ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of

ZBW Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Nellinger, Ludwig

Working Paper

Zur Herleitung der Thünen'schen Grabsteinformel

Thünen-Series of Applied Economic Theory - Working Paper, No. 120

Provided in Cooperation with:
University of Rostock, Institute of Economics

Suggested Citation: Nellinger, Ludwig (2011) : Zur Herleitung der Thünen'schen Grabsteinformel, Thünen-Series of Applied Economic Theory - Working Paper, No. 120, Universität Rostock, Institut für Volkswirtschaftslehre, Rostock

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/74655

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Thünen-Series of Applied Economic Theory

Thünen-Reihe Angewandter Volkswirtschaftstheorie

Working Paper No. 120

Zur Herleitung der Thünen´schen Grabsteinformel

von

Ludwig Nellinger

Universität Rostock

Wirtschafts- und Sozialwissenschaftliche Fakultät
Institut für Volkswirtschaftslehre
2011

Zur Herleitung der Thünen´schen Grabsteinformel[1]

von Ludwig Nellinger[*]

12. Juni 2011

Abstract

Contributions by Dorfman and Samuelson in 1986 and van Suntum in 1988 endorse Thünen´s famous tombstone formula $\sqrt{ap}$ under his specific assumptions. Nonetheless Thünen´s procedure to achieve the result is a subject of controversy to this day. This paper attempts to follow Thünen´s approach step by step. For this purpose Thünen´s deduction of the tombstone formula is first represented graphically. In a second step an algebraic reconstruction of the problem is contrasted with Thünen´s approach. Confirmations of the tombstone formula as well as critiques of the last decades are briefly commented against this background.

Zusammenfassung

In Abhandlungen von Dorfman und Samuelson 1986 und van Suntum 1988 wird Thünen´s berühmte Grabsteinformel $\sqrt{ap}$ unter Berücksichtigung seiner spezifischen Annahmen bestätigt. Allerdings wird Thünen´s Vorgehen zur Erzielung dieses Ergebnisses bis heute kontrovers diskutiert. Mit diesem Papier wird versucht, Thünen´s Vorgehen Schritt für Schritt nachzuvollziehen. Zu diesem Zweck wird Thünen´s Ableitung zunächst graphisch dargestellt. Anschließend wird eine algebraische Rekonstruktion des Problems dem Thünen´schen Vorgehen gegenüber gestellt. Bestätigungen und Kritiken der Lohnformel in den letzten Dekaden werden vor diesem Hintergrund kurz kommentiert.

keywords: Einkommensverteilung, Grenzproduktivitätstheorie, Kapitaltheorie, Produktionsfunktion

JEL-classifications: D01, B13, B16, D33

[1] Ein erster Entwurf zu diesem Beitrags entstand vor über 10 Jahren am Lehrstuhl für Produktions- und Umweltökonomik der Universität Bonn, Meckenheimer Allee 174, D-53115 Bonn. Für die Gelegenheit, einen Teil meiner Arbeitszeit in diese dogmengeschichtliche Thematik investieren zu dürfen und für hilfreiche Unterstützung und wichtige Hinweise danke ich dem Leiter, Herrn Prof. Dr. Ernst Berg. Wertvolle Kommentare von Prof. Helmstädter, Prof. Kurz, Prof. Niehans† , Prof. Krelle† und einem anonymen Gutachter der Zeitschrift Nationalökonomie und Statistik sowie die seither zum Thema erschienen Veröffentlichungen haben zu einer grundlegenden Überarbeitung geführt, die aufgrund anderer Verpflichtungen erst jetzt in Angriff genommen werden konnte. Herrn Prof. Ernst Berg und Herrn Prof. Dr. Hans-Peter Helfrich, Mathematisches Seminar der Universität Bonn, sei für die Durchsicht der mathematischen Ableitungen gedankt. Alle verbleibenden Fehler gehen selbstverständlich zu meinen Lasten.

[*] Autor: Dr. Ludwig Nellinger, Bundesministerium für Ernährung, Landwirtschaft und Verbraucherschutz, Rochusstr. 1, D-53107 Bonn. Email: nellinger@t-online.de

I. Einleitung

Über Thünen´s Formel vom naturgemäßen Lohn gibt es seit ihrem erstmaligen Erscheinen in der ersten Abteilung des zweiten Bandes des Isolierten Staates im Jahre 1850 eine große Zahl von Veröffentlichungen, mit meist abschlägigem Gesamturteil, was a) die mathematische und b) die ökonomische Richtigkeit des Ansatzes und des gewählten Lösungsweges betrifft. Insbesondere in den ersten Jahren wurde vielfach starke und in vielen Punkten unberechtigte Kritik an der Thünen´schen Lohnformel geäußert. Diese Kritik hat Art und Intensität der Auseinandersetzung mit diesem Teil des Thünen´schen Werkes nachhaltig negativ beeinflusst. Von vielen Ökonomen des ausgehenden 19. und der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wurden sowohl der ökonomische Ansatz als auch die mathematische Richtigkeit der Lösungsfindung als falsch angesehen. Insbesondere Braeuer, ein mit dem Thünen´schen Werk bis in alle Details vertrautem Wissenschaftler, ist dieser Kritik entgegengetreten[2], seine Argumentation vermochte allerdings nicht zu überzeugen.

Es dauerte bis zum Ende des 20. Jahrhunderts, bis international bekannte Ökonomen wie Dorfman (1986), Samuelson (1986), Niehans (1987) und van Suntum (1988) darlegten, dass die Maximierung der von Thünen gewählten Zielfunktion unter den von ihm genannten Annahmen zur berühmten Grabsteinformel $\sqrt{ap}$ führt. Weiter wurde deutlich, dass bei der von Thünen errechneten optimalen Kapitalausstattung einer Volkswirtschaft mit begrenztem Arbeitskräftebestand und frei verfügbarem Land der Grenzproduktivitätslohn und der von Thünen errechnete „natürliche“ Lohn gleich sind.

Es wurde also widerlegt, dass ein grundsätzlicher Widerspruch zwischen der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung und der Entlohnung der Produktionsfaktoren nach der Thünen´schen Lohntheorie existiert. Dieser Widerspruch, viele weltanschaulich geprägte Texte des betagteren Thünen sowie sein sozialreformerisches Wirken hatten eine Reihe von Ökonomen zu einer eher ethisch normativen Interpretation des Thünen´schen Verteilungsmodells bewegt (Krelle, 1986; Engelhardt 2000, S.25f).[3]
Relativiert wurde diese späte Bestätigung des Ergebnisses der Thünen´schen Berechnungen allerdings durch Samuelson, der - trotz seiner ungebrochenen Begeisterung für Thünen als dem wahren Begründer der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung – hinsichtlich der Formel vom Natürlichen Lohn feststellte, dass Thünen über seine Berechnungen nur zufällig zum richtigen Ergebnis gekommen sei.[4]

Auch nachdem Helmstädter 1995 die Thünen´schen Tabellenbeispiele erstmals detailliert aufbereitet hat und nachdem sich Paola Termini als erste eingehend gleichzeitig mit allen vier

[2] Braeuer, Walter, 1946

[3] Eine ethisch-normative Einordnung würde aber nach unserer Auffassung mehr Fragen aufwerfen, als sie beantworten könnte: vor dem Hintergrund der Anlage des Thünen´schen Werkes generell, mit Blick auf die in dieser Zeit übliche Begriffsverwendung, die eine Interpretation im Sinne der positiven Ökonomik stützt („natürlicher“ Lohn und „natürliche“ Preise als Gleichgewichtszustände in der langen Periode einer stationären Volkswirtschaft - vgl. Schefold. 1986, S 195ff), vor allem aber aufgrund der bislang völlig unzureichenden Begründung, warum der Thünen´sche „natürliche“ Lohnanteil am Gesamtertrag einer Volkswirtschaft denn ethisch oder wohlfahrtstheoretisch besonders gut begründbar und vorteilhaft für den Arbeiter sein sollte (pointiert kritisch dazu auch die Ausführungen von Samuelson, 1986). Thünen´s natürlicher Lohn lag zwar um Einiges über dem damals üblichen Lohn, weswegen Thünen auf seinem Landgut den Arbeitern einen höheren Anteil am Gutsertrag zukommen ließ als z.B. seine Nachbarn. Überschlägige Berechnungen lassen aber erkennen, dass die Lohn- bzw. Arbeitseinkommensquote erheblich unter den heute feststellbaren Quoten liegen. Eine überzeugende Begründung für eine ethische Interpretation ist bislang noch nicht geliefert worden ist (zu den vielen offenen Fragen im ethisch-normativen Zusammenhang vgl. auch Krelle, 1986).

[4] Samuelson, 1986, S. 1783

von Thünen verwendeten Zielfunktionen und den daraus abgeleiteten Maximierungskalkülen beschäftigt hat, blieb strittig, ob Thünen´s Weg zur Erzielung dieses Ergebnisses zutreffend ist oder ob er sich dabei gravierender Fehler schuldig gemacht hat.

Thünen´s Anwendung der Differentialrechnung zur Bestimmung des Natürlichen Lohns war - wie im Folgenden gezeigt werden soll - bis auf eine missverständliche Stelle und bis auf die fehlende Überprüfung des von ihm errechneten Maximums anhand der Bedingungen zweiter Ordnung grundsätzlich richtig und vollständig. Um dies zu verdeutlichen und mathematisch nachzuvollziehen, wird im vorliegenden Beitrag Thünen´s Weg zur Ermittlung des Natürlichen Lohns zunächst graphisch und anschließend mit Hilfe der Differentialrechnung in der Schrittfolge Thünen´s dargestellt, wobei die noch bestehende unberechtigte Kritik zurückgewiesen bzw. Missverständnisse provozierende Stellen in Thünen´s Werk erläutert werden.

Übergreifendes Ziel dieser Arbeit ist es, einen weiteren Baustein zu liefern, um die in Thünen´s Isoliertem Staat enthaltene volkswirtschaftliche Theorie vollständig und in ihrem Gesamtzusammenhang erkennen und darstellen zu können:

- die erstmalige Bestimmung von Produktionsstruktur und Faktoreinsatz sowie von Güter- und Faktorpreisen in der langen Periode und in ihrer räumlichen Verteilung bei gegebener Güternachfrage,
- nach der im Isolierten Staat erstmals entwickelte, heutige neoklassischen Produktions- und Verteilungstheorie,
- ermittelt über ein in sich widerspruchsfreies Modell und seine empirische Validierung und Anwendung.

II. Entwicklungsprozess der Thünen´schen „Lohnformel“

Bei der Entwicklung von Thünen´s Zins- und Kapitaltheorie, die ihn zu seiner berühmten Lohnformel führt, sind u.E. drei Aspekte hervorzuheben:

1. Ihr inhaltlicher Ausgangspunkt dürfte zum einen in den ihn nicht befriedigenden Ausführungen von Adam Smith und David Ricardo zu diesem Thema und in einer zentralen Passage der 1808 veröffentlichten, insgesamt aber ebenfalls sehr unzulänglichen Kapital- und Zinstheorie des Earl of Lauderdale liegen (vgl. dazu die ausführlichen Anmerkungen in der Thünen-Ausgabe von Hermann Lehmann und Lutz Werner, S. 654, sowie die ausführliche Kritik der Lauderdale´schen Theorie durch Böhm-Bawerk, 1914, S.171ff).
2. Die zentrale Lauderdale´sche Überlegung, dass Kapitalgüter letztlich durch Arbeit geschaffen werden und den laufenden Arbeitseinsatz gewinnsteigernd ersetzen können, wird von Thünen durch die Einführung einer nutzentheoretisch interpretierbaren Zielfunktion in mehreren Modifikationen, durch die damit ermöglichte mathematische Bestimmung des optimalen Kapital-Arbeits-Verhältnisses und die Bestimmung des sich daraus ergebenden marktwirtschaftlichen Gleichgewichtslohnes fortentwickelt.
3. Schließlich lässt die jahrelange, fast vergebliche Suche nach dem genauen funktionalen Zusammenhang zwischen der relativen Kapitalausstattung eines Arbeiters seinem Nettoprodukt der Arbeit bei Thünen Zweifel an der Richtigkeit seiner Ableitungen aufkommen, da er über lange Jahre keine Funktionsform findet, die den Erfordernissen seines Maximierungsmodells gerecht wird und die zugleich die empirisch beobachteten Daten auf seinem Landgut Tellow ausreichend genau abbilden kann.

Ob die vorgenannten Aspekte weiter anhand von Quellenmaterial belegt werden können, erfordert exakte Auswertungen des Thünen´schen Nachlasses, insbesondere der über 1000 Seiten unveröffentlichter Manuskripte zur Lohnformel. Kein Zweifel dürfte jedoch daran bestehen, dass Thünen sich bis zuletzt auf dem richtigen Weg wusste, denn sonst wäre es kaum nachzuvollziehen, dass er diesen Teil seines Werkes als den wichtigsten bezeichnete und das eingängige Resultat $\sqrt{ap}$ auf seinen Grabstein meißeln ließ.

III. Thünen´s Grenzproduktivitätsmodell des Kapitals

Thünen stellt die komplexen Prozesse der Kapitalbildung und -nutzung in seinem zweiten Teil des Isolierten Staates am Beispiel einer Ein-Produkt-Wirtschaft dar, in der die Erträge in Scheffel Korn gemessen werden und in der Kapitalgüter eingesetzt werden, die allein durch Handarbeit erstellt worden sind.[5] In heutiger Terminologie und Notation ausgedrückt, geht Thünen von folgender Produktionsfunktion aus (Darstellung in Anlehnung an van Suntum, 1988):

(1) $X = f(A,A')$

wobei A : Umfang kapitalanwendender Arbeit

A´: Umfang der Arbeitszeit, die zur Herstellung eines Kapitalgutes erforderlich ist.

Thünen bezeichnet den durchschnittlichen Nettoertrag eines einzelnen kapitalanwendendem Arbeiters (d.h. X/A) mit p und die Kapitalausstattung dieses einen Arbeiters (d.h. A´/A) mit q. Die dazu gehörige Pro-Kopf-Produktionsfunktion X (1, q) werden wir deshalb im weiteren ebenfalls als p (q) bezeichnen. Das Kapital q wird in „Jahresarbeiten“ (J.A.) gemessen. Es ist eine „physikalisch“ messbare technische Größe, keine Wertgröße. Thünen vermeidet damit die Probleme im Zusammenhang mit der Messung aggregierter Kapitalmengen, die bis heute die neoklassischen Verteilungsmodelle grundsätzlich in Frage stellen.[6]

Thünen geht von einem, seiner Erfahrung entstammenden, abnehmenden Ertragszuwachs bei steigendem Kapitaleinsatz aus und erläutert, dass

[5] In seinen unveröffentlichten Manuskripten behandelt Thünen auch kapitaltheoretisch komplexere Fälle.

[6] Mit der Messung des Kapitals in Jahresarbeiten zur Herstellung der einzelnen Kapitalgüter hat Thünen einen logischen Fehler vermieden, unter dem die neoklassische Theorie bis heute leidet: Sie misst und aggregiert die unterschiedlichsten Kapitalgüter mit dem Geldbetrag, der zur Herstellung dieser Kapitalgüter notwendig ist. Mit dieser monetären Kapitalgröße sowie den physischen Mengen an Arbeit und Boden werden Löhne, Zinsen und Bodenrenten bestimmt. Genau genommen ist dies nicht zulässig, da die Faktorpreise wiederum die Produktionskosten der Kapitalgüter und damit den Wertmaßstab des Kapitals beeinflussen. Etula (2008) zeigt auf, dass das skalare Grenzproduktivitätsmodell des Kapitals von Johann Heinrich von Thünen“ diese gravierende Unzulänglichkeit nicht aufweist, da er eine naturale Kapitalgröße verwendet und sog. Preis-Wicksell-Effekte die Ergebnisse nicht beeinträchtigen.
Thünen erwähnt in § 13 seines Werkes zwar auch die in Geld gemessenen Kapitalmenge, führt diesen Betrag jedoch auf Jahresarbeitseinheiten zurück, indem er ihn durch den Jahreslohn eines Arbeiters dividiert. Wenn man sich die Ausführungen von Etula vergegenwärtigt, darf Thünen dieses „commanded labour“-Konzept benutzen, da er zuvor richtig erläutert hat, dass Arbeits- und Kapitalentlohnung nach Minimalkostenprinzip in einem bestimmten Verhältnis stehen müssen und darauf aufbauend produktionskostenorientierte Güterpreise bestimmbar sind. Allerdings setzt Thünen bei diesem Vorgehen im § 13 ein volkswirtschaftliches Gleichgewicht schon voraus, das er an anderer Stelle erst noch zu ermitteln sucht. Ob Thünen in dieser Frage letztlich folgerichtig argumentiert, ist deshalb in der wissenschaftlichen Literatur umstritten (vgl. zu dieser Frage van Suntum 1987 und 1995 sowie Kurz 1995).

1. die Entlohnung des Kapitals (naturale Kapitalrente r*Kapitalmenge q) durch den zusätzlichen Ertrag des zuletzt eingesetzten, am wenigsten profitablen Kapitalgutes bestimmt wird, d.h. das r = p ´ (q) ist (vgl. §8 IS II,1),
2. der Arbeitslohn w der das Kapital anwendenden Arbeiter, der sich bei Thünen aus dem Subsistenzbedarf a plus dem darüber hinausgehenden Überschuss y zusammensetzt (wir verwenden statt y im folgenden den inhaltsgleichen Ausdruck w-a), mit sinkender Kapitalrente steigt, da er bei vollständiger Konkurrenz die höhere interne Verzinsung der zuerst geschaffenen profitableren Kapitalgüter absorbiert (vgl. §9 IS II,1),
3. dadurch der Zinsfuß i (von Thünen mit z bezeichnet), der das Verhältnis zwischen der Rente r des Kapitalgutes einerseits und dem Lohn w der zur Schaffung des entsprechenden Kapitalgutes erforderlichen Jahresarbeit andererseits angibt, stärker als die Kapitalrente selbst sinkt (vgl. §10 IS II,1),[7]
4. Arbeits- und Kapitalentlohnung in einem bestimmten Verhältnis stehen müssen, wenn nach Minimalkostenprinzipien produziert und Gewinnmaximierung unterstellt wird (vgl. §13 IS II,1).

Abbildung 1 veranschaulicht graphisch auf einen Blick Zusammenhänge, die Thünen über viele Seiten systematisch entwickelt und an mehreren Stellen der o.g. Paragraphen als höchst wichtig für den Fortgang der Untersuchung bezeichnet. Er stellt sie selbst allerdings nicht als Grafik, sondern verbal und tabellarisch dar. Diese Zusammenhänge der Grenzproduktivitätstheorie der Verteilung für linear-homogene neoklassische Produktionsfunktionen wurden u. W. erstmals von Inada 1964 zusammenfassend dargestellt und kürzlich zur Erläuterung von Zusammenhängen in Thünen´s Kapitalmodell verwendet (vgl. Nellinger 2000). Etula (2008) hat aufbauend auf den grundlegenden Zusammenhängen des Inada-Modells ein von ihm als „simpliciter two-Sector von Thünen´s Original Marginal Productivity Model of Capital“ im Detail analysiert.

Zur Erläuterung: Die gewinnmaximierenden Unternehmer in einer Volkswirtschaft werden soviel Kapital einsetzen, bis der Grenzertrag des Kapitals p´(q) bei gegebenem Faktorpreis gleich dessen Grenzkosten ist. Die gestrichelte Linie stellt den Anstieg der Kapitalkosten für einen gegebenen Preis r_0 (gemessen in der Einheit des erzeugten Produktes!) des Kapitals dar; q_0 die optimale Kapital-Arbeitsrelation bei diesem r_0. Da r_0 gleich dem Verhältnis von AF/CF oder AF/q_0 ist (oder AE/B bzw. tan α), gilt auch AF = r_0*q_0, so dass die Strecke AF dem Kapitalentlohnungsanteil am Nettoprodukt eines Arbeiters entspricht. Da AE der gesamte Ertrag ist, stellt EF die Höhe des Lohns w_0 bei dem gegebenen r_0 und gewinnmaximalen q_0 dar (von Thünen zunächst residual bestimmt; er entspricht bei linear-homogener Produktionsfunktion auch dem Grenzproduktivitätslohn – vgl. dazu Helmstädter, 1995). Diese Zusammenhänge gelten auch für jedes andere r bzw. q.
Weiter lässt sich folgern, dass die Strecke B0 das Verhältnis zwischen Lohn w und dem in Einheiten des erzeugten Produktes gemessenen Preises r für den Faktor Kapital darstellen muss. Es muss im Falle des stetigen, abnehmenden Ertragszuwaches des Thünen-Modelles mit dauerhaft nutzbaren, handarbeitgefertigten Kapitalgütern invers sein. Preis-Wicksell-Effekte treten zwar auf, da die Preise der Kapitalgüter aufgrund des zunehmend höheren Lohnes mit zunehmendem Kapitaleinsatz steigen, werden von Thünen aber in der Definition des Zinssatzes i = r/w mit berücksichtigt. Der Thünen´sche Zinssatz i wird also nicht allein durch die physische Grenzproduktivität des physisch gemessenen Kapitalstocks bestimmt, sondern stellt immer auch den sich ändernden Lohn (als Wert einer Jahresarbeit Kapital) in Rechnung.

[7] Die oft unberücksichtigte Unterscheidung zwischen Kapitalrente und Zinsfuß sowie die von Thünen unterstellte Annahme eines volkswirtschaftlichen Gleichgewichts, dessen Güter- und Faktorpreise sowie dessen Kapital-Arbeits-Relation er zu bestimmen sucht, führt - wie viele vor ihr - auch Paola Tubaro 2006 zu einer nicht berechtigten Kritik an dieser Stelle des Thünen´schen Modells.

Entgegen der Kritik von Tubaro wird Thünen der Interdependenz der beiden Größen in der Volkswirtschaft geradezu vorbildlich gerecht. Dass auf dem Weg hin zu einem stationären Zustand der Kapitalproduzent nicht nur jährliches Zinseneinkommen erzielt, sondern auch den Wert seines lediglich mit Arbeit produzierten Kapitalgutes wachsen sieht, ändert nichts an der Richtigkeit der Thünen´schen Darstellung, da es ihm lediglich um die Ermittlung der Variablenwerte im stationären Gleichgewicht geht. Die mathematische Beschreibung des Wegs hin zum stationären Zustand hat Thünen explizit ausgeklammert (vgl. IS II, 1, S. 33f[8]) .

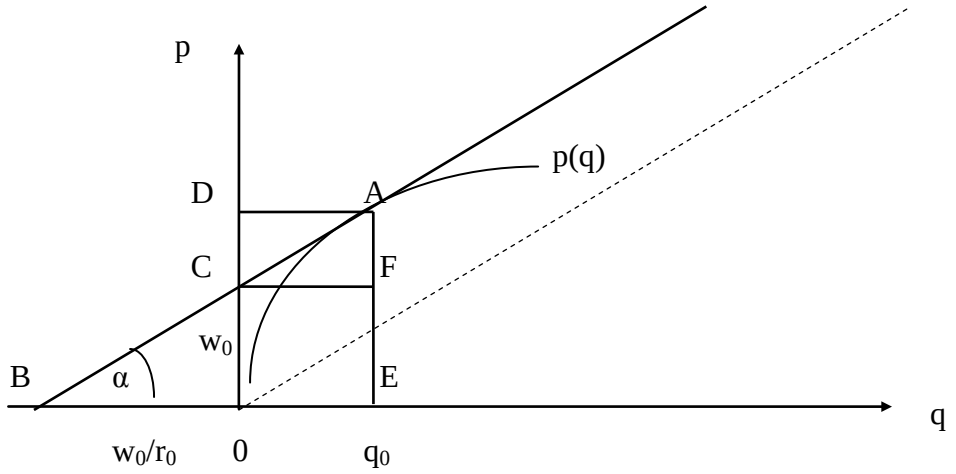


Abb. 1: Zusammenhang zwischen Löhnen und Kapitalrente

Grundlage der Ableitung der vorstehenden Zusammenhänge war – sowohl bei Thünen als auch in der heutigen ökonomischen Theorie - dass ein Unternehmer sich als Mengenanpasser bei den wiederkehrenden Produktionsentscheidungen an den am Markt herrschenden Zinssätzen orientiert. Im dem 1826 erstmals und dann 1842 in überarbeiteter Form erschienenen ersten Band des Isolierten Staates werden Zins und Löhne als gegeben vorausgesetzt. In der 1850 veröffentlichten ersten Abteilung des zweiten Bandes bestimmt Thünen diese Größen nun endogen.

Eine der für die Lohn- und Zinsbestimmung zentralen Fragen Thünen´s ist die bis heute noch nicht einvernehmlich geklärte, bis zu welcher Höhe genau Kapital akkumuliert wird und wie sich das daraus ergebende, gewachsene Arbeitsprodukt auf Kapitaleinkommen und Lohneinkommen verteilt. Die Vorgänger, auf deren Werke er sich bei seiner Analyse öfters bezieht, insbesondere Smith, Ricardo und Say, ließen das nach Auffassung von Thünen weitgehend im Dunkeln bzw. verloren sich in Zirkelschlüssen.

Das heutige, nicht unumstrittene „neoklassische Standardmodell“ bietet folgende Lösung: Es wird solange Kapital akkumuliert, bis der Grenzertrag des zunehmenden Kapitaleinsatzes der sog. Zeitpräferenzrate entspricht, mit der der zukünftige Konsum gegenüber dem derzeitigen Konsum diskontiert wird. Eine wichtige Rolle bei der Bestimmung des Kapitalangebotes, insbesondere für den zeitlichen Ablauf der Akkumulation, spielen weiter ein abnehmender Nutzenzuwachs bei steigendem Konsum. Die Produktivität des Kapitals, die Zeitpräferenz sowie die Nutzensteigerungen durch Ausgleich unterschiedlich hoher Einkommensniveaus bei degressiv verlaufender Einkommensnutzenfunktion sind Böhm-Bawerks drei zentrale Zinsbestimmungsgründe, die durch Irving Fishers Grafik der intertemporalen Substitutionsfunktionen erstmals knapp und treffend graphisch dargestellt wurden.

[8] Die angegebenen Seitennummern sind die in der am meisten verbreiteten Waentig-Ausgabe randseitig vermerkten Seitenangaben der 1842er bzw. 1850er Ausgabe des Isolierten Staates.

Thünen hat in seinem Werk zwar mehrfach auf den wichtigen Faktor der Minderschätzung künftigen Genusses gegenüber dem heutigen Genuss und die „Kosten des aktuellen Genussverzichts“ hingewiesen. Er behandelte die Zeitpräferenz jedoch lediglich verbal, und zwar als einen Faktor, der eine kritische Untergrenze für den Zinssatz definiert. Der von ihm ermittelte Gleichgewichtszinssatz bei konstanter Bevölkerung und frei verfügbarem Boden liegt über der Zeitpräferenzrate. Dem zugrundeliegenden Modell wollen wir uns jetzt zuwenden.

IV. Thünen´s Kapitalbildungsmodell

... verbal erläutert

Thünen geht davon aus, dass diejenigen Arbeiter, die lediglich ihren Arbeitslohn als Einkommensquelle haben, die preisbestimmenden Grenzproduzenten/Grenzanbieter von Kapital sind, sofern ihr Lohn höher als ihr mindestnotwendiger Lebensunterhalt (Subsistenzlohn) ist. In diesen Arbeitern sieht er ab § 14 des IS II, 1 deshalb den Ausgangspunkt seiner weiteren Ableitungen. Ihre Möglichkeit, selbst ein landwirtschaftliches Unternehmen zu gründen und mit Realkapitalgütern auszustatten, also ihre „Spar“- bzw. Investitionsentscheidungen (Verzicht auf Konsum oder Arbeitseinsatz zur Produktion von Kapitalgütern) bestimmen über den Ausgleich der Faktorentgelte auf den Faktormärkten Loh und Zins in der gesamten Volkswirtschaft, da sowohl Arbeit als auch Kapital bei Thünen als vollkommen mobil unterstellt werden. Da die Landwirtschaft damals der weitaus dominierende Wirtschaftszweig war und Landarbeiter am unteren Ende der Lohnskala rangierten, sind diese Annahmen u. E. als nicht unplausibel einzuordnen.

Um in seinem Verteilungsmodell den Einfluss der Landrente auszuschalten, der die Analyse erschwert hätte, findet die Gutsgründung am Rande seines Isolierten Staates statt, wo bebaubares Land kostenlos verfügbar ist.

Während Thünen in den ersten Paragraphen die ökonomischen Zusammenhänge der Kapitalbildung wie Ricardo und andere am Beispiel einer Robinson-Wirtschaft erläutert, lässt er ab § 14 sein Modell- Landgut von einer Gruppe von Arbeitern gründen, und zwar u. E. vorrangig aus zwei Gründen:

1. Um in seinem vereinfachten Modell mit allein aus Handarbeit geschaffenem Kapital von Zinseszinseffekten abstrahieren zu können, muss das Gut in einem Jahr aufgebaut sein, d.h. in einem Jahr das benötigte Kapital für ein neues Gut akkumuliert sein.
2. Um am Markt konkurrieren zu können, muss dieses landwirtschaftliche Unternehmen zu minimalen Stückkosten produzieren, was bedeutet, dass es eine bestimmte Mindestgröße haben muss. Thünen muss auch dadurch notgedrungen die Robinson-Welt verlassen.

Damit die Thünen´sche Konstruktion heutigen Modellen möglichst nahe kommen kann, sollte es nach unserer Auffassung sogar um eine große Gruppe von Kapitalproduzenten gehen, die nicht den ganzen Überschuss sparen, sondern nur marginale Einheiten ihres Lohns. Dies wird zwar von Thünen an keiner Stelle in dieser Weise ausgedrückt - bisherige Interpreten gehen in der Regel davon aus, dass Thünen die Arbeiter auf ihren gesamten Lohnüberschuss solange verzichten lässt, bis ihr Landgut die optimale Kapitalausstattung erreicht hat. M.E. ist jedoch auch die Interpretation zulässig, dass die zur Bildung einer Jahreseinheit Kapital benötigten Jahresanstrengungen lediglich eine Proxy-Größe darstellen - einen Maßstab also für die Größe des Opfers der vermögenslosen Arbeiter, aus ihrem Arbeitslohn Kapital zu bilden - nicht aber

eine detaillierte Sparvorschrift.[9] Bedeutung hat diese Annahme insbesondere für die Interpretation der von Thünen unterstellten Zielfunktion.

In Thünen´s Ableitungen spielen die Anzahl der Jahre, die mindestens notwendig sind, damit ein Arbeiter bei einem bestimmten Arbeitslohn eine Jahreseinheit Kapital erzeugen kann, eine zentrale Rolle. Da die kapitalerzeugende Arbeitergruppe immer auch sich selbst versorgen muss, sind zur Produktion einer Jahresarbeit Kapital insgesamt mindestens w/(w-a) Arbeiter ein Jahr lang erforderlich. Dabei beziffert a, wie schon eben beschrieben, den Subsistenzbedarf des Arbeiters, was sicherlich eine vereinfachende Annahme darstellt.[10]

Allen bei den verschiedenen Kapitalhöhen möglichen Löhnen w lässt sich – sofern sie größer als der Subsistenzbedarf a sind – also eine bestimmte Anzahl von Jahresarbeitseinsätzen zuordnen, die mindestens notwendig sind, damit kapitaleinkommenslose Arbeiter bei dem jeweiligen Lohn ernährt werden und eine Jahreseinheit Kapital erzeugen können. Die Anzahl dieser bei „maximaler Sparleistung" der Arbeiter erforderlichen Jahre, sie werden als „Jahresanstrengungen" bezeichnet, wird von Thünen als kardinales Maß für die „Kosten" der Kapitalerzeugung bei gegebenem Arbeitslohn angesehen. Die Verwendung dieser Größe lässt sich auch nutzentheoretisch begründen, was allerdings nicht Gegenstand dieses, sondern eines weiteren Beitrags zum Thema sein soll.

Das Ziel der kapitalbildenden Arbeiter ist nach Thünen die Maximierung der dauerhaften „Arbeits"rente, die aus diesen „Jahresanstrengungen" direkter und indirekter kapitalbildender Arbeit fließt – streng zu unterscheiden von der naturalen Kapitalrente r oder dem monetären Zinssatz i! Das heißt, alle Kapitalerträge werden von Thünen durch die Anzahl der erforderlichen Jahresanstrengungen w/(w-a) dividiert, die zur Bildung des zugrundeliegenden Kapitalstocks notwendig sind. In §15 wird das Maximum dieses Quotienten bestimmt, den wir im weiteren als Arbeitsrente z (für Zielgröße) bezeichnen werden.

Der bei Thünen folgende §16 soll die Situation des mit dem Kapital arbeitenden Lohnarbeiters beschreiben. Dieser strebt nach Thünen - ebenso wie die Gruppe der kapitalbildenden Arbeiter - für ein Jahr geleistete Arbeit, der Begrenzung seines Konsums auf den Subsistenzbedarf a und den Verleih des Lohnüberschusses gegen Zinsen ein Maximum an dauerhaften jährlichen Einnahmen (w-a)*i an. Hingewiesen werden soll schon an dieser Stelle darauf, dass sich beide Zielfunktionen für den stationären Gleichgewichtszustand ineinander überführen lassen und ihre jeweilige Maximierung deshalb zu einem identischen Ergebnis führt.

Der mit diesem „Arbeitsrenten"-Maximum einhergehende Arbeitslohn ist für Thünen der sog. „natürliche Lohn", der auf seinem Grabstein verewigt ist und der sich nach seinen Vorstellun-

[9] Thünen lässt zuweilen bewusst offen, ob die kapitalbildenden Arbeiter ihren ganzen, über den mindestnotwendigen Subsistenzbedarf verfügbaren Lohnanteil sparen oder ob sie nur auf einen Teil ihres Überschusses verzichten. Bei eher marginalen Kapitalbildungsbeiträgen ließe sich ein großes Gut in Jahresfrist allerdings nur mit sehr sehr vielen „Arbeitslohn"-Sparern fertig stellen, auch in dieser Hinsicht erweist sich die Vorstellung einer größeren Gruppe kapitalbildender Arbeiter als hilfreich. Ein gegenteilige Formulierung findet sich allerdings prominent auf S. 540.

[10] In den ökonomisch relevanten Subsistenzbedarf gehen in Wirklichkeit verschiedene Anforderungen zur Befriedigung der physiologischen Bedürfnisse ein, vor allem die Versorgung mit verschiedenen Nährstoffen. Zwar ist deren Art und Umfang vergleichsweise leicht auf naturwissenschaftlicher Grundlage zu ermitteln. Die Festlegung der mindestnotwendigen und gleichzeitig ökonomisch günstigsten Nahrungsmittelversorgung (wie des weiteren Subsistenzbedarfs) in einer eindimensionalen Messgröße führt allerdings zu einem der Kapitalmessung analogen Problem, da eine ökonomische Bewertung der Erzeugungskosten unterschiedlicher Subsistenzgüter dafür Voraussetzung ist. Da Nahrungsmittel und dabei Getreide den weitaus größten Teil des Subsistenzlohns im frühen 19. Jahrhunderts ausmachen, stellt das Thünen´sche Vorgehen, den Subsistenzbedarf mit der Anzahl-Scheffel-Roggen-Größe a zu messen, u.E. allerdings keinen bedeutsamen Mangel dar.

gen auch als langfristiger Gleichgewichtslohn in einem marktwirtschaftlichen System, in dem die Beteiligten ihr Eigeninteresse verfolgen, einstellen wird, vorausgesetzt wie schon erwähnt, Land ist noch frei verfügbar und die Bevölkerungszahl bleibt konstant.

... graphisch dargestellt

Thünen´s Maximierungsansatz soll in Abbildung 2 graphisch verdeutlicht werden. Dies ermöglicht einen besseren Zugang zu seinem Modell und seinem Vorgehen, sowohl was die mathematischen Formeln als auch was deren ökonomische Interpretation angeht.

Zunächst maximiert Thünen für ein vorgegebenes p-q-Verhältnis (q_{const}) die Rente je Jahresanstrengung Kapitalbildung. Graphisch lässt sich das wie folgt darstellen: Wenn w_0 der Lohn ist und – wie zu Abbildung 1 schon erläutert - die Differenz zwischen dem Gesamtprodukt p und w (Strecke EF) das resultierende Kapitaleinkommen ist, d.h. das Produkt aus der Kapitalmenge q und der Kapitalrente r, dann gibt tan α wiederum die Rente r je Kapitaleinheit q an. In Abbildung 2 wird bewusst ein Lohn w_0 angenommen, der bei q_{const} *nicht* dem Grenzproduktivitätslohn entspricht, um zu verdeutlichen, dass es Thünen zunächst darum geht, seine kapitalproduzierenden Arbeiter eine zielfunktionswert-, d.h. arbeitsrentenmaximierende Aufteilung des Arbeitsproduktes unabhängig vom Faktormarkt und den dort gültigen Faktorentlohnungen festlegen zu lassen (wie insbesondere auch Helmstädter, 1995, S.54 hervorhebt). Für die Festlegung des Lohns steht ihnen die gesamte Strecke zwischen dem Subsistenzbedarf a (Punkt C) und dem gesamten Arbeitsprodukt (Punkt F) zur Verfügung.

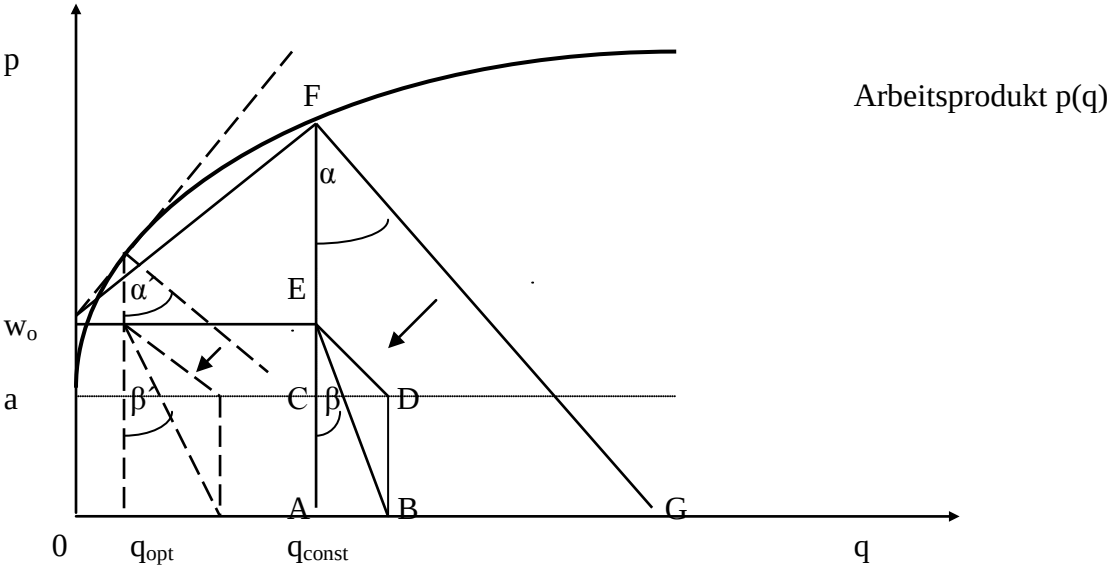


Abb. 2: Bestimmung der optimalen Kapital-Arbeits-Relation in Thünen´s Modell vom natürlichen Lohn

Die Thünen´sche Maximierungsaufgabe für ein gegebenes q_{const} lässt sich nun wie folgt darstellen: Den jetzt zu einem beliebig angenommenen w zugehörigen tan α aus Abb. 1 können wir durch die Konstruktion eines ähnlichen Dreiecks FAG auch zwischen den Strecken AF und GF sowie als Stufenwinkel zwischen CE und DE abbilden. Damit gibt die Strecke CD das Produkt r*(w-a) an. Überträgt man diese Strecke auf die Grundlinie (AB), dann beinhaltet der daraus sich ergebende tan β zwischen den Strecken AE und BE) das Verhältnis r(w-a)/w.

Der tan β entspricht also genau Thünen´s Zielfunktion in ihren beiden Ausprägungen und ist zu maximieren:
a) Maximierung der Arbeitsrente (hier als z bezeichnet) in §15

(2) $z=(p-w)/(qw/(w-a))$, da $p-w=r*q$, d.h. $p-w/q = r$ ist

b) Maximierung der Zinseinnahmen aus dem gesparten Lohnüberschuss eines Jahres in §16,

(3) $z´= i(w-a)$, da $i=r/w$ ist.

Man erkennt an der Grafik, dass eine Erhöhung von w eine zweifache Wirkung hat: Zum einen verringert sie den tan α und damit die Kapitalrente r. Ein verringerter tan Alpha führt c. p. zu einer kürzeren Strecke CD, d.h. geringerem Kapitaleinkommen aus dem Subsistenzlohnüberschuss. Allerdings vergrößert sich gleichzeitig die Bemessungsgrundlage w-a, auf den die verringerte Kapitalrente r angewandt wird. Nicht zuletzt wirkt das höhere w über die Verlängerung der Strecken AE verringernd auf den tan β und damit den Zielfunktionswert. Eine graphische Bestimmung des maximalen Zielfunktionswertes ist aufgrund dieser komplexen Zusammenhänge in der zweidimensionalen Darstellung allerdings nicht möglich.

Die algebraischen Ableitungen von Thünen zeigen, dass der tan β und damit der Zielfunktionswert für jedes q_{const} dann maximal ist, wenn der Lohn w die Höhe $\sqrt{ap}$ erreicht. Zu beachten ist, dass es sich im mathematischen Sinne hier zunächst um ein bedingtes Maximum handelt, das aus einer partiellen Differenzierung bei konstanter p-q-Relation hervorgeht. Im ökonomischen Interpretationszusammenhang geht es um eine Aufteilung des Gesamtprodukts p auf Löhne und Zinseinkommen, und zwar zunächst losgelöst von den Grenzprodukten der jeweiligen Faktoren Arbeit und Kapital.

Nun zum entscheidenden Punkt der Abbildung 2: Bei welcher Kapitalhöhe q erreicht die Thünen´sche Zielfunktion z ihr unbedingtes Maximum? An der Abbildung 2 lässt sich das sehr gut verdeutlichen, wenn wir nicht q, sondern w beliebig wählen und dann konstant setzen. Wir erkennen, dass bei beliebig konstant gesetztem w der tan α sich immer bis zu dem Punkt erhöhen lässt, an dem die Steigungs-Gerade (die die Höhe von tan α und damit r bestimmt) gerade noch die Produktionsfunktion als (hier gestrichelte) Tangente berührt. Da dies für alle möglichen Lohnhöhen gilt, lässt sich folgern, dass das unbedingte Maximum der Thünen´schen Zielfunktion genau dort liegt, wo das aus der partiellen Differenzierung nach w hervorgehenden Maximum der Thünen´schen Zielfunktion mit einer Kapitalrente r (nicht dem Zinssatz i!) zusammenfällt, die dem Grenzprodukt des Kapitals entspricht.

In der nachstehenden 3D-Grafik (Abbildung 3) ist die Höhe der Zielfunktionswerte der Thünen´schen Tabelle B bei unterschiedlichen Lohnhöhen und Kapitalhöhen je Arbeitskraft dargestellt. Man erkennt, dass die Arbeitsrente über alle q hinweg höher ist, wenn der Lohn im mittleren Bereich zwischen dem gesamtem Arbeitsprodukt p und dem Subsistenzbedarf a angesiedelt ist. Am höchsten ist sie, wenn der Lohn jeweils das geometrische Mittel $\sqrt{ap}$ bildet. Bei einer Drehung der Darstellung würde man auch genau erkennen, dass die Arbeitsrente ab einem bestimmten Wert von q wieder langsam absinkt.

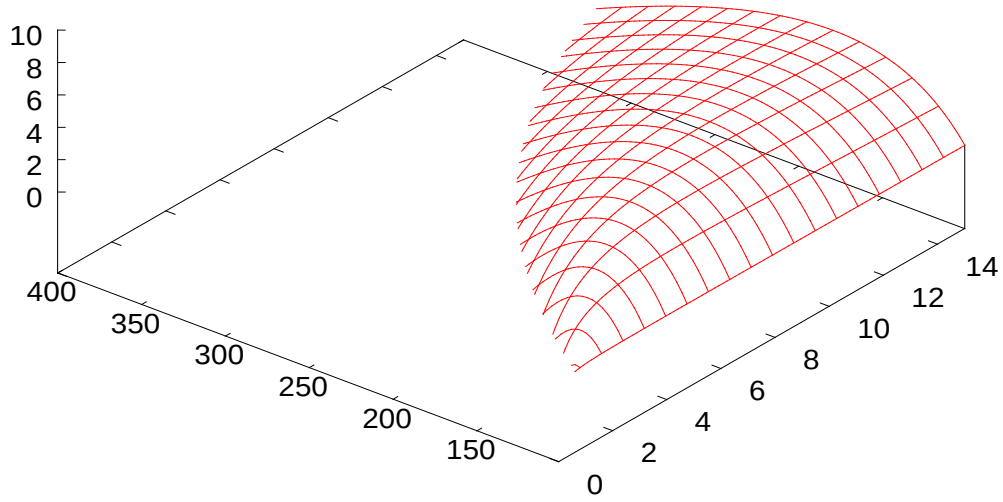


Abb. 3: Zielfunktionswert z (Rente pro „Jahresanstrengung“ Kapitalbildung oder Arbeitsrente) bei unterschiedlichen Kapitalintensitäten und Lohnüberschusshöhen w-a

Nach dieser grafischen Aufbereitung des Thünen´schen Modells dürfte es leichter fallen, die algebraischen Ableitungen von Thünen selbst, wie auch die seiner Kritiker und Befürworter einzuordnen und zu bewerten.

... mathematisch reformuliert

Viele der Rezensenten haben den genauen Aufbau des Thünen´schen Lohnmodells sowie die daraus resultierenden mathematischen Ableitungen in ihren jeweiligen Untersuchungen u. E. nicht *vollständig* berücksichtigt. Das mag seinen Grund darin haben, dass ähnliche Zusammenhänge in mehreren Paragraphen erläutert werden, insbesondere dass bis § 13 vorrangig verbal und anhand von Beispielen erläutert wird, was später dann algebraisch dargestellt und abgehandelt wird. Helmstädter (1995, S.50) weist deshalb zu Recht darauf hin, dass die Ausführungen bis zum Ende des § 13 für Thünen lediglich als Vorübung anzusehen sind. Für den heutigen, in bestimmten Denkschemata verhafteten Leser ist es allerdings schwierig, den Gedankengängen insbesondere ab § 14 zu folgen und die jeweiligen wechselseitigen Beziehungen zwischen den einzelnen Paragraphen zu sehen. Diese verwickelte Anlage des Werkes hat einerseits zu einer Vielzahl unberechtigter Kritiken, u. E. aber auch zu „verkürzten“ Bestätigungen seiner Ableitungen geführt.

Im Folgenden sollen deshalb die grundlegenden funktionalen Zusammenhänge dargestellt werden, um die Grundlage sowohl für eine saubere Rekonstruktion der Extremwertbestimmung unter Zugrundelegung der Thünen´schen Zielfunktion als auch für eine Einordnung der Untersuchungen der letzten Jahre zu schaffen. Dabei wird klar werden, dass Thünen keiner falschen mathematischen Behandlung seines Optimierungsproblems beschuldigt oder ihm

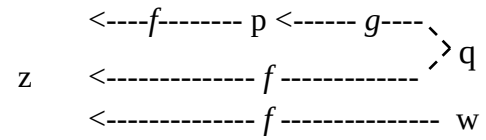
unterstellt werden sollte, er sei nur durch Zufalls zur richtigen Lösung seines Maximierungsproblems gekommen. Die Herleitungen selbst, wie auch manche Erläuterungen, mögen zwar manchmal missverständlich und auch nicht ganz vollständig sein, insbesondere was die fehlende Darstellung der hinreichenden Bedingungen für ein stationäres Maximum betrifft. Auch mag der beschrittene mathematische Weg den heutigen formalen Anforderungen an die Nachvollziehbarkeit der Annahmen und Schlussfolgerungen nicht ganz genügen. Festzuhalten ist allerdings, dass alle wichtigen von Thünen vollzogenen Rechenschritte richtig sind und auf einem richtigen Wege zu seiner berühmten Formel führen.

Zunächst ist mit Helmstädter (1995, S.58) darauf hinzuweisen, dass die Maximierung der Arbeitsrente und dabei die Bestimmung des „natürlichen" Lohns *bei konstantem Kapital-Arbeits-Verhältnis* nichts mit der in Abbildung 1 dargestellten, residualen Lohnbestimmung der ersten Kapitel seiner Veröffentlichung zu tun haben, die bei linear-homogener Produktionsfunktion zum Grenzproduktivitätslohn führt. Bei der Aufteilung des den Subsistenzlohn übersteigenden Jahresarbeitsproduktes geht es vielmehr um eine „optimale" Aufteilung auf Zinsen und Arbeitslohn durch die kapitalbildenden Arbeiter allein im Lichte der von Thünen vorgegebenen Zielfunktion. Im Hinblick auf die mathematische Formulierung bedeutet das, dass der Lohn w, wie in der o.g. 3D-Grafik dargestellt, ab § 14 als eine der unabhängigen Variablen angesehen werden muss, da über seine Höhe die Thünen´sche kapitalproduzierende Arbeiterschaft bei jeglichem vorgegebenen p-q-Verhältnis frei entscheiden kann. Auch wenn man sich die Situation realitätsnah vorstellt, spricht nichts dagegen, dass die Arbeitergruppe am Rande des Isolierten Staates eine ihrer Erfahrung entsprechende Kapitalausstattung zum Ausgangspunkt ihrer Planungen und ihrer rentenmaximierenden Lohnfestlegung nimmt, von der ausgehend sie dann iterativ oder auch über die explizite Maximierung der Zielfunktion mittels der Differentialrechnung das optimale q bestimmt, wie das Thünen getan hat, und damit als Grenzproduzentin des Kapitals auch gleichzeitig einen marktkonformen Grenzproduktivitätslohn und einen marktkonformen Grenzproduktivitäts-Zinssatz erzeugt.

Insoweit greift der Vorwurf von Samuelson (1983 und 1986) sowie viele seiner Vorgänger-Kritiker nicht, dass die Vorgehensweise Thünen´s unzulässig sei, da die von ihm einbezogenen Variablen p, w und i alle voneinander gegenseitig abhängig seien. Am Ende des § 13 mag Thünen mit der Aussage, dass w auch von p abhängig sei, einer solchen falschen Interpretation Vorschub geleistet haben. Diese Formulierung muss an dieser Stelle jedoch so verstanden werden, dass der Subsistenzlohn a eine untere und das gesamte Arbeitsprodukt p eine obere Grenze für die Festlegung von w darstellen (denn so wird die „funktionale Abhängigkeit im weiteren Fortgang der Untersuchung bis zur Bestimmung der optimalen Kapitalausstattung auch eindeutig verbal dargestellt).

Die zweite unabhängige Variable im Thünen´schen Modell ist die in Jahresarbeitseinheiten gemessene Kapitalausstattung eines Arbeiters. Wichtig und für eine zutreffende mathematische Ableitung festzuhalten ist, dass sie auf zweierlei Wegen wirksam ist. Zum einen bestimmt die relative Kapitalausstattung eines Arbeiters die Höhe des von ihm zu erzeugenden Arbeitsproduktes. Damit legt sie die gesamte Einkommenshöhe fest und den Spielraum, der für die Aufteilung der Einkommensanteile der Arbeiter und der „Kapitalisten" zur Verfügung steht. Zum zweiten ist sie neben dem Zinssatz maßgebend für die Zinseinnahmen.

Kehren wir jetzt zur Thünen´schen Zielfunktion zurück, erkennen wir anhand einer sog. „Channel-Map", dass der Zielfunktionsausdruck, die zentrale Thünen´sche Arbeitsrente z wie folgt von den einzelnen Variablen abhängig ist:



Das heißt: z = f(w,q,p,a); wobei der Subsistenzbedarf a eine Konstante ist und p = g(q) ist. Vergegenwärtigt man sich dieses Modell, wird schnell deutlich, dass zur Bestimmung des Maximums der Zielfunktion im Thünen´schen Modell das folgende totale Differential zu bilden ist:

(4) $dz = f_p dp + f_q dq + f_w dw$

(5) $dz = \frac{\partial z}{\partial p}\frac{dp}{dq}dq + \frac{\partial z}{\partial q}dq + \frac{\partial z}{\partial w}dw$

Das heißt, die Zielfunktion darf und *muss* nach zwei unabhängigen Variablen, nämlich w und q abgeleitetet werden. Während für w eine einfache partielle Ableitung ausreicht, ist bei der Ableitung nach q die direkte und die (über p) indirekte Wirkung auf den Zielfunktionswert zu berücksichtigen. Die beiden Ableitungen sind zur Bestimmung des Maximums gleich Null zu setzen. Aus den sich ergebenden beiden Gleichungen lassen sich dann alle Funktionswerte (Zielwert, Höhe der unabhängigen Variablen) im Maximum berechnen.

Die Maximierung der Zielfunktion *nach w* ergibt – wie bekannt und vielfach dargestellt – den Ausdruck $\sqrt{ap}$, den Natürlichen Lohn. Bei diesem Ausdruck wird für jeden vorgegebenen Wert von q (und damit auch dem von q abhängigen p) die höchste Arbeitsrente z erzielt.

Wie verändert sich der Zielfunktionswert z nun bei sich änderndem q? Um hier besser die Verbindung zum Thünen´schen Vorgehen zu verdeutlichen, wurde die Zielfunktion so umgeformt, dass allein q im Nenner steht.

Bei der Ableitung dieser umgeformten Thünen´schen Zielfunktion

(6) $h(q,w) = f(w,q,p(q),a) \equiv \frac{(p(q) - w)(\frac{w-a}{w})}{q}$

nach q bei den eben dargestellten Zusammenhängen ist wie folgt vorzugehen. Mit

(7) $dh/dq = f_p * p'(q) + f_q$

ergibt sich

(8) $dh/dq = \frac{1(\frac{w-a}{w} + 0)q - 0}{q^2} * p'(q) + \frac{0 - (p(q) - w)(\frac{w-a}{w})}{q^2}.$

Nullsetzen der Ableitung, Multiplizieren mit q ,Dividieren durch (w-a)/w und anschließendes Umformen führen zu

$$(9) \quad p'(q) = \frac{(p(q) - w)(\frac{w - a}{w})}{q},$$

und ergeben als optimale Kapital-Arbeitsrelation

$$(10) \quad q = \frac{p(q) - w}{p'(q)}$$

Die Maximierung der Zielfunktion nach q kommt bei den oben dargestellten funktionalen Zusammenhängen also genau zu dem Ausdruck für die optimale Kapitalausstattung eines Arbeiters, den Thünen in §18 seines Werkes ermittelt hat (vgl. IS II,1, S.174). Das Maximum lässt sich exakt bestimmen, wenn man für w jetzt das Ergebnis der partiellen Differenzierung nach w, nämlich den Term $\sqrt{ap}$ einsetzt.

V. Thünen´s Vorgehen zur Bestimmung der optimalen Kapitalhöhe

Thünen hat nicht den vorgenannten Lösungsweg gewählt. Die umfangreiche Darstellung dieser Formeln hätte zu einer Zeit, in der die Mathematik noch längst kein anerkanntes Werkzeug in der ökonomischen Wissenschaft war, sicherlich eine noch geringere Akzeptanz verursacht, als es die in seinem Werk schon vorhandenen umfangreichen mathematischen Ableitungen getan haben. Der von Thünen eingeschlagene Weg zur Bestimmung der optimalen Kapitalintensität ist in einem kleinen Abschnitt zwar sehr missverständlich, wenngleich nicht falsch, und in seinem entscheidenden Teil weniger „elegant“ als der hier vorgestellte. Allerdings hat er den Vorteil, dass er sich besser mit dem seinem Modell zugrunde liegenden ökonomischen Räsonnement verbinden lässt. Dies mag Thünen letztlich bewogen haben, diesen Weg einzuschlagen.

Im Nachhinein betrachtet, war dies eine eher trügerische Hoffnung, da die hier zur Diskussion stehenden Ableitungen bis in die heutige Zeit unverstanden geblieben sind und die entscheidende Seiten bisher überhaupt noch nicht kommentiert worden sind.[11]

Wie ist Thünen nun genau vorgegangen, um die optimale Kapitalintensität q zu ermitteln? Nachdem er in zutreffender Weise seine Zielfunktion partiell nach w abgeleitet hatte, stellte er sich zur Aufgabe, das die Zielfunktion maximierende q zu bestimmen.

Zunächst nimmt er eine u. E. überflüssige und eher Verwirrung statt Klärung bewirkende Maximierung seiner Zielfunktion bei wiederum konstant gehaltenem Pro-Kopf-Kapitaleinsatz vor. Seine unabhängige Variable ist an dieser Stelle ein bloßer „Verteilungsparameter“ α für den Kapitalentlohnungsanteil am Gesamtprodukt. Der kann an dieser Stelle nur als von der Grenzproduktivität unabhängiger Verteilungsparameter gesehen werden. In einer früheren Fassung dieses Beitrages haben wir ihn als die zur Maximierung der Zielfunktion bei konstant gehaltener Kapitalausstattung *theoretisch erforderliche* Grenzproduktivität des Kapitals bezeichnet. Das Missverständnis in Thünen´s Werk entsteht daraus, dass er das gleiche Symbol kurz zuvor auch als das Symbol für die *tatsächliche* Grenzproduktivität des Kapitals bei marginalen Änderungen des Kapitaleinsatzes genutzt hat.

[11] Dies könnte auch damit zu tun haben, dass beim Satz der sog. Waentig-Ausgabe, die die Grundlage vieler weiterer Ausgaben des zweiten Bandes des isolierten Staates im 20. Jahrhundert und auch der amerikanischen Übersetzung von Dempsey war, gerade an dieser Stelle gravierende Fehler beim Abdruck der Formeln unterlaufen sind.

Wie fährt Thünen nun fort? Er multipliziert diesen Verteilungsparameter mit der Kapitalmenge q und subtrahiert das Ergebnis vom gesamten Arbeitsprodukt p, so dass er einen neuen residualen Ausdruck für den Arbeitslohn erhält: p- αq. Er bestimmt durch partielle Differenzierung denjenigen Wert für α, der - wiederum bei vorgegebenen konstanten p-q-Werten - zur höchsten Arbeitsrente z führt. Da Thünen´s Wert für α genau dem tan α unserer Abbildung 2 entspricht, wird auch graphisch deutlich, dass sich bei dieser Thünen´schen Operation zwangsläufig das gleiche Ergebnis wie bei der partiellen Differenzierung nach w ergeben muss, nämlich dass auch p-αq= $\sqrt{ap}$ sein muss. Anschließend stellt Thünen in einer Tabelle mit den gleichen Symbolen den tatsächlichen Grenzproduktivitätslohn und den natürlichen Lohn gegenüber und sucht iterativ den Punkt, an dem sich beide schneiden und an dem er das unbedingte Maximum der Thünen´schen Arbeitsrente vermutet, da für in klar ist, dass das langfristige stationäre Gleichgewicht auch der Grenzproduktivitätsbedingung genügen muss.[12]

Die Differenzierung nach dem Ausdruck α bei gleichzeitig konstant gesetztem Kapital veranlasst nun alle Interpreten, den weiteren, *entscheidenden* algebraischen Ausführungen zur Bestimmung des optimalen q überhaupt nicht mehr weiter zu folgen (z.B. Leigh und alle ihm folgenden amerikanischen Interpreten), obwohl Thünen nach diesem missverständlichen Gebrauch des Zeichens α (Verteilungsparameter bei der Differenzierung/tatsächliches Grenzpr odukt bei der iterativen Schnittpunktbestimmung seiner Tabelle B) selbst deutlich schreibt, dass seine Aufgabe *mathematisch erst noch zu lösen* ist: "Wir haben jetzt zu untersuchen, wie und wodurch die Angleichung zwischen beiden Bestimmungsgründen für den Arbeitslohn hervorgerufen und bewirkt wird, und dadurch uns den Weg zur Bestimmung der Höhe des relativen, d. i. des auf einen Arbeiter im Durchschnitt fallenden Kapitals zu bahnen." (vgl. IS II,1 S.168).

Bei der dann folgenden mathematisch zutreffenden Lösung des Problems macht Thünen sich zunutze, dass die Zielfunktion die Maximierung eines Quotienten beinhaltet, bei dem der Nenner die Aufwandsgröße (Jahresanstrengungen zur Herstellung des Kapitals bzw. nach unserer letzten Umformung die Jahreseinheiten Kapital q selbst) enthält, der Zähler hingegen die Ertragsgröße in Abhängigkeit von dieser Aufwandsgröße. Es handelt sich bei der Zielfunktion also um die Maximierung einer Durchschnittsertragsgröße pro Aufwandseinheit, der bei einer klassischen Ertragsfunktion (zunächst steigender, dann abnehmender Ertragszuwachs) seinen höchsten Wert dann erreicht, wenn der Aufwand so weit gesteigert worden ist, bis der Grenzertrag auf den Durchschnittsertrag abgesunken ist. Wenn wir die Ertragsfunktion als v(q) und ihren Durchschnittsertrag als v(q)/q bezeichnen, dann ergibt sich nach der Quotientenregel die Ableitung wie folgt:

(11) $$z' = \frac{v'(q)q - v(q)}{q^2},$$

so dass sich durch Nullsetzen der Ausdruck

(13) $$\frac{v(q)}{q} = v'(q)$$ als notwendige Bedingung für ein Maximum ergibt.

[12] Er könnte an dieser Stelle auch das tatsächliche Grenzprodukt des Kapitals und das zur Maximierung der Zielfunktion theoretisch erforderliche Grenzprodukt bei unterschiedlichen Niveaus der Kapitalausstattung gegenüberstellen; das Ergebnis bliebe das Gleiche.

Die Ertrags-Funktion v(q) im Thünen´schen Modell besteht aus dem vom Kapitaleinsatz abhängigen Ertrag p(q) abzüglich der nach diesem Modell unabhängigen Variable w, dividiert durch die notwendigen Jahresanstrengungen w/(w-a) bzw. multipliziert mit dem Kehrwert des Ausdrucks (w-a)/w:

(14) $v(q) = (p(q) - w)(\frac{w-a}{w})$ und

(15) $v'(q) = p'(q)(\frac{w-a}{w})$, so dass

(16) $\frac{(p(q) - w)(\frac{w-a}{w})}{q} = p'(q)(\frac{w-a}{w})$ sein muss.

Dividieren der Gleichung mit *(w-a)/w* ergibt

(17) $\frac{p(q) - w}{q} = p'(q)$ und $q = \frac{p(q) - w}{p'(q)}$, wodurch sich beim Ersetzen von *w* durch $\sqrt{ap}$ die optimale Ausstattung eines Arbeiters mit Kapital q bei gegebener Produktionsfunktion je Arbeiter p(q) genau berechnen lässt.

Die Thünen´sche Lösung entspricht also voll und ganz der Gleichung (10), mit der das Thünen´sche Ergebnis in heute üblicher Vorgehensweise ermittelt wurde. Thünen´s Weg unterscheidet sich lediglich dadurch, dass er den im Rahmen der partiellen Differenzierung nach w den für den Lohn w gefundenen Ausdruck $\sqrt{ap}$ vor der Gleichsetzung in die Bestimmungsgleichungen für den Durchschnittsertrag und den Grenzertrag einsetzt und zudem nicht nochmals verbal ganz deutlich macht, dass es sich an dieser Stelle nicht um ein konstantes, sondern um ein sich mit steigendem q änderndes $\sqrt{ap(q)}$ handelt, dessen Höhe erst nach der Bestimmung des optimalen q feststeht.

Durch die aufgezeigte Identität der vorstehenden Thünen´schen Lösungsgleichung mit der Lösungsgleichung aus unserer totalen Differenzierung und durch die Rekonstruktion des Thünen´schen Vorgehens konnte u. E. verdeutlicht werden, dass Thünen nicht nur zufällig oder über Umwege zur richtigen Lösung seiner Optimierungsaufgabe kommt, sondern – abgesehen von der o.a. einzigen problematischen Passage - auch den richtigen mathematischen Weg dazu eingeschlagen hat.

Die dem Thünen´schen Tabellenbeispiel B zugehörige, von w und q abhängige Ertragsoberfläche zeigt Abbildung 4.

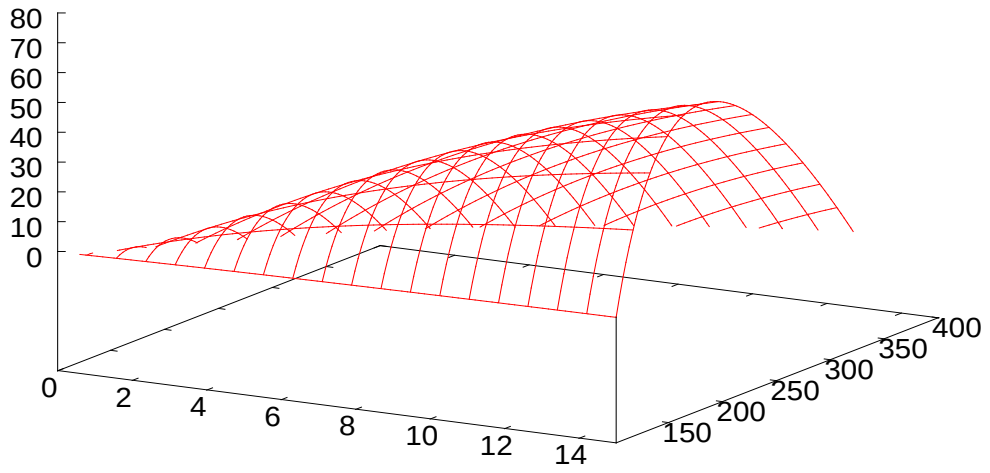


Abb. 4: Mit der Zahl der erforderlichen Jahresanstrengungen „diskontierte“ Kapitalertragsfunktion bei unterschiedlicher Kapital- und Lohnhöhe (Thünen´s Tabelle B)

Die optimale Kapitalhöhe ist erreicht, wenn der Grenzertrag kapitalbildender Arbeit gleich deren Durchschnittsertrag ist. Graphisch ließe sie sich durch den Fahrstrahl bestimmen, der die in die Kapitalertrags/Kapitalintensitäts-Ebene projezierte Funktion gerade noch berührt (vgl. Nellinger, 2000, S. 81).

VI. Nachweis der Marktkonformität von Thünen´s Kapitalbildungs- und Verteilungsmodell

Hinzuzufügen ist jetzt der algebraische Nachweis, dass das Thünen´sche Rentenmaximum mit den Marktgleichgewichtsbedingungen in Einklang steht. Wir folgen hierbei weitgehend van Suntum, 1995, S. 93):

(18) $G = X(A,A') - w\,A - i\,w\,A' = 0$

Die für die Thünen´sche Verrechnungspreisfestlegung erforderliche Bestimmung der notwendigen Mannjahre zur Bildung einer Jahreseinheit Kapital (w/(w-a)) interessiert jetzt nicht mehr, es geht jetzt um die Verteilung der Faktoreinkommen am Markt nach Grenzproduktivitätsprinzipien. Zu verzinsen mit dem Marktzinssatz i ist die direkt kapitalbildend eingesetzte Arbeit A´, bewertet mit dem aktuellen Jahreslohn w, da dies der Wert=Preis eines entsprechenden Kapitalgutes im stationären Gleichgewicht sein muss, wie Thünen festgestellt hat. Die Pro-Kopf-Größen je kapitalanwendendem Arbeiter lauten:

(19) $G/A = X(1,A'/A) - w - i\,w\,A'/A$ *bzw.* $p(q) - w - i\,w\,q$

Ableitung dieser Funktion nach q und Nullsetzen als Bedingung für ein Gewinnmaximum ergeben

(20) $p´(q) - w\, i = 0 \qquad d.h. \quad i = p´(q)/w$

Das bedeutet aber nichts anderes, als dass im Gewinnmaximum die Grenzproduktivität des Kapitals der Kapitalrente oder dem durch den Lohn dividierten Zinssatz entspricht, also für den Kapitaleinsatz Marktgleichgewichtsbedingungen eingehalten werden.

Die Ableitung der Thünen´schen Gewinnfunktion nach der Arbeit ergibt:

(21) $dx/dA = X´(A,A´) - w$

Die Ableitung gleich Null gesetzt, ergibt

(22) $w = X´(A,A´).$

D.h., der Lohn entspricht dem Grenzprodukt der Arbeit. Insofern ist auch für den Lohn die Marktgleichgewichtsbedingung erfüllt.

VII. Bewertung der Bestätigungen und Kritiken der letzten Dekaden

Mit diesen sicherlich sehr detaillierten Ausführungen lassen sich nun auch die die Lohnformel bestätigenden Arbeiten der letzten Jahre einordnen, und zwar mit folgendem Ergebnis: Die mathematische Vorgehensweisen von van Suntum und Dorfman bestätigen zwar das von Thünen erzielte Ergebnis. Beide wählen jedoch einen im Vergleich zu Thünen anderen Lösungsweg. Während sich bei Thünen erst bei der Ermittlung der optimalen Kapitalhöhe der Grenzproduktivitätslohn und eine Kapitalentlohnung nach dem Grenzproduktivitätsprinzip ergeben - und zwar als Lösung seiner Maximierungsaufgabe - womit sein Ergebnis im Einklang mit dem Marktmechanismus bei vollständiger Konkurrenz steht, unterstellen sowohl van Suntum wie auch Dorfman vorab, dass eine Festlegung der Kapitalentlohnung nach dem Grenzproduktivitätsprinzip die Thünen´sche Rente maximiert, anstatt dies algebraisch aus der Zielfunktion und den Thünen´schen Modellannahmen abzuleiten. Van Suntum ersetzt in der Thünen´schen Zielfunktion eine noch unbestimmte Entlohnung des Kapitals durch die Grenzproduktivitätsentlohnung, ohne dies an dieser Stelle besonders zu begründen, es erschien ihm aufgrund der vorangegangenen grenzproduktivätstheoretischen Ausführungen Thünen´s sicher selbstverständlich. Dorfman nimmt Thünen´s §11, wo das Grenzproduktivitätsprinzip verbal und tabellarisch abgeleitet wird, zum Ausgangspunkt, kombiniert die Ableitungen mit der Zielfunktion i(w-a) des § 16 und kommt so zur Bestätigung der Lohnformel. Letzterer verbindet seine Bestätigung des Ergebnisses jedoch mit einer aus unserer Sicht ungerechtfertigt harschen Kritik am Vorgehen Thünen´s.

Nicht berechtigt ist u.E. auch die Kritik des großen Thünen-Verehrers, Paul A. Samuelsons, am mathematischen Vorgehen Thünen´s bei der Ableitung der Lohnformel, die in dem vernichtenden Satz gipfelt: „Half-baked mathematics can be worse than none“ (S.1784). Bei seiner graphischen Darstellung des Modells vom natürlichen Lohn unterstellt Samuelson Thünen, sich bei der Bestimmung der rentenmaximierenden Aufteilung des Arbeitsproduktes

auf Lohn und Zinsen bei konstantem p-q-Verhältnis außerhalb des Raumes der Produktionsmöglichkeiten zu bewegen und nur zufällig zur richtigen Lösung zu gelangen.[13]

Die nicht zutreffende Kritik Samuelsons an Thünen´s Vorgehen rührt daher, dass er unterstellt, dass es sich bei der die unterschiedlichen Aufteilungsverhältnisse charakterisierenden Geraden um eine Tangente an der Faktorpreisgrenze handele, auf der sich Thünen bei der Maximierung der Arbeitsrente bei festem p-q-Verhältnis unerlaubterweise bewege (vgl. Samuelson, 1986, S.1783). Tatsächlich repräsentiert die dem Samuelson´schen Missverständnis zugrunde liegende Aufteilungstabelle Thünen´s aber eine Gerade, die den durch die Faktorpreisgrenze begrenzten Produktions- und Einkommensmöglichkeitenraum *durchschneidet*. Das bedeutet, dass alle innerhalb dieses Raumes und auf der Grenze liegenden Geradenpunkte zwar realisierbar, aber nicht effizient sind. Das ökonomische Effizienzkriterium ist, wie oben gezeigt wurde, erst dann erfüllt, wenn auch die optimale Kapitalhöhe q ermittelt wurde (vgl. dazu auch unsere Abbildung 1 und 2). Und diese hat Thünen - wie nachzuweisen versucht wurde - mathematisch wie ökonomisch richtig bestimmt.

Während also im heutigen neoklassischen Standardmodell die exogen und als konstant angenommene, kaum direkt messbare „psychische" Zeitpräferenzrate über die optimale Kapitalhöhe und damit auch die Faktoreinkommensanteile entscheidet, bestimmt Thünen die optimale Kapital-Arbeitsrelation im obigen Modell endogen unter bloßer Verwendung der Produktionsfunktion sowie der Höhe des Subsistenzbedarfs a, die beide naturwissenschaftlich-technische Größen und Zusammenhänge abbilden, unter Verwendung einer Zielfunktion, die bis heute umstritten ist und deren ökonomisch überzeugende Einordnung bis heute noch nicht befriedigend gelungen ist. Sie wird deshalb Gegenstand einer weiteren, eingehenderen Untersuchung sein.

Literatur:

Böhm-Bawerk E. von (1914): Kapital und Kapitalzins. Erste Abteilung. Geschichte und Kritik der Kapitalzinstheorien. Innsbruck

Braeuer, Walter (1946): Thünen´s Lohnformel. Habilitationsschrift, eingereicht bei der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Rostock.

Dorfman, R. (1986): Comment: P.A. Samuelson, Thünen at Two Hundred. Journal of Economic Literature 24, 1773 – 1776

Engelhardt, Werner Wilhelm:(2000): Thünen und die soziale Frage. Kölner Schriften zur Sozial- und Wirtschaftspolitik 39. Zweite unveränderte Auflage. Transfer-Verlag, Regensburg.

Etula, E.M. (2008): The Two-Sector von Thünen Original Marginal Productivity Model of Capital; and beyond. Metroeconomica. 59. 1/2008, Oxford. Blackwell Publishing, S. 85 – 104.

Helmstädter, E. (1995): Wie künstlich ist von Thünen´s natürlicher Lohn? In Rieter H. (Hrsg.): Studien zur Entwicklung der ökonomischen Theorie XIV „Johann Heinrich von Thünen als Wirtschaftstheoretiker" Schriften des Vereins für Socialpolitik Band 115, S. 43 - 81

Helmstädter, E. (1995): Die Knappheitsrente als Verteilungsprinzip. Kommentar zum Beitrag von Heinz D. Kurz. In Rieter H. (Hrsg.): Studien zur Entwicklung der ökonomischen Theorie XIV „Johann Heinrich von Thünen als Wirtschaftstheoretiker" Schriften des Vereins für Socialpolitik Band 115, S. 153 - 164.

[13] In diesem Zusammenhang weist er auch auf einen vermeintlichen Widerspruch zwischen der Thünen´schen Tabelle B und einer weiteren Tabelle in Thünen´s Werk hin, in der für einen Kapitaleinsatz von q=12 und eine Arbeitsprodukt p von 300 die Berechnung der Arbeitsrente bei variierendem Lohn dargestellt ist. Zwar besteht zwischen beiden Tabellen eine Differenz darin, dass mit einem Kapitaleinsatz von q=12 in Thünen´s Tabelle B ein Arbeitsprodukt von nur etwas über 298 Scheffel Roggen statt 300 erzielt wird, wirkliche Inkonsistenzen sind außer dieser Aufrundung jedoch nicht zu entdecken.

Krelle, W. (1987): Von-Thünen-Vorlesung, gehalten am 15. September 1986 auf der Jahrestagung des Vereins für Socialpolitik in München, Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, 107. Jg., 5 - 28.

Kurz, H. D. (1995): Über Knappheit und eine mißglückte Analogie zwischen Arbeit, Boden und Kapital: Thünen´s Theorie der Produktion und Verteilung. In Rieter H. (Hrsg.): Studien zur Entwicklung der ökonomischen Theorie XIV „Johann Heinrich von Thünen als Wirtschaftstheoretiker" Schriften des Vereins für Socialpolitik Band 115, 115 - 151.

Kurz, H. D. (1995): Thünen und die allmähliche Herausbildung der marginalistischen Theorie. Eine Antwort auf Ernst Helmstädter. In Rieter H. (Hrsg.): Studien zur Entwicklung der ökonomischen Theorie XIV „Johann Heinrich von Thünen als Wirtschaftstheoretiker" Schriften des Vereins für Socialpolitik Band 115, 165 - 180.

Leigh, Arthur H. (1946): Von Thünen´s Theory of Distribution and the Advent of Marginal Analysis. The Journal of Political Economy. LIV/6, S.481-502.

Meyer, E.C., Müller-Siebers, K.W. und W. Ströbele (1998) Wachstumstheorie. 2. Auflage. München-Wien. R.Oldenburg-Verlag.

Nellinger, L. (2000): Thünen´s volkswirtschaftliche Produktions- und Verteilungstheorie. In: Johann Heinrich von Thünen. Gesellschaftspolitische Aspekte seines Werkes und ihre Bedeutung für die Entwicklung des ländlichen Raumes. Sonderheft 213, Berichte über Landwirtschaft, Zeitschrift für Agrarpolitik und Landwirtschaft. Münster Landwirtschaftsverlag, 74-88

Nellinger, L. (2002): Johann Heinrich von Thünen´s wirtschaftswissenschaftlicher Beitrag zu einer nachhaltigen Nutzung natürlicher Ressourcen. In: Johann Heinrich von Thünen. Thünen´sches Gedankengut in Theorie und Praxis. Sonderheft 215, Berichte über Landwirtschaft, Zeitschrift für Agrarpolitik und Landwirtschaft. Münster Landwirtschaftsverlag, 39 - 56

Niehans, J. (1987) Thünen, Johann Heinrich von (1783 - 1850), in: Eatwell, J./Milgate, M./Newman, P. (Hrsg.), The New Palgrave, London, Vol.4, 636-639.

Niehans, J. (1990) A History of Economic Theories. Classic Contributions. 1720-1980 Baltimore and London. The John Hopkins University Press

Samuelson, P.A. (1983): Thünen at Two Hundred. Journal of Economic Literature 21, 1468 - 1488.

Samuelson, P.A. (1986): Yes to Robert Dorfman´s Vindication of Thünen´s Natural-Wage Derivation. Journal of Economic Literature 24, 1777 - 1785.

Samuelson, P.A. und Etula, E.M.: (2006) Complete work-up of the one-sector scalar-capital theory of interest rate: Third instalment auditing Sraffa´s never-completed "Critique of Modern Economic theory"Japan and the World Economy 18, Amsterdam. Elsevier 331 - 356

Schneider, D (1987): Allgemeine Betriebswirtschaftslehre. 3. Auflage. München: Oldenbourg.

Suntum, U. van (1988): Vindicating Thünen´s Tombstone Formula √ap, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd. 204 Heft 5, 393 - 405.

Suntum, U. van (1995): Johann Heinrich von Thünen als Kapitaltheoretiker. In Rieter H. (Hrsg.): Studien zur Entwicklung der ökonomischen Theorie XIV „Johann Heinrich von Thünen als Wirtschaftstheoretiker" Schriften des Vereins für Socialpolitik Band 115, S. 87-115.

Tubaro, P. (2006): Mathematiques et economie dans la determination du „Salaire Nature" de J.H. von Thünen. Cahier d´économie politique, no 50. L´Harmatton, S. 59 - 85.

Thünen, J. H. von (1863): Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie. Zweiter Teil, zweite Abteilung. hrsg. aus dem Nachlaß von H. Schuhmacher-Zarchlin, Rostock

Thünen, J. H. von (1842 bzw.1850): Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie. Erster Teil und zweiter Teil, erste Abteilung. Neudruck nach der Ausgabe letzter Hand (2. bzw. 1.Auflage, 1942 bzw. 1850), eingeleitet von Prof. Dr. Heinrich Waentig in Halle a.S. Dritte Auflage, Jena 1930.

Wicksell, K. (1893): Über Wert, Kapital und Rente nach neueren nationalökonomischen Theorien, Jena. Neudruck 1969 Scientia-Verlag Aalen.