

Milde, Hellmuth

Working Paper

Über einige komparativ-statische Resultate der Portfoliotheorie

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 169

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Milde, Hellmuth (1982) : Über einige komparativ-statische Resultate der Portfoliotheorie, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 169, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/75088>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

FAKULTÄT FÜR
WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND STATISTIK
UNIVERSITÄT KONSTANZ

ÜBER EINIGE KOMPARATIV-STATISCHE RESULTATE
DER PORTFOLIOTHEORIE

Hellmuth Milde

Serie A — Nr. 169

DISKUSSIONSBEITRÄGE

16. JUN 1971
Wirtschaftswissenschaften
Kiel

D-7750 Konstanz
Postfach 5560

25. OKT. 1968 Weltwirtschaft
Kiel

ÜBER EINIGE KOMPARATIV-STATISCHE RESULTATE
DER PORTFOLIOTHEORIE

Hellmuth Milde
↳

Serie A - Nr. 169

September 1982

Serie A: Volkswirtschaftliche Beiträge

Serie B: Finanzwissenschaftliche Arbeitspapiere

Serie C: Betriebswirtschaftliche Beiträge

Über einige komparativ-statische Resultate
der Portfoliotheorie*

1.) Einleitung.

Der folgende Beitrag ist in wesentlichen Teilen die Anwendung einiger neuer Analyse- und Beweisverfahren aus Lippman/McCall (1981) auf das Portfolio-modell von Arrow (1970, Kapitel 3). Lippman/McCall wenden ihre Methoden hauptsächlich auf Such-, Versicherungs-, Konsum- und Produktionsprobleme an. Arrows Modell ist ein Ein-Perioden-Modell und erklärt für genau zwei Aktiva das optimale Anlageverhalten der Vermögensbesitzer. Die beiden Anlageformen sind Bargeld (sicheres Aktivum) und Wertpapiere (unsicheres Aktivum). Während Bargeld einen sicheren Ertrag von Null hat, kann der Kurswert (die Effektivverzinsung) der Wertpapiere am Ende der Entscheidungsperiode jede beliebige Höhe annehmen. Die Anlageentscheidung muß am Periodenbeginn getroffen werden, zu einem Zeitpunkt also, wo mögliche Gewinne oder Verluste aus der Wertpapierhaltung unbekannt sind.

Für die folgenden Überlegungen gelten die Symbole:

- V = Anfangsvermögen (exogen),
- W = Endvermögen (Zufallsvariable),
- M = Kassenbestand (endogen),
- B = Wertpapierbestand (endogen),
- X = Wertpapierverzinsung (Zufallsvariable).

Ferner gelten folgende Definitionen:

$$(1) \quad V = M + B \quad ,$$

$$(2) \quad W = M + B(1 + X) = V + BX \quad .$$

Ziel des Investors im Arrow-Modell ist die Maximierung des Erwartungswertes des Nutzens seines Endvermögens.

* Für Anregungen und Verbesserungsvorschläge danke ich Siegfried Berninghaus und John McCall.

Die Nutzenfunktion lautet:

$$(3) \quad u = u(W), \quad \text{mit } u'(W) > 0, \quad u''(W) < 0.$$

Der Aktionsparameter des Modells ist der Betrag B der Wertpapierhaltung. Damit ist im Zwei-Aktiva-Modell simultan die Kassenhaltung M endogen bestimmt. Das Optimierungsproblem lautet:

$$\begin{array}{l} \text{Max} \\ 0 \leq B \leq V \end{array} \quad E[u(V + BX)].$$

Die Bedingungen erster und zweiter Ordnung lauten:

$$(4) \quad E[u(\cdot)]_B = E[u'(V + B^*X) \cdot X] = 0,$$

$$(5) \quad E[u(\cdot)]_{BB} = E[u''(V + B^*X) \cdot X^2] < 0.$$

In (4) wird eine interne Lösung für B charakterisiert: $0 < B^* < V$. Für Randlösungen ($B^* = 0$, $B^* = V$) kann (4) verletzt sein. Die Erfüllung von (5) ist wegen $u'' < 0$ für alle B^* -Werte garantiert. Der optimale Wertpapierbestand B^* hängt laut (4) vom Anfangsvermögen V , von den Eigenschaften der Nutzenfunktion (3) sowie von den Eigenschaften der Dichtefunktion für X ab. Mit den verschiedenen komparativ-statischen Übungen beschäftigen sich die folgenden Abschnitte dieser Arbeit.

2.) Effekte aus Vermögensänderungen.

Aus (4) erhalten wir

$$(6) \quad \frac{dB^*}{dV} = - \frac{E[u]_{BV}}{E[u]_{BB}} = - \frac{E[u''(\cdot) \cdot X]}{E[u''(\cdot) \cdot X^2]}$$

Wegen (5) folgt aus (6):

$$(7) \quad \text{sign} \frac{dB^*}{dV} = \text{sign} E[u''(\cdot) \cdot X].$$

Wie nachgewiesen werden wird, gilt ferner:

$$(8) \quad \text{sign} E[u''(\cdot) \cdot X] = - \text{sign} R'_A(W).$$

Dabei ist $R_A(W) = - u''(W)/u'(W)$ das Arrow-Pratt-Maß der absoluten Risikoaversion; vgl. Arrow (1970, Kap. 3) sowie Pratt (1964). Aus (6) bis (8) erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$(9a) \quad \frac{dB^*}{dV} > 0 \quad \text{für } R'_A < 0,$$

$$(9b) \quad \frac{dB^*}{dV} = 0 \quad \text{für } R'_A = 0,$$

$$(9c) \quad \frac{dB^*}{dV} < 0 \quad \text{für } R'_A > 0.$$

Der folgende Beweis (vgl. Appendix 4 zu Kap. 3 in Arrow (1970)) gilt für den Fall (9a); die Fälle (9b), (9c) werden analog behandelt. Für $X = 0$ ist laut (2) $W = V = \text{const.}$; für $X > 0$ ist $W = V + XB > V$. Bei Unterstellung von $R_A'(W) < 0$ gilt $R_A(W) < R_A(V)$ bzw. $-u''(W)/u'(W) < R_A(V)$ oder $u''(W) > -R_A(V) \cdot u'(W)$. Die Multiplikation beider Seiten der letzten Ungleichung mit der positiven Zahl X ($X > 0$) ergibt $u''(W) \cdot X > -R_A(V) \cdot u'(W) \cdot X$. Bei Erwartungswertbildung beider Seiten und Berücksichtigung von (4) folgt $E[u''(W) \cdot X] > -R_A(V) \cdot E[u'(W)X] = 0$. Damit ist $E[u''(W)X] > 0$ und laut (7) $dB^*/dV > 0$. Für $X < 0$ ist $W = V + XB < V$, und bei $R_A'(W) < 0$ folgt $R_A(V) < R_A(W)$ oder $u''(W) < -R_A(V) \cdot u'(W)$. Die Multiplikation beider Seiten mit der negativen Zahl X ($X < 0$) führt zu $u''(W) \cdot X > -R_A(V) \cdot u'(W) \cdot X$. Der Rest des Beweises folgt unverändert dem Fall $X > 0$. Damit gilt für $R_A'(W) < 0$ immer $dB^*/dV > 0$. Q.E.D.

Im nächsten Schritt wird die Vermögenselastizität der Wertpapierhaltung berechnet. Bei Berücksichtigung von (2) und (6) erhalten wir:

$$(10) \quad \frac{dB^* \cdot V}{dV \cdot B^*} \equiv \epsilon(B^*, V) = - \frac{E[u''(\cdot) \cdot X \cdot (W - X \cdot B^*)]}{E[u''(\cdot) \cdot X] B^*} \quad \text{oder}$$

$$(11) \quad \epsilon(B^*, V) - 1 = - \frac{E[u''(W) \cdot WX]}{E[u''(W) \cdot X] B^*} .$$

Wegen (5) folgt:

$$(12) \quad \text{sign} \left(\epsilon(B^*, V) - 1 \right) = \text{sign} E[u''(W)WX].$$

Analog zu (8) wird unten nachgewiesen werden, daß

$$(13) \quad \text{sign} E[u''(W)WX] = - \text{sign} R_R'(W)$$

gilt. Dabei ist $R_R(W) = R_A(W) \cdot W$ das Arrow-Pratt-Maß der relativen Risiko-

aversion. Aus (11) bis (13) folgt:

$$(14a) \quad \epsilon(B^*, V) > +1 \quad \text{für } R'_R < 0,$$

$$(14b) \quad \epsilon(B^*, V) = +1 \quad \text{für } R'_R = 0,$$

$$(14c) \quad \epsilon(B^*, V) < +1 \quad \text{für } R'_R < 0.$$

Der folgende Beweis gilt für (14a); die Fälle (14b) und (14c) folgen analog dazu. Für $X = 0$ ist wie oben $W = V = \text{const.}$; für $X > 0$ ist $W = V + XB > V$. Bei Unterstellung von $R'_R(W) < 0$ gilt $R_R(W) < R_R(V)$ oder $u''(W) \cdot W > -R_R(V) \cdot u'(W)$. Die Multiplikation mit der positiven Zahl X ($X > 0$), die Bildung von Erwartungswerten sowie die Berücksichtigung von (4) führen zu folgendem Ergebnis:

$E[u''(W) \cdot W \cdot X] > -R_R(V) \cdot E[u'(W) \cdot X] = 0$. Das gleiche Resultat folgt im Falle $X < 0$. Damit gilt für $R'_R(W) < 0$ immer $E[u''(W) \cdot W \cdot X] > 0$ und $\epsilon(B^*, V) - 1 > 0$. Q.E.D.

Die Ergebnisse aus (9) und (14) werden in der folgenden Tabelle 1 systematisch zusammengestellt:

Tabelle 1

Vermögens- elastizität	Eigenschaft von R_A	Eigenschaft von R_R
$\epsilon(B^*, V) < 0$	$R'_A > 0$	$R'_R > 0$
$\epsilon(B^*, V) = 0$	$R'_A = 0$	$R'_R > 0$
$0 < \epsilon(B^*, V) < +1$	$R'_A < 0$	$R'_R > 0$
$\epsilon(B^*, V) = +1$	$R'_A < 0$	$R'_R = 0$
$\epsilon(B^*, V) > +1$	$R'_A < 0$	$R'_R < 0$

Der Leser kann die Eintragungen in Tabelle 1 überprüfen, wenn er den Zusammenhang zwischen $R_A(W)$ und $R_R(W)$ berücksichtigt. Aus $R_R(W) = R_A(W) \cdot W$ folgen $R'_R(W) = R'_A(W) + R_A(W) \cdot W$ sowie $R'_A(W) = (R'_R(W) - R_A(W))/W$. Dabei gelten für einen risikoaversiven Investor ($u''(W) < 0$) immer $R_A(W) > 0$ und $R_R(W) > 0$.

Bei Berücksichtigung von (9) gelten wegen $dM^*/dV = 1 - dB^*/dV$ für die zweite endogene Variable M^* folgende Resultate:

$$(15a) \quad \frac{dM^*}{dV} < +1 \quad \text{für } R'_A < 0,$$

$$(15b) \quad \frac{dM^*}{dV} = +1 \quad \text{für } R'_A = 0,$$

$$(15c) \quad \frac{dM^*}{dV} > +1 \quad \text{für } R'_A > 0.$$

Für die Elastizitäten besteht folgender Zusammenhang:

$$(16) \quad \epsilon(M^*, V) = 1 + (1 - \epsilon(B^*, V))B^*/M^*.$$

Aus (11) und (16) errechnen wir:

$$(17) \quad \epsilon(M, V) - 1 = + \frac{E[u''(W) \cdot W \cdot X]}{E[u''(W) \cdot X^2]M^*}.$$

Analog zu (14) folgt:

$$(18a) \quad \epsilon(M^*, V) < +1 \quad \text{für } R'_R < 0,$$

$$(18b) \quad \epsilon(M^*, V) = +1 \quad \text{für } R'_R = 0,$$

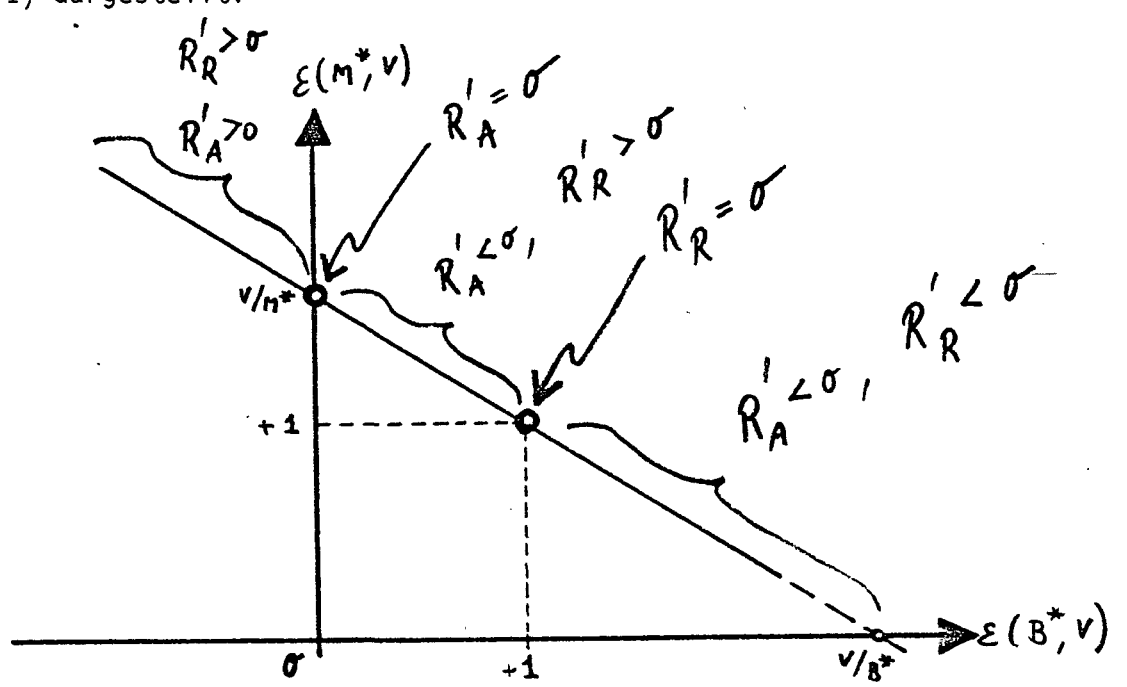
$$(18c) \quad \epsilon(M^*, V) > +1 \quad \text{für } R'_R > 0.$$

Die folgende Tabelle 2 stellt die Ergebnisse (15) und (18) noch einmal systematisch zusammen:

Tabelle 2

Vermögens- elastizität	Eigenschaft von R_A	Eigenschaft von R_R
$\epsilon(M^*, V) > V/M^*$	$R_A > 0$	$R_R > 0$
$\epsilon(M^*, V) = V/M^*$	$R_A = 0$	$R_R > 0$
$+1 < \epsilon(M^*, V) < V/M^*$	$R_A < 0$	$R_R > 0$
$\epsilon(M^*, V) = +1$	$R_A < 0$	$R_R = 0$
$\epsilon(M^*, V) < +1$	$R_A < 0$	$R_R < 0$

Die Ergebnisse beider Tabellen werden in Figur 1 (mit der üblichen Annahme $V/M^* > +1$) dargestellt:



Figur 1: Mögliche Elastizitätskombinationen

Die Elastizitätskombination $\epsilon(M^*, V) = 0$ und $\epsilon(B^*, V) = V/B^*$ ist für einen risikoaversiven Investor nicht denkbar. Nur ein risikoneutraler Investor ($u''(W) = R_A(W) = R_R(W) = 0$) wird diese Konstellation realisieren.

3.) Effekte von Erwartungsertragsänderungen.

Es gelte die folgende additive Zerlegung der Zufallsgröße X:

$$(19) \quad X = E[X] + h, \quad \text{mit } E[h] = 0.$$

Bei Berücksichtigung von (19) folgt aus (4):

$$(20) \quad \frac{dB^*}{dE[X]} = - \frac{E[u(\cdot)]_{BE[X]}}{E[u(\cdot)]_{BB}} = - \frac{E[u'(\cdot)]}{E[u(\cdot)]_{BB}} - \frac{E[u''(\cdot)X]B^*}{E[u(\cdot)]_{BB}}$$

Preiseffekte können bekanntlich in verschiedene Teileffekte zerlegt werden. Der Summand $(-E[u']/E[u]_{BB})$ steht für den isolierten Substitutionseffekt; der Effekt ist wegen (5) und $E[u'] > 0$ eindeutig positiv. Der zweite Summand ist laut (6) identisch mit $B^* \cdot dB^*/dV$; er charakterisiert damit den isolierten Vermögenseffekt. Dieser Effekt hat gemäß (9a) bis (9c) unterschiedliche Vorzeichen. Für den Gesamteffekt können wir folgende Aussagen machen:

$$(21a) \quad \frac{dB^*}{dE[X]} = - \frac{dM^*}{dE[X]} > 0 \quad \text{für } R_A' \leq 0,$$

$$(21b) \quad \frac{dB^*}{dE[X]} = - \frac{dM^*}{dE[X]} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \text{für } R_A' \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0.$$

In (21a) werden (9a) und (9b) berücksichtigt. Der positive Substitutionseffekt wird laut (9a) durch den positiven Vermögenseffekt verstärkt. Laut (9b) ist der Vermögenseffekt gleich Null und der Gesamteffekt ist mit dem Substitutionseffekt identisch. Im Fall (21b) bzw. (9c) ist das Vor-

zeichen des Gesamteffekts ungewiß; für das Resultat sind nun die absoluten Beträge des Substitutions- und des Vermögenseffektes relevant.

4.) Effekte von Änderungen im Risikograd der Zufallsgröße.

Wir fragen jetzt, welchen Einfluß die Erhöhung des Risikogrades bzw. der Variabilität einer Zufallsgröße (in unserem Falle also X bzw. W) auf die Optimallösung (bei uns also B^*) hat. Die Varianz (bzw. Standardabweichung) kann als zuverlässiger Risikoindikator nur dann dienen, wenn eine quadratische Nutzenfunktion und/oder eine normalverteilte Zufallsvariable vorliegen. Für andere Nutzenfunktionen können leicht Beispiele konstruiert werden, wo ein risikoaversiver Investor eine Dichte trotz kleinem Erwartungswert und großer Varianz höher bewertet als eine andere Dichte mit großem Erwartungswert und kleiner Varianz (vgl. das Beispiel 2 in Hanoch/Levy (1969), S. 342).

Mit Hilfe des Konzeptes der "stochastischen Dominanz" können Bedingungen für die Klassifikation unterschiedlicher Dichtefunktionen angegeben werden. Man unterscheidet mehrere Grade stochastischer Dominanz: Dominanz erster Ordnung (FSD), zweiter Ordnung (SSD), usw. Dabei existiert eine vollständige Äquivalenz zwischen der Ordnungsrelation eines bestimmten Dominanzgrades und der Höhe des Erwartungsnutzens der jeweils zulässigen Nutzenfunktionen. Das Kriterium für FSD erlaubt die Klassifikation von Dichtefunktionen entsprechend dem Erwartungsnutzen für alle nicht-fallenden (Nutzen-)Funktionen; die Ordnungsrelation gemäß FSD ist damit unabhängig von Risikoaversion, -neutralität oder -vorliebe des Investors ($u' \geq 0$, $u'' \leq 0$). Wie Hadar/Russell (1971, S. 291) jedoch zeigen, impliziert FSD die eindeutige Rangordnung der Erwartungswerte: Der Erwartungswert der "besten" Dichtefunktion muß größer sein als jener der "zweitbesten" Dichte, usw. (vgl. auch Lippman/McCall (1981), S. 216, Theorem 1).

Um auch Dichtefunktionen mit identischen Erwartungswerten klassifizieren zu können, muß das schwächere Kriterium der SSD herangezogen werden. Aussagen über die Ordnungsrelation von Dichtefunktionen mit gleichen Erwartungswerten gemäß SSD sind allerdings nur für konkave Funktionen möglich. Dabei ist es jedoch gleichgültig, ob die Funktionen eine positive oder eine negative Stei-

gung haben ($u' > 0$, $u'' < 0$). Die Beschränkung auf konkave Funktionen impliziert, daß Klassifikationen im Sinne der SSD ausschließlich für risikoaverse Investoren durchführbar sind. Die Erweiterung auf fallende Funktionen - bei FSD war die Aussagefähigkeit auf nicht-fallende Funktionen beschränkt - bedeutet, daß das Kriterium der SSD nicht nur auf Totalnutzen-, sondern auch auf Grenznutzenüberlegungen anwendbar ist (vgl. Lippman/McCall (1981), S. 216, Theorem 2).

Im folgenden bezeichnen wir mit $F(\cdot)$ und $G(\cdot)$ zwei unterschiedliche Verteilungsfunktionen für die Zufallsvariable W mit gleichen Erwartungswerten: $E^F[W] = E^G[W]$. Wenn alle risikoaversiven Investoren die Verteilung F der Verteilung G vorziehen, muß folgende Bedingung erfüllt sein:

$$(22) \quad E^F[u(W)] \geq E^G[u(W)], \text{ wobei } u'' < 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Ordnungsrelation (22) ist (vgl. etwa die Ableitung bei Hey (1981), S. 28 ff.):

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{\hat{W}} [G(W) - F(W)] dW \geq 0, \text{ für alle } \hat{W}.$$

Sofern (22) bzw. (23) erfüllt sind, sagen wir: F dominiert G im Sinne der Dominanz zweiter Ordnung; oder: G ist risikoreicher als F .

Nachdem jede Verteilungsfunktion hinsichtlich ihres Risikogrades eindeutig klassifiziert worden ist, fragen wir nach der Optimalgröße des jeweils zugehörigen Aktionsparameters. Den in (4) berechneten Optimalwert B^* ersetzen wir bei Existenz der beiden Verteilungen F und G (wobei G risikoreicher ist als F) durch die zwei Optimalwerte B^F und B^G . Beide B -Werte erfüllen für die jeweils korrespondierenden Verteilungsfunktionen die Bedingungen erster (4) und zweiter (5) Ordnung. Folgende Frage soll beantwortet werden: Ist B^F kleiner als, größer als oder gleich B^G ? Wir werden nachweisen, daß

unter bestimmten Bedingungen $B^G < B^F$ gilt. Bei Verletzung der relevanten Bedingungen ist das umgekehrte Resultat möglich.

Unter welchen Bedingungen gilt $B^G < B^F$? Zur Beantwortung dieser Frage definieren wir folgende Differenz J :

$$(24) \quad J = E^F[u'(W)X] - E^G[u'(W)X].$$

Ferner definieren wir eine f - Funktion: $f(W) = u'(W)W$ (vgl. Lippman/McCall (1981), S. 240 und S. 250). Dann erhalten wir wegen $X = (W-V)/B$ aus (24)

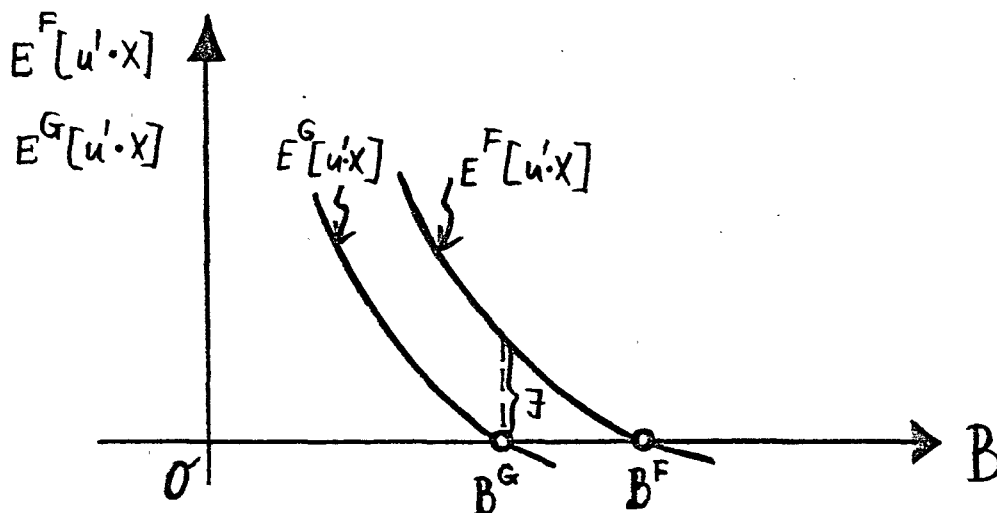
$$(25) \quad J = (E^F[f(W)] - E^G[f(W)])/B + (E^G[u'(W)] - E^F[u'(W)])V/B, \text{ f\"ur alle } B.$$

Aus den Überlegungen im Zusammenhang mit (22) und (23) oben folgt dann eindeutig $J > 0$, wenn die Funktion $f(W)$ konkav ist ($f'' < 0$) und die Funktion $u'(W)$ konvex ist ($u''' > 0$). Im Grenzfall kann eine der beiden Funktionen linear sein, d.h. $f'' = 0$ oder $u''' = 0$.

Aus $J > 0$, (24) und (4) erhalten wir folgende Zwischenresultate:

$$E^F[u'(V+B^G X)X] - J = E^G[u'(V+B^G X)X] = 0 \text{ sowie } E^F[u'(V+B^G X)X] = J > 0.$$

Damit $E^F[u'(V+B^F X)X] = 0$ erfüllt ist, muß wegen (5) das Ergebnis $B^G < B^F$ gelten (vgl. Figur 2). Q.E.D.



Figur 2: Optimalwerte bei unterschiedlichen Verteilungsfunktionen

Die Bedingungen für $J > 0$ bzw. $B^G < B^F$ lauten: $f'' < 0$ und $u''' > 0$.
 Sofern also f konkav und u' konvex sind, führt ein Zuwachs im Risiko-
 grad der Zufallsgröße (G ist risikoreicher als F) zu einer Reduktion
 der optimalen Wertpapierhaltung ($B^G < B^F$).

Die Bedingung $u''' > 0$ folgt aus $R_A^i \leq 0$ (vgl. Lippman/McCall (1981),
 S. 235 f), denn $R_A^i = + R_A \cdot (u'''/u'' - u''/u') \leq 0$ ist nur für $u''' \geq (u'')^2/u' > 0$
 erfüllt. Die Eigenschaft $f'' = 2u'' + wu''' < 0$ hat bei $u'' < 0$ für u'''
 eine Restriktion zur Folge: $u''' < -2u''/W$. Zur Diskussion von Konkavität
 und Konvexität der u' - und f -Funktionen bei alternativen u -Funktionen
 vgl. Lippman/McCall (1981) S. 241 und S. 251.

Das Resultat $B^F < B^G$ würde sich bei $f'' > 0$ und $u''' < 0$ einstellen.
 Bei den Kombinationen $f'' > 0$, $u''' > 0$ oder $f'' < 0$, $u''' < 0$ ist keine
 eindeutige Reaktion der Wertpapierhaltung auf gegebene Risikoänderungen
 ableitbar.

5.) Effekte von Änderungen im Risikoaversionsmaß.

Wir fragen nun, welchen Einfluß die Erhöhung des absoluten Risikoaversions-
 grades R_A auf die optimale Wertpapierhaltung B^* hat. Die Verteilungs-
 funktion ist jetzt unverändert; es ändert sich der Verlauf der Nutzen-
 funktion. Es werden zwei Nutzenfunktionen $v(W)$ und $u(W)$ miteinander ver-
 glichen; dabei gelte annahmegemäß $R_A^V(W) > R_A^U(W)$. Den Optimalwert B^*
 ersetzen wir durch die beiden Optimalgrößen B^V und B^U ; beide B -Werte
 erfüllen für die korrespondierenden Nutzenfunktionen die Bedingungen
 erster (4) und zweiter (5) Ordnung. Wir werden nachweisen, daß aus $R_A^V > R_A^U$
 das Resultat $B^V < B^U$ folgt.

Um den Beweis zu führen, definieren wir folgenden Quotienten g
 (vgl. Lippman/McCall (1981) S. 231 u. S. 252):

$$(26) \quad g(W) = u'(W)/v'(W) > 0, \quad \text{mit } g(0) > 0$$

$$\text{und } g' = g \cdot (u''/u' - v''/v') = g \cdot (R_A^V - R_A^U) > 0.$$

Dabei folgt $g(0) = u'(0)/v'(0) > 0$ aus den Eigenschaften $u'(0) > 0$ und $v'(0) > 0$. Die positive erste Ableitung $g' > 0$ folgt aus der Annahme $R_A^V > R_A^U$.

Aus (26) erhalten wir $E[u'(W) \cdot X] = E[g(W) \cdot v'(W) \cdot X]$ bzw. wegen $g' > 0$: $E[u'(W) \cdot X] > g(0) \cdot E[v'(W) \cdot X]$ für alle B . Bei Berücksichtigung von (4) folgt: $E[u'(V+B^U X) \cdot X] = 0 > g(0) \cdot E[v'(V+B^U X) \cdot X]$. Wegen $g(0) > 0$ erhalten wir $E[v'(V+B^U X) \cdot X] < 0$. Damit $E[v'(V+B^V X) \cdot X] = 0$ erfüllt ist, muß wegen (5) das Ergebnis $B^V < B^U$ gelten. Q.E.D.

Wir haben damit gezeigt, daß die Erhöhung des absoluten Risikoaversionsgrades ($R_A^V > R_A^U$) zu einer Reduktion der optimalen Wertpapierhaltung ($B^V < B^U$) führt. Dabei ist bemerkenswert, daß keinerlei Bedingungen erfüllt sein müssen, um dieses Ergebnis zu erhalten.

6.) Zusammenhang mit der " μ - σ -Analyse"

Die μ - σ -Analyse ist anwendbar, wenn die Nutzenfunktion quadratisch ist und/oder wenn die Zufallsvariable normalverteilt ist. Wir beginnen mit dem Fall der quadratischen Nutzenfunktion; den Fall der Normalverteilung behandeln wir danach. Bei Unterstellung einer quadratischen Funktion ($u''' = 0$) erhalten wir einige dubiose Ergebnisse. Dieser Tatbestand ist nicht überraschend, denn für $u''' = 0$ gilt $R_A' = (R_A)^2 > 0$; ferner zeigte die bisherige Diskussion, welche bedeutsame Rolle das Vorzeichen von u''' für verschiedene Resultate hatte.

Wir führen folgende Symbole ein: $\mu_X = E[X]$, $\mu_W = E[W]$, $\sigma_X^2 = \text{Var}[X]$, $\sigma_W^2 = \text{Var}[W]$, wobei laut (2) $\mu_W = V + B\mu_X$ und $\sigma_W^2 = B^2 \sigma_X^2$ gelten; ferner gilt bekanntlich $E[u' \cdot X] = E[u'] \cdot E[X] + \text{Cov}(u', X)$. Bei Unterstellung einer quadratischen Nutzenfunktion

$$(27) \quad u(W) = bW - cW^2, \quad \text{mit } b > 0, \quad c > 0,$$

erhalten wir $E[u'] = b - 2c\mu_W$ sowie $\text{Cov}(u', X) = -2cB\sigma_X^2$

und damit laut (4) folgende Bedingung erster Ordnung:

$$(28) \quad (b-2cV-2cB^*\mu_X) \cdot \mu_X - 2cB^*\sigma_X^2 = 0.$$

Die Bedingung zweiter Ordnung (5) lautet jetzt:

$$(29) \quad -2c(\mu_X^2 + \sigma_X^2) < 0.$$

Aus (28) errechnen wir für $V < b/2c$:

$$(30) \quad B^* = \frac{\mu_X(b/2c-V)}{\mu_X^2 + \sigma_X^2} > 0.$$

Aus (28) oder (30) kann auch folgender Ausdruck errechnet werden:

$$(31a) \quad \frac{\mu_X}{\sigma_X} = - \frac{-2cB^*\sigma_X}{b-2c(V+B^*\mu_X)} > 0.$$

Gleichung (31a) ist nichts anderes als die Marginalbedingung für ein Portfoliooptimum im μ_W - σ_W -Diagramm: Die Steigung der Opportunitätslinie muß im Optimum gleich der Grenzrate der Risikosubstitution sein.

Alternativ zu (31a) besteht folgende Umrechnungsmöglichkeit:

$$(31b) \quad \frac{\mu_X}{2B^*\sigma_X^2} = - \frac{-c}{b-2c(V+B^*\mu_X)} > 0.$$

Die Gleichung (31b) ist die analoge Optimalbedingung im μ_W - σ_W^2 -Diagramm.

Aus (30) bzw. (31) erhalten wir die folgenden komparativ-statischen Ergebnisse:

$$(32) \quad \epsilon(B^*, V) = - \mu_X / (\sigma_X + \mu_X^2) B^* < 0,$$

$$(33) \quad \epsilon(B^*, \mu_X) = (\sigma_X^2 - \mu_X^2) / (\sigma_X^2 + \mu_X^2) \stackrel{\geq}{<} 0, \text{ für } \mu_X \stackrel{\leq}{>} \sigma_X,$$

$$(34) \quad \epsilon(B^*, \sigma_X) = 2 \epsilon(B^*, \sigma_X^2) = - 2\sigma_X^2 / (\sigma_X^2 + \mu_X^2) < 0.$$

(32) ist mit (8c) identisch; Wertpapiere sind inferiore Güter.

Das Resultat (33) ist mit (21b) kompatibel; eine Interpretation gibt Tobin (1958) im Anschluß an seine Gleichung 3.16. Die Gleichung (34) ist ein Spezialfall aus Abschnitt 4 dieser Arbeit; u' ist linear ($u''' = 0$), f ist jedoch konkav ($f'' = 2u'' < 0$). Der von Tobin in 3.17 angesprochene Elastizitätszusammenhang ($\epsilon(B^*, \mu_X) + \epsilon(B^*, \sigma_X) = -1$) folgt aus (33) und (34).

Der zweite Fall für die Anwendung der μ - σ -Analyse ist die Unterstellung einer Normalverteilung. Eine sehr konkrete Untersuchung stammt von Parkin/Gray/Barrett (1970). Die Autoren gehen von einer Nutzenfunktion mit konstanter Risikoaversion aus:

$$(35) \quad u(W) = a - \alpha \cdot e^{-\lambda W}, \quad a > 0, \quad \alpha > 0, \quad \lambda > 0.$$

Der konstante Parameter λ ist das Arrow-Pratt-Maß:

$\lambda = R_A'(W)$, wobei $R_A' = 0$. Bei Unterstellung einer Normalverteilung für W erhalten Parkin/Gray/Barrett folgenden Ausdruck für den Erwartungsnutzen:

$$(36) \quad E[u(W)] = a - \alpha \cdot \exp\left(-(\lambda/2)\mu_W + (\lambda/2)^2 \sigma_W^2\right).$$

Die Maximierung von $E[u(W)]$ in (36) ist identisch mit der Maximierung der folgenden U-Funktion:

$$(37) \quad U = \mu_W - (\lambda/2) \cdot \sigma_W^2 = V + B\mu_X - (\lambda/2) B^2 \sigma_X^2.$$

Aus (37) erhalten wir die folgenden Bedingungen erster und zweiter Ordnung:

$$(38) \quad U_B = \mu_X - \lambda B^* \sigma_X^2 = 0,$$

$$(39) \quad U_{BB} = -\lambda \sigma_X^2 < 0.$$

Aus (38) folgt:

$$(40) \quad B^* = \mu_X / \lambda \sigma_X^2 > 0.$$

Aus (40) errechnen wir folgende Elastizitäten:

$$(41) \quad \epsilon(B^*, V) = 0,$$

$$(42) \quad \epsilon(B^*, \mu_X) = + 1,$$

$$(43) \quad \epsilon(B^*, \sigma_X) = 2 \epsilon(B^*, \sigma_X^2) = - 2$$

$$(44) \quad \epsilon(B^*, \lambda) = - 1.$$

Elastizität (41) ist mit (9b) identisch, Elastizität (42) mit (21a). Die Elastizitäten (43) und (44) sind mit den Resultaten in den Abschnitten 4 und 5 kompatibel.

Literatur:

- 1) Arrow, K. J. (1970), Essays in the Theory of Risk-Bearing, Amsterdam - Oxford - New York.
 - 2) Hadar, J. / Russell, W. R. (1971), Stochastic Dominance and Diversification, Journal of Economic Theory, 3, 288-305.
 - 3) Hanoch, G. / Levy, H. (1969), The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk, Review of Economic Studies, 36, 335-346.
 - 4) Hey, J. D. (1981), Economics in Disequilibrium, New York.
 - 5) Lippman, St. A. / McCall, J. J. (1981), The Economics of Uncertainty: Selected Topics and Probabilistic Methods, in: Arrow, K. J. / Intriligator, M. D. (eds.), Handbook of Mathematical Economics, Vol. I, Amsterdam - New York - Oxford, 211-284.
 - 6) Parkin, J. M. / Gray M. R. / Barret R. J. (1970), The Portfolio Behaviour of Commercial Banks, in: Hilton, K. / Heathfield, D. F. (eds.), The Econometric Study of the United Kingdom, London - Basingstoke, 229-251.
 - 7) Pratt, J. W. (1964), Risk Aversion in the Small and in the Large, Econometrica, 32, 122-136.
 - 8) Tobin, J. (1958), Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, Review of Economic Studies, 25, 65-86.
-