möglicherweise nicht-lineare Funktionen  $H_{n+1}$  gelten. Ob die übrigen Bedingungen von Satz 1 auch gelten, kann dann bei jedem spezifischen Modell unmittelbar geprüft werden. In Anschluß an Satz 3 wird gezeigt, daß die Hypothesen dieses Satzes durch das portfolio Modell (Beispiel I), das Gewinnmaximierungsmodell (Beispiel II)

und eine modifizierte Version des makroökonomischen Stabilisierungsmodells (Beispiel III) befriedigt sind. Diese Modelle erfüllen somit die Grundbedingungen (29)-(30) von Satz 1; ohne zusätzliche Einschränkungen erfüllen sie jedoch nicht die weiteren Bedingungen dieses Satzes.

Satz 3: (vgl. TEFATSIÓN [1980a], Satz 3.6.). Nehmen wir an,  $x_n$  sei bekannt und folgende Bedingungen gelten für alle  $n = 0, \dots, N$ :

(I) Es gilt (30) mit  $\tilde{\alpha}_n > 0$ ,  $\tilde{H}_{n+1}$  strikt-zunehmend.

(II) Die Übergangsgleichung  $f_n$  erfüllt

$$f_n(\omega_n, v_n, x_n) = g_n(J_n(\omega_n, v_n, x_n)) \quad (52)$$

für eine nicht-abnehmende Funktion  $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^Q$ .

(IIIa) Die Verteilung  $p_n$  ist unabhängig von  $x_n$ ; oder

(IIIb)  $\omega_n$  ist eindimensional ( $s=1$ );  $J_n$  ist nicht-abnehmend in  $\omega_n$ ; und, ist  $x_n^i \geq x_n^{i'}$  für  $x_n^i, x_n^{i'} \in \mathbb{R}^Q$ , dann ist  $p_n(\cdot | v_n, x_n^i)$  stochastisch dominiert durch  $p_n(\cdot | v_n, x_n^{i'})$  für alle (zulässigen)  $v_n$ . Das heißt

$$\int_{\Omega^*} p_n(d\omega_n | v_n, x_n^i) \geq \int_{\Omega^*} p_n(d\omega_n | v_n, x_n^{i'}) \quad (53)$$

für alle  $\omega_n^* \in \mathbb{R}$ , mit  $\Omega^* \equiv \{\omega_n \in \mathbb{R} | \omega_n \leq \omega_n^*\}$ .

(IV)  $J_n$  ist nicht-abnehmend in  $x_n$ .

(V) Der zulässige Entscheidungsraum  $V_n(x_n)$  ist nicht-abnehmend in  $x_n$ , d.h.

$$x_n^{i'} = x_n^i \Rightarrow V_n(x_n^{i'}) \subseteq V_n(x_n^i) \quad (54)$$



Dann sind für alle  $n$  die Funktionen  $T_{n+1}^*$  nicht-abnehmend. Ferner sind die Funktionen  $H_{n+1}^*: R \rightarrow R$ , definiert durch  $H_{n+1}^* \equiv T_{n+1}^*(g_n)$ , nicht abnehmend.

Bemerkungen: Der Satz kann leicht auf den Fall ungenauer Beobachtungen erweitert werden, wenn das globale Kontrollsystem die sogenannte Separationseigenschaft besitzt. Seine Erweiterung auf beliebige Systeme mit fehlerhaften Beobachtungen scheint jedoch mit erheblichen formalen Schwierigkeiten verbunden zu sein.

Bedingung (53) impliziert, daß  $\omega_n$  mit dem laufenden Zustand  $x_n$  positiv korreliert ist.

Gelten die Voraussetzungen von Satz 3, so ist auch die Grundvoraussetzung (29)-(30) von Satz 1 erfüllt. (30) folgt trivialerweise aus Satz 3(I) und (29) aus Satz 3(II) zusammen mit der Satzaussage,  $H_{n+1}^*$  ist nicht abnehmend für alle  $n$ . Dann ist nämlich  $T_{n+1}^*(f_n) = T_{n+1}^*(g_n(J_n)) = H_{n+1}^*(J_n)$  mit  $H_{n+1}^*$  nicht-abnehmend als Spezialfall von (29). Zusammen mit (I) ist somit (β) von Satz 1 erfüllt. Durch triviale Modifikation des Beweises von Satz 1 erkennt man, daß falls  $J_n$  und  $g_n$  strikt zunehmend in  $x_n$  sind, auch die  $T_{n+1}^*$  und  $H_{n+1}^*$  strikt zunehmend sind. In diesem Fall braucht in (I) lediglich  $\tilde{\alpha}_n \geq 0$ ,  $\tilde{H}_{n+1}$  nicht-abnehmend gefordert zu werden, damit (α) von Satz 2 erfüllt ist.

Beweis: Unter den Satzannahmen gilt

$$x_n' \geq x_n \Rightarrow E[U(\omega_n, x_n') | \cdot, x_n'] \geq E[U(\omega_n, x_n' | \cdot, x_n)] \quad (55)$$

für alle kontinuierlichen Funktionen  $U : R^S \times R^q \rightarrow R$ , die

nicht-abnehmend in  $\omega_n$  sind. In der Tat gilt (55) trivialerweise, wenn (IIIa) erfüllt ist, d.h., wenn  $p_n$  unabhängig von  $x_n$  ist. Ferner gilt (55) im Falle von (IIIb) nach einem klassischen Satz aus der Theorie der stochastischen Dominanz, vgl. zum Beispiel HANOCH und LEVY [1969], Satz 1.

Wenn  $U$  nicht-abnehmend in  $x_n$  ist, dann impliziert (55)

$$x'_n \geq x''_n \Rightarrow E[U(\omega_n, x'_n) | \cdot, x'_n] = E[U(\omega_n, x''_n) | \cdot, x''_n] \quad (56)$$

Somit implizieren (III) und (IV), daß  $E[J_n(\omega_n, v_n, x_n) | \cdot, x_n]$  und, zusammen mit (I), daß auch  $E[W_n(\omega_n, v_n, x_n) | \cdot, x_n]$  nicht abnehmend in  $x_n$  ist. Aus (V) folgt dann, daß  $T_N^*(x_N)$  nicht-abnehmend in  $x_N$  ist.

Nehmen wir nun an,  $T_{n+1}^*$  sei nicht-abnehmend für ein  $n$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ . Aus (II) und (IV) folgt dann, daß  $T_{n+1}^*(f_n) = T_{n+1}^*(g_n(J_n))$  für alle zulässigen  $v_n$  nicht-abnehmend in  $\omega_n$  und  $v_n$  ist. Aus (I), (III) und (IV) folgt dann, daß

$$E[W_n + T_{n+1}^* | \cdot, x_n] \quad (57)$$

nicht-abnehmend in  $x_n$  für alle zulässigen  $v_n$  ist. Wegen (V) gilt dies auch für

$$T_n^* = \max_{v_n} E[W_n + T_{n+1}^* | \cdot, x_n] \quad (58)$$

Somit ist  $T_{n+1}^*$  sowie, wegen (II),  $H_{n+1}^* = T_{n+1}^*(g_n)$ , nicht-abnehmend für alle  $n$ . Q.E.D.

Beispiel V: Betrachten wir das in Beispiel I beschriebene portfolio (Endwert)-Problem. Der kurzfristige Entscheidungsträger maximiere

jeweils den Periodennutzen, d.h. nach Annahme

$$J_n = U_n(f_n(\omega_n, v_n, x_n)) = U_n(x_{n+1}) \quad (59)$$

für eine kontinuierliche, strikt-zunehmende Nutzenfunktion  $U_n$ .

Sei  $g_n$  die (strikt zunehmende) inverse Funktion  $U_n^{-1}$ . Man prüft leicht nach, daß alle Hypothesen von Satz 3 erfüllt sind. Insbesondere erhält man, da  $J_n$  strikt zunehmend in  $x_n$  ist,

$$T_{n+1}^*(f_n) = T_{n+1}^*(U_n^{-1}(U_n(f_n))) = H_{n+1}^*(J_n) \quad (60)$$

mit  $H_{n+1}^* \equiv T_{n+1}^*(U_n^{-1})$  strikt zunehmend.

Beispiel VI: Betrachten wir das Gewinnmaximierungsmodell von Beispiel II und nehmen wir als kurzfristige Zielsetzung die Maximierung des erwarteten Periodengewinns an:

$$K_n = E[\pi_n(\omega_n, v_n)] \rightarrow \max. \quad (61)$$

Annahmegemäß gilt

$$f_n(\omega_n, v_n, x_n) = x_n + \pi_n(\omega_n, v_n) \equiv g_n(J_n) \quad (62)$$

wobei  $g_n: x_n + y \rightarrow y$  streng zunehmend ist. Man prüft unmittelbar nach, daß die übrigen Hypothesen von Satz 3 erfüllt sind. Man erhält:

$$T_{n+1}^*(f_n) = T_{n+1}^*(g_n(J_n)) = H_{n+1}^*(J_n) \quad (63)$$

mit  $H_{n+1}^* \equiv T_{n+1}^*(g_n)$  nicht-abnehmend.

Bemerkung: Das Gewinnmaximierungsmodell von Beispiel II kann erweitert werden, indem man das Budget  $x_n$  als Ausdruck für die "Kapazität" in die Argumente der Kostenfunktion  $c_n$ , der Übergangswahrscheinlichkeit  $p_n$  und der Gewinnfunktion  $\pi_n$  aufnimmt:

$$c_n = c_n(q_n, x_n) \quad , \quad p_n = p_n(\omega_n | v_n, x_n) \quad , \\ \pi_n = \pi_n(\omega_n, v_n, x_n) \quad , \quad n = 0, \dots, N \quad (\epsilon$$

Für das erweiterte Modell gilt (63) allerdings nur dann, wenn  $\pi_n$  für alle  $n$  nicht-abnehmend in  $\omega_n$  und  $x_n$  ist und (IIIb) erfüllt ist. Gilt (63), so folgt nach Satz 1, daß kurzsichtige Optimierung global optimal ist (d.h., daß die Maximierung des Periodengewinns in jeder Periode die Maximierung des kumulierten diskontierten Gewinns impliziert), wenn die Verteilungen  $p_n$  degeneriert sind.

Das erweiterte Modell mit degenerierten Verteilungen  $p_n$  entspricht sehr genau Landaus Modell (vgl. die Ausführungen in Anschluß an Beispiel III) mit dem einen Unterschied: Bei Landau wird der Absatz der Vorperiode,  $q_{n-1}$ , an Stelle des Budgets  $x_n$  als Ausdruck für die Kapazität in  $c_n$ ,  $p_n$  und  $\pi_n$  benutzt. Indessen ist für Landaus Modell kurzsichtige Optimierung nicht global optimal.

Dieses Ergebnis zeigt, wie "sensitiv" die Ergebnisse über die Äquivalenz von globaler und kurzsichtiger Optimierung sein können.

Beispiel VII: Betrachten wir das makroökonomische Stabilisierungsmodell von Beispiel III und nehmen wir an,  $J_n = U_n = W_n$  für eine kontinuierliche nicht-abnehmende Nutzenfunktion  $U_n$  mit wohldefinierter Inverse  $g_n \equiv U_n^{-1}$ . Ferner nehmen wir an, daß die Komponenten der Koeffizientenmatrix  $A_n$  mit Wahrscheinlichkeit 1 nicht-negativ sind und die Verteilung von  $\omega_n$  unabhängig von  $x_n$  ist. Man prüft leicht nach, daß die Hypothesen von Satz 3 erfüllt sind. Insbesondere gilt

$$T_{n+1}^* = T_{n+1}^*(U_n^{-1}(U_n(f_n))) = H_{n+1}^*(J_n) \quad (65)$$

mit  $H_{n+1}^* = T_{n+1}^*(U_n^{-1})$  nicht abnehmend.

## 5. Schlußbemerkungen

Die dargelegten Ergebnisse stellen den ersten systematischen Versuch dar, allgemeine Bedingungen für die Äquivalenz von kurzsichtiger und globaler Optimierung aufzustellen bzw. die strukturellen Voraussetzungen dieser Äquivalenz zu erforschen. Sie geben einen recht eingehenden Einblick in die Logik von Zusammenhängen, die Ökonomen seit lange beschäftigt und möglicherweise zum Teil verwirrt haben.

Die Tatsache, daß die Gültigkeit der Äquivalenzbedingungen bei verschiedenen ökonomischen Modellen nachgewiesen werden konnte, darf indessen nicht als eine generelle Rechtfertigung kurzsichtigen Verhaltens in realen Entscheidungssituationen aufgefasst werden. Es ist in der Tat zu befürchten, daß diese recht speziellen Bedingungen - im wesentlichen Linearität in den stochastischen Teilen des betrachteten Systems bzw. stochastische Unabhängigkeit der nicht-linearen Teile - häufig nur aus technischen Gründen in ökonomischen Modellen eingebaut werden. Ob sie aber der Komplexität und Interdependenz der Wirtschaft, besonders langfristig gesehen, tatsächlich gerecht werden, darf in Frage gestellt werden.

Schließlich möchten wir feststellen, daß Tesfatsions Ansatz wahrscheinlich wenig hilft, wenn es darum geht zu erforschen, wie ein komplexes ökonomisches System gestaltet werden sollte, damit es in einer unsicheren, sich rasch wandelnden Umwelt weiterhin zufriedenstellend funktioniert.

LITERATUR

- Arrow, K.J.: Essays in the Theory of Risk Bearing.  
Chicago: Markham, 1971.
- Bellman, R.: "Dynamic Programming and Lagrange Multipliers".  
In: Proceedings of the National Academy of Sciences of  
the U.S.A. 42, 1956.
- Bellman, R.: Adaptive Control Processes.  
Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1961.
- Chow, G.: Analysis and Control of Dynamic Economic Systems.  
New York-London-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons, Inc., 1975.
- Hanoch, G. und Levy, H.: "The Efficiency Analysis of Choices  
Involving Risk". In: Review of Economic Studies 36, 1969.
- Joseph, P. und Tou, J.: "On Linear Control Theory". In:  
AIEE Transactions (Appl. und Ind.) 80, 1961.
- Kalaba, R.E. und Tesfatsion, L.: "Two Solution Techniques  
for Adaptive Reinvestment: A Small Sample Comparison".  
In: Journal of Cybernetics, 8, 1978.
- Kendrick, D.: Stochastic Control for Economic Models.  
New York: McGraw-Hill, 1981.
- Koopmans, T.: "Objectives, Constraints, and Outcomes in  
Optimal Growth Models". In: Econometrica, 35, 1967.
- Landau, H.J.: "Pricing in a Dynamic Model with Saturation".  
In: Econometrica, 44, 1976.
- Modigliani, F. und Cohen, K.: "The Role of Anticipations  
and Plans in Economic Behavior and Their Use in Economic  
Analysis and Forecasting". University of Illinois  
Bureau of Economic and Business Research, 1961.
- Mossin, J.: "Optimal Multiperiod Portfolio Policies".  
In: Journal of Business 41, 1968.

- Tesfatsion, L.: "Global and Approximate Global Optimality of Myopic Economic Decisions". In: Journal of Economic Dynamics and Control 2, 1980a.
- Tesfatsion, L.: "A Conditional Expected Utility Model for Myopic Decision Makers". In: Theory and Decision 12, 1980b.
- Tesfatsion, L.: "Dynamic Investment, Risk Aversion, and Foresight Sensitivity". In: Journal of Economic Dynamics and Control 3, 1981.
- Veinott, A., Jr.: "Optimal Policy in a Dynamic, Single Product, Non-Stationary Inventory Model with Several Demand Classes". In: Operations Research 13, 1965.