

Pack, Ludwig

Working Paper

Ein heuristisches Verfahren zur Bestimmung von Standorten, die in bezug auf Transport- und Produktionskosten optimal sind

Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 243

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Pack, Ludwig (1988) : Ein heuristisches Verfahren zur Bestimmung von Standorten, die in bezug auf Transport- und Produktionskosten optimal sind, Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 243, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/75090>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

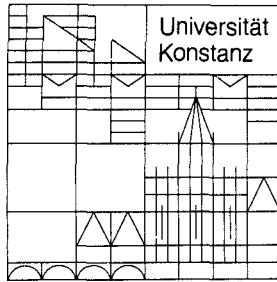
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik

Ludwig Pack



**Ein heuristisches Verfahren zur
Bestimmung von Standorten,
die in bezug auf Transport- und
Produktionskosten optimal sind**

Diskussionsbeiträge

EIN HEURISTISCHES VERFAHREN ZUR BESTIMMUNG VON
STANDORTEN, DIE IN BEZUG AUF TRANSPORT- UND
PRODUKTIONSKOSTEN OPTIMAL SIND

Ludwig Pack

Serie I - Nr. 243

Ag 283/89 *jk* Weltwirtschaftliches Archiv

Dezember 1988

A. Zur Bestimmung von transportkostenoptimalen Maschinenstandorten in einer Fabrikhalle (Lay-out-Problem)

I. Problemdarstellung

In einer Fabrikhalle sind n Maschinen so auf n vorhandene Plätze (Standorte) zu verteilen, daß die Transportkosten ein Minimum werden.

Zur Vereinfachung seien angenommen:

1. Alle Maschinen haben denselben Platzbedarf.
2. Es steht eine Fabrikhalle zur Verfügung, die eingeschossig ist und für die Aufstellung der Maschinen genügend Platz bietet.
3. Die vorhandenen Plätze sind mit Kennzahlen von 1 bis n durchnummeriert. Auf Platz i stehe die Maschine mit der Kennzahl p_i , auf Platz j die Maschine mit der Kennzahl p_j . Ist p_i z.B. gleich 3 und $i = 5$, so heißt das, daß Maschine 3 auf Platz 5 steht.
4. Etwaige Produktions- sowie Be- und Entladekosten seien zunächst standortunabhängig, folglich nicht entscheidungsrelevant.
5. Die variablen Kosten der innerbetrieblichen Transporte zwischen den Maschinen seien proportional zu den Entfernungen zwischen den Maschinen und zwar seien (wobei $t = \text{Tonne}$ und $\text{km} = \text{Kilometer}$)
 $e_{p_i p_j} \left[\frac{\text{DM}}{t \text{ km}} \right]$ die Einheitstransportkosten, welche entstehen, wenn über eine Entfernung von 1 km zwischen den Maschinen p_i und p_j 1 t des dort üblicherweise anfallenden Transportgutes zu transportieren ist. Dabei sei $e_{p_i p_j}$ unabhängig davon, auf welchen Plätzen die Maschinen aufgestellt sind. Dies muß nicht immer der Fall sein, z. B. dann nicht, wenn der Weg von Platz i nach Platz j

ansteigt und der Transporteur deshalb von i nach j mehr verlangt als von j nach i ; allgemein trifft es dann nicht zu, wenn zwischen zwei Plätzen pro Tonnenkilometer für Hin- und Hertransport nicht derselbe Kostensatz gilt.

6. Die Entfernungen zwischen den Aufstellplätzen der Maschinen werden von Bedienungsstelle zu Bedienungsstelle gemessen, und zwar unter Beachtung der Wege, welche zwischen den Aufstellplätzen für Transportzwecke frei zu lassen sind. Dabei sei

d_{ij} [m] die Entfernung zwischen den Plätzen i und j .

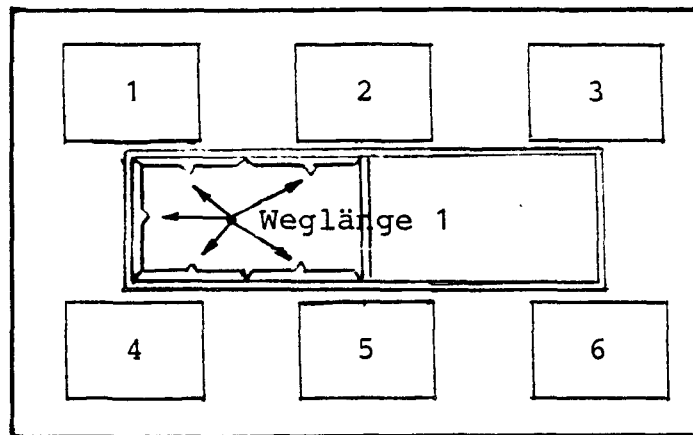


Abbildung 1: Fabrikhalle und mögliche Maschinenstandorte

7. Aufgrund der vorhandenen statistischen Aufzeichnungen sei bekannt, welches Gewicht (in t) bei dem üblichen Produktionsprogramm der Firma zwischen den Maschinen p_i und p_j zu transportieren ist. Das Produktionsprogramm variiere zwar im Zeitablauf, die daraus resultierenden Transportmengen und deren Gewichte seien jedoch trotzdem hinreichend konstant, d.h. pro ZE mehr oder weniger dieselben, so daß mit $g_{p_i p_j}^t \left[\frac{t}{ZE} \right]$ das Gewicht bezeichnet und gemessen werden kann, das (im Durchschnitt) pro Zeiteinheit von Maschine p_i zu Maschine p_j zu transportieren ist. Dabei sei $g_{p_i p_j}^t$ unabhängig davon, auf welchen Plätzen i bzw. j die Maschinen p_i und p_j aufgestellt werden.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird definiert

$$k_{p_i p_j} \left[\frac{\text{DM}}{\text{km} \cdot \text{ZE}} \right] = e_{p_i p_j} \left[\frac{\text{DM}}{\text{tkm}} \right] \cdot g_{p_i p_j} \left[\frac{\text{t}}{\text{ZE}} \right]$$

Damit werden die Transportkosten pro Einheit der Entfernung (in km) bezeichnet, welche für die zwischen den Maschinen p_i und p_j pro Zeiteinheit (z.B. pro Tag) üblicherweise zu transportierenden Güter unter Berücksichtigung von deren Gewicht $g_{p_i p_j}$ und deren Einheitstransportkosten $e_{p_i p_j}$ anfallen.

8. Es soll gelten

$$d_{ii} = 0 \text{ und } k_{p_i p_i} = 0$$

Dabei bedeutet $d_{ii} = 0$, daß die Entfernung einer Maschine zu sich selbst gleich Null ist; $k_{p_i p_i} = 0$ heißt: es kommen keine Schleifen derart vor, daß ein Transport von einer Maschine weg und wieder zu ihr zurück führt, ohne daß eine andere Maschine zwischengeschaltet ist.

Unter den genannten Bedingungen können die Entfernungen d_{ij} und die Transportkosten $k_{p_i p_j}$ in Form von Matrizen wie folgt dargestellt werden

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & 0 & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(k_{p_i p_j}) = \begin{pmatrix} 0 & k_{p_1 p_2} & \dots & k_{p_1 p_n} \\ k_{p_2 p_1} & 0 & \dots & k_{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{p_n p_1} & k_{p_n p_2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

II. Bestimmung der Zielfunktion

Geht man zunächst vereinfachend von einer Numerierung und Anordnung der Maschinen in der Art aus, daß auf Platz i Maschine i und auf Platz j Maschine j steht (Ausgangslösung), dann betragen die Transportkosten, welche von der auf Platz i aufgestellten Maschine $i = p_i$ verursacht werden

$$K_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot k_{ij} \left[\frac{\text{DM}}{\text{ZE}} \right]$$

Für alle Plätze $i = 1, \dots, n$ zusammen erhält man die Transportkosten

$$(1) K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot k_{ij} \left[\frac{\text{DM}}{\text{ZE}} \right]$$

Sofern nicht die Ausgangslösung zufällig bereits das Transportkostenminimum ergibt, werden zur Kostenminimierung Maschinen ihre Plätze tauschen müssen, wonach Platznummern und Maschinenummern nicht mehr übereinstimmen. Während die Entfernungen zwischen den Plätzen i und j dann, wenn Maschinen ihre Plätze tauschen, nicht berührt werden, ändern sich dadurch die zwischen den Plätzen i und j anfallenden Transportkosten

Anstelle des Indexes i tritt dann der Index p_i , anstelle des Indexes j der Index p_j (vgl. die Ausführungen unter 3. auf S. 1).

Weil sowohl die Plätze als auch die Maschinen von 1 bis n durchnummeriert sind, müssen die Indizes p_1, \dots, p_n gerade eine Permutation der Zahlen 1 bis n darstellen. Jede derartige Permutation ist eine Lösung des Layout-Problems. Unser Ziel besteht somit darin, die Permutation der Zahlen 1 bis n zu finden, welche zu minimalen Transportkosten führt. Unsere Zielfunktion kann deshalb allgemein, d.h. ohne daß eine Maschine und der Platz, den sie einnimmt, denselben Index aufweisen müssen, wie folgt geschrieben werden:

$$(2) K = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot k_{p_i p_j} \left[\frac{\text{DM}}{\text{ZE}} \right]$$

III. Beschreibung eines heuristischen Lösungsalgorithmus

Die beste Lösung des Layout-Problems kann - zumindest grundsätzlich - dadurch gefunden werden, daß für alle Permutationen der Zahlen 1 bis n der Zielwert K berechnet und das kleinste K ausgewählt wird. Da die Zahl der möglichen Permutationen von n Symbolen (z.B. Zahlen) jedoch gleich $n!$ ist, kann dieser Weg für Probleme von realistischer Größenordnung meist nicht gegangen werden (für $n=20$ erhält man schon $20! = 2,4329 \cdot 10^{18}$). Deshalb wird im folgenden ein heuristischer Lösungsalgorithmus beschrieben.

Von einer Anfangslösung ausgehend wird festgestellt, welche Zielwertänderung sich ergibt, wenn zwei Maschinen ihre Plätze tauschen, z.B. die Maschinen p_r und p_s auf den Plätzen r und s. Die Entfernung d_{rs} zwischen den Plätzen r und s bleibt davon unbeeinflusst. In der Matrix $(k_{p_i p_j})$ der Transportkosten sind jedoch zwei Spalten miteinander und zwei Zeilen miteinander zu vertauschen. Die Abbildung auf der folgenden Seite veranschaulicht den Vertauschungsvorgang und seine Durchführung: Die nach Durchführung von Spalten- und Zeilentausch sich ergebenden Werte der Indizes der Matrixelemente sind zwischen Klammern gesetzt. Ob man zuerst die Spalten oder zuerst die Zeilen tauscht, ist gleich. Bei Einsatz eines Computers ist ein derartiger Tausch leicht durchzuführen.

| Index j von p _j Index i von p _i | 1 | ... | r (s) | ... | s (r) | ... | n |
|--|------------|-----|------------|-----|------------|-----|------------|
| 1 | | | 1r (1s) | | 1s (1r) | | |
| r (s) | r1 (s1) | | rr (ss) | | rs (sr) | | rn (sn) |
| s (r) | s1 (r1) | | sr (rs) | | ss (rr) | | sn (rn) |
| n | | | nr (ns) | | ns (nr) | | |

Tabelle 1: Die Indizes i und j der Matrix $(k_{p_i p_j})$ vor bzw. nach dem Austausch (in Klammern) der auf den Plätzen r und s angeordneten Maschinen

Es bezeichnen

K_q den Zielwert (= Transportkosten) der Lösung, von der ausgegangen wird und

K_{q+1}^{rs} den Zielwert der Lösung, die sich ergibt, wenn in der zu K_q gehörigen Lösung die auf den Plätzen r und s befindlichen Maschinen ihre Plätze tauschen

D_q^{rs} die Differenz zwischen K_{q+1}^{rs} und K_q .

Wie im Anhang gezeigt, gilt im allgemeinen Fall, d.h. wenn auch Einbahnstraßen zugelassen sind

$$\begin{aligned}
 (3) \quad D_q^{rs} &= K_{q+1}^{rs} - K_q = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{rj} \cdot (k_{psp_j} - k_{prp_j}) + d_{sj} \cdot (k_{prp_j} - k_{psp_j}) \\
 &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{ir} \cdot (k_{p_i p_s} - k_{p_i p_r}) + d_{is} \cdot (k_{p_i p_r} - k_{p_i p_s}) \\
 &+ d_{rs} \cdot (k_{psp_r} - k_{prp_s}) + d_{sr} \cdot (k_{prp_s} - k_{psp_r})
 \end{aligned}$$

Wenn keine Einbahnstraßen auftreten, wenn also $d_{ij} = d_{ji}$ gilt, ist die Entfernungsmatrix (d_{ij}) symmetrisch. In diesem Fall kann auch die Kostenmatrix $(k_{p_i p_j})$ symmetrisch gemacht werden, sofern sie es nicht ohnehin ist und sofern die Bedingung $e_{p_i p_j} = e_{p_j p_i}$ erfüllt ist (vgl. S. 9 unten). Dann gilt für D_q^{rs} die wesentlich einfachere Gleichung (vgl. Anhang, S.24 ff.)

$$(4) \quad D_q^{rs} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n 2(d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k_{psp_j} - k_{prp_j})$$

Bezüglich der Berechnung von D_q^{rs} gibt es zwei mögliche Vorgehensweisen. Entweder berechnet man es für alle $\binom{n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ mögliche paarweisen Vertauschungen und führt dann den Tausch aus, der die größte Verbesserung der Zielfunktion bringt; oder man führt jeweils die als erste gefundene Vertauschung aus, die eine Zielwertverbesserung bringt.

Bei der Berechnung von D_q^{rs} ist darauf zu achten, daß in (4) für k_{psp_j} und k_{prp_j} sowie in (3) auch für $k_{p_i p_s}$, $k_{p_i p_r}$ und k_{prp_s} die Werte eingesetzt werden, welche in der q -ten Zuordnung gelten (also vor Durchführung des Platztausches).

Die nach diesem heuristischen Verfahren bestmögliche Verbesserung der Ausgangslösung ist dann erreicht, wenn es keine paarweise Vertauschung mehr gibt, die eine Zielwertverbesserung bringt. In unserem Fall der Transportkostenminimierung ist das dann der Fall, wenn alle $D_q^{rs} \geq 0$ sind. Weil es sich um ein heuristisches Verfahren handelt, ist nicht garantiert, daß man das absolute Minimum der Transportkosten findet; das Verfahren kann, wie alle heuristischen Verfahren, zu einem relativen Optimum führen, das von der Ausgangslösung abhängig ist.

IV. Ein Zahlenbeispiel

Um die Berechnungen nicht zu kompliziert und zu umfangreich werden zu lassen, wird ein möglichst einfaches Beispiel gewählt. Bezüglich der Entfernungen wird von der weiter oben in Abb. 1 dargestellten Situation ausgegangen. Dies führt zu der folgenden symmetrischen, d.h. keine Einbahnstraßen enthaltenden Entfernungstabelle:

| Weglänge von Platz | nach Platz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------------------|---------------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 | 5 |
| 2 | | 2 | 0 | 2 | 3 | 1 | 3 |
| 3 | | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 | 1 |
| 4 | | 1 | 3 | 5 | 0 | 2 | 4 |
| 5 | | 3 | 1 | 3 | 2 | 0 | 2 |
| 6 | | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 | 0 |

Tabelle 1: Die gemessenen Entfernungen

Die Berechnungen können, ohne daß die Zielerreichung beeinträchtigt wird, vereinfacht werden, wenn man von allen Entfernungen, mit Ausnahme der Hauptdiagonalen, die kleinste Entfernung (hier 1) subtrahiert¹⁾.

Das ergibt die Entfernungsmatrix

$(d_{ij}) =$

| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 3 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 3 | 1 | 0 | 4 | 2 | 0 |
| 4 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 4 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 |

Tabelle 2: Entfernungsmatrix

¹⁾Der Zielwert wird dann zwar entsprechend niedriger; die Bestimmung der heuristisch optimalen Zuordnung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt

Zur Vereinfachung werden die Maschinen so numeriert, daß in der Ausgangslösung

$p_i = i$ und $p_j = j$ gelten. D.h.: in der Ausgangslösung ist Maschine p_i auf Platz i und Maschine p_j auf Platz j angeordnet.

Die Kostenmatrix $(k_{p_i p_j})$ habe zunächst folgende Form

$$(\tilde{k}_{p_i p_j}) = \begin{array}{c|cccccc} & \begin{array}{c} j=p_j \\ \hline i=p_i \end{array} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 0 & 9 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & & 10 & 0 & 10 & 0 & 11 & 0 \\ 3 & & 2 & 9 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & & 3 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Tabelle 3: Ursprüngliche Kostenmatrix

Sie ist nicht symmetrisch und hat den Zielwert

| | |
|---|------------------|
| $K_0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0$ | Zeilensumme: 25 |
| $+ 1 \cdot 10 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 11 + 2 \cdot 0$ | " +20 |
| $+ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 0 \cdot 1$ | " +31 |
| $+ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3$ | " +12 |
| $+ 2 \cdot 3 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1$ | " +17 |
| $+ 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0$ | " + 7 |
| | Gesamtsumme: 112 |

$$K_0 = 112$$

Sofern die Entfernungsmatrix symmetrisch ist, lohnt es sich, wie auf Seite 7 ausgeführt, die Matrix $(\tilde{k}_{p_i p_j})$ ebenfalls symmetrisch zu machen, indem man ihre Elemente umformt zu

$$k_{p_i p_j} = k_{p_j p_i} = \frac{\tilde{k}_{p_i p_j} + \tilde{k}_{p_j p_i}}{2}$$

Dann erhält man die symmetrische Matrix $(k_{p_i p_j})$; sie ergibt in Verbindung mit Gleichung (4) für D_q^{rs} dieselben Werte wie die wesentlich umfangreichere Gleichung (3), mit der nicht symmetrischen Matrix $(\tilde{k}_{p_i p_j})$. Die Matrix $(\tilde{k}_{p_i p_j})$ durch $(k_{p_i p_j})$ zu erset.

zen ist möglich sofern $e_{p_i p_j} = e_{p_j p_i}$; die Bedingung $g_{p_i p_j} \neq g_{p_j p_i}$, welche dann Voraussetzung dafür ist, daß $\tilde{k}_{p_i p_j} \neq k_{p_i p_j}$ und $\tilde{k}_{p_j p_i} \neq k_{p_j p_i}$, bereitet dann keine Probleme.

$$(k_{p_i p_j}) = \begin{array}{c|cccccc} & j=p_j & & & & & \\ \hline i=p_i & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 0 & 9,5 & 3 & 0 & 2,5 & 0 \\ 2 & & 9,5 & 0 & 9,5 & 0,5 & 10,5 & 0 \\ 3 & & 3 & 9,5 & 0 & 0,5 & 5,5 & 1,5 \\ 4 & & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 & 0,5 & 2,5 \\ 5 & & 2,5 & 10,5 & 5,5 & 0,5 & 0 & 1 \\ 6 & & 0 & 0 & 1,5 & 2,5 & 1 & 0 \end{array}$$

Tabelle 4: Symmetrisierte Kostenmatrix

Sie ergibt in Verbindung mit der Entfernungsmatrix (d_{ij}) ebenfalls den Zielwert 112.

Die Berechnung von D_0^{rs} , wobei q hier gleich 0 ist, weil vom Zielwert K_0 der Ausgangslösung ausgegangen wird, kann wegen der Symmetrie der Matrizen (d_{ij}) und ($k_{p_i p_j}$) anhand der einfacheren Formel (4)

$$D_0^{rs} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^6 2(d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k_{p_s p_j} - k_{p_r p_j})$$

geschehen. Für $r=1$ und $s=2$ ergibt dies z.B.

$$\begin{aligned} D_0^{12} &= 2 \cdot [(3-1) \cdot (9,5-3) + (0-2) \cdot (0,5-0) + (2-0) \cdot (10,5-2,5) + (4-2) \cdot (0-0)] \\ &= 2 \cdot (13-1+16+0) = 2 \cdot 28 \end{aligned}$$

$$D_0^{12} = 56$$

Analog dazu werden alle übrigen Werte von D_0^{rs} berechnet. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

| r \ s | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|----|----|-----|----|----|
| 1 | 56 | 8 | 24 | 12 | -8 |
| 2 | | 52 | 50 | 24 | 56 |
| 3 | | | -16 | 2 | 20 |
| 4 | | | | 44 | 8 |
| 5 | | | | | 28 |

Tabelle 4: Werte von D_0^{rs}

Wie man sieht, ergibt sich für die Ausgangslösung die (einzige und deshalb zugleich) höchste Verminderung der Transportkosten dann, wenn die auf den Plätzen $r=3$ und $s=4$ angeordneten Maschinen die Plätze tauschen. Der Zielwert sinkt dadurch von 112 um 16 auf 96.

Von der neuen Anordnung der Maschinen ausgehend sind die Kostendifferenzen D_1^{rs} zu berechnen. Dabei ist zu beachten, daß jetzt nicht mehr $p_i=i$ und $p_j=j$ sind, was für die Matrix $(k_{p_i p_j})$ Konsequenzen hat. Sie lautet jetzt:

$(k_{p_i p_j}) =$

| | | p_j | | | | | |
|-------|-----|-------|------|-----|-----|------|-----|
| | | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 | 6 |
| p_i | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 1 | 0 | 9,5 | 0 | 3 | 2,5 | 0 |
| | 2 | 9,5 | 0 | 0,5 | 9,5 | 10,5 | 0 |
| | 4 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0,5 | 2,5 |
| | 3 | 3 | 9,5 | 0,5 | 0 | 5,5 | 1,5 |
| | 5 | 2,5 | 10,5 | 0,5 | 5,5 | 0 | 1 |
| | 6 | 0 | 0 | 2,5 | 1,5 | 1 | 0 |

Tabelle 5: Die Kostenmatrix nachdem die Maschinen 3 und 4 die Plätze getauscht haben. $p_i=p_j=4$ für $i=j=3$ bedeutet, daß Maschine 4 jetzt auf Platz 3 angeordnet ist

Von der Entfernungsmatrix der Tabelle 2 und der Kostenmatrix der Tabelle 5 ausgehend, erhält man für D_1^{rs} die in Tabelle 6 wiedergegebenen Kostendifferenzen.

| | | s | | | | |
|-----|---|-----|-----|----|----|----|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| r | 1 | 8 | 40 | 8 | 4 | 40 |
| | 2 | | 124 | -6 | 8 | 96 |
| | 3 | | | 16 | 58 | 4 |
| | 4 | | | | 4 | 40 |
| | 5 | | | | | 76 |

Tabelle 6: Werte von D_1^{rs}

Die (einzige und) größte Verringerung der Transportkosten ergibt sich jetzt, wenn die auf den Plätzen 4 und 2 befindlichen Maschinen 3 und 2 die Plätze tauschen. Der Zielwert sinkt dann von 96 um 6 auf 90.

Nach Ausführung dieses Platztausches lautet die dann sich ergebende Form der Kostenmatrix:

| | | p_j | | | | | |
|-------|-----|-------|-----|-----|------|------|-----|
| | | 1 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 |
| p_i | j | | | | | | |
| | i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | 9,5 | 2,5 | 0 |
| 3 | 2 | 3 | 0 | 0,5 | 9,5 | 5,5 | 1,5 |
| 4 | 3 | 0 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0,5 | 2,5 |
| 2 | 4 | 9,5 | 9,5 | 0,5 | 0 | 10,5 | 0 |
| 5 | 5 | 2,5 | 5,5 | 0,5 | 10,5 | 0 | 1 |
| 6 | 6 | 0 | 1,5 | 2,5 | 0 | 1 | 0 |

$(k_{p_i p_j}) =$

Tabelle 7: Die Kostenmatrix, nachdem von Tab. 5 ausgehend die Maschinen 2 und 3 auf den Plätzen 2 und 4 ihren Standort getauscht haben.

Daraus ergeben sich in Verbindung mit der Entfernungsmatrix folgende Kostendifferenzen D_2^{rs} :

| $r \backslash s$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------------|----|----|----|----|----|
| 1 | 20 | 92 | 2 | 10 | 72 |
| 2 | | 72 | 6 | 2 | 50 |
| 3 | | | 74 | 78 | -2 |
| 4 | | | | 16 | 92 |
| 5 | | | | | 76 |

Tabelle 8: Werte von D_2^{rs}

Nun bringt also der Tausch der auf den Plätzen 3 und 6 angeordneten Maschinen 4 und 6 eine Verbesserung des Zielwertes um 2 von 90 auf 88.

Führt man diesen Platztausch durch, erhält man folgende Form der Kostenmatrix:

| | | | | | | | | |
|-------------------|---|-------|-----|-----|-----|------|------|-----|
| | | p_j | 1 | 3 | 6 | 2 | 5 | 4 |
| | | p_i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $(k_{p_i p_j}) =$ | 1 | 1 | 0 | 3 | 0 | 9,5 | 2,5 | 0 |
| | 3 | 2 | 3 | 0 | 1,5 | 9,5 | 5,5 | 0,5 |
| | 6 | 3 | 0 | 1,5 | 0 | 0 | 1 | 2,5 |
| | 2 | 4 | 9,5 | 9,5 | 0 | 0 | 10,5 | 0,5 |
| | 5 | 5 | 2,5 | 5,5 | 1 | 10,5 | 0 | 0,5 |
| | 4 | 6 | 0 | 0,5 | 2,5 | 0,5 | 0,5 | 0 |

Tabelle 9: Die Kostenmatrix, nachdem von Tab. 7 ausgehend die Maschinen 4 und 6 auf den Plätzen 3 und 6 ihren Standort getauscht haben

Nunmehr ergeben sich folgende Kostendifferenzen:

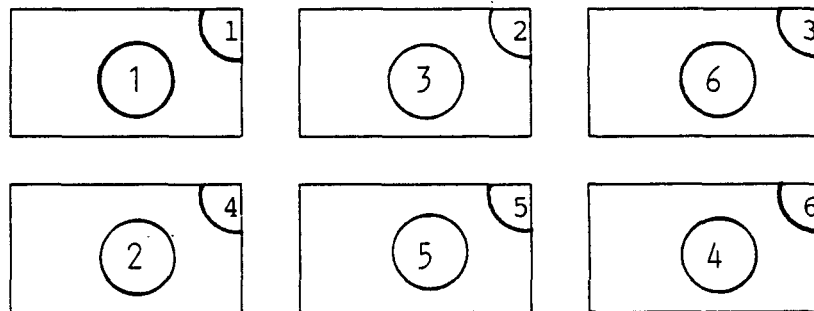
| | | | | | | | |
|--|---|-----|----|----|----|----|----|
| | | s | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | r | 20 | 96 | 4 | 8 | 70 |
| | 1 | | | | | | |
| | 2 | | 76 | 12 | 4 | 48 | |
| | 3 | | | 72 | 80 | 2 | |
| | 4 | | | | 16 | 96 | |
| | 5 | | | | | 76 | |

Tabelle 10: Werte von D_3^{rs}

In Tabelle 10 sind alle Kostendifferenzen größer als Null. D.h.: von der gewählten Ausgangslösung ausgehend kann mit Hilfe des benutzten heuristischen Verfahrens keine bessere Lösung als die in Tab. 9 enthaltene gefunden werden; diese sieht vor:

Maschine 1 auf Platz 1, Maschine 2 auf Platz 4
" 3 " " 2, " 4 " " 6
" 5 " " 5 und " 6 " " 3.

Da es sich um ein heuristisches Verfahren handelt, ist nicht garantiert, daß dies die absolut beste Lösung ist.



B. Zur Bestimmung von produktions- und transportkostenoptimalen Standorten

I. Problemdarstellung

Die unter A.I gemachte Annahme 4 wird nunmehr aufgehoben. Die Produktions- sowie Be- und Entladekosten seien also nunmehr standortabhängig, d.h. für verschiedene Standorte unterschiedlich hoch. Dann gilt es, ein Modell zu entwickeln, das unter Weitergeltung der Annahmen 1 bis 3 und 5 bis 8 zur optimalen Standortbestimmung allgemein verwandt werden kann.

Die Größen d_{ij} , k_{ij} und $k_{p_i p_j}$ gelten weiter. Sie bezeichnen jetzt nicht mehr nur Entfernungen bzw. Kosten in einer Fabrikhalle, sondern können auch innerhalb eines für die Optimierung infrage kommenden Gebietes gelten (z.B. in der Bundesrepublik Deutschland oder in Europa).

Ergänzend werden nunmehr die Größen $c_{p_i j}$ benötigt; $c_{p_i j}$ gibt an, welche Produktions- sowie Be- und Entladekosten entstehen (im folgenden kurz "Produktionskosten" genannt), wenn die Produktion der Art p_i am Standort j durchgeführt wird.¹⁾ Diese Kosten können in der Matrix

$$(c_{p_i j}) = \begin{pmatrix} c_{p_1 1} & c_{p_1 2} & \dots & c_{p_1 n} \\ c_{p_2 1} & c_{p_2 2} & \dots & c_{p_2 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p_n 1} & c_{p_n 2} & \dots & c_{p_n n} \end{pmatrix}$$

zusammengefaßt werden.

¹⁾ $c_{p_i j}$ braucht als zweiten Index nicht p_j , sondern j genügt. Der Grund hierfür ist, daß die Produktionskosten $c_{p_i j}$ für ein bestimmtes p_i unabhängig davon sind, auf welchen Plätzen die übrigen Produktionsarten angeordnet sind, wogegen diese Abhängigkeit für die Transportkosten $k_{p_i p_j}$ sehr wohl eine Rolle spielt.

II. Bestimmung der Zielfunktion

Unter Verwendung von $c_{p_i j}$ erhält man folgende Veränderungen des bisherigen Modellansatzes (vgl. S. 4):

Wenn am Standort i die Produktionsart p_i durchgeführt wird, entstehen durch diesen Standort Kosten in Höhe von

$$K_i = c_{p_i i} + \sum_{j=1}^n d_{ij} k_{ij} \left[\frac{DM}{ZE} \right] \text{ mit } c_{p_i i} = c_{ii}.$$

Für alle Standorte zusammen ergibt das

$$(1') K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n (c_{p_i i} + \sum_{j=1}^n d_{ij} k_{ij}) \left[\frac{DM}{ZE} \right] \text{ mit } c_{p_i i} = c_{ii}$$

Wenn die Bedingung $p_i = i$ entfällt, wird daraus

$$(2') K = \sum_{i=1}^n (c_{p_i i} + \sum_{j=1}^n d_{ij} k_{p_i p_j}) \left[\frac{DM}{ZE} \right].$$

III. Zur Anwendung des zuvor beschriebenen heuristischen Verfahrens auf das vorliegende Problem

Das zuvor beschriebene heuristische Verfahren kann auch zur heuristischen Lösung des hier gestellten Problems verwandt werden. Der Standorttausch hat nun natürlich auch Konsequenzen für die Produktionskosten. Dabei treten, wenn die bisher auf den Standorten r und s platzierten Produktionsarten die Standorte tauschen, die Kosten c_{rs} und c_{sr} an die Stelle der Kosten c_{rr} und c_{ss} . Die daraus resultierende Änderung der Produktionskosten ΔK_p^{rs} beträgt (vgl. Anhang, letzte Seite):

$$\Delta K_p^{rs} = c_{rs} + c_{sr} - c_{rr} - c_{ss}.$$

Sie kommt zu der Änderung der Transportkosten hinzu. Die gesamte Kostenänderung, die als Folge eines Platztausches auftritt, beträgt also im einfachen Fall (d.h. wenn Entfernungs-

und Transportkostenmatrix symmetrisch sind oder gemacht werden können)

$$(4') D_q^{rs} = c_{rs} + c_{sr} - c_{rr} - c_{ss} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n 2(d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k_{p_s p_j} - k_{p_r p_j})$$

Analog verändert sich im allgemeineren Fall Gleichung (3), in der ebenfalls lediglich $c_{rs} + c_{sr} - c_{rr} - c_{ss}$ hinzukommt.

Wird die Produktionskostenmatrix im Unterschied zur Transportkostenmatrix von Stufe zu Stufe der Rechnung nicht umgeschrieben, dann tritt in Gleichung (4') und in der veränderten Gleichung (3) jeweils $c_{p_r s} + c_{p_s r} - c_{p_r r} - c_{p_s s}$ an die Stelle von $c_{rs} + c_{sr} - c_{rr} - c_{ss}$ (vgl. Anhang, letzte Seite).

IV. Ein Zahlenbeispiel

Die Matrix der Produktionskosten sei

| $i=p_i \backslash j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------------|----------|-----|-----|-----|-----|----------|
| 1 | 98 | 100 | 102 | 96 | 97 | 95 |
| 2 | ∞ | 198 | 200 | 205 | 203 | ∞ |
| 3 | ∞ | 149 | 150 | 152 | 153 | ∞ |
| 4 | 180 | 183 | 178 | 181 | 177 | ∞ |
| 5 | 292 | 296 | 300 | 315 | 307 | 299 |
| 6 | ∞ | 248 | 255 | 252 | 250 | 256 |

$c_{p_i j} = \infty$ bedeutet dabei, daß die Produktionsart p_i am Standort j nicht durchgeführt werden kann (z.B. wegen Bestimmungen des Umweltschutzes).

Die Transportkosten für den hier als Ausgangslösung betrachteten Fall $i = p_i$ wurden im vorigen Abschnitt mit 112 errechnet. Dazu kommen die Produktionskosten, die in der Hauptdiagonalen der Matrix $(c_{p_i j})$ stehen. Als Zielwert der Anordnung, für welche $i = p_i$ gilt, erhält man also

$$112 + 98 + 198 + 150 + 181 + 307 + 256 = 1302.$$

Tauschen $r = 1$ und $s = 4$ die Plätze, gilt hier (wobei der Wert 24 aus der Tabelle auf S. 10 unten entnommen werden kann)

$$D_0^{rs} = D_0^{14} = 96 + 180 - 181 - 98 + 24 = -3 + 24 = 21.$$

Analog hierzu werden die übrigen Elemente von D_0^{rs} berechnet.

Für D_0^{rs} erhält man insgesamt

| r \ s | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|----------|----------|-----|----|----------|
| 1 | ∞ | ∞ | 21 | -4 | ∞ |
| 2 | | 53 | 59 | 18 | ∞ |
| 3 | | | -17 | -2 | ∞ |
| 4 | | | | 48 | ∞ |
| 5 | | | | | 14 |

Die größte Zielwertverbesserung (um 17) ergibt sich also, wenn die Produktionsarten an den Standorten $r = 3$ und $s = 4$ ausgetauscht werden. Der neue Zielwert ist $1302 - 17 = 1285$.

Für die Berechnung der D_1^{rs} muß zunächst die Matrix $(k_{p_i p_j})$ verändert werden. Da mit $r = 3$ und $s = 4$ derselbe Platztausch erfolgt wie in Teil A, ergibt sich auch hier als neue $k_{p_i p_j}$ -Matrix die in der Mitte der S. 11 wiedergegebene Tabelle 5. Damit auch nach einem Platztausch die zu einer bestimmten Anordnung gehörenden Produktionskosten in der Hauptdiagonale stehen, ist es notwendig, die Matrix $(c_{p_{ij}})$ in der Weise zu verändern, daß die Zeilen 3 und 4 vertauscht werden; dann erhält man:

| p_i | j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|-----|----------|-----|-----|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 98 | 100 | 102 | 96 | 97 | 95 |
| 2 | 2 | ∞ | 198 | 200 | 205 | 203 | ∞ |
| 4 | 3 | 180 | 183 | 178 | 181 | 177 | ∞ |
| 3 | 4 | ∞ | 149 | 150 | 152 | 153 | ∞ |
| 5 | 5 | 292 | 296 | 300 | 315 | 307 | 299 |
| 6 | 6 | ∞ | 248 | 255 | 252 | 250 | 256 |

Nach Durchführung dieser Veränderungen können die D_1^{rs} -Werte errechnet werden; sie lauten

| r \ s | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|----------|-----|----------|-----|----------|
| 1 | ∞ | 46 | ∞ | -12 | ∞ |
| 2 | | 131 | -2 | 2 | ∞ |
| 3 | | | 17 | 50 | ∞ |
| 4 | | | | 13 | ∞ |
| 5 | | | | | 62 |

Die größte Zielwertverbesserung ergibt sich, wenn die Produktionsarten auf den Plätzen 1 und 5 vertauscht werden. Der neue Zielwert ist $1285 - 12 = 1273$.

Nach Vornahme der notwendigen Veränderungen in den Matrizen k_{piPj} und c_{pij} können die Werte von D_2^{rs} errechnet werden:

| r \ s | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|----------|-----|----------|----|----------|
| 1 | ∞ | 62 | ∞ | 12 | ∞ |
| 2 | | 131 | 4 | 12 | ∞ |
| 3 | | | 25 | 46 | ∞ |
| 4 | | | | 4 | ∞ |
| 5 | | | | | 52 |

Da alle D_2^{rs} positiv sind, ist die beste Zuordnung erreicht; sie lautet:

Auf Standort 1 wird Produktionsart 5 angesiedelt,
 " " 2 " " 2 "
 " " 3 " " 4 "
 " " 4 " " 3 "
 " " 5 " " 1 "
 " " 6 " " 6 "

Die minimalen Kosten sind 1273.

Anhang:

Berechnung der Zielwertänderung, wenn die auf den Plätzen r und s angeordneten Maschinen ihre Plätze tauschen

I. Die Transportkosten

Geht man vom Zielwert K_q aus, der in der Stufe q der Rechnung erreicht wurde ($q=0,1,\dots$), dann kann die Differenz D_q^{rs} zwischen K_q und dem Zielwert, der sich ergibt, wenn in der K_q entsprechenden Lösung (= Zuordnung) die auf den Plätzen r und s befindlichen Maschinen p_r und p_s ihre Plätze tauschen, in der Form

$$D_q^{rs} = K_{q+1}^{rs} - K_q$$

geschrieben werden. Diese Differenz kann dadurch bestimmt werden, daß man den der neuen Anordnung der Maschinen entsprechenden Zielwert K_{q+1}^{rs} ermittelt und davon den beim gegebenen Stand der Rechnung bekannten Zielwert K_q subtrahiert, also

$$D_q^{rs} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \cdot k_{p_i p_j} - K_q$$

bildet. Bezüglich k_{p_i} und k_{p_j} gelten dabei die in Klammern gesetzten Indizes aus Tabelle 1.

Diese Vorgehensweise führt jedoch zu sehr umfangreichen Berechnungen, zumal $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ derartige paarweise Vertauschungen möglich sind. Deshalb bietet sich, vor allem bei großem n, eine andere Vorgehensweise an. Dabei läßt man in der Zielwertberechnung zunächst die vertauschten Zeilen und Spalten weg, was zu dem reduzierten Zielwert

$$\tilde{K}_{q+1}^{rs} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{ij} \cdot k_{p_i p_j}$$

führt. Darin fehlen wegen $i \neq r,s$ und $j \neq r,s$:

1. Die Produktsumme für die bisherige Zeile r, in der jetzt die Zahlenwerte der bisherigen Zeile s stehen:

$$S_{q+1}^1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n d_{rj} \cdot k_{ps} p_j$$

2. Die Produktsumme der bisherigen Spalte r, in der jetzt die Zahlenwerte der bisherigen Spalte s stehen:

$$S_{q+1}^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}}^n d_{ir} \cdot k_{pi} p_j$$

3. Die Produktsumme der bisherigen Zeile s, in der jetzt die Zahlenwerte der bisherigen Zeile r stehen:

$$S_{q+1}^3 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n d_{sj} \cdot k_{pr} p_j$$

4. Die Produktsumme der bisherigen Spalte s, in der jetzt die Zahlenwerte der bisherigen Zeile r stehen:

$$S_{q+1}^4 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}}^n d_{is} \cdot k_{pi} p_r$$

5. Für die vier Matrixfelder, in denen die vertauschten Zeilen und Spalten sich schneiden, gilt (wobei zur Vereinfachung der Schreibweise der Buchstabe p weggelassen wird):

| | | | | | | | |
|-----|----|--|----|--------------------|----|--|----|
| Aus | rr | | rs | wird durch | rs | | rr |
| | | | | Austausch | | | |
| | sr | | ss | der <u>Spalten</u> | ss | | sr |

Daraus wird durch Austausch
der Zeilen

| | | |
|----|--|----|
| ss | | sr |
| | | |
| rs | | rr |

Die in der Zielfunktion K_{q+1}^{sr} fehlenden entsprechenden Produktsummen sind

$$S_{q+1}^5 = \underbrace{d_{rr} \cdot k_{psps}}_{= 0} + d_{rs} \cdot k_{pspr} + d_{sr} \cdot k_{prps} + \underbrace{d_{ss} \cdot k_{prpr}}_{= 0} = d_{rs} \cdot k_{pspr} + d_{sr} \cdot k_{prps}$$

Faßt man dies alles zusammen, dann muß für den Zielwert K_{q+1}^{rs} nach Austausch der auf den Plätzen r und s befindlichen Maschinen gelten

$$K_{q+1}^{rs} = \tilde{K}_{q+1}^{rs} + S_{q+1}^1 + S_{q+1}^2 + S_{q+1}^3 + S_{q+q}^4 + S_{q+1}^5$$

Zur Berechnung der Differenz zwischen dem Zielwert vor der Vertauschung (K_q) und dem Zielwert nach der Vertauschung (K_{q+1}^{sr}) zerlegt man nun zweckmäßigerweise auch K_q in der gleichen Form wie dies für K_{q+1}^{sr} geschehen ist; dann erhält man:

$$\tilde{K}_q = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{ij} \cdot k_{pi pj}$$

$$S_q^1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{rj} \cdot k_{pr pj}$$

$$S_q^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{ir} \cdot k_{pi pr}$$

$$S_q^3 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{sj} \cdot k_{ps pj}$$

$$S_q^4 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{is} \cdot k_{pi ps}$$

$$S_q^5 = \underbrace{d_{rr} \cdot k_{pr pr}}_{= 0} + d_{rs} \cdot k_{pr ps} + d_{sr} \cdot k_{ps pr} + \underbrace{d_{ss} \cdot k_{ps ps}}_{= 0}$$

$$= d_{rs} \cdot k_{pr ps} + d_{sr} \cdot k_{ps pr}$$

Wie man sieht, gilt $\tilde{K}_{q+1}^{rs} = \tilde{K}_q$, so daß die Differenz $K_{q+1}^{rs} - K_q$ davon nicht berührt wird.

Ferner gelten:

$$S_{q+1}^1 - S_q^1 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{rj} \cdot k_{pspj} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{rj} \cdot k_{prpj} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{rj} \cdot (k_{pspj} - k_{prpj})$$

$$S_{q+1}^2 - S_q^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{ir} \cdot k_{pips} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{ir} \cdot k_{pipr} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{ir} \cdot (k_{pips} - k_{pipr})$$

$$S_{q+1}^3 - S_q^3 = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{sj} \cdot k_{prpj} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{sj} \cdot k_{pspj} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{sj} \cdot (k_{prpj} - k_{pspj})$$

$$S_{q+1}^4 - S_q^4 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{is} \cdot k_{pipr} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{is} \cdot k_{pips} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{is} \cdot (k_{pipr} - k_{pips})$$

$$\begin{aligned} S_{q+1}^5 - S_q^5 &= d_{rs} \cdot k_{pspr} + d_{sr} \cdot k_{prps} - (d_{rs} \cdot k_{prps} + d_{sr} \cdot k_{pspr}) \\ &= d_{rs} \cdot (k_{pspr} - k_{prps}) + d_{sr} \cdot (k_{prps} - k_{pspr}) \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall, d.h. wenn $d_{ij} \neq d_{ji}$ und/oder $k_{pipj} \neq k_{pjpi}$, erhält man also

$$\begin{aligned} D_q^{rs} = K_{q+1}^{rs} - K_q &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r,s}}^n d_{rj} \cdot (k_{pspj} - k_{prpj}) + d_{sj} \cdot (k_{prpj} - k_{pspj}) \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r,s}}^n d_{ir} \cdot (k_{pips} - k_{pipr}) + d_{is} \cdot (k_{pipr} - k_{pips}) \\ &+ d_{rs} \cdot (k_{pspr} - k_{prps}) + d_{sr} \cdot (k_{prps} - k_{pspr}) \end{aligned}$$

Nun sei angenommen, daß Einbahnstraßen nicht auftreten, so daß $d_{ij} = d_{ji}$. Dann gilt natürlich auch $d_{rs} = d_{sr}$ und

$$S_{q+1}^5 - S_q^5 = d_{rs} \cdot (k_{ps}p_r - k_{pr}p_s + k_{pr}p_s - k_{ps}p_r) = 0;$$

diese Differenz hat also auf die Zielwertänderung $K_{q+1}^{sr} - K_q$ keinen Einfluß.

Des weiteren gelten:

$$\begin{aligned} (S_{q+1}^1 - S_q^1) + (S_{q+1}^3 - S_q^3) &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n d_{rj} (k_{ps}p_j - k_{pr}p_j) + d_{sj} (k_{pr}p_j - k_{ps}p_j) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n (d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k_{ps}p_j - k_{pr}p_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_{q+1}^2 - S_q^2) + (S_{q+1}^4 - S_q^4) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}}^n d_{ir} \cdot (k_{pi}p_s - k_{pi}p_r) + d_{is} \cdot (k_{pi}p_r - k_{pi}p_s) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}}^n (d_{ir} - d_{is}) \cdot (k_{pi}p_s - k_{pi}p_r) \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhält man also

$$\begin{aligned} D_q^{rs} = K_{q+1}^{rs} - K_q &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n (d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k_{ps}p_j - k_{pr}p_j) \\ &+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}}^n (d_{ir} - d_{is}) \cdot (k_{pi}p_s - k_{pi}p_r) \end{aligned}$$

Die Differenz $K_{q+1}^{sr} - K_q$ vereinfacht sich weiter, wenn auch die Matrix der Transportkosten pro Entfernungseinheit ($k_{pi}p_j$) symmetrisch ist oder symmetrisch gemacht werden kann (was für $d_{ij} = d_{ji}$ und $e_{pi}p_j = e_{pj}p_i$ stets möglich ist). Um dies zu erreichen, kann man, sofern beide Bedingungen erfüllt sind, so vorgehen, daß man als Elemente der genannten Matrix

$$k'_{p_i p_j} = k'_{p_j p_i} = \frac{k_{p_i p_j} + k_{p_j p_i}}{2}$$

ansetzt. Dies hat u.a. zur Folge, daß es gleich ist, ob über $j=1, \dots, n$ oder über $i=1, \dots, n$ summiert wird. Dann erhält man

$$\begin{aligned} D_q^{rs} &= K_{q+1}^{rs} - K_q^{rs} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n (d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k'_{p_s p_i} - k'_{p_r p_j}) + (d_{jr} - d_{js}) \cdot (k'_{p_j p_s} - k'_{p_j p_r}) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n (d_{rj} \cdot k'_{p_s p_j} - d_{rj} \cdot k'_{p_r p_j} - d_{sj} \cdot k'_{p_s p_j} + d_{sj} \cdot k'_{p_r p_j} \\ &\quad + d_{jr} \cdot k'_{p_j p_s} - d_{jr} \cdot k'_{p_j p_r} - d_{js} \cdot k'_{p_j p_s} + d_{js} \cdot k'_{p_j p_r}) \end{aligned}$$

Nun kann berücksichtigt werden, daß in einer symmetrischen Matrix $(k'_{p_i p_j})$ gelten

$$k'_{p_s p_j} = k'_{p_j p_s} \quad \text{und} \quad k'_{p_r p_j} = k'_{p_j p_r}$$

so daß

$$\begin{aligned} D_q^{rs} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n k'_{p_s p_j} (d_{rj} + d_{jr}) - k'_{p_r p_j} (d_{rj} - d_{jr}) \\ &\quad - k'_{p_s p_j} (d_{sj} + d_{js}) + k'_{p_r p_j} (d_{sj} + d_{js}) \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Entfernungsmatrix (d_{ij}) ist $d_{ij} = d_{ji}$; also gelten auch $d_{rj} = d_{jr}$ und $d_{rj} + d_{jr} = 2d_{rj} = 2d_{jr}$. Analoges gilt für d_{sj} und d_{js} . Aufgrund dessen gilt dann, wenn beide Matrizen symmetrisch sind, was bei symmetrischer Entfernungsmatrix (d_{ij}) und symmetrischer Matrix der Einheitstransportkosten $(e_{p_i p_j})$ stets zu erreichen ist:

$$\begin{aligned} K_q^{rs} - K_q^{rs} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n 2k_{p_s p_j} d_{rj} - 2k_{p_r p_j} d_{rj} - 2k_{p_s p_j} d_{sj} + 2k_{p_r p_j} d_{sj} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n 2d_{rj} \cdot (k_{p_s p_j} - k_{p_r p_j}) + 2d_{sj} (k_{p_r p_j} - k_{p_s p_j}) \end{aligned}$$

woraus folgt

$$D_q^{rs} = K_{q+1}^{rs} - K_q^{rs} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r, s}}^n 2(d_{rj} - d_{sj}) \cdot (k_{ps}p_j - k_{pr}p_j)$$

II. Die standortabhängigen Produktionskosten

Wenn in der q-ten Zuordnung mit

$$(p_{ij}) = p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn}$$

die auf den Plätzen r und s angeordneten Produktionsarten ihre Plätze tauschen, dann bringt das für die standortabhängigen Produktionskosten eine Kostenänderung von

$$\begin{aligned} K_{pq}^{rs} = K_{pq+1}^{rs} - K_{pq}^{rs} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r, s}}^n c_{p_i i} + c_{p_r s} + c_{p_s r} - \sum_{i=1}^n c_{p_i i} - c_{p_r r} - c_{p_s s} \\ &= c_{p_r s} + c_{p_s r} - c_{p_r r} - c_{p_s s} \end{aligned}$$

Wenn beim Übergang von Stufe q zur Stufe q+1 der Rechnung nach dem damit verbundenen Platztausch auch jeweils ein Zeilentausch in der Matrix $(c_{p_{ij}})$ durchgeführt wird, so daß zu Beginn einer jeden Stufe der Rechnung die Produktionskosten der Produktionsart p_i in Zeile i der Matrix $(c_{p_{ij}})$ stehen, dann gelten stets $p_r = r$ und $p_s = s$.

In diesem Falle erhält man dann für die Veränderung der Produktionskosten die vereinfachte Form

$$\Delta K_{pq}^{rs} = c_{rs} + c_{sr} - c_{rr} - c_{ss}.$$

Literaturverzeichnis

- Armour, G.C., Buffa, E.S., "A heuristic Algorithm and Simulation Approach to relative Location of Facilities";
in: Management Science, 1963, S. 294 - 309
- Buffa, E.S., Armour, G.C., Vollmann, T.E., "Allocating Facilities with CRAFT", in: Harvard Business Review, 1964
S. 136 - 158
- Frey, S.R., "Plant Layout - Planung, Optimierung und
Einrichtung von Produktions-, Lager- und Ver-
waltungsstätten" München/Wien 1975; in diesem
Buch wird der Begriff "Layout" jedoch sehr
weit gefaßt, so daß die hier angesprochenen
Probleme nur am Rande behandelt werden.
- Kiehne, R., "Innerbetriebliche Standortplanung und Raum-
zuordnung" Wiesbaden 1969
- Lochmann, H.-O., "Layout Planning" Diss. Bonn 1975; in diesem
Buch befindet sich ein sehr ausführliches
Literaturverzeichnis, so daß hier auf detail-
lierte Angaben verzichtet werden kann.
- Pack, L., Kiehne, R., Reiner mann, H., "Raumzuordnung und Raumform",
in: Management International Review, 1966,
Heft 4, S. 7 - 42