

Pack, Ludwig

Working Paper

Das Traveling-Salesman-Problem und seine heuristische Lösung durch paarweisen Ortstausch

Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 258

Provided in Cooperation with:

Department of Economics, University of Konstanz

Suggested Citation: Pack, Ludwig (1991) : Das Traveling-Salesman-Problem und seine heuristische Lösung durch paarweisen Ortstausch, Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 258, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/68929>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

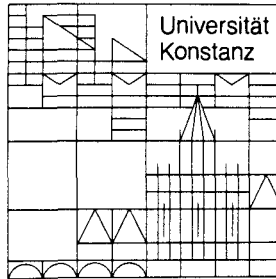
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik

Ludwig Pack

Das Traveling-Salesman- Problem und seine heuristische Lösung durch paarweisen Ortstausch

Diskussionsbeiträge

**Das Traveling-Salesman-Problem
und seine heuristische Lösung
durch paarweisen Ortstausch**

Ludwig Pack

Serie I - Nr. 258

Dezember 1991

1. Allgemeine Darstellung

Das Traveling-Salesman- oder Rundreise-Problem ist die einfachste Form der Touren- bzw. Routenprobleme. Ausgehend von einem bestimmten (Aufenthalts-)Ort sind bestimmte andere Orte in frei bestimmbarer Reihenfolge aufzusuchen und an den Ausgangsort zurückzukehren. Das Ziel besteht darin, diese Rundreise mit minimaler Weglänge (oder mit minimalen Kosten) durchzuführen.

Der Ausgangs- bzw. Aufenthaltsort erhält die Kennzahl 1. Die übrigen Orte werden mit $i=2, \dots, n$ bezeichnet, wenn die Rundreise insgesamt n Orte berührt.

Jede Permutation der Orte 2 bis n , ergänzt um den Weg vom Ausgangsort 1 zu dem als erstem besuchten Ort und den Weg vom zuletzt besuchten Ort zurück zum Ausgangsort 1 stellt eine Rundreise dar. Von den insgesamt möglichen $(n-1)!$ Rundreisen ist die beste zu bestimmen¹⁾²⁾.

p_i sei der Ort, der als i -ter im Rahmen einer Rundreise aufgesucht wird. Ist p_i z.B. gleich 3 und $i = 5$, dann heißt das, daß der Ort 5 in der Rundreise als dritter Ort aufgesucht wird.

Die Entfernung zwischen den Orten p_i und p_j sei $d_{p_i p_j}$. Wenn Hin- und Rückweg nicht gleich sind (z.B. weil Einbahnstraßen vorkommen), dann ist $d_{p_i p_j} \neq d_{p_j p_i}$. Die Entfernungsmatrix ist dann nicht symmetrisch. Für das zu beschreibende Optimierungsverfahren spielt das jedoch fast keine Rolle.

Die Zielfunktion Z_q (= Länge der q -ten Rundreise) kann unter Verwendung von p_i und $d_{p_i p_j}$ wie folgt definiert werden

-
- 1) Daraus folgt, daß für praktische Größenordnungen des Problems eine vollständige Enumeration nicht möglich ist. Für $n = 21$ erhält man bereits $20! = 2,4329 \cdot 10^{18}$ mögliche Rundreisen. Zu ihrer Berechnung brauchte sogar ein Computer, in dem der elektrische Strom zur Berechnung eines Zielwertes nur 60 cm zurücklegen muß, immer noch 154,29 Jahre.
 - 2) Vgl. zum Traveling-Salesman-Problem R.L. Ackoff und M.W. Sasieni, Fundamentals of Operations Research, New York-London-Sydney 1968, S. 305 - 315, H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, Heidelberg-New York 1970, S. 65 bis 141 und E. Heinen, Industriebetriebslehre, Wiesbaden 1983, S. 480 - 487.

$$Z_q = d_{1,p_2} + d_{p_2,p_3} + d_{p_3,p_4} + \dots + d_{p_{n-1},p_n} + d_{p_n,1}$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} d_{p_i,p_{i+1}} + d_{1,p_2} + d_{p_n,1}$$

Die allgemeine Form der Entfernungsmatrix (d_{p_i,p_j}) und die daraus folgende Zielfunktion sind in Tab. 1 dargestellt für den Fall, daß $n = 6$ ist, also 6 Orte aufzusuchen sind. Darin ist z.B. d_{p_2,p_4} die Entfernung von dem als zweitem zu dem als viertem aufgesuchten Ort. Da die Rundreise immer im Ort 1 beginnt, weil sich der Reisende zu Beginn seiner Reise dort befindet, ist in der Spalte für $j=1$ und $p_j=1$ der zweite Index sowie in der Zeile für $i=1$ und $p_i=1$ der erste Index stets gleich 1 (und braucht nicht als p_i geschrieben zu werden).

		j					
		1	2	3	4	5	6
		$p_1=1$	$p_2=2$	$p_3=3$	$p_4=4$	$p_5=5$	$p_6=6$
i	p_i						
1	$p_1=1$	d_{11}	d_{1p_2}	d_{1p_3}	d_{1p_4}	d_{1p_5}	d_{1p_6}
2	$p_2=2$	$d_{p_2,1}$	d_{p_2,p_2}	d_{p_2,p_3}	d_{p_2,p_4}	d_{p_2,p_5}	d_{p_2,p_6}
3	$p_3=3$	$d_{p_3,1}$	d_{p_3,p_2}	d_{p_3,p_3}	d_{p_3,p_4}	d_{p_3,p_5}	d_{p_3,p_6}
4	$p_4=4$	$d_{p_4,1}$	d_{p_4,p_2}	d_{p_4,p_3}	d_{p_4,p_4}	d_{p_4,p_5}	d_{p_4,p_6}
5	$p_5=5$	$d_{p_5,1}$	d_{p_5,p_2}	d_{p_5,p_3}	d_{p_5,p_4}	d_{p_5,p_5}	d_{p_5,p_6}
6	$p_6=6$	$d_{p_6,1}$	d_{p_6,p_2}	d_{p_6,p_3}	d_{p_6,p_4}	d_{p_6,p_5}	d_{p_6,p_6}

Tab. 1: Entfernungsmatrix (d_{p_i,p_j})

Die Entfernungen in der Hauptdiagonalen (also d_{p_i,p_j} für $i=j$) haben auf den Zielwert keinen Einfluß; sie werden zur Vereinfachung gleich Null gesetzt.

Wenn die Reihenfolge der Numerierung der Orte entspricht, sind in Tab. 1 die Summanden der Zielfunktion Z_q diejenigen Elemente, welche in der Matrix (d_{p_i,p_j}) unmittelbar oberhalb der Hauptdiagonale stehen (in Tab. 1 durch eine Treppenlinie unterstrichen) und das Element $d_{p_n,1}$, das dem Rückweg von dem als letztem besuchten Ort p_n zum Ausgangsort 1 entspricht (in der untersten linken Ecke der Matrix).

Wenn von einer gegebenen Rundreise ausgehend zwei Orte, z.B. der als r -ter und der als s -ter besuchte Ort (kurz als Orte r und s bezeichnet), ihre Plätze in der Reihenfolge tauschen, dann ändert sich in der Regel der Wert der Zielfunktion. Es sei

$D_q^{rs} = Z_q - Z_{q+1}$ die Änderung des Zielfunktionswertes, die sich ergibt, wenn ausgehend von der q -ten Rundreise die Orte r und s ihre Plätze in der Rundreise tauschen (bzw. tauschen würden).

Ist r z.B. gleich 3 und s gleich 5, dann heißt das, daß der Ort, der bisher als dritter (fünfter) aufgesucht wurde, nunmehr als fünfter (dritter) aufgesucht wird.

Um D_q^{rs} auch nach einem tatsächlich durchgeführten Ortstausch mit möglichst wenig Rechenaufwand bestimmen zu können, empfiehlt es sich, nach Durchführung eines Ortstausches die Entfernungsmatrix so umzuordnen, daß die zielwertbestimmenden Summanden weiter direkt oberhalb der Hauptdiagonalen und in der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Dazu sind in der Entfernungsmatrix (Tab. 1) die Spalten und die Zeilen $r = 3$ und $s = 5$ zu vertauschen. Dann erhält man als neue Entfernungsmatrix Tab. 2.

i \ j		1	2	3	4	5	6
		$p_1=1$	$p_2=2$	$p_3=s=5$	$p_4=4$	$p_5=r=3$	$p_6=6$
1	$p_1=1$	d_{11}	d_{1p_2}	d_{1s}	d_{1p_4}	d_{1r}	d_{1p_6}
2	$p_2=2$	$d_{p_2 1}$	$d_{p_2 p_2}$	$d_{p_2 s}$	$d_{p_2 p_4}$	$d_{p_2 r}$	$d_{p_2 p_6}$
3	$p_3=s=5$	d_{s1}	d_{sp_2}	d_{ss}	d_{sp_4}	d_{sr}	d_{sp_6}
4	$p_4=4$	$d_{p_4 1}$	$d_{p_4 p_2}$	$d_{p_4 s}$	$d_{p_4 p_4}$	$d_{p_4 r}$	$d_{p_4 p_6}$
5	$p_5=r=3$	d_{r1}	d_{rp_2}	d_{rs}	d_{rp_4}	d_{rr}	d_{rp_6}
6	$p_6=6$	$d_{p_6 1}$	$d_{p_6 p_2}$	$d_{p_6 s}$	$d_{p_6 p_4}$	$d_{p_6 r}$	$d_{p_6 p_6}$

Tab. 2: Entfernungsmatrix, nachdem ausgehend von Tab. 1 die Orte r und s in der Reihenfolge vertauscht worden sind

Diejenigen Summanden der Zielfunktion, welche sich durch den Tausch zwischen r und s verändern, sind in Tab. 2 eingerahmt.

Für die Zielwertänderung D_q^{rs} brauchen Z_q und Z_{q+1} nicht wirklich bestimmt zu werden. Es genügt vielmehr, diejenigen Summanden $d_{p_i p_j}$ der Zielfunktion zu betrachten, die durch den Austausch der Orte r und s verändert werden. In dem durch die Tabellen 1 und 2 beschriebenen Fall führt dies zu (vgl. Anhang)

$$D_q^{rs} = D_q^{35} = d_{p_2 s} - d_{p_2 p_3} + d_{s p_4} - d_{p_3 p_4} + d_{p_4 r} - d_{p_4 p_5} + d_{r p_6} - d_{p_5 p_6}$$

Beachtet man, daß $p_2 = r-1$, $p_3 = r$, $p_4 = r+1$, $p_5 = s$ und $p_6 = s+1$, dann wird daraus für $r = 3$ und $s = 5$

$$D_q^{35} = d_{r-1, s} - d_{r-1, r} + d_{s, r+1} - d_{r, r+1} + d_{s-1, r} - d_{s-1, s} + d_{r, s+1} - d_{s, s+1}$$

Diese Formel gilt jedoch nicht allgemein. Je nach der Größe von r , s und n erhält man vielmehr unterschiedliche Berechnungsformeln (vgl. Anhang). Dabei kommt es erstens auf die Differenz zwischen s und r an ($s-r=1$ oder $s-r>1$) und zweitens darauf, ob $s=n$ oder $s \neq n$ ist.

$$D_q^{rs} = d_{r-1, s} - d_{r-1, r} + \begin{cases} d_{s, r+1} - d_{r, r+1} + d_{s-1, r} - d_{s-1, s} + d_{r, s+1} - d_{s, s+1} & | s-r > 1 \wedge s \neq n \quad (\text{Fall 1}) \\ " \quad " \quad " \quad " \quad + d_{r1} - d_{s1} & | " \wedge s = n \quad (\text{Fall 2}) \\ d_{sr} - d_{rs} + d_{r, s+1} - d_{s, s+1} & | s-r = 1 \wedge s \neq n \quad (\text{Fall 3}) \\ " \quad " \quad + d_{r1} - d_{s1} & | s-r = 1 \wedge s = n \quad (\text{Fall 4}) \end{cases}$$

Ist die Entfernungsmatrix symmetrisch, dann ist $d_{sr} = d_{rs}$ gleich Null und kann in den Fällen 3 und 4 entfallen.

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Formel für D_q^{rs} besteht darin, daß die Zahl der D_q^{rs} definierenden Summanden bei steigendem n nicht zunimmt, sondern konstant bleibt; sie ist für n gleich 100, 500 oder 1.000 nicht größer also für $n = 4, 5$ oder 6.

Nach der letztgenannten Gleichung für D_q^{rs} können von einer gegebenen Rundreise ausgehend alle D_q^{rs} für $2 \leq r \leq n-1$ und $r+1 \leq s \leq n$ bestimmt werden.³⁾

Für die weitere Vorgehensweise gibt es zwei Möglichkeiten:

Entweder bestimmt man alle D_q^{rs} und führt die Vertauschung aus, welche die größte Verbesserung bringt,

³⁾ Da der Ausgangsort 1 stets derselbe bleibt, kann r nicht gleich 1 sein, sondern darf erst bei 2 beginnen. Daß es genügt, für s nur Werte größer oder gleich $r+1$ zu betrachten folgt daraus, daß ein Tausch von s mit r zum gleichen Ergebnis führt wie ein Tausch von r mit s .

oder man führt die erste Vertauschung aus, welche den Zielwert verbessert.

Gemäß obiger Definition $D_q^{rs} = Z_{q+1} - Z_q$ ergeben dabei negative Werte von D_q^{rs} eine Verbesserung des Zielwertes.

Werden für eine Rundreise keine Zielwertverbesserungen (hier: keine negativen D_q^{rs}) gefunden, dann stellt diese Rundreise die mit bezug auf die durchgeführte Rechnung optimale Rundreise dar.

Da das angewandte Verfahren ein heuristisches ist, braucht die gefundene Rundreise nicht die absolut beste zu sein; es kann sich um ein relatives Optimum handeln. Der Einstieg in evtl. noch bessere Lösungen kann unter Umständen dadurch gefunden werden, daß man dann, wenn $D_q^{rs} < 0$ nicht vorkommt, auch Vertauschungen ausführt, für die D_q^{rs} gleich Null oder möglichst wenig größer als Null ist, bei denen es sich jedoch nicht um Vertauschungen von r und s handelt, die in der unmittelbar vorausgehenden Vertauschung gerade erst durchgeführt wurden.⁴⁾

2. Darstellung anhand von zwei Zahlenbeispielen

a) Ein Zahlenbeispiel mit symmetrischer Entfernungsmatrix

Im folgenden wird das beschriebene Verfahren an einem Zahlenbeispiel dargestellt, das (nur leicht verändert) von Müller-Merbach⁵⁾ übernommen ist.

In der Ausgangssituation, in der $i=p_1$ sei, in der also der Ort i auch als i-ter aufgesucht wird, ergibt sich aufgrund des in Abb. 1 wiedergegebenen Straßennetzes die Entfernungsmatrix $(d_{ij}) = (d_{p_i p_j})$, die in Tab. 3 dargestellt ist. Dabei ist zur Ermittlung der Tab. 3 aus Abb. 1 grundsätzlich die Bestimmung des kürzesten Weges zwischen zwei Orten, z.B. mit Hilfe der Netzwerktechnik erforderlich.

4) Wählt man für die Vertauschung ein $D_q^{rs} > 0$, dann ist nämlich nach Durchführung der Vertauschung $D_{q+1}^{rs} = -D_q^{rs}$. Ein erneutes Vertauschen von r und s würde deshalb nur den Status quo ante wieder herstellen und zu einem endlosen Zyklus führen.

5) H. Müller-Merbach, Operations-Research, 2. Auflage München 1971, S. 293 ff.

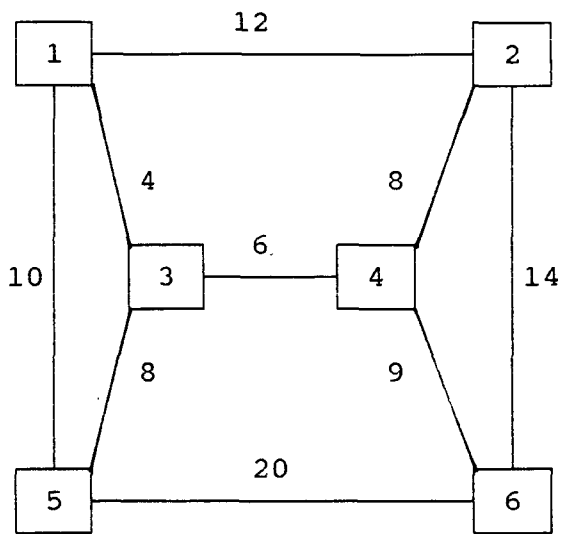


Abb. 1: Straßennetz zum Zahlenbeispiel

$j=p_j$ $i=p_i$	1	2	3	4	5	6
1	0	12	4	10	10	19
2	12	0	14	8	22	14
3	4	14	0	6	8	15
4	10	8	6	0	14	9
5	10	22	8	14	0	20
6	19	14	15	9	20	0

Tab. 3: Entfernungsmatrix zum Straßennetz der Abb. 1

Ein einfacherer Weg zur Bestimmung von Tab. 3 aus Abb. 1 besteht darin, nur für direkte Verbindungen die tatsächlichen Entfernungen einzusetzen und für alle indirekten Entfernungen (die über einen oder mehrere Zwischenorte gehen) eine fiktive, sehr große Entfernung ($\rightarrow \infty$) zu verwenden.

In dem vorliegenden Zahlenbeispiel folgt dann aus Abb. 1 die in Tab. 3a wiedergegebene Entfernungsmatrix:

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	0	12	4	∞	10	∞
2	12	0	∞	8	∞	14
3	4	∞	0	6	8	∞
4	∞	8	6	0	∞	9
5	10	∞	8	∞	0	20
6	∞	14	∞	9	20	0

Tab. 3a: Entfernungsmatrix zum Straßennetz der Abb. 1, wenn für indirekte Verbindungen sehr große Entfernungen eingesetzt werden.

Der Rundreiseweg gemäß Tab. 3 hat eine Länge von $12+14+6+14+20+19 = 85$. Von Tab. 3 ausgehend können alle Werte von D_0^{rs} ermittelt werden (für die Ausgangsmatrix ist q gleich Null).

Gemäß der zuvor gegebenen Formel für D_q^{rs} erhält man beispielhaft folgende Werte:

$$D_0^{23} = 4 - 12 + 14 - 14 + 8 - 6 = -6 \quad (\text{Fall 3})$$

$$D_0^{24} = 10 - 12 + 6 - 14 + 14 - 6 + 22 - 14 = 6 \quad (\text{Fall 2})$$

$$D_0^{26} = 19 - 12 + 15 - 14 + 22 - 20 + 12 - 19 = 3 \quad (\text{Fall 1})$$

$$D_0^{56} = 9 - 14 + 20 - 20 + 10 - 19 = -14 \quad (\text{Fall 4})$$

Analog zu den vier gegebenen Beispielen können alle anderen Werte von D_0^{rs} bestimmt werden.

Wendet man die erste Vorgehensweise an und errechnet alle möglichen Werte von D_0^{rs} , erhält man folgende Tabelle 4:

s \ r	3	4	5	6
2	-6	6	-20	3
3		-12	3	-24
4			-9	0
5				-14

Tab. 4: Werte von D_0^{rs}

Wie aus Tabelle 4 ersichtlich, ergibt sich die größte Verkürzung der Rundreise, wenn $r=3$ und $s=6$ sind, was zu einer Verbesserung des Zielwertes von 85 um 24 auf 61 führt. Zur Berücksichtigung dieser Vertauschung sind in der Entfernungsmatrix gemäß Tab. 3 die Zeilen und Spalten 3 und 6 auszutauschen. Werden dazu zuerst die Spalten 3 und 6 ausgetauscht, erhält man folgende Matrix:

j	1	2	3	4	5	6
p _j	1	2	s=6	4	5	r=3
i						
1	0	12	19	10	10	4
2	12	0	14	8	22	14
3	4	14	15	6	8	0
4	10	8	9	0	14	6
5	10	22	20	14	0	8
6	19	14	0	9	20	15

Tab. 5: Entfernungsmatrix nach Vertauschen der Spalten 3 und 6

Werden von Tab. 5 ausgehend auch noch die Zeilen 3 und 6 ausgetauscht, erhält man die folgende Tabelle 6 als Grundlage der weiteren Rechnung.

		j					
		1	2	3	4	5	6
i	p_j	$p_1=1$	$p_2=2$	$p_3=6$	$p_4=4$	$p_5=5$	$p_6=3$
	1	$p_1=1$	0	12	19	10	10
2	$p_2=2$	12	0	14	8	22	14
3	$p_3=6$	19	14	0	9	20	15
4	$p_4=4$	10	8	9	0	14	6
5	$p_5=5$	10	22	20	14	0	8
6	$p_6=3$	4	14	15	6	8	0

Tab. 6: Entfernungsmatrix nach Vertauschen der Spalten und Zeilen 3 und 6.

Von Tab. 6 ausgehend können nunmehr die Werte von D_1^{rs} ermittelt werden, und zwar auf die gleiche Weise wie für D_0^{rs} gezeigt. Die sich ergebenden Werte enthält folgende Tabelle.

r \ s		s			
		3	4	5	6
2		6	6	4	15
3			0	15	24
4				9	12
5					-2

Tab. 7: Werte von D_1^{rs}

Wie aus Tab. 7 ersichtlich, ergibt sich eine weitere Zielwertverbesserung um 2 von 61 auf 59 wenn $r=5$ und $s=6$ sind.

Zur Durchführung dieser Vertauschung sind in Tab. 6 die Zeilen und Spalten 5 und 6 zu vertauschen, und zwar genauso, wie das für den Übergang von Tab. 3 zu Tab. 6 gezeigt worden ist. Von der so sich ergebenden neuen Entfernungstabelle ausgehend sind die Werte von D_2^{rs} zu berechnen; dafür erhält man:

r \ s		s			
		3	4	5	6
2		6	6	9	12
3			3	12	29
4				12	11
5					2

Tab. 8: Werte von D_2^{rs}

In Tab. 8 sind alle D_2^{rs} größer als Null, d.h. weitere Verbesserungen sind bei diesem Stand der Rechnung mit dem benutzten Verfahren nicht möglich.

Aufgrund der vorgenommenen Vertauschung $r_1=3$ und $s_1=6$, was die Reihenfolge

1 - 2 - 6 - 4 - 5 - 3 - 1

ergab, und der anschließenden Vertauschung von $r_2=5$ und $s_2=6$ erhält man als optimale Reihenfolge

1 - 2 - 6 - 4 - 3 - 5 - 1.

Diese Reihenfolge ist die absolut beste⁶⁾, was mit der hier vorgenommenen heuristischen Rechnung jedoch nicht bewiesen werden kann. Der optimale Zielwert ist 59.

Die im Zahlenbeispiel benutzte Entfernungsmatrix ist symmetrisch. Die Symmetrie hat zur Folge, daß auch die zur gefundenen Optimallösung spiegelbildlich gleiche Rundreise, nämlich

1 - 5 - 3 - 4 - 6 - 2 - 1

optimal ist und ebenfalls zum kürzesten Rundreiseweg von 59 führt.

Ausgehend von Abb. 1 können die beiden optimalen Rundreisewege wie folgt dargestellt werden:

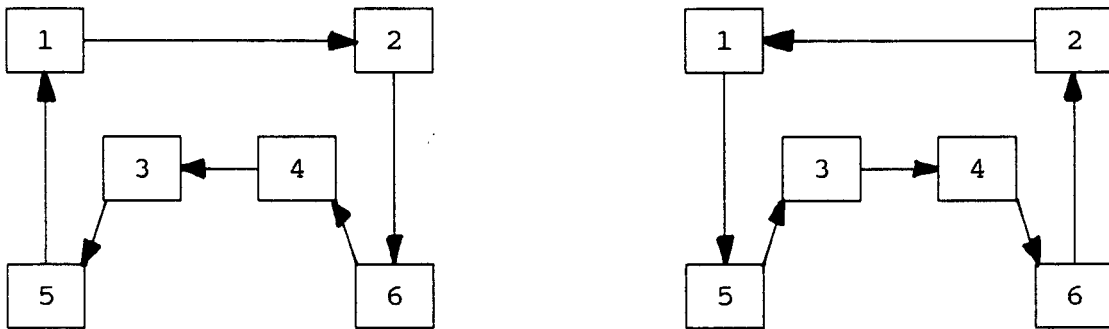


Abb. 2: Die optimalen Rundreisewege

Geht man von der Entfernungsmatrix nach Tab. 3 a aus (anstelle von Tab. 3), erhält man nach zwei Vertauschungen den gleichen optimalen Rundreiseweg. Im ersten Schritt werden dabei $r=2$ und $s=5$, im zweiten Schritt $r=5$ und $s=6$ ausgetauscht.

Benutzt man die zweite mögliche Vorgehensweise und führt, von Tab. 3 ausgehend, eine Vertauschung durch sobald sich ein negatives D_q^{rs} ergibt, dann erhält man folgende Rechnung:

Als erstes wird $D_0^{23} = -6$ ermittelt und eine Vertauschung mit $r=2$ und $s=3$ vorgenommen. Dadurch wird der Weg von 85 um 6 auf 79 verkürzt.

⁶⁾ Vgl. H. Müller-Merbach, a.a.O., S. 294 - 307.

Von dem so erhaltenen neuen Rundreiseweg ausgehend, werden berechnet $D_1^{23} = 6$, $D_1^{24} = 0$, $D_1^{25} = 1$ und $D_1^{26} = -12$. Deshalb werden r gleich 2 und s gleich 6 gesetzt. Die entsprechende Vertauschung verkürzt den Weg von 79 um 12 auf 67.

Nach Vertauschung von $r = 2$ und $s = 6$ erhält man bereits für den als ersten errechneten Wert von D_2^{35} einen negativen Wert und zwar $D_2^{35} = -6$. Deshalb vertauscht man die Orte 2 und 3, was zu einer Zielwertverbesserung von 67 um 6 auf 61 führt.

Von der Zuordnung ausgehend, die sich nach der dritten Vertauschung ergibt, können die Werte von D_3^{rs} ermittelt werden; dafür erhält man:

r \ s	3	4	5	6
2	6	6	4	15
3		0	15	24
4			9	12
5				-2

Tab. 9: Werte von D_3^{rs}

Durch Vertauschen von $r=5$ und $s=6$ kann also eine weitere Zielwertverbesserung von 61 um 2 auf 59 erreicht werden.

Von der Zuordnung ausgehend, welche sich nach der dritten Vertauschung ergibt, können die Werte von D_4^{rs} berechnet werden. Sie sind in Tab. 10 wiedergegeben.

r \ s	3	4	5	6
2	6	6	9	12
3		3	12	29
4			12	11
5				2

Tab. 10: Werte von D_4^{rs}

Da kein D_4^{rs} negativ ist, besteht keine Verbesserungsmöglichkeit mehr. Die gefundene optimale Rundreise ist aufgrund der vorgenommenen drei Vertauschungen

$$1 - 2 - 6 - 4 - 3 - 5 - 1$$

und stimmt mit der Rundreise überein, die nach dem zuerst beschriebenen Verfahren als optimal ermittelt worden ist.

Ein Vergleich der beiden Verfahren ergibt im hier verwandten Zahlenbeispiel folgendes: Während bei dem zuerst beschriebenen Verfahren zwei Vertauschungen nötig waren und $3 \cdot 10 = 30$ Werte von D_q^{rs} ermittelt werden mußten, waren beim zweiten Verfahren vier Vertauschungen nötig, und es mußten $1 + 4 + 1 + 10 + 10 = 26$ Werte von D_q^{rs} berechnet werden.

b) Ein Zahlenbeispiel mit asymmetrischer Entfernungsmatrix

Auch dieses Zahlenbeispiel ist von Müller-Merbach übernommen worden⁷⁾. Die Entfernungsmatrix lautet:

$j = p_j$	1	2	3	4	5	6	7
$i = p_i$							
1	0	20	33	23	12	18	16
2	19	0	24	31	20	14	20
3	35	25	0	26	23	22	18
4	24	28	28	0	16	16	11
5	13	23	22	17	0	6	5
6	20	13	22	18	7	0	6
7	19	19	17	12	6	6	0

Tab. 11: Werte der Entfernungsmatrix, von der ausgegangen wird

Der Zielwert dieser Ausgangslösung ist 117.

Sucht man das größte D_q^{rs} so erhält man für D_0^{rs} :

$r \backslash s$	3	4	5	6	7
2	19	10	10	27	-4
3		16	15	10	14
4			8	3	-1
5				0	-10
6					0

Tab. 12: Werte von D_0^{rs}

7) H. Müller-Merbach, Optimale Reihenfolgen, Heidelberg-New York 1970, S. 68. Im Unterschied zu Müller-Merbach werden die Elemente in der Hauptdiagonalen nicht unendlich sondern gleich Null gesetzt, was auf das Ergebnis keinen Einfluß hat.

Nach Durchführung der besten Vertauschung mit $r = 5$ und $s = 7$ erhält man als neuen Zielwert 107 und folgende Werte für D_1^{rs}

r \ s	3	4	5	6	7
2	19	15	14	22	2
3		16	15	9	24
4			3	6	13
5				4	10
6					6

Tab. 13: Werte von D_1^{rs}

Alle Werte von D_1^{rs} sind positiv. Eine weitere Verbesserung ist nicht möglich. Der optimale Zielwert ist 107 und die optimale Reihenfolge⁸⁾ lautet

$$1 - 2 - 3 - 4 - 7 - 6 - 5 - 1$$

Zum gleichen Ergebnis führt die sofortige Durchführung einer Vertauschungsmöglichkeit mit negativem D_q^{rs} , wobei drei Vertauschungen durchzuführen und 28 Werte von D_q^{rs} zu berechnen sind (gegenüber 1 Vertauschung und 30 Werten von D_q^{rs} , wenn jeweils das größte D_q^{rs} gesucht wird).

3. Zur Verbesserung von relativen Optima

Das beschriebene Verfahren lieferte in den bisher benutzten Zahlenbeispielen sehr schnell eine Lösung, die in beiden Fällen sogar das absolute Minimum war. Das muß natürlich nicht immer so sein, denn es handelt sich um ein heuristisches Verfahren, das zu einem relativen Optimum führen kann und dessen Ergebnisse vom jeweiligen Zahlenbeispiel abhängig sind.

Auf folgende Verbesserungsmöglichkeiten ist bereits verwiesen worden: Um nach Erreichen des relativen Optimums den Einstieg in eine evtl. noch bessere Lösung zu finden, kann man versuchsweise auch Vertauschungen für $D_q^{rs} = 0$ bzw. für relativ wenig über Null liegende Werte von D_q^{rs} durchführen, muß dann jedoch darauf achten, daß man nicht die gleichen Vertauschungen ständig wiederholt.

⁸⁾ Diese Reihenfolge und der zugehörige Zielwert sind sogar absolut optimal; vgl. H. Müller-Merbach (1970), a.a.O., S. 68.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, mit mehreren verschiedenen, zufällig oder systematisch erzeugten Ausgangslösungen zu beginnen. Im folgenden sei deshalb beispielhaft dargestellt, wie man das hier beschriebene Verfahren mit sogenannten "Eröffnungsverfahren" verbinden kann, welche der Gewinnung guter Ausgangslösungen dienen⁹⁾. Dazu wird von folgender symmetrischen Entfernungsmatrix ausgegangen:

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	31	24	57	17	41	36	43	26	60
2	31	0	55	40	41	18	24	12	27	40
3	24	55	0	75	24	65	54	67	46	81
4	57	40	75	0	73	55	21	39	66	74
5	17	41	24	73	0	45	51	53	23	59
6	41	18	65	55	45	0	41	17	24	22
7	36	24	54	21	51	41	0	29	47	63
8	43	12	67	39	53	17	29	0	35	35
9	26	27	46	66	23	24	47	35	0	36
10	60	40	81	74	59	22	63	35	36	0

Tab. 14: Symmetrische Entfernungsmatrix

Der minimale Zielwert zu dieser Entfernungsmatrix ist 255 und ergibt sich für die Reihenfolge

1 - 7 - 4 - 2 - 8 - 6 - 10 - 9 - 5 - 3 - 1.

Eine zweite Reihenfolge, bei der die Orte 2 und 8 vertauscht sind, führt zum gleichen optimalen Ergebnis. Weil es sich um eine symmetrische Matrix handelt, sind außerdem die Reihenfolgen, welche zu den beiden genannten spiegelbildlich gleich sind, ebenfalls optimal.

Die Anwendung des hier beschriebenen Verfahrens auf die Tab. 14 führt zu einem relativen Optimum mit einem Zielwert von 266 für die Reihenfolge

1 - 5 - 9 - 10 - 6 - 2 - 8 - 4 - 7 - 3 - 1.

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn die Orte 2 und 8 in dieser Reihenfolge vertauscht werden. Ein Tausch mit solchen Werten von r und s für die D_{rs}^z gleich Null ist oder wenig über Null liegt, führt in diesem Zahlenbeispiel nicht weiter.

⁹⁾ Vgl. hierzu z.B. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 292 ff.

Wendet man auf Tab. 14 zur Gewinnung einer Ausgangslösung das "Verfahren des besten Nachfolgers" an¹⁰⁾ und benutzt anschließend das hier beschriebene Vertauschungsverfahren, erhält man ebenfalls nur ein relatives Optimum mit einem noch schlechteren Zielwert.

Das absolute Optimum kann hingegen sehr schnell wie folgt gefunden werden: Bei realen Traveling Salesman Problemen sind die aufzusuchenden Orte und ihre geographische Lage bekannt. Also liegt es nahe, sie auf einer maßstabgerechten Karte oder Zeichnung einzutragen. Im Falle der Tab. 14 ergibt das Abb. 3.

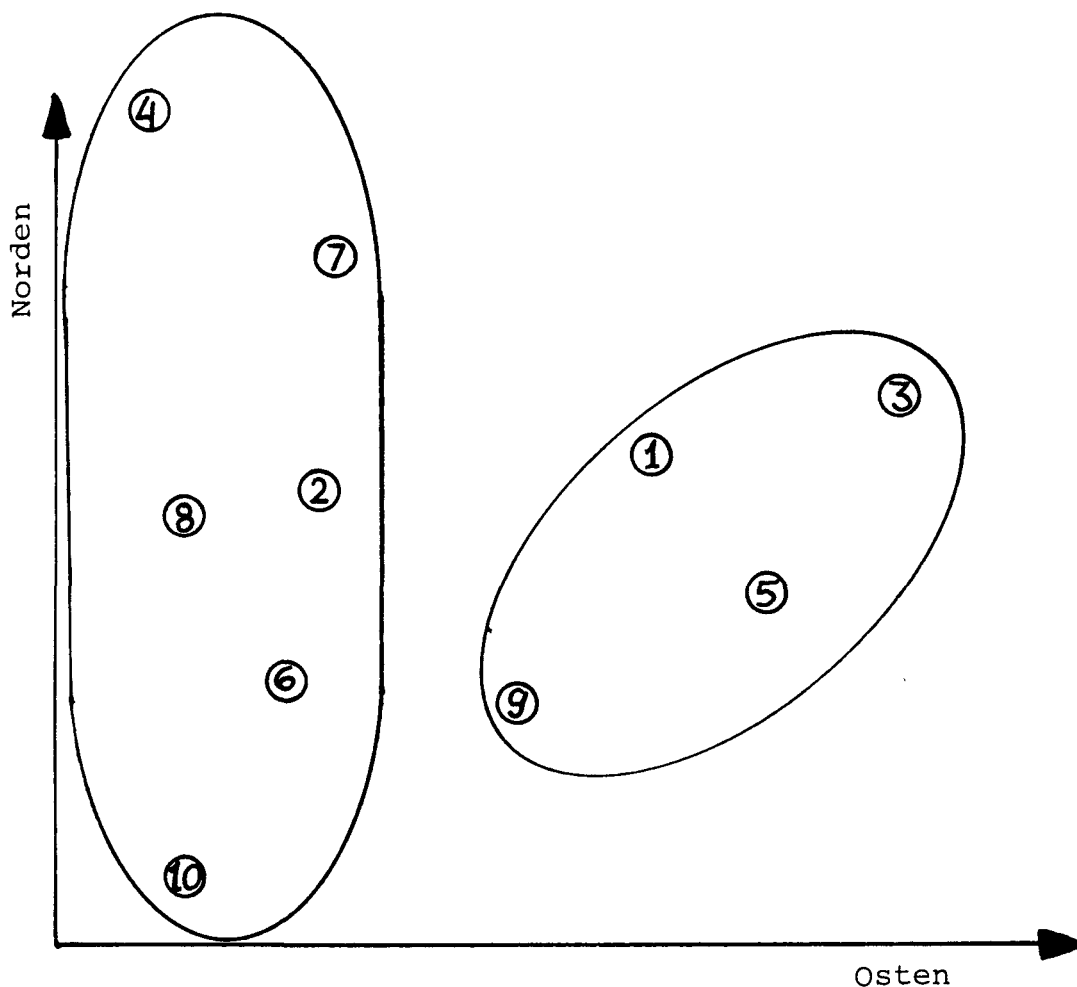


Abb. 3: Maßstabgerechte Darstellung der zehn Orte aus Tab. 14

Aus Abb. 3 sind zwei Sachverhalte sehr schnell zu erkennen:

1. Es gibt zwei Gruppen von Orten, nämlich
 - a) die Orte 1, 3, 5 und 9 sowie

¹⁰⁾ Vgl. H. Müller-Merbach, Operations Research, a.a.O., S. 294 f.; dabei wird jeweils derjenige Ort unter den noch nicht eingeordneten Orten als nächster gewählt, der zu dem zuletzt eingereichten Ort die geringste Entfernung hat.

b) die Orte 10, 6, 2, 8, 7 und 4.

2. Die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Gruppen ist diejenige zwischen den Orten 6 und 9.

Aufgrunddessen dürfte im vorliegenden Fall ein dreistufiges Vorgehen¹¹⁾ zweckmäßig sein:

1. Man ermittelt vom Ort 1 ausgehend die kürzeste Rundreise durch die Orte der ersten Gruppe,
2. man berechnet, beginnend und endend in Ort 6, die kürzeste Rundreise durch die Orte der zweiten Gruppe,
3. man verbindet beide Rundreisen zu einer einzigen Rundreise und bestimmt dafür das Optimum.

Nach dem Verfahren des besten Nachfolgers erhält man für die erste Gruppe von Orten die Reihenfolge

1 - 9 - 5 - 3 - 1.

Wendet man darauf das hier beschriebene Verfahren an, sieht man, daß diese Reihenfolge ein relatives Optimum darstellt, und daß die Reihenfolge

1 - 3 - 5 - 9 - 1

gleich gut ist.

Die Anwendung des Verfahrens des besten Nachfolgers auf die zweite Gruppe von Orten ergibt die Reihenfolge

6 - 8 - 2 - 7 - 4 - 10 - 6.

Benutzt man diese Reihenfolge als Ausgangslösung und wendet darauf das hier beschriebene Verfahren an, erhält man die Reihenfolge

6 - 10 - 2 - 7 - 4 - 8 - 6.

Nun kann man die beiden Teilfolgen zu der Gesamtreihenfolge

1 - 3 - 5 - 9 - 6 - 10 - 2 - 7 - 4 - 8 - 1

verbinden und diese als Ausgangslösung benutzen. Darauf angewandt liefert das hier beschriebene Verfahren nach zwei Ortstauschen zwei Lösungen, welche zu den anfangs genannten absolut optimalen Lösungen spiegelbildlich gleich sind.

¹¹⁾ Analog hierzu kann vorgegangen werden, wenn es mehr als zwei Gruppen von Orten gibt. Die Zahl der Stufen ist dabei stets um eins höher als die Zahl der Gruppen.

Anhang: Gewinnung der Bestimmungsgleichung für D_q^{rs}

Die folgenden Entfernungstabellen dienen der Gewinnung der Bestimmungsgleichung von D_q^{rs} .

Die fett eingerahmten Felder zeigen, welche Summanden der Zielfunktion sich beim Tausch der Orte r und s ändern. Die Pfeile geben an, welche Summanden einander ersetzen, wobei der Summand im eingerahmten Feld in die Zielfunktion eintritt, während der Summand im nicht eingerahmten Feld die Zielfunktion verläßt.

In den Tabellen werden nur diejenigen Zeilen und Spalten ausgefüllt, welche durch den Tausch der Orte r und s verändert werden; nicht ausgefüllte Felder werden vom Tausch der Orte r und s nicht berührt.

Es sind vier Fälle zu unterscheiden je nachdem $r-s$ gleich 1 oder größer als 1 ist, sowie ob s gleich n oder ungleich n ist.

Fall 1: $s-r > 1$ und $s \neq n$; hier: $r = 2$ und $s = 5$

$p_i \backslash p_j$	1	$p_2=5=s$	3	4	$p_5=2=r$	6
1		d_{1s}			d_{1r}	
2		d_{2s}			d_{2r}	
3		d_{3s}			d_{3r}	
4		d_{4s}			d_{4r}	
5		d_{5s}			d_{5r}	
6		d_{6s}			d_{6r}	

Entfernungsmatrix nach Spaltentausch

$p_i \backslash p_j$	1	$p_2=5=s$	3	4	$p_5=2=r$	6
1		d_{1s}			d_{1r}	
$p_2=5=s$	d_{s1}	d_{ss}	d_{s3}	d_{s4}	d_{sr}	d_{s6}
3		d_{3s}			d_{3r}	
4		d_{4s}			d_{4r}	
$p_5=2=r$	d_{r1}	d_{rs}	d_{r3}	d_{r4}	d_{rr}	d_{r6}
6		d_{6s}			d_{6r}	

Entfernungsmatrix nach Spalten- und Zeilentausch

Aus der rechten Tabelle folgt im Fall 1 für D_q^{rs}

$$D_q^{25} = d_{1s} - d_{1r} + d_{s3} - d_{r3} + d_{4r} - d_{4s} + d_{r6} - d_{s6}$$

Berücksichtigt man nun noch, daß im Fall 1
 $1 = r - 1$, $3 = r + 1$, $4 = s - 1$ und $6 = s + 1$,
 dann erhält man im Fall 1 allgemein

$$D_{q1}^{rs} = d_{r-1,s} - d_{r-1,r} + d_{s,r+1} - d_{r,r+1} + d_{s-1,r} - d_{s-1,s} + d_{r,s+1} - d_{s,s+1}$$

Fall 2: $s - r > 1$ und $s = n$; hier $r = 2$ und $s = 6$.

$p_i \backslash p_j$	1	$p_2=5=s$	3	4	5	$p_5=2=r$
1		d_{1s}				d_{1r}
2		d_{2s}				d_{2r}
3		d_{3s}				d_{3r}
4		d_{4s}				d_{4r}
5		d_{5s}				d_{5r}
6		d_{6s}				d_{6r}

$p_i \backslash p_j$	1	$p_2=5=s$	3	4	6	$p_6=2=r$
1		d_{1s}				d_{1r}
$p_2=5=s$	d_{s1}	d_{ss}	d_{s3}	d_{s4}	d_{s5}	d_{sr}
3		d_{3s}				d_{3r}
4		d_{4s}				d_{4r}
5		d_{5s}				d_{5r}
$p_6=2=r$	d_{r1}	d_{rs}	d_{r3}	d_{r4}	d_{r5}	d_{rr}

Entfernungsmatrix nach
Spaltentausch

Entfernungsmatrix nach Spalten-
und Zeilentausch

Aus der rechten Tabelle folgt im Fall 2 für D_q^{26} :

$$D_q^{26} = d_{1s} - d_{1r} + d_{s3} - d_{r3} + d_{sr} - d_{ss} + d_{r1} - d_{s1}$$

Beachtet man nun, daß im Fall 2
 $1 = r - 1$, $3 = r + 1$ und $5 = s - 1$
 dann erhält man im Fall 2 allgemein

$$D_{q2}^{rs} = d_{r-1,s} - d_{r-1,r} + d_{s,r+1} - d_{r,r+1} + d_{s-1,r} - d_{s-1,s} + d_{r1} - d_{s1}$$

Fall 3: $s - r = 1$ und $s \neq n$; hier $r = 3$ und $s = 4$.

$p_j \backslash p_i$	1	2	$p_3=4=s$	$p_4=3=r$	5	6
1			d_{1s}	d_{1r}		
2			d_{2s}	d_{2r}		
3			d_{3s}	d_{3r}		
4			d_{4s}	d_{4r}		
5			d_{5s}	d_{5r}		
6			d_{6s}	d_{6r}		

Entfernungsmatrix nach
Spaltentausch

$p_j \backslash p_i$	1	2	$p_3=4=s$	$p_4=3=r$	5	6
1			d_{1s}	d_{1r}		
2			d_{2s}	d_{2r}		
$p_3=4=s$	d_{s1}	d_{s2}	d_{ss}	d_{sr}	d_{s5}	d_{s6}
$p_4=3=r$	d_{r1}	d_{r2}	d_{rs}	d_{rr}	d_{r5}	d_{r6}
5			d_{5s}	d_{5r}		
6			d_{6s}	d_{6r}		

Entfernungsmatrix nach Spalten-
und Zeilentausch

Aus der rechten Tabelle folgt im Fall 3 für D_q^{34} :

$$D_q^{34} = d_{2s} - d_{2r} + d_{sr} - d_{rs} + d_{s5} - d_{r5}$$

Beachtet man nun, daß im Fall 3

$$2 = r - 1 \text{ und } 5 = s + 1$$

dann erhält man im Fall 3 allgemein

$$D_{q3}^{rs} = d_{r-1,s} - d_{r-1,r} + d_{sr} - d_{rs} + d_{r,s+1} - d_{s,s+1}$$

Fall 4: $s - r = 1$ und $s = n$; hier $r = 5$ und $s = 6$.

$p_j \backslash p_i$	1	2,3	4	$p_5=6=s$	$p_6=5=r$
1				d_{1s}	d_{1r}
2				d_{2s}	d_{2r}
3				d_{3s}	d_{3r}
4				d_{4s}	d_{4r}
5				d_{5s}	d_{5r}
6				d_{6s}	d_{6r}

Entfernungsmatrix nach
Spaltentausch

$p_j \backslash p_i$	1	2	3	4	$p_5=6=s$	$p_6=5=r$
1					d_{1s}	d_{1r}
2					d_{2s}	d_{2r}
3					d_{3s}	d_{3r}
4					d_{4s}	d_{4r}
$p_5=6=s$	d_{s1}	d_{s2}	d_{s3}	d_{s4}	d_{ss}	d_{sr}
$p_6=5=r$	d_{r1}	d_{r2}	d_{r3}	d_{r4}	d_{rs}	d_{rr}

Entfernungsmatrix nach Spalten-
und Zeilentausch

Aus der rechten Tabelle folgt im Fall 4 für D_q^{56} :

$$D_q^{56} = d_{4s} - d_{4r} + d_{sr} - d_{rs} + d_{r1} - d_{s1}$$

Beachtet man nun noch, daß im Fall 4 gilt

$4 = r - 1$, dann ergibt sich im Fall 4 allgemein:

$$D_q^{rs} = d_{r-1,s} - d_{r-1,r} + d_{sr} - d_{rs} + d_{r1} - d_{s1}$$

Die für die Fälle 1 bis 4 abgeleiteten Bestimmungsgleichungen lassen sich zusammenfassen zu:

$$D_q^{rs} = \begin{cases} d_{s,r+1} - d_{r,r+1} + d_{s-1,r} - d_{s-1,s} + d_{r,s+1} - d_{s,s+1} & \left. \begin{array}{l} | s-r > 1 \wedge \\ | s \neq n \end{array} \right\} \text{(Fall 1)} \\ \begin{array}{l} " \quad " \quad " \quad " + d_{r1} - d_{s1} \\ d_{sr} - d_{rs} + d_{r,s+1} - d_{s,s+1} \\ " \quad " + d_{r1} - d_{s1} \end{array} & \left. \begin{array}{l} | s-r > 1 \wedge \\ | s = n \end{array} \right\} \text{(2)} \\ d_{sr} - d_{rs} + d_{r,s+1} - d_{s,s+1} & \left. \begin{array}{l} | s-r = 1 \wedge \\ | s \neq n \end{array} \right\} \text{(3)} \\ " \quad " + d_{r1} - d_{s1} & \left. \begin{array}{l} | s-r = 1 \wedge \\ | s = n \end{array} \right\} \text{(4)} \end{cases}$$