

Keck, Joachim

**Working Paper**

## Der kreditfinanzierte Abbau einer nichterneuerbaren Ressource

Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 209

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Keck, Joachim (1986) : Der kreditfinanzierte Abbau einer nichterneuerbaren Ressource, Diskussionsbeiträge - Serie A, No. 209, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/75079>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

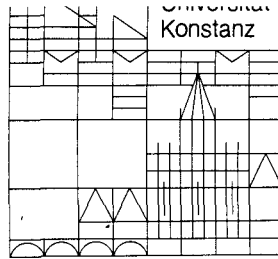
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



## **Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik**

---

Joachim Keck

### **Der kreditfinanzierte Abbau einer nichterneuerbaren Ressource**

25. AUG. 1987 Weltwirtschaft  
Kiel

Diskussionsbeiträge

---

Postfach 5560  
D-7750 Konstanz

- 7. FEB. 1986 Weltwirtschaft  
Kiel

*Handwritten signature and date: 11. 7. 86*

Serie A — Nr. 209  
Januar 1986

Der kreditfinanzierte Abbau  
einer nichterneuerbaren Ressource

Joachim Keck

Serie A - Nr. 209

Januar 1986

25. AUG. 1987 weltwirtschaft  
Kiel

**Serie A: Volkswirtschaftliche Beiträge**  
**Serie B: Finanzwissenschaftliche Arbeitspapiere**  
**Serie C: Betriebswirtschaftliche Beiträge**

## Zusammenfassung

In diesem Modell wird ein ressourcenabbauendes Unternehmen betrachtet, welches sich verschulden muß, um mit der Produktion beginnen zu können. Es wird unterstellt, daß die Kreditgeber über Qualität und Quantität des auszubeutenden Ressourcenstocks nicht vollständig informiert sind. Zur Begrenzung ihres Kreditrisikos geben sie dem Abbaunternehmen daher einen Tilgungstermin vor, zu dem die Schuld zurückgezahlt sein muß. Mit Hilfe parametrischer Variation wird der Einfluß dieser Tilgungsrestriktion auf den Abbaupfad untersucht. Bindet die Tilgungsrestriktion, erhält man einen vom Hotellingpfad abweichenden, zweigeteilten Abbaupfad. Geht der Tilgungszeitpunkt gegen den Anfangszeitpunkt des Gesamtprogramms, tritt der Fall ein, daß kein zulässiger Abbaupfad mehr existiert.

Ich danke den Herren Dr. E. Mohr, M. Rauscher und Prof. Dr. H. Siebert für Anregungen und hilfreiche Hinweise.

## Der kreditfinanzierte Abbau einer nichterneuerbaren Ressource.

### 1. Die Problemstellung.

Die Gewinnung nichterneuerbarer, natürlicher Ressourcen ist in der Regel dadurch gekennzeichnet, daß sich das Abbaunternehmen verschulden muß, um die Produktionskapazität einer Mine in der Praxis erstellen zu können. Während dieser Kapitalstock aufgebaut wird, nimmt bis zum Beginn der Abbautätigkeit die Nettoverschuldung des Unternehmens laufend zu. In der Produktionsphase der Mine muß dann die planmäßige Tilgung der aufgenommenen Kredite als Restriktion bei der Festlegung der Abbaurrate berücksichtigt werden.

Die Kosten der Produktionskapazität (Set-up Costs) und die Tilgungsmodalitäten der zu deren Finanzierung notwendigen Kredite müssen die Wahl des optimalen Abbaupfades auch in einem modellmäßigen Kontext beeinflussen. In dieser Arbeit werden die Set-up Costs als gegeben erachtet und die Auswirkungen der Tilgungsrestriktion in einem Modell eines ressourcenabbauenden Unternehmens untersucht.

In Hotellings Grundmodell des Ressourcenabbaus (Hotelling 1931) wird das Problem, die Produktionskapazität aufzubauen, zwar gesehen, aber nicht explizit erörtert. Implizit ist auch unterstellt, daß sich das Abbaunternehmen auf einem perfekten Kapitalmarkt unbegrenzt refinanzieren kann, der Abbaupfad also nicht von Finanzierungsrestriktionen beeinflusst wird (Hellwig/Kogelschatz 1981). Die Set-up Costs werden in den Modellen von Puu (1977), Campbell (1980) und Siebert (1982) berücksichtigt. Allerdings wird hier die Finanzierungsfrage nicht aufgegriffen. Es wird gezeigt, daß die Abbaurrate bis zur Rückgewinnung des eingesetzten Kapitals in ihrer zeitlichen Entwicklung vom Hotellingpfad abweichen kann. Puu (1977), der einen Bestandseffekt in seine Kostenfunktion eingebaut hat, erhält zu Beginn steigende und dann fallende Abbauraten. Bei Campbell (1980) und Siebert (1982) führt die Annahme von Set-up Costs bei einer konvexen Kostenfunktion zu einer zunächst konstanten und dann wieder dem Hotellingpfad folgenden Abbaurrate.

Damit war gezeigt, was bereits Hotelling (1931, S. 164) selbst vermutete.

In Siebert (1985, Kap. VII) wird ein Land betrachtet, welches sich auf einem gespaltenen Kapitalmarkt (der Sollzins ist größer als der Habenzins) verschulden muß, um den Aufbau seines Rohstoffsektors zu finanzieren. Es wird herausgearbeitet, unter welchen Bedingungen das Land seinen Rohstoff a) zum Aufbau von Finanzaktiva nutzt (low absorber), b) ohne Akkumulation von Vermögen verbraucht (high absorber) und c) zu konservieren trachtet.

Im folgenden Modell soll eine einzelne Firma betrachtet werden, welche sich verschuldet, um mit dem Abbau einer nichterneuerbaren Ressource beginnen zu können. Man denke etwa an einen Kredit, mit welchem der Erwerb einer Schürflizenz oder zu Beginn der Förderung anfallende Set-up Costs finanziert werden.

Die Firma nimmt den Kredit auf einem unvollkommenen Kapitalmarkt auf. Es existiert zwar ein einheitlicher Soll- und Habenzins, sie wird aber den Kredit nur mit der Auflage erhalten, daß sie sich zu einem exogen vorgegebenen Termin vollkommen entschuldet hat. Nach dem Rückzahlungszeitpunkt ist dann das Standardproblem der Ressourcentheorie zu lösen: die Unternehmung baut den Rohstoff ab, sofern sich das als wirtschaftlich erweist. Kredite werden nicht mehr aufgenommen, da dazu in diesem Modell jeglicher Anreiz (z.B. Konsum) fehlt. Begründet wird die Vorgabe eines Rückzahlungszeitpunktes damit, daß der exogene Bankensektor keine vollständige Information über die Qualität und Quantität der Ressource hat.<sup>1)</sup>

Im Modell wird die Nettosition des Kreditnehmers betrachtet. Die verschuldete Firma kann den Gewinn, den sie mit dem Abbau der Ressource erwirtschaftet, in Aktiva anlegen. Wegen der Annahme des einheitlichen Kapitalmarktzinses ist sie indifferent bei der Verwendung ihrer Mittel zur Tilgung und der Anlage am Kapital-

1) Als weitere Unvollkommenheiten des Kapitalmarkts sind Unteilbarkeiten der Anlagemöglichkeiten, nichtneutrale Besteuerung, Transaktionskosten und die oben erwähnte Zinssatzdifferenzierung zu nennen. Im vorliegenden Modell wird von einer Informationsasymmetrie zwischen Kreditgeber und Kreditnehmer ausgegangen.

markt. Entschuldung zum Tilgungstermin bedeutet dann, daß die bis dahin akkumulierten Guthaben den Verbindlichkeiten der Höhe nach entsprechen. Die Nettosition wechselt von einer Schuldner- zu einer Gläubigerposition bzw. die Habenmittel werden zur Tilgung der Sollposition aufgelöst. Das Gesamtproblem ist also zweigeteilt. In der ersten Periode startet die Unternehmung mit der Bürde der Schulden und der Restriktion, im Rückzahlungszeitpunkt tilgen zu müssen; in der zweiten Periode erwirtschaftet die Firma dann entweder einen Gewinn, oder aber der Abbau unterbleibt. Als Kontrollvariable, deren optimaler Pfad gesucht ist, hat die Firma die Abbaurrate pro Periode festzulegen. Ferner soll untersucht werden, was mit dem Abbaupfad geschieht, wenn der Tilgungszeitpunkt zum Anfangszeitpunkt hin verschoben wird. Wann zwingt eine Verkürzung des Tilgungstermins die Firma, vom Hotellingpfad abzuweichen, und wann tritt schließlich der Fall ein, bei dem kein zulässiger Abbaupfad mehr existiert, die Tilgungsrestriktion folglich nicht mehr erfüllt werden kann?

Die Preisentwicklung sei exogen vorgegeben. Beim Abbau der Ressource entstehen Gewinnungskosten, welche mit zunehmender Abbaurrate überproportional ansteigen. Die Unternehmung kann also nicht zum vorgegebenen Tilgungstermin eine beliebig hohe Ressourcenmenge verkaufen, um den Kredit abzulösen.

Das Problem wird als Optimal-Control-Problem in laufenden Werten formuliert. Die Lebensdauer der Mine wird in eine erste Teilperiode mit positiver Nettoverschuldung und in eine zweite Teilperiode, in der der Kredit bereits zurückgezahlt ist, aufgespalten. Dazu wird das Principle of Optimality von Bellman angewandt (vgl. Toussaint (1984) S. 674).

## 2. Die Modellformulierung.

Für die Variablen und Parameter werden folgende Symbole vereinbart:

$t_0$             Anfangszeitpunkt; im folgenden ist  $t_0 = 0$  gesetzt  
 T                Endzeitpunkt des Gesamtprogramms



$t^*$	exogen gegebener Rückzahlungszeitpunkt für die Schulden
$p(t)$	Preis der Ressource mit $p(t) = p(t_0)e^{mt}$
$q(t)$	Menge der Ressource, die pro Periode abgebaut wird
$r$	Kapitalmarktzinssatz (Soll- = Habenzins)
$B(t)$	Bestand der Nettoverschuldung
$R(t)$	Ressourcenbestand
$\Phi(t)$	Schattenpreis der Ressource
$\theta(t)$	Schattenpreis der Nettoverschuldung
$\alpha(t), \mu(t)$	Multiplikatoren
$C[q(t)]$	Kostenfunktion, $C(0) = 0, C'(0) = 0, C'(q) > 0,$ $C''(q) > 0$
$b$	Kontrollparameter
$J(b)$	Hilfsfunktion zur Ermittlung der Transversalitäts- bedingungen
$GW_{t^*}^T$	Optimal Return Function

Hinweis: Zeitindizes ( $t$ ) wurden, wo keine Mißverständnisse möglich waren, zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

Das Modell enthält zwei Bestandsvariablen, den Ressourcenbestand  $R$  und den Schuldenbestand  $B$ . Der Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$  des Programms, der Anfangszustand  $R(0)$  des Ressourcenbestandes und der Endzeitpunkt des Gesamtprogramms sind gegeben ( $T < \infty$ )<sup>2)</sup>; im Endzeitpunkt soll der Ressourcenbestand der Restriktion  $R(T) \geq 0$  genügen. Gegeben ist auch die Nettoverschuldung  $B(0)$  zum Anfangszeitpunkt  $t_0 = 0$ . Zum Tilgungszeitpunkt  $t^*$  soll die Firma entschuldet sein, d.h.

$$(1) \quad B(t^*) \leq 0 \text{ bzw. } -B(t^*) \geq 0.$$

2) Diese Annahme ist bei der Problemstellung des Modells vertretbar. Bei endogen wählbarem Endzeitpunkt  $T$  könnte der Fall eintreten, daß die Banken  $t^* > T$  vorgeben. Bei dieser Konstellation gibt es aber entweder keinen zulässigen Abbaupfad, weil die Parameter des Abbaus für ein solches  $t^*$  zu ungünstig sind, oder aber die Abbauparameter so günstig sind, daß die Bedingung auf jeden Fall erfüllt werden kann. Um die in der Problemstellung erläuterte Fragestellung des Modells zu beantworten, ist also eine Endogenisierung des Endzeitpunktes auch nicht notwendig.

Der Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$  ist exogen vorgegeben. Es sei angenommen, daß  $t^* \leq T$  ist.

Die Kapitalmarktunvollkommenheit, die in das Modell eingebaut wird, resultiert aus der Tatsache, daß die Banken nicht voll über die Entwicklung der Einnahmen des Ressourcenunternehmens informiert sind und deshalb, quasi zur Begrenzung ihres Risikos, dem Abbauunternehmer einen Zeitpunkt  $t^*$  vorgeben, zu dem er sich entschuldet haben muß.

Da in dem Modell auch Abbaukosten enthalten sind, bedeutet dies, daß Refinanzierungen vor dem Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$  zwar nicht explizit unmöglich sind, aber nicht unbegrenzt weitergeführt werden können, weil das Abbauunternehmen zu einem bestimmten Zeitpunkt schuldenfrei zu sein hat.

Darüberhinaus wurde ein Preispfad mit gegebener Wachstumsrate  $m$  angenommen. Es wird kein Marktgleichgewicht mit endogenem Preispfad untersucht.

Das Unternehmen kann die Abbaurrate  $q$  wählen, so daß sich Ressourcenbestand und Schuldenstand in der Zeit folgendermaßen verändern:

$$(2) \quad dR/dt = - q$$

$$(3) \quad dB/dt = - (pq - C(q) - rB)$$

Der Ressourcenbestand nimmt in der Zeit mit der Abbaurrate  $q$  ab und die Nettosition des Schuldners verändert sich mit dem Nettoerlös. Die Unternehmung hat Abbaukosten pro Periode in Form von  $C(q)$  mit  $C'(0) = 0$ ,  $C'(q) > 0$ ,  $C''(q) > 0$ ,  $C(0) = 0$ .

Das Abbauunternehmen maximiert den Gegenwartswert seiner Erlöse:

$$(4) \quad \max_q \int_0^T [pq - C(q)] e^{-rt} dt$$

Die Zielfunktion ist unter den Nebenbedingungen (1) - (3),  $q \geq 0$  und  $R(T) \geq 0$  zu maximieren.  $T < \infty$  sei gegeben. Die Zielfunktion enthält nur den Erlös und die Kosten des Ressourcenabbaus. Die auf den Schuldenbestand  $B$  anfallenden Zinsen  $rB$  sind in der Zielfunktion nicht enthalten. Da bei einem einheitlichen Kapitalmarktzins die Nettoposition des Schuldners betrachtet wird, ist dies nicht zulässig. Die einzig relevante Größe im Modell ist die Abbaurrate  $q$ , die die Höhe des Nettoerlöses bestimmt. Damit ist dann auch festgelegt, wieviele Assets erworben und Habenzinsen erhalten werden. Reichen die Erlöse zum Ausgleich der Schulden noch nicht aus, erhöht sich die Nettoverschuldung um die fälligen Schuldzinsen.  $rB$  geht deshalb in die Bewegungsgleichung der Nettoposition des Schuldners (Gleichung (3)) ein.

Zur Wahl der Kontrollparameter muß man die Transversalitätsbedingungen angeben können. Diese Bedingungen liefert uns die folgende Hilfsfunktion  $J(b)$ . Wählbar sind der Schuldenbestand  $B(t^*)$  zum Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$  sowie der Ressourcenbestand  $R(T)$  zum Endzeitpunkt  $T$ .  $b$  sei der Vektor der Kontrollparameter  $B(t^*)$  sowie  $R(T)$ .

$$(5) \quad J(b) = J[B(t^*), R(T)] = \\ = - \mu_1 B(t^*) + \mu_2 R(T)$$

$\mu_i$ ,  $i = 1, 2$  sind Multiplikatoren.

### 3. Die Lösung des Problems.

Üblicherweise wird zur Ableitung der Transversalitätsbedingungen aus der Hilfsfunktion  $J(b)$  ein Satz von Hestenes (vgl. Takayama (1974) S. 660) angewandt. Dieser Satz gilt jedoch nur für den Anfangszeitpunkt  $t_0$  und den Endzeitpunkt  $T$ . Man benötigt aber auch eine Transversalitätsbedingung für den Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$ , mit deren Hilfe der Schattenpreis der Verschuldung  $\theta$  untersucht werden kann. Um eine solche Transversalitätsbedingung abzuleiten,

zerlegt man das Problem in Teilperioden und macht so  $t^* \in [t_0, T]$  zum Endzeitpunkt (einer Teilperiode), auf den der Satz anwendbar ist. Das Problem wird in der Weise umgeformt, daß die Zielfunktion in zwei Perioden,  $[0, t^*[$  und  $[t^*, T]$ , zu maximieren ist. Zur Anwendung kommt das Principle of Optimality von Bellman (vgl. Toussaint (1984), S. 674). Dabei wird zuerst das Optimierungsproblem der zweiten Periode  $[t^*, T]$  gelöst, in der der Kredit bereits zurückgezahlt worden ist. Die Tilgungsrestriktion fällt dann fort und die Bewegungsgleichung der Bestandsvariablen Verschuldung (Gleichung (3)) wird zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.<sup>3)</sup> Das Ergebnis dieser Teiloptimierung geht in Form der Optimal Return Function in die Optimierung des Gesamtproblems ein.

a) Die Ermittlung der Optimal Return Function.

In der zweiten Periode ist der Kredit zurückgezahlt, es fallen nur noch Abbaukosten an. Zu maximieren ist der Gegenwartswert des Gewinns, falls noch etwas von dem Rohstoff vorhanden ist und abgebaut wird. Der maximale Gegenwartswert sei  $GW_{t^*}^T$ . Dies ist zugleich die gesuchte Optimal Return Function. Das folgende Teilproblem ist zu lösen

$$(6) \quad \max_{q_2} \int_{t^*}^T [pq_2 - C(q_2)] e^{-rt} dt - B(t^*) = GW_{t^*}^T \quad 4)$$

$$\text{u.d.B. } dR/dt = -q_2,$$

$$R(T) \geq 0,$$

$$q_2 \geq 0.$$

3) Eine Beibehaltung brächte keine weitere Informationen, die für die untersuchte Fragestellung wichtig wären.

4) Der Index 2 bedeutet, daß Werte der 2. Teilperiode bzw. nach dem Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$  auf der Zeitachse betrachtet werden.

Die Anfangsbedingungen  $t^*$ ,  $R(t^*)$ ,  $B(t^*) \leq 0$  sind fest vorgegeben. Die Bestandsvariable  $B(t^*)$ , welche annahmegemäß nicht mehr positiv sein darf, geht hier als Anfangsvermögen in den zu maximierenden Wert der Firma ein. Es sei  $t^* \in [t_0, T]$  und  $T < \infty$  angenommen. Die Lagrangefunktion des Problems lautet:

$$(7) \quad L_2 = pq_2 - C(q_2) - \Phi_2 q_2 + \alpha_2 q_2$$

$\Phi_2$  ist der Schattenpreis der Ressource im Boden. Die J-Funktion enthält in diesem Falle nur  $R(T)$ .

$$(8) \quad J_2(b_2) = \mu_{22} R(T)$$

Dann ergeben sich die folgenden Optimalbedingungen:

$$(9) \quad dL_2/dq_2 = p - C'(q_2) - \Phi_2 + \alpha_2 = 0$$

$$(10) \quad (dL_2/d\alpha_2)\alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 \geq 0$$

Die Bewegungsgleichung des Ressourcenschattenpreises ist

$$(11) \quad d\Phi_2/dt = r\Phi_2$$

Aus (9) folgt

$$(12) \quad p - C'(q_2) + \alpha_2 = \Phi_2$$

Mit  $q_2 = 0$  und  $\alpha_2 \geq 0$  folgt  $p \leq \Phi_2$ . Der Schattenpreis der Ressource ist größer als der Grenzerlös; es erfolgt kein Abbau. Mit  $q_2 > 0$  und  $\alpha_2 = 0$  ist  $p - C'(q_2) = \Phi_2$ .

Die Transversalitätsbedingung lautet

$$(13) \quad \mu_{22} R(T) = 0, \quad \mu_{22} \geq 0$$

Daraus erhält man mit (8)

$$(14) \quad \mu_{22} = \Phi_2(T) > 0 \Rightarrow R(T) = 0$$

Da die Ressource im Boden nur abgebaut wird, wenn sie einen positiven Grenzerlös erzielt, muß der Schattenpreis der Ressource  $\Phi_2$  ebenfalls größer als Null sein. Nach (11) ist die Wachstumsrate von  $\Phi_2$  positiv, demnach folgt  $\mu_{22} = \Phi_2(T) > 0$  und  $R(T) = 0$ . Im Endzeitpunkt des Gesamtprogramms ist die Ressource erschöpft. Für die Anfangswerte der Schattenpreise müssen die folgenden Bedingungen gelten (vgl. Toussaint (1984), S. 674):

$$(15) \quad \theta_2(t^*) = dGW/dB(t^*) = -1$$

$$(16) \quad \Phi_2(t^*) = dGW/dR(t^*)$$

Veränderungen der Optimal Return Function aufgrund marginaler Veränderungen der Bestandsvariablen müssen gleich dem Wert des jeweiligen Schattenpreises zum betrachteten Zeitpunkt sein.  $\theta_2$  ist der Schattenpreis einer Einheit (negativer) Nettoverschuldung in der zweiten Periode und gleich minus eins. Wegen der Gleichheit von Soll- und Habenzins entspricht der Wert einer Geldeinheit 'Ressourcenerlös' in der Verwendung für  $B(t^*)$  und ohne daß die Restriktion der Tilgung greift eben dieser Geldeinheit.

b) Die Lösung des Gesamtproblems.

Man hat nun das folgendermaßen formulierte Gesamtproblem zu lösen:

$$(17) \quad \max_{q_1} \int_0^{t^*} [pq_1 - C(q_1)] e^{-rt} dt + GW[B(t^*), R(t^*)] \quad 5)$$

5) Der Index 1 bedeutet, daß Werte der 1. Periode bzw. vor dem Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$  betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
 \text{u.d.B. } \dot{dR}/dt &= -q_1, \\
 dB/dt &= -[pq_1 - C(q_1) - rB], \\
 q_1 &\geq 0, \\
 -B(t^*) &\geq 0, \\
 R(t^*) &\geq 0
 \end{aligned}$$

$R(t_0)$ ,  $B(t_0)$ ,  $t_0$  sind gegeben. Es sei  $t^* \in [t_0, T]$ .

Die Lagrangefunktion lautet dann

$$(18) \quad L_1 = pq_1 - C(q_1) - \Phi_1 q_1 - \theta_1 [pq_1 - C(q_1) - rB] + \alpha_1 q_1$$

Als notwendige Bedingungen erhält man aus dem obigen Ansatz

$$\begin{aligned}
 (19) \quad dL_1/dq_1 &= p - C'(q_1) - \theta_1 p + \theta_1 C'(q_1) - \Phi_1 + \alpha_1 = 0 \\
 &= p - C'(q_1) - \theta_1 [p - C'(q_1)] - \Phi_1 + \alpha_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$(20) \quad (dL_1/d\alpha_1)\alpha_1 = 0, \quad \alpha_1 \geq 0$$

Die Bewegungsgleichungen der Schattenpreise in der Zeit sind

$$(21) \quad d\Phi_1/dt = r\Phi_1$$

$$(22) \quad d\theta_1/dt = r\theta_1 - r\theta_1 = 0$$

$\theta_1$  ist in der Zeit konstant.

Aus (19) folgt

$$(23) \quad p - C'(q_1) - \theta_1 [p - C'(q_1)] + \alpha_1 = \Phi_1$$

Mit  $q_1 = 0$  und  $\alpha_1 \geq 0$  folgt  $p - \theta_1 p \leq \Phi_1$ . Der Schattenpreis der Ressource ist größer als der Grenzerlös; es erfolgt kein Abbau. Mit  $q_1 > 0$  und  $\alpha_1 = 0$  ist  $p - C'(q_1) - \theta_1 [p - C'(q_1)] = \Phi_1$ .

Die Transversalitätsbedingungen lauten:

$$(24) \quad -\mu_{11}B(t^*) = 0, \quad \mu_{11} \geq 0$$

$$(25) \quad \mu_{12}R(t^*) = 0, \quad \mu_{12} \geq 0$$

Die neue Hilfsfunktion  $J_1(b_1)$  ist

$$(26) \quad J_1(b_1) = GW[B(t^*), R(t^*)] - \mu_{11}B(t^*) + \mu_{12}R(t^*)$$

Man erhält daraus die folgenden Bedingungen

$$(27) \quad \theta_1(t^*) = dGW/dB(t^*) - \mu_{11}$$

$$(28) \quad \Phi_1(t^*) = dGW/dR(t^*) + \mu_{12}$$

Aus (15) und (27) folgt

$$(29) \quad \theta_1(t^*) = \theta_2(t^*) - \mu_{11} = -1 - \mu_{11}$$

Gleichung (16) und (28) liefern

$$(30) \quad \Phi_1(t^*) = \Phi_2(t^*) + \mu_{12}$$

Aus (29) folgt, daß der Schattenpreis  $\theta_1$  ebenfalls negativ ist.

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden:

1) Der Rückzahlungszeitpunkt ist so vorgegeben, daß  $B(t^*) < 0$  ist. Die Restriktion bindet nicht oder anders ausgedrückt, die Unternehmung selbst würde einen (endogenen) früheren Tilgungszeitpunkt  $\tau^*$  ( $< t^*$ ) wählen. Nach Gleichung (24) ist der Multiplikator  $\mu_{11}$  Null und es folgt auch Gleichung (29)

$$(29') \quad \theta_1 = \theta_2 = -1.$$

2) Ist der Tilgungstermin  $t^*$  jedoch so gesetzt, daß die Restriktion die Unternehmung bindet, zum Zeitpunkt  $t^*$  also  $B(t^*) = 0$



gelten muß, ist  $\mu_{11} \geq 0$ . Es folgt dann aus (29)

$$(29'') \quad \theta_1 = -1 - \mu_{11}$$

und damit muß  $\theta_1$  betragsmäßig größer als oder gleich  $\theta_2$  sein. In Schaubild 1 ist dies graphisch verdeutlicht.

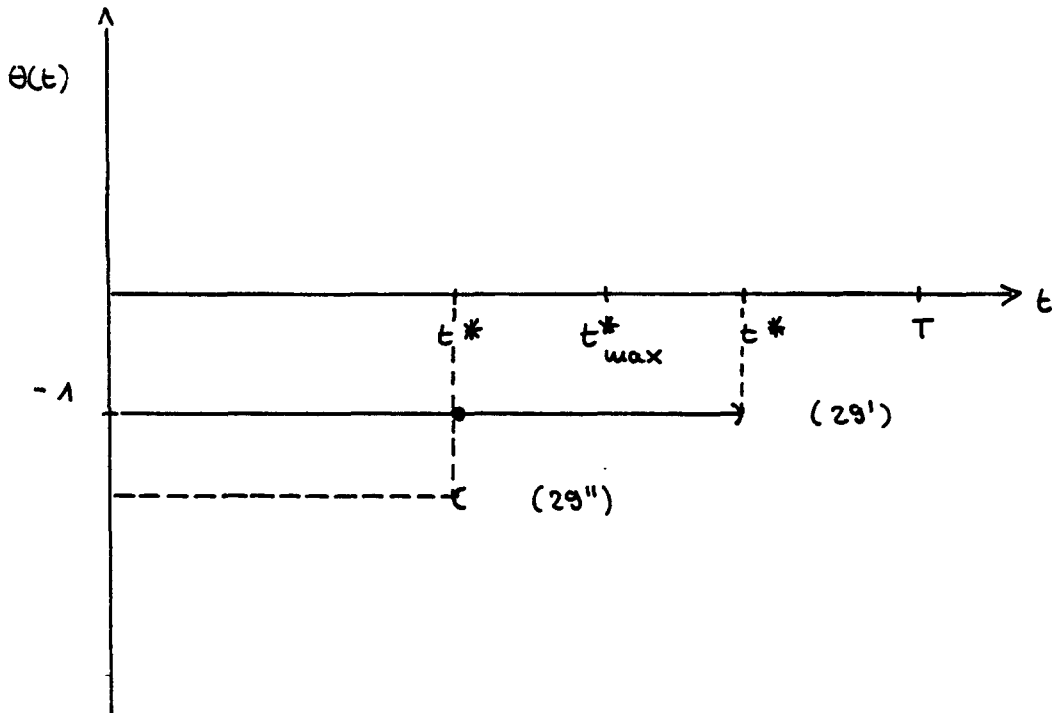


Schaubild 1

Zur Interpretation des Schaubilds: Die Situation, die Gleichung (29') entspricht, tritt bei einem  $t^* \geq t_{\max}^*$  auf. Greift die Restriktion ( $t^* < t_{\max}^*$ ) ist  $\theta$  zuerst kleiner als minus eins und springt dann auf minus eins.<sup>6)</sup>  $t_{\max}^*$  ist der Zeitpunkt, ab dem die Verschuldungsrestriktion bindet. Analog sei  $t_{\min}^*$  als der Zeitpunkt definiert, bis zu dem ein Abbaupfad existiert.

In (30) kann man  $\Phi_1(t^*) = p - C'(q_1) - \theta_1[p - C'(q_1)] + \alpha_1$  und

6) Sprünge in den Schattenpreisen sind zulässig; lediglich die Lagrangefunktion muß stetig sein, vgl. Kreindler (1983) S. 244.

$\Phi_2(t^*) = p - C'(q_2) + \alpha_2$  setzen und erhält

$$(30') \quad p - C'(q_1) - \theta_1 [p - C'(q_1)] + \alpha_1 = p - C'(q_2) + \alpha_2 + \mu_{12}$$

Sei  $q_1 > 0$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\alpha_i = 0$ ; wegen  $q_2 > 0$  muß  $R(t^*) > 0$  und damit  $\mu_{12} = 0$  gelten. Es ergibt sich

$$(31) \quad p - C'(q_1) - \theta_1 [p - C'(q_1)] = p - C'(q_2)$$

$-\theta_1 [p - C'(q_1)]$  ist nicht negativ<sup>7)</sup>. Dann folgt aus der Bedingung (31), daß  $p - C'(q_1) < p - C'(q_2)$  bzw.  $C'(q_1) > C'(q_2)$  ist. Dies bedeutet aber aufgrund der Annahmen über die Kostenfunktion  $C(q)$ , daß  $q_1 > q_2$  ist. Die Abbaumenge am Ende der ersten Periode ( $q_1$ ) ist größer als die zu Beginn der zweiten Periode ( $q_2$ ).

Als Veränderung der Abbaurate in der Zeit ermittelt man

$$(32) \quad dq_1/dt = \frac{(1 - \theta_1)\dot{p} - \dot{\Phi}_1}{(1 - \theta_1)C''(q_1)}$$

Aus Gleichung (32) kann  $\theta_1$  durch Einsetzen von  $\Phi_1 = (1 - \theta_1)[p - C'(q_1)]$  eliminiert werden (beachte:  $d\Phi_1/dt = \delta\Phi_1$ ).

7) Bei  $\theta_1 = -1$  ergibt sich  $\Phi_1 = 2(p - C'(q_1))$  und somit aus (31)  $2(p - C'(q_1)) = p - C'(q_2)$ . Dieses Resultat beruht auf einer Doppelverbuchung jeder eingenommenen Geldeinheit, und der Umstand klärt sich, wenn man sich das Gesamtproblem vor Augen führt

$$\max_q \int_0^{t^*} (pq - C(q))e^{-rt} dt + \int_{t^*}^T (pq - C(q))e^{-rt} dt - B(t^*)$$

Jede verdiente Mark wird im ersten und im letzten Term und damit doppelt verbucht. Hätte man bei der Ermittlung der Optimal Return Function eine Bewegungsgleichung eingeführt, wäre dieses Resultat nicht aufgetaucht. Allerdings wäre Gleichung (31) dann im Hinblick auf den Unterschied in den Abbauraten nicht so leicht zu interpretieren gewesen.

$$dq_1/dt = \frac{(1 - \theta_1)dp/dt - \delta(1 - \theta_1)[p - C'(q_1)]}{(1 - \theta_1)C''(q_1)} =$$

$$= \frac{1}{C''(q_1)} [(m - r)p + \delta C'(q_1)]$$

Der Schattenpreis  $\theta_1$  hat auf die Veränderungsrate der Abbaumenge keinen Einfluß; die Tilgungsrestriktion wirkt sich nur auf das Niveau der Abbaurrate aus.

#### 4. Die Variation des Kreditrückzahlungszeitpunktes $t^*$ .

Die Gleichung (31) soll nun noch einer ausführlicheren, qualitativen Untersuchung unterworfen werden. In welcher Art und Weise die Gleichheit beider Seiten zustande kommt, ist nämlich abhängig von den exogenen Parametern  $p(0)$ ,  $R(0)$ ,  $B(0)$ ,  $C(q)$  und  $t^*$ . Dabei ist die exogene Festsetzung des  $t^*$  im Zusammenwirken mit den vier übrigen Parametern der interessanteste Untersuchungsgegenstand. Sind  $p(0)$ ,  $R(0)$ ,  $B(0)$  und  $C(q)$  so gesetzt, daß der Kapitalwert des Projekts nicht positiv ist, unterbleibt der Abbau der Ressource sowieso. Für verschieden gesetzte Tilgungstermine  $t^*$  sind jedoch unterschiedliche Abbauszenarien denkbar.

Szenario I: Die Abbauraten sind im Extremfall im Zeitpunkt  $t^*$  gleich, d.h.  $\lim_{t \rightarrow t^*} q_1(t^*) = \lim_{t \rightarrow t^*} q_2(t^*)$ . Nach Gleichung (31) ist dies nur für  $\theta_1 = \theta_2 = -1$  realisierbar. Alle Parameter sind so günstig, daß die Restriktion nie bindet,  $B(t^*) < 0$  ist immer erfüllt. Es resultiert ein Abbaupfad wie im Hotelling-Fall.

Szenario II: In der ersten Periode ist der Schattenpreis  $\theta_1 < \theta_2$ , die Restriktion ist bindend. Dies ist aber auch so zu interpretieren, daß vor  $t^*$  immer  $B(t^*) > 0$  gilt: Vor dem Zeitpunkt, zu dem vollständig zu tilgen ist, wird

die Nettosition nicht Null. Wie bereits gezeigt, bedeutet dies, daß die Abbauraten in den Teilperioden unterschiedlich hoch sind (vgl. Schaubild 3, S. 18). Der Grenzwert von  $q(t^*)$  links von  $t^*$  ist größer als der Grenzwert rechts davon. Der Grund dafür kann z.B. in der Höhe von  $B(0)$  oder in dem Verlauf der Kostenfunktion zu finden sein. Anders ausgedrückt: Mindestens einer der Parameter ist nicht so günstig wie unter Szenario I. Das Niveau der Abbauraten liegt in der ersten Teilperiode höher als das des Referenzpfades aus Szenario I, in der zweiten entsprechend niedriger.

Szenario III: Der Rückzahlungszeitpunkt kann so gesetzt sein, daß  $q_2 = 0$  ist. In der ersten Periode muß so viel abgebaut werden, daß nichts mehr für einen Abbau in der zweiten Periode bleibt. Der endogene Erschöpfungszeitpunkt  $T'$  der Mine liegt vor dem Endzeitpunkt  $T$  des Gesamtprogramms. Die Rückzahlungsperiode ist so kurz und deshalb  $q_1$  so groß zu wählen, daß der Preis gleich den Grenzkosten ist. Der Abbaunternehmer erwirtschaftet keinerlei Gewinn mehr (wie überhaupt dieser von Szenario II ab unter ständig zunehmenden Druck der Tilgungsrestriktion geraten ist).

Szenario IV: Selbst eine so hohe Abbaumenge wie im Fall  $p = C'(q_1)$  reicht nicht mehr aus, um den Kredit rechtzeitig zu tilgen. Der konvexen Kostenfunktion wegen kann die Restriktion nicht mehr erfüllt werden; die Grenzkosten sind größer als der Grenzerlös. Es ergibt sich

$$p - C'(q_1) - \theta_1 [p - C'(q_1)] = p + \alpha_2 + \mu_{12} < 0 > 0$$

Die Gleichung kann nicht mehr erfüllt werden, ein zulässiger Abbaupfad existiert nicht mehr.

Die Szenarios sollen mit Hilfe des Zahlenstrahls, an dem der Rückzahlungstermin  $t^*$  abgetragen ist, veranschaulicht werden (vgl.

Schaubild 2 (S. 18)). Der Rückzahlungszeitpunkt fällt in drei unterschiedliche Intervalle (von rechts nach links). Im ersten Intervall zieht die Restriktion nicht. Dann kann er in das Intervall fallen, in dem unterschiedliche Abbauraten in den zwei Teilperioden festgelegt werden. Zu guter Letzt gibt es das Intervall, in dem kein zulässiger Abbaupfad gefunden werden kann. Die Intervallgrenzen sind einmal der Zeitpunkt, ab dem die Tilgungsrestriktion greift ( $t_{\max}^*$ ) und zum zweiten der Zeitpunkt bei dem die Grenzkosten gleich dem Preis werden ( $t_{\min}^*$ ). Die verschiedenen Szenarien sind ebenfalls eingetragen.

Im Schaubild 3 (S. 18) sind die Szenarien I und II dargestellt. Auf der Abszisse ist die Zeit, an der Ordinate sind der Preis und die Grenzkosten abgetragen. Die Differenz der beiden Kurven ergibt die Schattenpreise  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ . Die verschiedenen Rückzahlungszeitpunkte, Schattenpreise und Grenzkosten sind zusätzlich nach den Szenarien indexiert.  $\theta_1 [p - C'(q_1)]$  treibt als Keil die Grenzkosten nach oben. Eine immer größere Menge der abgebauten Ressource wird durch die immer stärker bindende Tilgungsrestriktion absorbiert.

##### 5. Zusammenfassung der Ergebnisse und mögliche Erweiterungen des Modells.

In diesem Modell wird ein ressourcenabbauendes Unternehmen betrachtet, welches sich verschulden muß, um mit der Produktion beginnen zu können. Es wird unterstellt, daß die Kreditgeber über Qualität und Quantität des auszubeutenden Ressourcenstocks nicht vollständig informiert sind. Zur Begrenzung ihres Kreditrisikos geben sie dem Abbaunternehmen daher einen Tilgungstermin vor, zu dem die Schuld zurückgezahlt sein muß. Mit Hilfe parametrischer Variation wird der Einfluß dieser Tilgungsrestriktion auf den Abbaupfad untersucht. Bei der Verschiebung des Tilgungszeitpunktes

$t^*$  hin zum Anfangszeitpunkt des Gesamtprogramms ergeben sich zwei Zeitpunkte,  $t_{\min}^*$  und  $t_{\max}^*$ , die die Abbaupfadzeit in drei Teilperioden unterteilen. Gilt  $t^* > t_{\max}^*$ , bindet die Restriktion nicht. Ist  $t^* \in [t_{\min}^*, t_{\max}^*]$  zerfällt der Abbaupfad in zwei Teilpfade mit unterschiedlichem Niveau. Die Abbaurrate ist links von  $t^*$  höher als rechts davon. Wird  $t^* \leq t_{\min}^*$  gewählt, gibt es keinen zulässigen Abbaupfad mehr.

Eine realitätsnähere Gestaltung des Modells könnte durch folgende Erweiterungen erreicht werden. Einmal sollte die Höhe der Set-up Costs endogen festgelegt werden. Eine Verschiebung des Tilgungszeitpunktes in den Bereich, in dem diese Restriktion bindet, müsste dann die Wahl der Produktionskapazität und damit die Entscheidung über das Produktionsprogramm beeinflussen. Als zweites wäre eine Endogenisierung des Bankenverhaltens ins Auge zu fassen. Dann könnte die Frage verschiedener Fremdkapitalquoten untersucht werden. Interessant erscheint auch, Unsicherheit explizit in das Modell einzuführen. Als Anknüpfungspunkt böten sich die Parameter 'Ressourcenpreis  $p$ ' sowie 'Rückzahlungszeitpunkt  $t^*$ ' an. Über die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis 'Nichtexistenz eines Abbaupfades' eintritt, könnte das finanzielle Risiko modelliert werden.

Schaubild 2

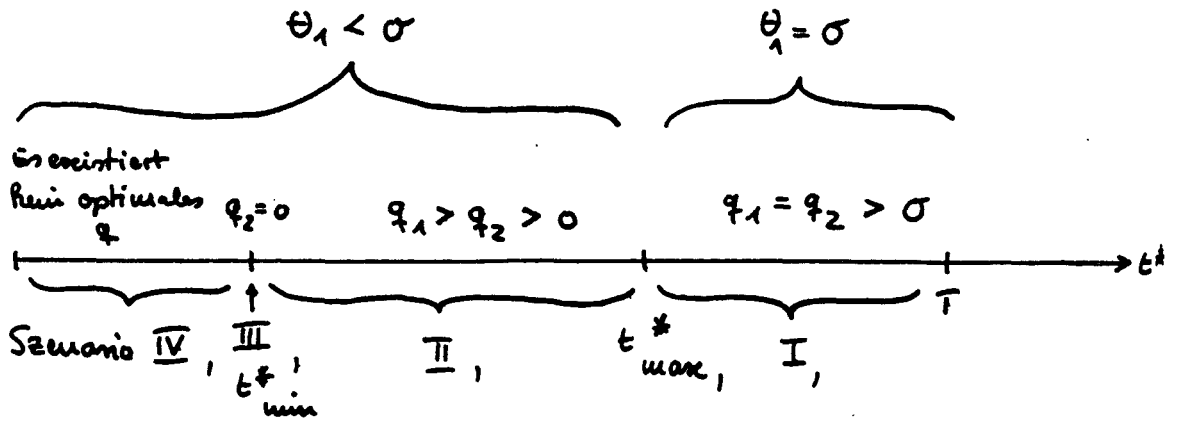
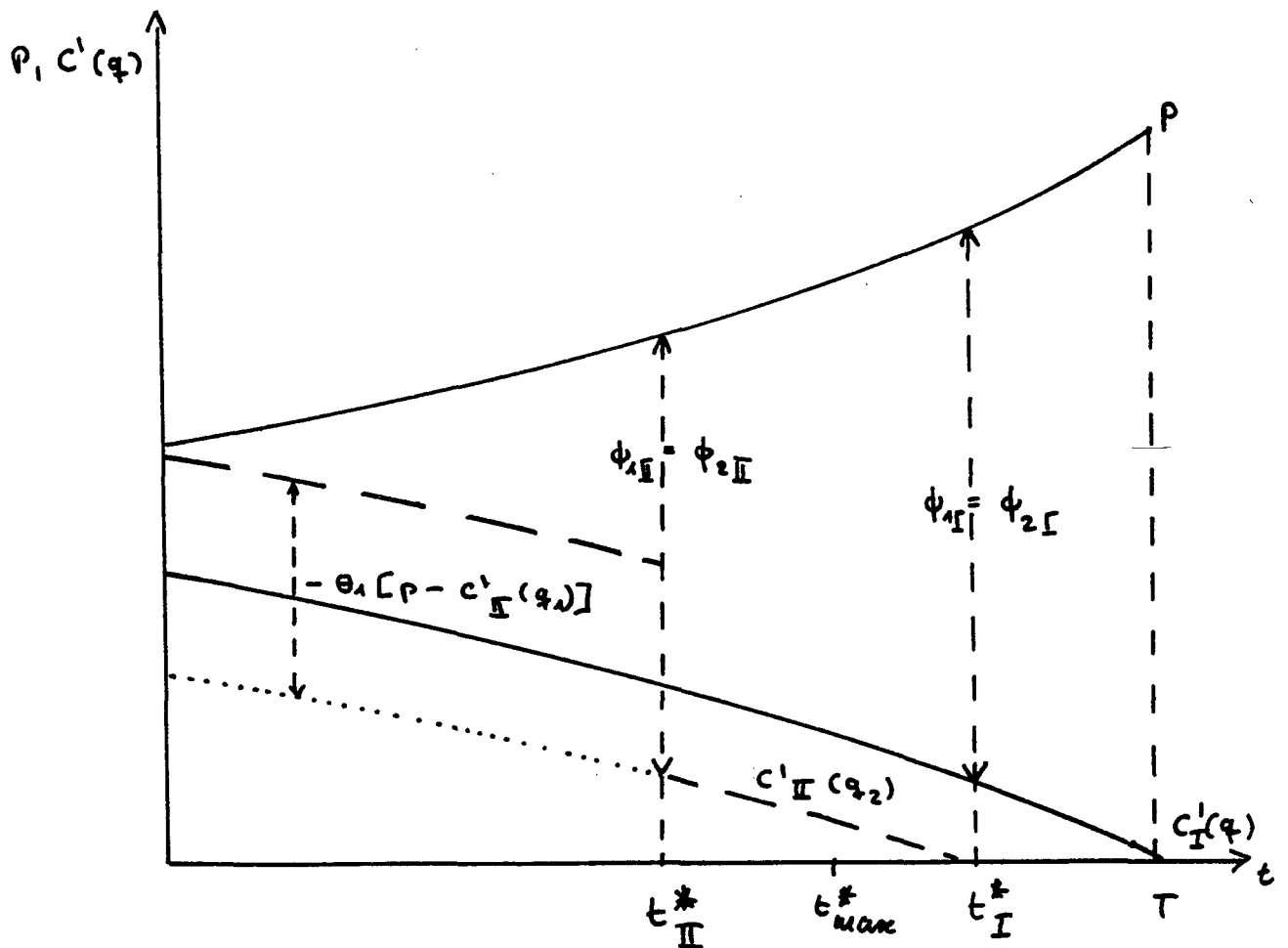


Schaubild 3



## Literatur

- Campbell, H. (1980) The Effect of Capital Intensity on the Optimal Rate of Extraction of a Mineral Deposit, *Canadian Journal of Economics*, Vol. 13, S. 349 - 56
- Hellwig, K., Kogelschatz, H. (1982) Resource Extraction under Alternative Investment and Financing Opportunities, in *Economic Theory of Natural Resources*, Eichhorn, P. (Hrsg.) Physica Verlag, Würzburg
- Hotelling, H. (1931) The Economics of Exhaustible Resources, *Journal of Political Economy*, Vol. 39,2, S. 137 - 75
- Kreindler, E. (1982) Additional Necessary Conditions for Optimal Control with State-Variable Inequality Constraints, in *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol 38, 2, October 1982, S. 241 - 50
- Puu, T. (1977) On the Profitability of Exhausting Natural Resources, *Journal of Environmental Economics and Management* 4, S. 185 - 199
- Siebert, H. (1982) A Resource Extracting Firm with Set-up Costs, *Disc. Paper*, Mannheim
- Siebert, H. (1985) The Economics of the Resource Exporting Country: Intertemporal Theory of Supply and Trade, Kap. 7, JAI-Press, Greenwich (Conn.)
- Takayama, A. (1974) *Mathematical Economics*, Dryden Press, Hinsdale (Ill.)
- Toussaint, S. (1984) Notwendige Optimalitätsbedingungen in der Kontrolltheorie, in H. Siebert (Hrsg.) *Intertemporale Allokation*, Lang Verlag, Frankfurt, S. 651 - 686