

Pack, Ludwig

**Working Paper**

## Paarweiser Auftragstausch und Rüstzeiten im klassischen Maschinenbelegungsproblem

Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 285

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Konstanz

*Suggested Citation:* Pack, Ludwig (1997) : Paarweiser Auftragstausch und Rüstzeiten im klassischen Maschinenbelegungsproblem, Diskussionsbeiträge - Serie I, No. 285, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik, Konstanz

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/68918>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

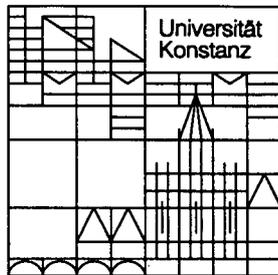
Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



**Fakultät für  
Wirtschaftswissenschaften  
und Statistik**

---

Ludwig Pack

**Paarweiser Auftragstausch  
und Rüstzeiten im klassischen  
Maschinenbelegungsproblem**

W 284 (285)



Diskussionsbeiträge

---

D-78457 Konstanz

Serie I — Nr. 285

April 1997

29. MAI 1997 Weltwirtschaft  
Kiel

W 284 (285) mi gu sig gla

**Paarweiser Auftragstausch und Rüstzeiten  
im klassischen Maschinenbelegungsproblem**

**Ludwig Pack**

**Serie I - Nr. 285**

2 54522

**April 1997**

**Paarweiser Auftragstausch und Rüstzeiten im klassischen  
Maschinenbelegungsproblem**

von Prof. Dr. Ludwig Pack, Universität Konstanz

**Inhaltsverzeichnis**

<b>A. Zur Lösung des klassischen Maschinenbelegungsproblems ohne Umrüstzeiten</b>	<b>1</b>
I. Allgemeine Darstellung des Verfahrens des paarweisen Auftragstausches	2
1. Die verwandten Begriffe und Symbole	2
2. Allgemeine Darstellung der Vorgehensweise	2
3. Bestimmung eines theoretisch optimalen Zielwertes	7
II. Darstellung des Verfahrens anhand eines Zahlenbeispiels	9
<b>B. Berücksichtigung von Umrüstzeiten im klassischen Maschinenbelegungsproblem</b>	<b>20</b>
I. Allgemeine Darstellung	20
II. Darstellung der Vorgehensweise anhand eines Zahlenbeispiels	21
III. Zur Nutzung von Leerzeiten für Rüstvorgänge	24
<b>C. Zur Problematik der Implementierung von Optimallösungen</b>	<b>30</b>

## Paarweiser Auftragstausch und Rüstzeiten im klassischen Maschinenbelegungsproblem

von Prof. Dr. Ludwig Pack, Universität Konstanz

### A. Zur Lösung des klassischen Maschinenbelegungsproblems ohne Umrüstzeiten

Das Maschinenbelegungsproblem in seiner klassischen Form (auch Job Shop Scheduling Problem genannt) ist wie folgt definiert:

Ein Betrieb hat  $n$  Aufträge auszuführen. Diese  $n$  Aufträge ( $j=1,\dots,n$ ) durchlaufen alle  $m$  Maschinen ( $i=1,\dots,m$ ) in der gleichen Reihenfolge  $1,2,\dots,m$ , wobei jede Maschine nur einmal vorhanden ist und immer denselben Arbeitsgang ausführt. Umrüstzeiten werden darin also nicht berücksichtigt, was auch hier zunächst nicht geschieht.

Die Bearbeitungszeiten  $T_{ij}$  (= Bearbeitungszeit von Auftrag  $j$  auf Maschine  $i$ ) sind verschieden groß. Dies hat zur Folge, daß die Gesamtfertigungszeit aller  $n$  Aufträge von der Reihenfolge abhängig ist, in welcher die Aufträge in die Produktion gegeben werden. Das Ziel besteht im wesentlichen darin, Leerzeiten soweit möglich zu vermeiden. Leerzeiten entstehen dann, wenn entweder ein Auftrag  $j$ , nachdem er auf Maschine  $i-1$  fertig geworden ist, warten muß, bis Maschine  $i$  mit Auftrag  $j-1$  fertig geworden ist, oder eine Maschine  $i$ , nachdem sie Auftrag  $j-1$  fertig bearbeitet hat, warten muß, bis Auftrag  $j$  auf Maschine  $i-1$  fertig geworden ist.

Es wird also ein sehr einfacher Fall betrachtet, in dem die Maschinen von allen Aufträgen in gleicher Reihenfolge durchlaufen werden (identical routing). Lediglich das Überspringen einer Maschine  $i$  ist erlaubt;  $T_{ij}$  ist dann für Maschine  $i$  gleich Null. Ferner darf kein Auftrag einen anderen "überholen" (passing not permitted), was allerdings nur für mehr als drei Maschinen Konsequenzen hat<sup>1)</sup>. Die Bedingungen des klassischen Maschinenbelegungsproblems kommen jedoch in der Realität durchaus vor, z.B. im Fensterbau.

Selbst in seiner sehr einfachen klassischen Form nimmt das Maschinenbelegungsproblem mit steigender Auftragszahl  $n$  sehr schnell großen Umfang an, denn für  $n$  Aufträge gibt es  $n!$  mögliche Reihenfolgen<sup>2)</sup>. Infolgedessen überrascht es nicht, daß exakte Lösungen des Maschinenbelegungsproblems bis heute schwierig sind und deshalb vor allem heuristische Verfahren zu seiner Lösung entwickelt wurden.

<sup>1)</sup> Vgl. Müller-Merbach, H., Optimale Reihenfolgen, Berlin-Heidelberg-New York 1970, S. 178. Zum Maschinenbelegungsproblem vgl. auch Heinen, E., Industriebetriebslehre, Wiesbaden 1991, S. 568-578.

<sup>2)</sup> Für  $n=20$  sind das bereits  $2,4329 \cdot 10^{18}$  Möglichkeiten. Wenn ein Computer die Zielwerte aller dieser Möglichkeiten errechnen soll und pro Zielwert der elektrische Strom in diesem Computer nur  $3 \text{ cm} = 0,03 \text{ m}$  zurücklegen muß, dann braucht der Computer dazu immer noch

$$\frac{2,4329 \cdot 10^{18} \cdot 0,03 \text{ m}}{300.000.000 \text{ m / sec} \cdot 60 \text{ sec / min} \cdot 60 \text{ min / std} \cdot 24 \text{ std / Tag} \cdot 365 \text{ Tage / Jahr}} = 7,715 \text{ Jahre}$$

Ist die Maschinenfolge für einen Auftrag nicht vorgegeben sondern völlig frei wählbar (was jedoch unrealistisch ist), dann ist für  $m$  Maschinen die Zahl der möglichen Reihenfolgen sogar  $(n!)^m$ .

## I. Allgemeine Darstellung des Verfahrens des paarweisen Auftragstausches

### 1. Die verwandten Begriffe und Symbole

$i=1,\dots,m$  sind die vorhandenen Maschinen;

$j=1,\dots,n$  sind die zu bearbeitenden Aufträge;

$p_j$  (mit  $j=1,\dots,n$ ) gibt im klassischen Maschinenbelegungsproblem an, daß Auftrag  $j$  auf allen Maschinen als  $j$ -ter Auftrag bearbeitet wird;  $p_1=3$  heißt z.B., daß Auftrag 3 als erster gefertigt wird;

$T_{ij}$  [ZE] ist die Bearbeitungsdauer von Auftrag  $j$  auf Maschine  $i$ ;

$E_{ip_j}$  ist die Zeit, welche vergeht, bis Auftrag  $p_j$  auf Maschine  $i$  fertig geworden ist; dabei gilt

$$(1) \quad E_{ip_j} = \text{Max} \{E_{i-1,p_j}; E_{i,p_{j-1}}\} + T_{ip_j}$$

( mit  $E_{i-1,p_j}=0$  für  $i-1=0$  und  $E_{i,p_{j-1}}=0$  für  $p_{j-1}=0$  )

### 2. Allgemeine Darstellung der Vorgehensweise

Gesucht ist die kleinstmögliche Gesamtfertigungszeit  $E_{mp_n}$ , in welcher der als letzter bearbeitete Auftrag  $p_n$  auf der immer als letzter zum Einsatz kommenden Maschine  $m$  fertig geworden ist:

$$(2) \quad E_{mp_n} = \text{Max} \{E_{m-1,p_n}; E_{m,p_{n-1}}\} + T_{mp_n}$$

Das anstehende Problem der Minimierung von  $E_{mp_n}$  resultiert daraus, daß immer dann, wenn  $E_{i-1,p_j}$  und  $E_{i,p_{j-1}}$  in Gleichung (1) nicht gleich groß sind, Leerzeiten entstehen. Ihr Auftreten kann dazu führen, daß die  $n$  Aufträge nicht in der theoretisch minimal möglichen Zeit durchgeführt werden können.

Das beschriebene Problem der Bestimmung der Auftragsfolge, für welche die Gesamtfertigungszeit aller Aufträge ein Minimum wird, erfolgt heute vielfach unter Verwendung der gemischt-ganzzahligen linearen Programmierung<sup>3)</sup>, mit Hilfe von neuronalen Netzen<sup>4)</sup> oder

<sup>3)</sup> Srikar, B.N., Ghosh, S., „A MILP model for the n-job, m-stage flowshop with sequence dependent set up times“, in: International Journal of Production Research (1986), Nr. 24, S. 1459-1474.

mit Hilfe von genetischen Algorithmen<sup>5)</sup>. Da hier nicht methodische Verfahren sondern problembezogene Sachverhalte im Vordergrund stehen, wird im Folgenden ein möglichst einfaches Verfahren angewandt, und zwar das Verfahren des paarweisen Auftragstausches. Dabei wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß jede Permutation der n Aufträge eine Lösung des Maschinenbelegungsproblems darstellt. Dieses Verfahren hat der Verfasser bereits 1963 angewandt, damals zur Lösung des sogenannten Layout-Problems<sup>6)</sup>. Der paarweise Auftragstausch ist ein heuristisches Verfahren, das relativ schnell gute Lösungen liefert, allerdings (wie alle heuristischen Verfahren) nicht die Erreichung des absoluten Optimums garantiert. Praktiker ziehen trotzdem häufig heuristische Verfahren vor, weil sie schnell eine Kostensenkung erlauben, ohne daß lange auf die Bestimmung und den Beweis eines absoluten Optimums gewartet werden muß. Bei der Anwendung des Verfahrens der paarweisen Vertauschung auf das Layout-Problem war es z.B. so, daß sehr schnell eine Einsparung von 20 % gegenüber der bisherigen Situation in Aussicht gestellt werden konnte. Es war also sinnvoll, die heuristisch gefundene Lösung sofort zu realisieren und nicht - u.U. noch Jahre - auf die Berechnung des absoluten Optimums zu warten. Diese hätte allenfalls eine weitere Kostensenkung um 5 % pro Jahr gebracht; dafür hätte man jedoch bis zu ihrer Ermittlung pro Jahr auf 20 % Kostenersparnis verzichten müssen.

Das Problem der optimalen Maschinenbelegung ist in seiner logischen Struktur dem Traveling-Salesman-Problem sehr ähnlich. Deshalb gibt es noch einen weiteren Grund dafür, hier mit dem paarweisen Auftragstausch zu arbeiten. Denn im Journal of Computational Physics sind 1990 und 1993 zwei wichtige Aufsätze von Mitarbeitern der IBM Germany, Heidelberg Scientific Center erschienen, die bisher in der deutschen betriebswirtschaftlichen Literatur nicht beachtet worden sind<sup>7)</sup>.

So dauerte es z.B. bis 1987, ehe mit ganzzahliger Programmierung die Optimallösung des symmetrischen Rundreiseproblems durch 532 amerikanische Städte gefunden wurde<sup>8)</sup>. Dies

---

4) Kurbel, K., Maschinenbelegungsplanung auf Basis neuronaler Netze - ein Vergleich mit konventionellen Verfahren, in: Betriebswirtschaftslehre und Unternehmensforschung, Festschrift für Ludwig Pack zum 65. Geburtstag, herausg. von H. Wagner, Wiesbaden 1994, S. 53-73.

5) Davis, L., „Job shop scheduling with genetic algorithms“, Proc. of 1st Int. Conference on Genetic Algorithms, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, S. 136-140.

6) Vgl. L. Pack, Raumzuordnung und Raumform von Büro- und Fabrikgebäuden“, in: Heft 170 der Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Köln-Opladen 1967, S. 45 - 64. Vgl. auch die Kurzbeschreibung dieses Verfahrens in „Umschau in Wissenschaft und Technik“, 1968, S. 150f.

7) E. Dueck, T. Scheuer „Threshold Accepting: A General Purpose Optimization Algorithm Appearing Superior to Simulated Annealing“, in: Journal of Computational Physics 90 (1990), S. 161-175; G. Dueck, T. Scheuer, H.-M. Wallmeier „Toleranzschwelle und Sintflut: Neue Ideen zur Optimierung“, in: Spektrum der Wissenschaft, März 1993, S. 42 - 50; G. Dueck, „New Optimization Heuristics - The Great Deluge Algorithm and the Record-to-Record Travel“, in: Journal of Computational Physics 104 (1993), S. 86-92. In den genannten Publikationen konnte nachgewiesen werden, daß paarweiser Tausch für Größenordnungen, die in praktischen Fragestellungen vorkommen, gegenüber den zuvor genannten Optimierungsverfahren Stärken aufweist, die bisher nicht gesehen worden sind.

8) M. Padberg and G. Rinaldi, Operations Research Letters, 6 ,1, 1987, S. 1-7.

trotz bester Hardwareausstattung. Dabei brauchte man unter anderem 141.246 Null-Eins-Variablen. „The initial LP has 532 rows and 1.278 columns.“<sup>9)</sup> „We used a VAX 11/780 and a Micro VAX II to calculate the optimal tour. The run that produced the [branch and cut] tree of Figure 3 took 60 hours of CPU time of which the heuristic consumed 4 hours.“<sup>10)</sup>

Dueck und Scheuer<sup>11)</sup> erzielten mit dem auf paarweiser Vertauschung basierenden „Threshold Accepting“ Algorithmus ähnlich gute Ergebnisse wie Padberg und Rinaldi, jedoch mit einer Rechenzeit von 14,8 Sekunden und weniger pro Tour, was selbst dann, wenn 100 Touren berechnet und die besten gewählt werden, maximal 10 % der Zeit ist, welche Padberg und Rinaldi allein für ihre Heuristik brauchten<sup>12)</sup>. Noch niedrigere Rechenzeiten berichtet Dueck mit dem weiter verbesserten, aber ebenfalls paarweise Vertauschung benutzenden Great Deluge Algorithm<sup>13)</sup>. Er schließt mit der Feststellung: „In all these studies we were able to achieve better results than concurrent methods. We could achieve excellent solutions in large problems where the classical method or program packages have size problems (CPU time or storage).“<sup>14)</sup>

Dueck, Scheuer und Wallmeier begründen die Leistungsfähigkeit des Verfahrens mit paarweiser Vertauschung, u.a. wie folgt: „Vielleicht haben die großen Probleme auch Lösungslandschaften, die wie die Wellenoberfläche eines Ozeans aussehen, wenn der schlagartig einfrieren würde ... Wir haben den Eindruck, daß die Optimierungsprobleme der Praxis typischerweise zu so regelmäßigen Strukturen tendieren.“<sup>15)</sup>

Aus den genannten Gründen erscheint es angebracht, sich in der Betriebswirtschaftslehre mit den Grundlagen der Optimierung durch paarweise Vertauschung von Aufträgen zur Bestimmung der optimalen Maschinenbelegung zu beschäftigen.

Jede Permutation der  $n$  Aufträge stellt wie bereits gesagt wurde, eine Lösung des Maschinenbelegungsproblems dar. Dieser Sachverhalt legt es nahe, zur Bestimmung einer möglichst guten Auftragsfolge wie folgt vorzugehen:

1. Man geht von einer möglichst einfachen Ausgangslösung aus, z.B. von derjenigen, in der  $p_j = j$  ist, d.h. Auftrag  $j$  als  $j$ -ter Auftrag in Produktion gegeben wird.

---

<sup>9)</sup> Padberg and Rinaldi, a.a.O., S.4.

<sup>10)</sup> ebenda, S. 5.

<sup>11)</sup> G. Dueck, T. Scheuer und H.-M. Wallmeier, a.a.O., S. 48.

<sup>12)</sup> Dueck und Scheuer a.a.O., S. 171.

<sup>13)</sup> Dueck, a.a.O., S. 91.

<sup>14)</sup> Dueck, a.a.O., S. 92; Hervorhebung L.P.

<sup>15)</sup> G. Dueck, T. Scheuer und H.-M. Wallmeier, „Toleranzschwelle und Sintflut: neue Ideen zur Optimierung“, in: „Spektrum der Wissenschaft“, März 1993, S. 48.

2. In der durch 1. festgelegten Reihenfolge vertauscht man zwei Aufträge  $r$  und  $s$  und stellt fest, wie dadurch die Gesamtfertigungszeit  $E_{mp_n}$  verändert wird. Diese Änderung sei für die  $q$ -te Iteration mit  $D_q^{rs}$  bezeichnet, wobei

$$(3) \quad D_q^{rs} = E_{mp_n}^{sr} - E_{mp_n}^{rs}$$

Durch diesen Tausch wird die sehr einfache Ausgangslösung verlassen und nicht mehr generell Auftrag  $j$  als  $j$ -ter Auftrag in Produktion gegeben, was durch  $p_j$  berücksichtigt wird.

3. Für das weitere Vorgehen gibt es zwei Möglichkeiten:
- Man errechnet für alle möglichen paarweisen Vertauschungen von Aufträgen für  $1 \leq r \leq n-1$  und  $r < s \leq n$  die entsprechenden Werte von  $D_q^{rs}$ <sup>16)</sup>. Als Grundlage der weiteren Rechnung verwendet man denjenigen Tausch von  $r$  und  $s$ , der die größte Zielwertverbesserung bringt.
  - Sobald zwei Aufträge  $r$  und  $s$  gefunden sind, deren paarweiser Tausch die Zielgröße  $E_{mp_n}$  verringert, wird dieser Tausch durchgeführt und zur Grundlage der weiteren Rechnung genommen.
4. Ausgehend von der neuen Reihenfolge, die sich nach Durchführung des unter 3. beschriebenen paarweisen Tausches ergibt, führt man erneut die Schritte 2. und 3. durch.
5. Der durch 2. bis 4. beschriebene Vertauschungsprozeß wird solange fortgesetzt, bis weitere paarweise Vertauschungen keine Zielwertverbesserung mehr bringen, d.h. bis alle  $D_q^{rs}$  größer oder gleich Null sind. Die Reihenfolge, für welche diese Situation eintritt, ist beim gegebenen Stand des Verfahrens die optimale. Da es sich um ein heuristisches Verfahren handelt, kann nicht bewiesen werden, ob es sich um das absolute oder nur um ein relatives Optimum handelt. Um dem absoluten Optimum näher zu kommen, kann man, wenn alle  $D_q^{rs} \geq 0$  sind, auch Vertauschungen für solche  $r$  und  $s$  durchführen, für die  $D_q^{rs} = 0$  oder sogar positiv ist. Sie verbessern zwar den momentanen Zielwert nicht, gewähren aber unter Umständen den Einstieg in bessere Vertauschungsmöglichkeiten und eröffnen dadurch evtl. die Verminderung des Zielwertes in späteren Iterationsschritten.

Die Daten, welche ein Maschinenbelegungsproblem definieren, und ihre Behandlung im Rahmen des zuvor beschriebenen Verfahrens lassen sich für die Ausgangslösung, in der  $p_j=j$  gelten möge, wie folgt beschreiben:

<sup>16)</sup> Weil es keinen Unterschied macht, ob  $r$  mit  $s$  oder  $s$  mit  $r$  getauscht wird, kann mit der Bedingung  $r < s$  gearbeitet werden.

Die Bearbeitungszeiten  $T_{ip_j}$  werden am besten in Form einer Matrix dargestellt. Für die Berechnung von  $E_{mp_n}$  verwendet man zweckmäßigerweise eine Tabelle. Matrix und Tabelle sind in allgemeiner Form als Tabelle 1 wiedergegeben. Ihre Handhabung ergibt sich in Verbindung mit dem nachfolgenden Zahlenbeispiel.

Dabei bedeutet

$T_{ip_j}$  die Bearbeitungszeit des als j-ten in Produktion gegebenen Auftrages  $p_j$  auf Maschine  $i$ .

Im unteren Teil von Tabelle 1 können zunächst nur die ersten Felder explizit ausgefüllt werden. Jedes Feld enthält in der Ausgangslösung für ein beliebiges  $i$  und ein beliebiges  $j$  folgende Werte:

$E_{i-1,p_j}$	$\text{Max} \{E_{i-1,p_j}; E_{i,p_{j-1}}\}$
$E_{i,p_{j-1}}$	$+ T_{ip_j}$

Ma- sch i	j p <sub>i</sub>	Bearbeitungsdauer $T_{ip_j}$ des Auftrages $p_j$ auf Maschine $i$ in der Ausgangslösung für					
		1 p <sub>1</sub>	2 p <sub>2</sub>	3 p <sub>3</sub>	4 p <sub>4</sub>	5 p <sub>5</sub>	6 p <sub>6</sub>
1		$T_{1p_1}$	$T_{1p_2}$	$T_{1p_3}$	$T_{1p_4}$	$T_{1p_5}$	$T_{1p_6}$
2		$T_{2p_1}$	$T_{2p_2}$	$T_{2p_3}$	$T_{2p_4}$	$T_{2p_5}$	$T_{2p_6}$
3		$T_{3p_1}$	$T_{3p_2}$	$T_{3p_3}$	$T_{3p_4}$	$T_{3p_5}$	$T_{3p_6}$

Masch. i	Zeit $E_{ip_j}$ , nach der (in der Ausgangslösung mit $p_j=j$ ) auf Maschine $i$ der Auftrag $j$ fertig wird, für $j$ gleich						
	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0 + $T_{1p_1}$	0 + $T_{1p_1}$ + $T_{1p_2}$	$T_{1p_1}$			
2	0	$T_{1p_1}$ + $T_{2p_1}$	$T_{1p_1}$ + $T_{1p_2}$ + $T_{2p_1}$	$T_{1p_1}$ + $T_{2p_1}$			$E_{m-1,p_n}$
3	0	$T_{1p_1}$ + $T_{2p_1}$	$T_{1p_1}$ + $T_{2p_1}$ + $T_{3p_1}$	$T_{1p_1}$ + $T_{2p_1}$ + $T_{3p_1}$		$E_{m,p_{n-1}}$	$E_{m-1,p_n}$ + $E_{mp_n}$

Tabelle 1: Zeitenmatrix und Berechnungstabelle von  $E_{mp_n}$

Die beiden Eintragungen im linken Teil des Rechtecks in Tabelle 1 ganz oben sind dabei nicht unbedingt erforderlich und dienen nur dem klareren Aufzeigen der Zusammenhänge;  $E_{i-1,p_j}$  steht nämlich immer im Feld  $(i-1,p_j)$  über dem betrachteten Feld  $(i,p_j)$  während  $E_{i,p_{j-1}}$  in dem Feld  $(i,p_{j-1})$  links neben dem betrachteten Feld  $(i,p_j)$  eingetragen ist. Der grundlegende Zusammenhang kann schematisch deshalb auch wie folgt dargestellt werden, wobei das doppelt eingerahmte Feld rechts unten dem gesamten Feld in Tabelle 1 ganz oben entspricht:

	$E_{i-1,p_j}$
$E_{i,p_{j-1}}$	$E_{i,p_j} = \text{Max} \{ E_{i-1,p_j} ; E_{i,p_{j-1}} \}$ $+ T_{ip_j}$

In der Spalte für  $j=0$  und in der Zeile für  $i=0$  sind Nullen einzusetzen, und zwar als Ausgangswerte der Rekursionsbeziehung für  $j-1=0$  und  $i-1=0$ .

### 3. Bestimmung eines theoretisch optimalen Zielwertes

Da es sich bei dem beschriebenen Verfahren um ein heuristisches handelt, weiß man am Ende der Rechnung weder ob man das absolute Optimum gefunden hat noch wie weit man evtl. davon entfernt ist. Deshalb empfiehlt es sich, ein theoretisches Optimum zu berechnen und als Vergleichswert zu benutzen. Beim vorliegenden Problem kann man dazu von folgenden Überlegungen bezüglich der evtl. auftretenden Leerzeiten ausgehen (vgl. hierzu auch Abb. 1 auf Seite 10):

1. Eine erste Gruppe von Leerzeiten sind solche, welche auf den einzelnen Maschinen ab der Aufnahme und bis zum Ende der Fertigung auftreten können. Der niedrigste Wert, den diese Leerzeiten auf einer Maschine annehmen können, ist Null. Folglich kann man zur Ermittlung der theoretischen Mindestzeit diese Leerzeiten auf den einzelnen Maschinen gleich Null setzen, d.h. so tun, als ob alle Aufträge sich auf einer Maschine nahtlos aneinanderfügen ließen. Dann bleibt natürlich nur die Summe der reinen Fertigungszeiten übrig, für deren Ermittlung die Auftragsreihenfolge keine Rolle spielt, also z.B.  $p_j=j$  gesetzt werden kann, was auf Maschine  $i$  als Gesamtfertigungszeit ( $GT_i$ ) ergibt

$$GT_i = \sum_{j=1}^n T_{ij}.$$

Diese reinen Fertigungszeiten sind in der Regel auf den einzelnen Maschinen verschieden lang, was für die theoretisch optimale Gesamtfertigungszeit Konsequenzen hat.

2. Eine zweite Gruppe von Leerzeiten entsteht dadurch, daß im klassischen Maschinenbelegungsproblem zu Beginn der Produktion die Maschine  $l$  ( $\in i$ ) erst dann mit der Produktion beginnen kann, wenn der als erster bearbeitete Auftrag  $p_1$  jeweils auf der bzw. den vorausgehenden Maschine(n) 1 bis  $l-1$  bearbeitet worden ist (vgl. Abb. 1). Diese

Leerzeit wird Anfangsleerzeit (AT) genannt. Für Maschine  $l$  ist sie durch die nachfolgende Formel für  $AT_l$  definiert. Will man die gesamte Anfangsleerzeit minimieren, ist mit dem Auftrag  $j$  zu beginnen, für den die folgende Gleichung AT gilt, für den also die Summe seiner Produktionszeiten auf den Maschinen 1 bis  $m-1$  ein Minimum wird. Der Auftrag, für welchen sich dieses Minimum ergibt, sei  $p_1$ , d.h. der Auftrag, mit dem die Fertigung beginnt.

$$AT_l = \min_{j=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^{l-1} T_{ij} \right\}, \quad AT = \min_{j=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} T_{ij} \right\}$$

3. Eine dritte Gruppe von Leerzeiten entsteht, weil die Maschinen 1 bis  $l$ , nachdem sie den als letzten bearbeiteten Auftrag  $p_n$  abgeschlossen haben, leer stehen bis dieser letzte Auftrag auch auf der letzten Maschine  $m$  bearbeitet worden ist (vgl. auch hierzu Abb. 1). Die Mindestdauer<sup>17</sup> dieser Leerzeit wird Endleerzeit (ET) genannt. Für Maschine  $l$  ist sie durch die nachfolgende Formel für  $ET_l$  definiert. Zur Minimierung dieser Endleerzeit ist der Auftrag  $j$  als letzter in Produktion zu geben, für den die folgende Gleichung ET gilt, für den also die Summe seiner Produktionszeiten auf den Maschinen 2 bis  $m$  ein Minimum wird. Der Auftrag, für welchen sich dieses Minimum ergibt, sei  $p_n$ , d.h. Auftrag  $p_n$  wird als letzter bearbeitet.

$$ET_l = \min_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq p_1}} \left\{ \sum_{i=l+1}^m T_{ij} \right\}, \quad ET = \min_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq p_1}} \left\{ \sum_{i=2}^m T_{ij} \right\}$$

Ein theoretisch optimaler Zielwert kann als die Summe der drei vorgenannten Zeiten bestimmt werden. Diese Summe ist jedoch in der Regel für alle Maschinen verschieden. Da man im voraus nicht weiß, für welche Maschine  $l$  sich die größte Summe aus vorausgehender Anfangsleerzeit, reiner Fertigungszeit und nachfolgender Endleerzeit ergeben wird, empfiehlt es sich dabei, jede Maschine einzeln zu betrachten (vgl. dazu das Zahlenbeispiel auf S. 10 f.). Für sehr viele Maschinen kann die Berechnung jedoch auf die Maschinen mit den größten Gesamtfertigungszeiten beschränkt werden.

Die theoretisch minimale Gesamtfertigungszeit der  $n$  Aufträge ist dann definiert durch die Maschine  $l \in \{1, \dots, m\}$ , für welche

- ihre Leerzeit vor Aufnahme der Produktion plus
- ihre reine Fertigungszeit plus
- ihre Leerzeit nach Ende ihrer Produktion

ein Maximum wird. Zur Ermittlung der theoretischen Mindestzeit  $E_{mp_n}^{\text{theor}}$  ist also zu bestimmen

$$(4) \quad E_{mp_n}^{\text{theor}} = \max_{l=1, \dots, m} \left\{ \sum_{i=1}^{l-1} T_{ip_1} + \sum_{j=1}^n T_{ij} + \sum_{i=l+1}^m T_{ip_n} \right\}$$

<sup>17</sup> Auf die „Mindestdauer“ muß deshalb abgestellt werden, weil die tatsächliche Dauer der Endleerzeit nicht nur von den Bearbeitungszeiten  $T_{ij}$  abhängig ist, sondern auch von den Wartezeiten, die dadurch entstehen, daß Auftrag  $p_n$  vor einer Maschine warten muß, bis diese Maschine frei wird (vgl. Abb. 1, wo Auftrag 6 vor Maschine 2 acht Zeiteinheiten warten muß bis Maschine 2 mit den Aufträgen 4 und 5 fertig ist).

## II. Darstellung des Verfahrens anhand eines Zahlenbeispiels

Im folgenden wird ein einfaches Zahlenbeispiel verwandt, das drei Maschinen und sechs Aufträge enthält. Die Bearbeitungszeiten sind im oberen Teil der Tabelle 2, die Berechnung der Gesamtfertigungszeit  $E_{mp_n} = E_{3p_6}$  ist im unteren Teil von Tabelle 2 für den Fall wiedergegeben, daß  $p_j=j$ , die Auftragsreihenfolge also gleich der Auftragsnumerierung ist (vgl. dazu Abb. 1 auf der nächsten Seite und die Erläuterungen dazu). Für  $E_{mp_n}$  erhält man bei dieser Ausgangslösung, wie aus Tabelle 2 rechts unten ersichtlich, 31 Zeiteinheiten.

Ma- schine i	$p_j$	Bearbeitungsdauer $T_{ij}$ des Auftrages j auf Maschine i für j gleich					
	= j	1	2	3	4	5	6
1		2	5	4	4	1	1
2		3	3	6	4	4	1
3		6	2	4	2	1	5

Masch.i	Zeit $E_{ij}$ , nach der auf Maschine i der Auftrag j fertig wird, für j gleich										
	0	1	2	3	4	5	6				
0		0	0	0	0	0	0				
1	0	0	2	7	11	15	16	17			
2	0	2	5	10	17	21	25	26			
3	0	5	10	13	21	23	26	31			

Tabelle 2: Berechnung des Zielwertes der Ausgangslösung, in der  $j=p_j$

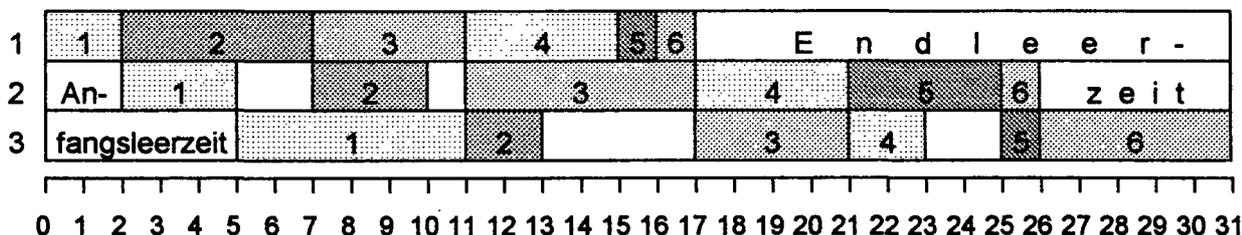
Aufschlußreich ist auch die Darstellung der Ausgangslösung in Form eines Gantt-Tableaus bzw. Balkendiagrammes (vgl. Abb. 1 auf der nächsten Seite). Darin wird über der Zeitachse (hier von 0 bis 31) für jede Maschine eine Zeile ("Balken") vorgesehen, in welcher die Inanspruchnahme der Maschinen durch die einzelnen Aufträge eingezeichnet wird.

Aus Abb. 1 geht hervor, daß die Differenz zwischen  $E_{mp_n}$  und  $E_{mp_n}^{theor}$  damit zusammenhängt, daß Leerzeiten auftreten (weiße Felder). Diese Leerzeiten gilt es zur Verbesserung der Lösung zu verringern.

Aus Abb. 1 geht ferner hervor, daß es ohne Schwierigkeiten möglich ist, zu Beginn der Zeitachse auch Aufträge zu berücksichtigen, die auf Maschine 1 oder auf den Maschinen 1 und 2 bereits bearbeitet sind, was für eine laufende Produktion typisch ist. Dazu genügt es, die

Bearbeitungszeiten  $T_{ip}$  dieser Aufträge für Maschinen, auf denen sie schon bearbeitet sind, gleich Null zu setzen.

Maschine



**Abbildung 1:** Gantt-Tableau der Ausgangslösung

Erläuterung zu Abbildung 1:

Maschine 1 braucht (annahmegemäß) nie zu warten.

Maschine 2 wartet von 5, bis 7 und von 10 bis 11 darauf, daß die Aufträge 2 bzw. 3 auf Maschine 1 fertig werden.

Maschine 3 wartet von 13 bis 17 und von 23 bis 25 darauf, daß die Aufträge 3 bzw. 5 auf Maschine 2 fertig werden.

Auftrag 1 braucht (annahmegemäß) nie darauf zu warten, daß eine Maschine frei wird

Auftrag 2 wartet von 10 bis 11 darauf, daß Maschine 3 frei wird

Auftrag 3 braucht nie darauf zu warten, daß eine Maschine frei wird

Auftrag 4 wartet von 15 bis 17 darauf, daß Maschine 2 frei wird

Auftrag 5 wartet von 16 bis 21 darauf, daß Maschine 2 frei wird

Auftrag 6 wartet von 17 bis 25 darauf, daß Maschine 2 frei wird

Für die weitere Vorgehensweise hilft es, den Wert von  $E_{mpn}^{theor}$  zu kennen, der wie folgt ermittelt werden kann:

Für die reinen Fertigungszeiten erhält man

$$\sum_{j=1}^n T_{1j} = 2 + 5 + 4 + 4 + 1 + 1 = 17 \text{ für Maschine } i=1,$$

$$\sum_{j=1}^n T_{2j} = 3 + 3 + 6 + 4 + 4 + 1 = 21 \text{ für Maschine } i=2 \text{ und}$$

$$\sum_{j=1}^n T_{3j} = 6 + 2 + 4 + 2 + 1 + 5 = 20 \text{ für Maschine } i=3.$$

Da drei Maschinen sehr wenig sind, werden im Folgenden bei der Bestimmung von  $p_1$  und  $p_n$  alle Maschinen berücksichtigt und nicht nur die Maschinen mit den längsten reinen Fertigungszeiten.

Im Rahmen der Ermittlung von  $E_{mp_n}^{theor}$  kann  $p_1$  aus der für AT angegebenen Formel bestimmt werden:

$$AT = \min_{j=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^{3-1} T_{ij} \right\} = \min \{2+3; 5+3; 4+6; 1+4; 1+1\} = 2 \text{ für } j=6.$$

Für die weiteren Berechnungen wird also  $p_1$  gleich 6 gesetzt und so gerechnet, als ob mit Auftrag 6 begonnen würde.

Analog bestimmt man  $p_n$  aus der für ET angegebenen Formel:

$$ET = \min_{\substack{j=1, \dots, n \\ j \neq 6}} \left\{ \sum_{i=2}^3 T_{ij} \right\} = \min \{3+6, 3+2; 6+4; 4+2; 4+1\} = 5 \text{ für } j=2 \text{ oder } j=5.$$

Gewählt wird  $j=5$  und es wird so gerechnet, als ob die Produktion mit Auftrag 5 beendet würde.

Aufgrund dieser Vorüberlegung ergibt sich folgende Tabelle für die Bestimmung von  $E_{mp_n}^{theor}$ :

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
l	$\sum_{j=1}^n T_{lj}$	$AT_l$ für $p_1=6$	$ET_l$ für $p_n=5$	(2) + (3) + (4)
1	17	0	5	22
2	21	1	1	$23 = \text{Max} = E_{mp_n}^{theor}$
3	20	2	0	22

Bei den weiteren Überlegungen kann also mit  $E_{mp_n}^{theor} = 23$  als theoretischer Zielwert gearbeitet werden. Daß man für  $AT_2$  und  $AT_3$  den Wert  $p_1=6$  erhält, ist Zufall und durch die Zahlen des Beispiels bedingt; die Werte von  $p_1$  könnten für  $l=2$  und  $l=3$  auch verschieden sein. Analoges gilt für  $ET_1$  und  $ET_2$  bezüglich  $p_n=5$ .

Nun liegt es zwar nahe, in der Ausgangslösung die für  $p_1$  und  $p_n$  errechneten Werte zu berücksichtigen. Das führt jedoch nicht notwendigerweise am schnellsten zum Ziel, vor allem nicht bei großem  $n$ ; denn es ist keineswegs sicher, daß in der schließlich besten Reihenfolge die bei der Berechnung von  $E_{mp_n}^{theor}$  ermittelten Werte von  $p_1$  bzw.  $p_n$  tatsächlich als erster bzw. letzter Auftrag vorkommen. Im folgenden wird der Einfachheit halber als Ausgangslösung diejenige beibehalten, in der die Aufträge in der Reihenfolge ihrer Numerierung in Produktion

gehen, zumal dies dazu führt, daß ein weiterer interessanter Sachverhalt aufgezeigt werden kann (vgl. S. 15 Mitte).

Ausgehend von der in Tabelle 2 wiedergegebenen Ausgangslösung können die durch paarweisen Auftragstausch sich ergebenden Werte von  $D_0^{rs}$  ermittelt werden; der Index 0 besagt dabei, daß es sich um Zielwertänderungen handelt, die sich dann ergeben, wenn die Ausgangslösung, die der 1. Iteration vorausgeht (also sozusagen die "nullte" Iteration darstellt), die Vergleichsgröße ist. Durch einen derartigen Tausch wird natürlich die nur für die Ausgangslösung geltende Bedingung  $p_i=j$  aufgehoben, was Tabelle 2 verändert.

Beispielhaft wird im folgenden die Berechnung von  $D_0^{13}$  und  $D_0^{56}$  gezeigt (vgl. Tabellen 3 und 4).  $D_0^{13}$  wird dabei D-Null-Eins-Drei gelesen; Analoges gilt für  $D_0^{rs}$  allgemein.

Masch. i \ p <sub>j</sub> j	Bearbeitungsdauer $T_{ip_j}$ des Auftrages $p_j$ auf Maschine i für						
	3	2	1	4	5	6	
1	4	5	2	4	1	1	
2	6	3	3	4	4	1	
3	4	2	6	2	1	5	

Masch. i \ p <sub>j</sub> j	Zeit $E_{ip_j}$ , nach der auf Maschine i der Auftrag $p_j$ fertig wird, für						
	0	3	2	1	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0+4 =4	4+5 =9	9+2 =11	11+4 =15	15+1 =16	16+1 =17
2	0	4+6 =10	10+3 =13	13+3 =16	16+4 =20	20+4 =24	24+1 =25
3	0	10+4 =14	14+2 =16	16+6 =22	22+2 =24	24+1 =25	25+5 =30

**Tabelle 3:** Berechnung des Zielwertes  $E_{mp_n}$ , wenn von der Ausgangslösung (vgl. Tabelle 2) ausgehend die Aufträge  $r=1$  und  $s=3$  ausgetauscht werden.

Aus Tabelle 3 ergibt sich ein Zielwert von 30; folglich gilt gemäß (3)

$$D_0^{13} = E_{mp_n}^{31} - E_{mp_n}^{13} = 30 - 31 = -1.$$

Tabelle 4 dient der Ermittlung von  $D_0^{56}$ , d.h. der Berechnung der Zielwertänderung, die sich ergibt, wenn auf Basis der Ausgangslösung die Aufträge 5 und 6 in der Reihenfolge vertauscht

werden. Für den Ansatz der Bearbeitungszeiten  $T_{ip_j}$  ist dabei von Tabelle 2 und nicht von Tabelle 3 auszugehen.

		Bearbeitungszeit $T_{ip_j}$ des Auftrages $p_j$					
		$p_j$	1	2	3	4	6
$i$	$j$	1	2	3	4	5	6
1		2	5	4	4	1	1
2		3	3	6	4	1	4
3		6	2	4	2	5	1

		Zeit $E_{ip_j}$ , nach der auf Maschine $i$ Auftrag $p_j$ fertig ist					
		$p_j$	1	2	3	4	6
$i$	$j$	1	2	3	4	5	6
1		2	7	11	15	16	17
2		5	10	17	21	22	26
3		11	13	21	23	28	29

**Tabelle 4:** Berechnung des Zielwertes  $E_{mp_n}$ , wenn von der Ausgangslösung in Tabelle 2 ausgehend die Aufträge  $r=5$  und  $s=6$  ausgetauscht werden.

Tabelle 4 entspricht in ihrem Aufbau der Tabelle 2; es sind darin nur die doppelten Eintragungen von  $E_{i-1,p_j}$  und  $E_{i,p_{j-1}}$  sowie die Werte von  $E_{0j}$  und von  $E_{i0}$  weggelassen worden (vgl. die diesbezüglichen Hinweise zu Tabelle 1). Aus Tabelle 4 geht auch folgendes hervor: Für die Spalten bis einschließlich  $r-1 = 4$  stimmt Tabelle 4 mit der ihr in der Optimierungsrechnung unmittelbar vorausgehenden Tabelle 2 überein. Zur Ermittlung von  $D_0^{rs}$  brauchen also nur die Werte ab Spalte  $r$  in der Tabelle 2 neu berechnet zu werden.

Aus Tabelle 4 folgt gemäß (3):  $D_0^{56} = 29 - 31 = -2$ .

Die folgende Tabelle 5 gibt eine Übersicht über alle Zielwertänderungen  $D_0^{rs}$ , die sich durch paarweisen Auftragstausch ergeben, wenn man von der Ausgangslösung in Tabelle 2 ausgeht.

		$s$				
		2	3	4	5	6
$r$						
1		0	-1	4	3	2
2			-2	-2	-2	-5
3				0	2	-1
4					1	-2
5						-2

**Tabelle 5:** Werte für  $D_0^{rs}$

Wie aus Tabelle 5 ersichtlich, ergibt sich die größte Zielwertverbesserung von 31 um 5 auf 26, wenn  $r=2$  und  $s=6$  ausgetauscht werden. Tabelle 6 zeigt die Zielwertberechnung und ist die Tabelle, welche nach Durchführung des Tausches von  $r=2$  und  $s=6$  nunmehr an die Stelle der Ausgangslösung, also anstelle von Tabelle 2 tritt.

		Bearbeitungsdauer $T_{ip_j}$ des Auftrages $p_j$						
		$p_j$	1	6	3	4	5	2
$i$	$j$	1	2	3	4	5	6	
1		2	1	4	4	1	5	
2		3	1	6	4	4	3	
3		6	5	4	2	1	2	

		Zeit $E_{ip_j}$ , nach der auf Maschine $i$ Auftrag $p_j$ fertig ist						
		$p_j$	1	6	3	4	5	2
$i$	$j$	1	2	3	4	5	6	
1		2	3	7	11	12	17	
2		5	6	13	17	21	24	
3		11	16	20	22	23	26	

**Tabelle 6:** Berechnung des Zielwertes für die auf Basis der Ausgangslösung beste Vertauschung mit  $r=2$  und  $s=6$

Werden von Tabelle 6 ausgehend wieder alle möglichen paarweisen Vertauschungen durchgeführt, erhält man als Zielwertänderungen der ersten Iteration  $D_1^{rs}$  folgende Werte:

		$s$	2	3	4	5	6
$r$	$j$	1	2	3	4	5	6
1		0	4	2	1	7	
2			0	2	2	5	
3				0	0	4	
4					0	0	
5						-1	

**Tabelle 7:** Werte für  $D_1^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-6-3-4-5-2 ausgehend)

Nach Tabelle 7 führt nur die Vertauschung von  $r=5$  und  $s=6$  zu einer Zielwertverbesserung von 26 um 1 auf 25. Führt man diese Vertauschung durch, erhält man als Grundlage der 2. Iteration die folgende Tabelle 8.

		Bearbeitungsdauer $T_{ip_j}$ des Auftrages $p_j$						
		$p_j$	1	6	3	4	2	5
$i$	$j$	1	2	3	4	5	6	
1		2	1	4	4	5	1	
2		3	1	6	4	3	4	
3		6	5	4	2	2	1	

		Zeit $E_{ip_j}$ , nach der auf Maschine $i$ Auftrag $p_j$ fertig ist						
		$p_j$	1	6	3	4	2	5
$i$	$j$	1	2	3	4	5	6	
1		2	3	7	11	16	17	
2		5	6	13	17	20	24	
3		11	16	20	22	24	25	

**Tabelle 8:** Berechnung des Zielwertes, wenn ausgehend von der durch Tabelle 6 beschriebenen ersten Verbesserung der Ausgangslösung die in Tabelle 6 an fünfter und sechster Stelle angeordneten Aufträge ausgetauscht werden, wenn also  $r=5$  und  $s=6$  sind (was einer Vertauschung der Aufträge 2 und 5 entspricht).

Berechnet man von Tabelle 8 ausgehend wieder alle Zielwertänderungen  $D_2^{rs}$ , erhält man dafür:

r \ s	2	3	4	5	6
1	0	5	3	5	3
2		1	3	4	4
3			0	2	2
4				0	1
5					1

Tabelle 9: Werte für  $D_2^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-6-3-4-2-5 ausgehend)

In Tabelle 9 kommen keine negativen Werte vor; d.h. daß von der erreichten Lösung ausgehend im Moment durch paarweises Vertauschen von Aufträgen keine weiteren Verbesserungen zu erzielen sind. Aus Tab. 9 geht aber auch hervor, daß es weitere Lösungen gibt, die gleich gut sind; sie ergeben sich durch diejenigen Vertauschungen, für die  $D_2^{rs}$  gleich Null ist, also für  $r=1$  und  $s=2$ , für  $r=3$  und  $s=4$  sowie für  $r=4$  und  $s=5$ . Da der erreichte Zielwert von 25 größer ist als der ermittelte theoretisch optimale Zielwert von 24 bzw. 23, empfiehlt es sich, die vorgeannten Vertauschungen durchzuführen. Dadurch wird zwar der Zielwert nicht verbessert, aber sie führen evtl. zu einer Lösung, von der ausgehend eine weitere Verbesserung möglich ist.

Führt man zunächst die Vertauschung für  $r=1$  und  $s=2$  durch, was zu der Auftragsfolge 6-1-3-4-2-5 führt, erhält man auch für  $D_3^{rs}$  nur Werte, die größer oder gleich Null sind, wobei  $D_3^{34}$  gleich Null ist. Deshalb wird als nächstes die Vertauschung von  $r=3$  und  $s=4$  vorgenommen, woraus die Auftragsfolge 6-1-4-3-2-5 folgt. Auch sie ergibt für  $D_4^{rs}$  nur Werte, die größer oder gleich Null sind, wobei darin  $D_4^{36}$  gleich Null ist. Deshalb wird nunmehr die Vertauschung  $r=3$  und  $s=6$  ausgeführt. Sie führt zu folgenden Werten für  $D_5^{rs}$ :

r \ s	2	3	4	5	6
1	0	2	5	7	7
2		-1	3	6	6
3			1	3	0
4				0	2
5					0

Tabelle 10: Werte für  $D_5^{rs}$  (von der Auftragsfolge 6-1-5-3-2-4 ausgehend)

Aus Tabelle 10 ergibt sich eine weitere Verbesserungsmöglichkeit des Zielwertes von 25 um 1 auf 24, wenn  $r=2$  und  $s=3$  vertauscht werden. Dies führt für  $D_6^{rs}$  zu Tabelle 11:

r \ s	2	3	4	5	6
1	1	1	8	8	8
2		1	3	4	2
3			2	5	4
4				1	3
5					0

Tabelle 11: Werte für  $D_6^{rs}$  (von der Auftragsfolge 6-5-1-3-2-4 ausgehend)

In Tabelle 11 ist noch ein einziger Wert gleich Null, nämlich  $r=5$  und  $s=6$ . Führt man sicherheitshalber auch noch diese Vertauschung aus, erhält man für  $D_7^{rs}$ :

r \ s	2	3	4	5	6
1	1	1	8	8	8
2		1	3	3	3
3			2	4	6
4				1	3
5					0

Tabelle 12: Werte für  $D_7^{rs}$  (von der Auftragsfolge 6-5-1-3-4-2 ausgehend)

Auch in Tabelle 12 kommt nur für  $r=5$  und  $s=6$  der Wert Null vor. Das besagt:

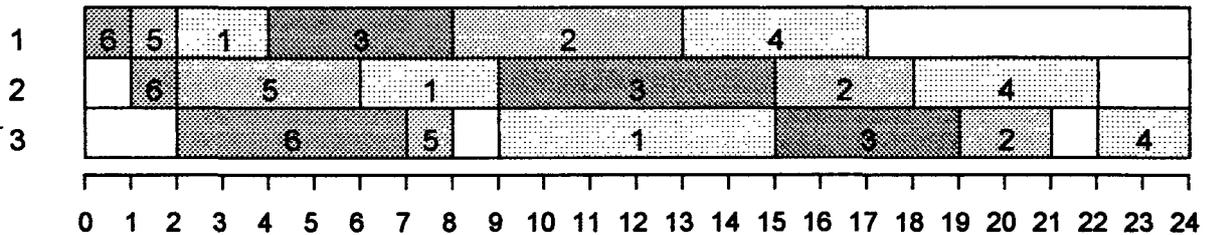
- Es gibt zwei gleich gute Auftragsfolgen, nämlich
  - 6-5-1-3-2-4 gemäß Tabelle 11 und
  - 6-5-1-3-4-2 gemäß Tabelle 12.
 Beide haben einen Zielwert von 24.
- Da alle anderen Werte in den Tabellen 11 und 12 größer als Null sind, kann man vermuten, daß es keine weiteren gleich guten<sup>18)</sup> oder gar besseren Lösungen gibt.

Um zu prüfen ob es sich lohnt, noch weitere paarweise Vertauschungen durchzuführen,<sup>19)</sup> kann man das Gantt-Tableau zeichnen, das zur besten bisher erreichten Lösung gehört; vgl. Abb. 2. Daraus geht hervor, daß es wahrscheinlich keine bessere Lösung gibt, weil für die Maschinen 1 und 2 von der Aufnahme bis zum Ende der Produktion keine Leerzeiten mehr auftreten.

<sup>18)</sup> Man kann, wie bereits gesagt, auch Vertauschungen vornehmen, für die  $D_q^{rs}$  größer als Null ist. Das verschlechtert zwar zunächst den Zielwert, kann aber zum Einstieg in Verbesserungsmöglichkeiten führen, welche größer sind als die zunächst eingetretene Verschlechterung. Für das „Traveling Salesman Problem“, das ebenfalls durch paarweisen Ortstausch gelöst werden kann, sind diesbezüglich, wie ebenfalls bereits gesagt, systematische Verfahren entwickelt worden, die auch auf das Maschinenbelegungsproblem übertragbar sind. Vgl. dazu die bereits genannten Arbeiten von Dueck, G.; Scheuer, T.; Wallmeier, H.-M., „Toleranzschwelle und Sintflut: Neue Ideen zur Optimierung“, in: Spektrum der Wissenschaft, März 1993, S. 42-50; Dueck, G., „New Optimization Heuristics - The Great Deluge Algorithm and the Record-to-Record Travel“, in: Journal of Computational Physics 104 (1993), S. 86-92; Dueck, G.; Scheuer, T., „Threshold Accepting: A General Purpose Optimization Algorithm Appearing Superior to Simulated Annealing“, in: Journal of Computational Physics 90 (1990), S. 161-175. Die Beschränkung der Vertauschungen auf solche, die den Zielwert verbessern, ist nämlich dem Vorgehen eines Bergsteigers vergleichbar, der auf den höchsten Berg will und dazu immer nur bergan geht: So gewinnt er zwar schnell an Höhe, läuft aber sehr stark Gefahr, auf einem niedrigen Hügel sitzenzubleiben, von dem er nicht mehr herunterkommt, obwohl es noch höhere Berge gibt.

<sup>19)</sup> In Wirklichkeit gibt es noch weitere gleich gute Lösungen, z.B. 1-5-2-3-6-4 und 1-5-2-3-4-6. Sie sind jedoch von den Lösungen gemäß den Tab. 11 und 12 ausgehend durch paarweisen Auftragstausch nur dann zu erreichen, wenn ein  $D_q^{rs}$  gewählt wird, das größer als Null ist und zu einer vorübergehenden Verschlechterung des Zielwertes führt. Weitere Reihenfolgen mit Zielwert 24 ergeben sich z.B. dann, wenn man als Ausgangslösung 6-1-3-4-5-2 benutzt, was teilweise der Reihenfolge entspricht, die aus  $E_{\min}^{\text{theor}}$  folgt.

## Maschine



**Abb. 2:** Gantt-Diagramm zur Lösung mit der Reihenfolge 6-5-1-3-2-4

Aus diesem Diagramm kann folgendes abgelesen werden:

Maschine 1 wartet (annahmegemäß) nie darauf, daß ein Auftrag fertig wird.

Maschine 2, welche die längste Fertigungszeit von 21 hat, weist während der Produktion keine Leerzeiten auf.

Maschine 3 wartet von 8 bis 9 darauf, daß Auftrag 1 auf Maschine 2 fertig wird und von 21 bis 22 darauf, daß Auftrag 4 auf Maschine 2 fertig wird.

Der als 1. bearbeitete Auftrag 6 braucht (annahmegemäß) nie darauf zu warten, daß eine Maschine frei wird

Der als 2. bearbeitete Auftrag 5 wartet von 6 bis 7 darauf, daß Maschine 3 frei wird

Der als 3. bearbeitete Auftrag 1 wartet von 4 bis 6 darauf, daß Maschine 2 frei wird

Der als 4. bearbeitete Auftrag 3 wartet von 8 bis 9 darauf, daß Maschine 2 frei wird

Der als 5. bearbeitete Auftrag 2 wartet von 13 bis 15 auf Maschine 2 und von 18 bis 19 auf Maschine 3

Der als 6. bearbeitete Auftrag 4 wartet von 17 bis 18 darauf, daß Maschine 2 frei wird

Berechnet man, bevor man eine Iteration ausführt, nicht - wie bisher geschehen - alle  $D_q^{rs}$ , sondern führt eine Iteration durch sobald ein negatives  $D_q^{rs}$  gefunden wurde, dann nimmt die Rechnung natürlich einen anderen Verlauf. Ob dadurch schlußendlich Zeit gespart wird, hängt davon ab, wie viele Iterationen durchgeführt werden müssen und wie viele  $D_q^{rs}$  pro Iteration weniger berechnet zu werden brauchen. Das kann im voraus nicht gesagt werden.

Im vorliegenden Falle nimmt die Rechnung dann folgenden Verlauf (vgl. Tabelle 5, S. 11): Von der Ausgangslösung gemäß Tabelle 2 ausgehend werden errechnet  $D_0^{12} = 0$  und  $D_0^{13} = -1$ . Daraufhin wird zur Verbesserung des Zielwertes von 31 um 1 auf 30 sofort die Vertauschung mit  $r=1$  und  $s=3$  durchgeführt und die 2. Iteration begonnen. Sie liefert für  $D_1^{rs}$  folgende Werte:

r \ s	2	3	4	5	6
1	3	1	1	1	0
2		0	1	2	0
3			2	5	1
4				1	0
5					0

**Tabelle 13:** Werte für  $D_1^{rs}$  bei sofortiger Durchführung eines die Lösung verbessernden Tausches (von der Auftragsfolge 3-2-1-4-5-6 ausgehend)

Aus Tabelle 13 geht hervor, daß beim erreichten Stand der Rechnung durch paarweisen Tausch keine weitere Verbesserung möglich ist. Da der erreichte Zielwert von 30 gegenüber  $E_{mp_n}^{theor} = 24$  bzw. 23 relativ groß ist, kann vermutet werden, daß es bessere Lösungen gibt. Um sie zu finden, kann man Vertauschungen vornehmen, für die  $D_1^{rs} = 0$  ist (oder sogar etwas größer als Null).

Es soll versucht werden, mit  $r=1$  und  $s=6$  weitere Verbesserungen zu finden; dies liefert  $D_2^{12} = 0$ ,  $D_2^{13} = 0$ ,  $D_2^{14} = 1$  und  $D_2^{15} = -1$ . Diese Vertauschung wird ausgeführt und verbessert den Zielwert von 30 um 1 auf 29. Im Anschluß daran erhält man  $D_3^{12} = 3$ ,  $D_3^{13} = 0$ ,  $D_3^{14} = 2$ ,  $D_3^{15} = 1$ ,  $D_3^{16} = 1$  und  $D_3^{23} = -2$ . Führt man diese Vertauschung durch, ergibt das eine Zielwertverbesserung um 2 von 29 auf 27. Die dieser Lösung entsprechenden Werte von  $D_4^{rs}$  sind:

r \ s	2	3	4	5	6
1	0	3	2	3	3
2		2	4	1	4
3			0	0	0
4				0	2
5					4

**Tabelle 14:** Werte für  $D_4^{rs}$  (von der Auftragsfolge 5-1-2-4-6-3 ausgehend)

Bei diesem Stand der Rechnung kann nochmals versucht werden, durch eine Vertauschung, deren  $D_4^{rs}$  gleich Null ist, den Einstieg in eine bessere Lösung zu finden. Gewählt werden  $r=1$  und  $s=2$ . Das führt zu:

r \ s	2	3	4	5	6
1	0	5	6	1	7
2		2	2	3	0
3			0	0	1
4				0	2
5					4

**Tabelle 15:** Werte für  $D_5^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-5-2-4-6-3 ausgehend)

Dieser Versuch hat kein negatives  $D_q^{rs}$  ergeben und insofern nicht weiter geführt. Bei einem weiteren Versuch darf nun natürlich nicht noch einmal  $r=1$  und  $s=2$  gewählt werden, obwohl  $D_5^{12} = 0$ , weil das wieder zur 4. Iteration zurückführen würde. Gewählt werden  $r=2$  und  $s=6$ ; das ergibt

r \ s	2	3	4	5	6
1	3	6	5	1	4
2		2	4	0	0
3			0	-1	

Tabelle 16: Werte für  $D_6^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-3-2-4-6-5 ausgehend)

Die Vertauschung von  $r=3$  und  $s=5$  vermindert den Zielwert von 27 um 1 auf 26. Von der so erreichten Lösung ausgehend erhält man  $D_7^{12} = 4$ ,  $D_7^{13} = 0$ ,  $D_7^{14} = 6$ ,  $D_7^{15} = 7$ ,  $D_7^{16} = 4$  und  $D_7^{23} = -1$ . Durch die Vertauschung von  $r=2$  und  $s=3$  sinkt der Zielwert von 26 um 1 auf 25. Von der so erreichten Lösung ausgehend erhält man die Werte von  $D_8^{rs}$ .

r \ s	2	3	4	5	6
1	0	5	3	5	3
2		1	3	4	4
3			0	2	2
4				0	1
5					1

Tabelle 17: Werte für  $D_8^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-6-3-4-2-5 ausgehend)

Die Werte in Tabelle 17 sind dieselben wie in Tabelle 9 und basieren auf derselben Auftragsfolge wie Tabelle 9. Infolgedessen stimmt die weitere Rechnung mit der zuvor für die Berechnung der Tabellen 10 bis 12 verwandten Vorgehensweise überein und führt auch zum gleichen Ergebnis.

Im Falle des vorliegenden Zahlenbeispiels ist das Verfahren mit sofortiger Durchführung einer die Lösung verbessernden Vertauschung, wie gezeigt, aufwendiger als das Verfahren mit Durchführung der besten Vertauschung. Das muß aber nicht immer so sein und hängt von den Zahlenwerten des Problems und der verwandten Ausgangslösung ab.

## B. Berücksichtigung von Umrüstzeiten im klassischen Maschinenbelegungsproblem

Bisher wurde davon ausgegangen, daß auf einer Maschine  $i$  der Übergang von einem Auftrag  $h \in j = \{1, 2, \dots, n\}$  zum Auftrag  $j \mid j \neq h$  ohne Anfall von Umrüstzeiten möglich ist. In der Realität ist dies jedoch meist nicht der Fall. Wenn  $i$  z.B. eine Gewindeschneidmaschine ist, welche bei Auftrag  $h$  ein Gewinde von 8 mm zu schneiden hat, beim Auftrag  $j$  hingegen ein Gewinde von 10 mm, dann muß die Maschine zwischen den beiden Aufträgen umgestellt werden, was Rüstzeiten verursacht. Die Höhe dieser Rüstzeiten ist sowohl von Auftrag  $h$  als auch von Auftrag  $j$  abhängig. Das zeigt sich z.B. besonders dann, wenn es sich um eine Farbgebung handelt: Von hellen zu dunklen Farben ist ein Übergang relativ leicht möglich; in umgekehrter Richtung ist es schwierig, weil dies meist eine gründliche Reinigung von Maschine, Werkzeug und Werkstück erforderlich macht.

### I. Allgemeine Darstellung

Es bezeichne

$T_{ihj}$  die Rüstzeit, welche auf Maschine  $i$  beim Übergang von Auftrag  $h$  zum Auftrag  $j$  anfällt.

Das unter A beschriebene Verfahren kann auch hier angewandt werden. Dazu sind lediglich die Umrüstzeiten  $T_{ihj}$  zusätzlich zu berücksichtigen.

Die Tabelle, welche zur Berechnung des Zielwertes benutzt wird, zeigt dann folgenden Aufbau (vgl. auch die Tabelle 1 auf S. 6 und Tabelle 2 auf S. 9):

	$E_{i-1,p_j}$
$E_{i,p_{j-1}}$	$E_{ip_j} = \text{Max} \{E_{i-1,p_j}; E_{i,p_{j-1}}\} + T_{ip_j} + T_{ihp_j}$

Lediglich im letzten Feld der Matrix, also für den Zielwert  $E_{mp_n}$  ist noch die Zeit  $T_{mp_n o}$  zu addieren, die nötig ist, die Maschine  $m$  stillzulegen, wenn darauf als letzter der Auftrag  $p_n$  gefertigt worden ist. Für den Zielwert gilt also

$$(5) \quad E_{mp_n} = \text{Max} \{E_{m-1,p_n}; E_{m,p_{n-1}}\} + T_{mp_n} + T_{mhp_n} + T_{mp_n o}$$

Ansonsten stimmt die Vorgehensweise mit der unter A beschriebenen überein.

## II. Darstellung der Vorgehensweise anhand eines Zahlenbeispiels

Es wird das Zahlenbeispiel verwandt, das auch unter A bereits benutzt worden ist. Die Umrüstzeiten  $T_{ihj}$  sind in Tabelle 18 wiedergegeben. Dabei bedeutet  $h=0$ , daß die Maschine stillsteht,  $T_{ioj}$  (für  $j>0$ ) sind also die Inbetriebnahmezeiten, die anfallen, wenn  $j$  als erster Auftrag durchgeführt wird. Umgekehrt bedeutet  $j=0$ , daß die Maschine stillgelegt wird;  $T_{ih0}$  (für  $h>0$ ) sind also die Stilllegungszeiten, welche sich dann ergeben, wenn  $h$  als letzter Auftrag durchgeführt wird.

i=1	h \ j	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0,83	0,56	0,27	0,04	0,16	0,08
	1	0,37	0	0,42	0,45	0,37	0,36	0,64
	2	0,19	0,82	0	0,50	0,66	0,52	0,97
	3	0,92	0,61	0,23	0	0,97	0,89	0,79
	4	0,80	0,05	0,77	0,42	0	0,66	0,87
	5	0,11	0,12	0,06	0,85	0,12	0	0,80
	6	0,43	0,64	0,27	0,38	0,52	0,22	0

i=2	h \ j	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0,68	0,47	0,54	0,44	0,25	0,27
	1	0,03	0	0,48	0,04	0,82	0,43	0,09
	2	0,27	0,20	0	0,98	0,62	0,11	0,35
	3	0,34	0,35	0,44	0	0,89	0,90	0,97
	4	0,94	0,65	0,84	0,07	0	0,86	0,64
	5	0,09	0,71	0,69	0,70	0,40	0	0,68
	6	0,76	0,22	0,04	0,57	0,17	0,44	0

i=3	h \ j	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0,23	0,19	0,38	0,94	0,83	0,04
	1	0,58	0	0,24	0,36	0,08	0,96	0,07
	2	0,69	0,27	0	0,02	0,25	0,04	0,40
	3	0,61	0,01	0,55	0	0,15	0,26	0,27
	4	0,52	0,39	0,46	0,39	0	0,80	0,79
	5	0,47	0,16	0,33	0,85	0,75	0	0,67
	6	0,29	0,71	0,24	0,41	0,02	0,73	0

**Tabelle 18:**  $T_{ihj}$  = Umrüstzeit auf Maschine  $i$  beim Übergang von Auftrag  $h$  zu Auftrag  $j$   
( $h, j = 0$  = Stillstand)

Verwendet man auch hier als Ausgangslösung diejenige, für welche  $p_j=j$  gilt, dann ergibt sich dafür ein Zielwert von 37,24. Seine Berechnung ist in Tabelle 19 wiedergegeben.

Auftrag $p_j$	j						
	0	1	2	3	4	5	6
Masch. i	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4	5
0		0	0	0	0	0	0
1	0	Max{0, 0} +2+0,83 = 283	Max{283, 0} +5+0,42 = 8,25	Max{8,25, 0} +4+0,50 = 12,75	Max{12,75, 0} +4+0,97 = 17,72	Max{17,72, 0} +1+0,66 = 19,38	Max{19,38, 0} +1+0,80 = 21,18
2	0	Max{0, 283} +3+0,68 = 651	Max{6,51; 8,25} +3+0,48 = 11,73	Max{11,73; 12,75} +6+0,98 = 19,73	Max{19,73; 17,72} +4+0,89 = 24,62	Max{24,62; 19,38} +4+0,86 = 29,48	Max{29,48; 21,18} +1+0,68 = 31,16
3	0	Max{0, 651} +6+0,23 = 1274	Max{12,74; 11,73} +2+0,24 = 14,98	Max{14,98; 19,73} +4+0,02 = 23,75	Max{23,75; 24,62} +2+0,15 = 26,77	Max{26,77; 29,48} +1+0,80 = 31,28	Max{31,28; 31,16} +5+0,67+0,29 = 37,24

Tabelle 19: Zielwertberechnung einschließlich Rüstzeiten für den Fall, daß  $p_j = j$ .

Analog zu der in Tabelle 19 benutzten Vorgehensweise werden für alle möglichen Vertauschungen von r und s die zugehörigen Zielwerte berechnet und die ihnen entsprechenden Werte von  $D_q^{rs}$  dadurch bestimmt, daß von der q-ten Iteration ausgehend

$$(6) \quad D_q^{rs} = E_{qmp_n}^{sr} - E_{qmp_n}^{rs}$$

berechnet wird.

Wie dies geschieht, wird für  $D_0^{14}$  und für  $D_0^{56}$  gezeigt (vgl. Tabellen 20 und 21).

i \ j	p <sub>j</sub>					
	4	2	3	1	5	6
1	4	5	4	2	1	1
2	4	3	6	3	4	1
3	2	2	4	6	1	5

Ma- sch. i	p <sub>j</sub>					
	4	2	3	1	5	6
1	Max{0, 0} +4+0,04 = 4,04	Max{4,04, 0} +5+0,77 = 9,81	Max{9,81, 0} +4+0,50 = 14,31	Max{14,31, 0} +2+0,61 = 16,92	Max{16,92, 0} +1+0,36 = 18,28	Max{18,28, 0} +1+0,80 = 20,08
2	Max{0, 4,04} +4+0,44 = 8,48	Max{8,48; 9,81} +3+0,84 = 13,65	Max{13,65; 14,31} +6+0,98 = 21,29	Max{21,29; 16,92} +3+0,35 = 24,64	Max{24,64; 18,28} +4+0,43 = 29,07	Max{29,07; 20,08} +1+0,68 = 30,75
3	Max{0, 8,48} +2+0,94 = 11,42	Max{11,42; 13,65} +2+0,46 = 16,11	Max{16,11; 21,29} +4+0,02 = 25,31	Max{25,31; 24,64} +6+0,01 = 31,32	Max{31,32; 29,07} +1+0,96 = 33,28	Max{33,28; 30,75} +0,29+0,67 = 39,24

Tabelle 20: Berechnung des Zielwertes für r=1 und s=4, woraus folgt

$$D_0^{14} = 39,24 - 37,24 = 2,00$$

In Tabelle 21 wird dabei auch gezeigt, daß, wie weiter oben bereits gesagt, die vor r liegenden Spalten nicht neu berechnet zu werden brauchen sondern aus der vorausgehenden Tabelle 19 übernommen werden können.

i \ j	p <sub>j</sub>	1	2	3	4	6	5
	j	1	2	3	4	5	6
1		2	5	4	4	1	1
2		3	3	6	4	1	4
3		6	2	4	2	5	1

Ma- schine. i	p <sub>j</sub>	1	2	3	4	6	5
	j	1	2	3	4	5	6
1					17,72	Max{17,72, 0} +1+0,87 = 19,59	Max{19,59, 0} +1+0,22 = 20,81
2					24,62	Max{24,62, 19,59} +1+0,64 = 26,26	Max{26,26, 20,81} +4+0,44 = 30,70
3					26,77	Max{26,77, 26,26} +5+0,79 = 32,56	Max{32,56, 30,70} +1+0,47+0,73 = 34,76

Tabelle 21: Berechnung des Zielwertes für r=5 und s=6, woraus folgt

$$D_0^{56} = 34,76 - 37,24 = -2,48$$

Analog zu  $D_0^{14}$  und  $D_0^{56}$  werden alle übrigen Werte von  $D_0^{rs}$  berechnet; sie sind in Tabelle 22 wiedergegeben.

r \ s	2	3	4	5	6
1	-0,86	-2,35	2,00	0,75	0,79
2		-2,83	-3,96	-2,72	5,36
3			-1,10	-0,98	-1,31
4				0,62	-3,22
5					-2,48

Tabelle 22: Werte für  $D_0^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-2-3-4-5-6 ausgehend)

Die größte Verbesserung des Zielwertes um 5,36 auf 31,88 bringt der Tausch von r = 2 mit s = 6. Nach Durchführung dieses Tausches ergeben sich für  $D_1^{rs}$  die Werte in Tabelle 23.

r \ s	2	3	4	5	6
1	-1,21	2,19	0,73	-0,11	6,80
2		-0,85	0,62	1,52	5,36
3			-0,79	-1,74	4,16
4				-0,17	-1,24
5					-2,11

Tabelle 23: Werte für  $D_1^{rs}$  (von der Auftragsfolge 1-6-3-4-5-2 ausgehend)

Die größte Zielwertverbesserung um 2,11 auf 29,77 bringt der Tausch von  $r=5$  und  $s=6$ . Analog dazu ergibt sich unter den Werten von  $D_2^{rs}$  der kleinste Wert mit -1,23, wenn  $r=3$  und  $s=4$ , was eine Zielwertverbesserung um 1,23 auf 28,54 ergibt. Unter den Werten von  $D_3^{rs}$  ist nur  $D_3^{12}$  negativ und zwar gleich -0,50, was eine Zielwertverbesserung um 0,50 auf 28,04 beim Tausch von  $r=1$  und  $s=2$  ergibt. Das führt für  $D_4^{rs}$  zu Werten, die alle größer als Null sind. Der kleinste Wert ist  $D_4^{23}$  mit 0,48. Versucht man den Tausch zwischen  $r=2$  und  $s=3$ , wodurch der Zielwert auf 28,52 steigt, erhält man anschließend für  $D_5^{rs}$  zwei negative Werte; der kleinste<sup>20)</sup> (welcher die größte Verbesserung bringt) ist  $D_5^{26}$  mit -1,15. Der Tausch von  $r=2$  mit  $s=6$  verbessert den Zielwert also um 1,15 auf 27,37. Danach ergeben sich für  $D_6^{rs}$  nur noch relativ hohe Werte  $\geq 1,05$ ; d.h. durch paarweisen Auftragstausch sind beim erreichten Stand des benutzten Verfahrens keine Verbesserungen mehr zu erzielen. Die gefundene optimale Auftragsfolge lautet (wie zu A., was jedoch nicht so sein muß):

6-5-1-3-2-4.

Gegenüber der Ausgangslösung (in Tabelle 19) mit  $p_i=j$  werden dadurch  $37,24 - 27,37 = 9,87$  Zeiteinheiten bzw. 26,50 % der Zeit eingespart.

Auch bei dieser Problemstellung kann ein Auftragstausch bereits ausgeführt werden sobald ein negatives  $D_q^{rs}$  berechnet wurde. Auf eine Wiedergabe der Berechnung kann verzichtet werden, da die entsprechende Vorgehensweise bereits unter A beschrieben worden ist.

Wenn die Rüstzeiten cet. par. vier mal so groß sind wie in Tabelle 18 und jeweils ein Auftragstausch durchgeführt wird sobald ein negatives  $D_q^{rs}$  gefunden wurde, ändert sich die optimale Reihenfolge und lautet

5-1-6-4-3-2.

Sie hat dann einen Zielwert von 39,03 Zeiteinheiten; das ist jedoch noch nicht die beste Auftragsfolge, denn 5-1-3-6-2-4 mit einem Zielwert von 38,68 Zeiteinheiten ist z.B. besser und bringt gegenüber dem Zielwert der Ausgangslösung (55,93 ZE) eine Verbesserung um 30,84 %.

### III. Zur Nutzung von Leerzeiten für Rüstvorgänge

Die Berücksichtigung von Rüstzeiten ist in der Realität komplizierter als bisher dargestellt. Zur Vereinfachung ist bisher angenommen worden, daß der Rüstvorgang erst dann beginnen kann, wenn das Werkstück auf der umzurüstenden Maschine verfügbar ist, so daß auftragsbedingte Maschinenleerzeiten für Rüstvorgänge nicht ausgenutzt werden können. Das soll jetzt berücksichtigt werden.

<sup>20)</sup> Der andere Wert, nämlich -0,48, ist nicht relevant, weil der ihm entsprechende Tausch nur zu Tabelle 28 zurückführen würde.

Will man der Entstehung von Rüstkosten vollumfänglich Rechnung tragen, dann ist zu beachten, daß streng genommen verschiedene Arten von „Rüstzeiten“ zu unterscheiden sind, was zunächst eine Dreiteilung und anschließend nochmals eine Zweiteilung dieser Zeiten erfordert:

- (1) Bevor eine Maschine mit der Fertigung beginnen kann, muß sie zuerst in Betrieb genommen werden. Dadurch entsteht ein Zeitverbrauch, der auch eine Art von Rüstzeit darstellt.
- (2) Rüstzeiten im üblichen Sinne sind Auftragswechselzeiten.
- (3) Wenn eine Maschine ihre Tätigkeit beendet, wird sie abgeschaltet bzw. stillgelegt. Auch das kann Zeit verbrauchen, welche die Gesamtfertigungszeit beeinflusst, z.B. weil ein Werkstück erst entnommen werden kann, wenn die Maschine zum Stillstand gekommen ist oder wenn es abgekühlt ist.

Die Tätigkeiten, welche während der zuvor genannten drei Arten von „Rüstzeiten“ verrichtet werden, sind nun nochmals einer Zweiteilung zu unterwerfen:

- (a) Solche Rüstzeiten verursachende Tätigkeiten, welche nur die umzurüstende Maschine betreffen, also unabhängig vom zu bearbeitenden Werkstück sind und deshalb nicht voraussetzen, daß das Werkstück auf der in Betrieb zu nehmenden oder auf der mit dem nächsten Auftrag beginnenden Maschine zur Verfügung steht.
- (b) Solche Rüstzeiten verursachende Tätigkeiten, die nur dann ausgeführt werden können, wenn das Werkstück auf der in Betrieb zu nehmenden oder auf der den nächsten Auftrag ausführenden Maschine verfügbar ist. Diese Rüstzeiten können frühestens zum Zeitpunkt

$$E_{i,p_i} = \text{Max} \{ E_{i-1,p_i}; E_{i,p_{i-1}} \}$$

beginnen.

Der Zusammenhang zwischen den unter (1), (2) und (3) genannten sowie den unter (a) und (b) aufgeführten Tätigkeiten ist in Tabelle 24 wiedergegeben.

Zuordnung von Werkstück und Maschine		Kann die Tätigkeit, welche zu Rüstzeiten führt, schon beginnen, bevor das Werkstück auf der Maschine ist bzw. bevor es die Maschine verlassen hat?	
		Ja (a)	Nein (b)
Vorgang			
(1)	Start bzw. Inbetriebnahme einer Maschine	Bei Auftrag $p_i$ auf allen Maschinen möglich, aber nur bei Maschine 1 relevant	Nur bei Auftrag $p_i$ auf allen Maschinen möglich und relevant
(2)	Wechsel von Auftrag zu Folgeauftrag	Bei allen Aufträgen auf allen Maschinen möglich und relevant	Bei allen Aufträgen auf allen Maschinen möglich und relevant
(3)	Abschalten bzw. Stilllegung einer Maschine	Bei Auftrag $p_n$ auf allen Maschinen möglich, aber bei keiner Maschine relevant	Bei Auftrag $p_n$ auf allen Maschinen möglich, aber nur bei Maschine $m$ relevant

**Tabelle 24:** Zeitverbrauch durch Rüstvorgänge, welche durch den Auftragswechsel sowie durch die Inbetriebnahme und die Stilllegung von Maschinen verursacht werden

Zu einzelnen Fällen, welche in Tabelle 24 enthalten sind, ist folgendes zu sagen:

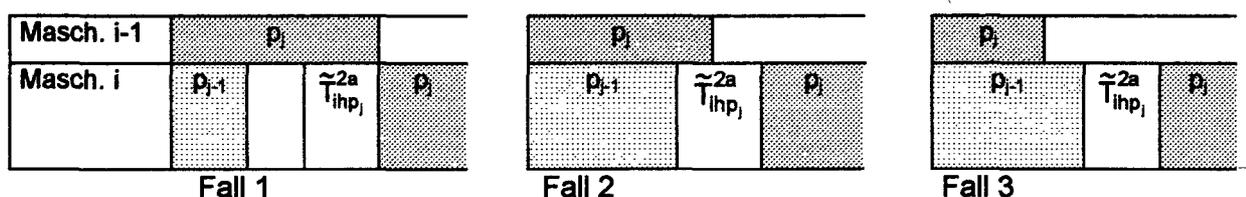
Die zu (1) (a) gehörigen Tätigkeiten können in der Regel während der Anfangsleerzeiten verrichtet werden. Eine Ausnahme hiervon macht nur Maschine 1, weil es für sie keine Anfangsleerzeit gibt. Deshalb werden diese Zeiten nur für Auftrag  $p_1$  und nur auf Maschine 1 relevant. Zur Vereinfachung der Optimierungsrechnung wird angenommen, daß Maschine 1 soviel früher die Arbeit aufnimmt als die übrigen Maschinen (z.B. zwecks Warmlaufen), daß die Rüstzeit gemäß (1) (a) die Gesamtfertigungszeit nicht beeinflußt und deshalb nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Tätigkeiten, die zu (1) (b) gehören, können für Auftrag  $p_1$  auf allen Maschinen vorkommen und wurden in II. bereits berücksichtigt. Es ist nicht möglich, die Zeit dieser Tätigkeiten in die Fertigungszeiten des Auftrages  $p_1$  einzubeziehen, weil man im voraus nicht weiß, welcher Auftrag als erster gefertigt werden wird.

Tätigkeiten von der Art (2) (a) können bei allen Aufträgen und auf allen Maschinen auftreten. Ob sie relevant werden, hängt von der oben genannten „dritten Gruppe von Leerzeiten“ ab, da sie evtl. (zumindest teilweise) während dieser Leerzeiten verrichtet werden können. Bezeichnet man die Rüstzeit der Art (2) (a) auf Maschine  $i$  beim Übergang von Auftrag  $h$  zu Auftrag  $j$  mit  $\tilde{T}_{ihj}^{2a}$  [Zeiteinheiten], dann sind davon im Rahmen der Optimierungsrechnung nur

$$(7) \quad T_{ihp_j}^{2a} = \text{Max} \left\{ 0; \text{Min} \left\{ \tilde{T}_{ihp_j}^{2a}; \tilde{T}_{ihp_j}^{2a} - (E_{i-1,p_j} - E_{i,p_{j-1}}) \right\} \right\} \text{ [Zeiteinheiten]}$$

relevant und grundsätzlich zu berücksichtigen. Diese Definitionsgleichung resultiert daraus, daß die in Abbildung 3 dargestellten drei Fälle zu unterscheiden sind:



**Abb. 3:** Der Einfluß der Rüstzeit der Art (2) (a) (mit  $\tilde{T}_{ihp_j}^{2a}$  bezeichnet, wobei  $h=p_{j-1}$ ) auf den Fertigungsbeginn von Auftrag  $p_j$  auf Maschine  $i$

Diese drei Fälle lassen sich zunächst wie folgt schreiben:

$$T_{ihp_j}^{2a} = \begin{cases} 0 & \left| \begin{array}{l} E_{i-1,p_j} - E_{i,p_{j-1}} \geq \tilde{T}_{ihp_j}^{2a} \quad (\text{Fall 1}) \\ 0 < E_{i-1,p_j} - E_{i,p_{j-1}} < \tilde{T}_{ihp_j}^{2a} \quad (\text{Fall 2}) \\ E_{i-1,p_j} - E_{i,p_{j-1}} \leq 0 \quad (\text{Fall 3}) \end{array} \right. \\ \tilde{T}_{ihp_j}^{2a} - (E_{i-1,p_j} - E_{i,p_{j-1}}) \\ \tilde{T}_{ihp_j}^{2a} \end{cases}$$

Diese Schreibweise läßt sich zu der in (7) gegebenen Form zusammenfassen.

Tätigkeiten, die unter (2) (b) fallen sind immer relevant und werden immer berücksichtigt. Sie entsprechen den durch die Auftragsfolge bedingten Rüstzeiten, die bisher mit  $T_{ihp_i}$  bezeichnet wurden.

Die zu (3) (a) gehörigen Tätigkeiten können nach Erledigung von Auftrag  $p_n$  grundsätzlich auf allen Maschinen vorkommen. Sie beeinflussen jedoch auf keiner Maschine den Zeitpunkt der Fertigstellung des zuletzt durchgeführten Auftrages  $p_n$  und brauchen nicht berücksichtigt zu werden, weil sie auf den Maschinen 1 bis  $m-1$  während der Endleerzeiten und auf Maschine  $m$  nach Fertigstellung aller Aufträge durchgeführt werden können.

Tätigkeiten der Art (3) (b) können bei dem zuletzt durchgeführten Auftrag  $p_n$  zwar grundsätzlich bei allen Maschinen vorkommen. In der Regel können sie jedoch auf den Maschinen 1 bis  $m-1$  während der Endleerzeiten verrichtet werden; sie brauchen dann nur für Maschine  $m$  berücksichtigt zu werden. Die Einbeziehung dieser Zeiten in die Fertigungszeiten des Auftrages  $p_n$  ist nicht möglich, weil man im voraus nicht weiß, welcher Auftrag der letzte ( $p_n$ ) sein wird.

Die Tabelle, welche zur Berechnung des Zielwertes benutzt wird, setzt sich dann, wenn alle vorgenannten Rüstzeiten berücksichtigt werden, grundsätzlich aus Feldern mit folgendem Aufbau zusammen:

	$E_{i-1,p_i}$
$E_{i,p_{j-1}}$	$E_{ip_j} = \text{Max} \left\{ E_{i-1,p_j}; E_{i,p_{j-1}} \right\}$ $+ \text{Max} \left\{ 0; \text{Min} \left\{ \tilde{T}_{ihp_j}^{2a}; \tilde{T}_{ihp_j}^{2a} - (E_{i-1,p_j} - E_{i,p_{j-1}}) \right\} \right\}$ $+ T_{ihp_j} + T_{ip_j}$

Lediglich im letzten Feld der Matrix, also für den Zielwert  $E_{mp_n}$  ist noch die Zeit  $T_{mp_n,0}$  zu addieren, die in Verbindung mit der Stilllegung der Maschine  $m$  entsteht, wenn darauf als letzter der Auftrag  $p_n$  gefertigt wird. Für den Zielwert  $E_{mp_n}$  gilt also

$$(8) \quad E_{mp_n} = \text{Max} \left\{ E_{m-1,p_n}; E_{m,p_{n-1}} \right\} + \text{Max} \left\{ 0; \text{Min} \left\{ \tilde{T}_{mhp_n}^{2a}; \tilde{T}_{mhp_n}^{2a} - (E_{m-1,p_n} - E_{m,p_{n-1}}) \right\} \right\} + T_{mhp_n} + T_{mp_n} + T_{mp_n,0}$$

Ansonsten stimmt die Vorgehensweise mit der unter A beschriebenen überein. Zusätzlich müssen also gegenüber der im vorigen Abschnitt II. gegebenen Darstellung auch noch die Rüsttätigkeiten der Art (2) (a) berücksichtigt werden. Ihre Dauer sei in Tabelle 25 wiedergegeben.

Maschine 1	$h \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0,32	0	0,14	0,66	0,03
	2	0	0,79	0	0,77	0	0,50	0,10
	3	0	0	0,23	0	0,20	0	0,91
	4	0	0,12	0	0,56	0	0,82	0
	5	0	0	0,89	0	0,92	0	0,56
	6	0	0,53	0,77	0,04	0	0,08	0

Maschine 2	$h \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0,78	0,73	0,45	0
	2	0	0,35	0	0	0,03	0,45	0,24
	3	0	0,76	0,52	0	0	0,12	0,65
	4	0	0	0,84	0,02	0	0	0,81
	5	0	0,41	0	0,71	0,64	0	0
	6	0	0,33	0,32	0	0,64	0,96	0

Maschine 3	$h \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6
	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0,77	0,59	0,51	0	0,42
	2	0	0,31	0	0,44	0,15	0,45	0
	3	0	0,53	0,48	0	0,53	0,10	0,86
	4	0	0,71	0,10	0,44	0	0,83	0,34
	5	0	0	0,67	0,03	0,52	0	0,10
	6	0	0,01	0	0,02	0,71	0,30	0

Tabelle 25: Rüstzeiten der Art (2) (a) ( $\tilde{T}_{ihp_i}^{2a}$ ) beim Übergang von Auftrag h zum Auftrag j

Auch hierbei wird als Ausgangslösung diejenige verwendet, für welche  $p_j = j$  gilt. Ihr entspricht ein Zielwert von 38,43 Zeiteinheiten. Seine Berechnung ist in Tabelle 26 dargestellt.

$i \backslash j$	$p_j$	0	1	2	3	4	5	6
	j	0	1	2	3	4	5	6
0		0	0	0	0	0	0	0
1	0	Max(0, 0) + 0,00 + 0,83 + 2,00 = 2,83	Max(2,83, 0) + 0,32 + 0,42 + 5,00 = 8,57	Max(8,57, 0) + 0,77 + 0,50 + 4,00 = 13,84	Max(13,84, 0) + 0,20 + 0,97 + 4,00 = 19,01	Max(19,01, 0) + 0,82 + 0,06 + 1,00 = 21,49	Max(21,49, 0) + 0,56 + 0,80 + 1,00 = 23,85	
2	0	Max(0, 2,83) + 0,00 + 0,68 + 3,00 = 6,51	Max(6,51, 8,57) + 0,00 + 0,48 + 3,00 = 12,05	Max(12,05, 13,84) + 0,00 + 0,88 + 6,00 = 20,82	Max(20,82, 19,01) + 0,00 + 0,89 + 4,00 = 25,71	Max(25,71, 21,49) + 0,00 + 0,86 + 4,00 = 30,57	Max(30,57, 23,85) + 0,00 + 0,68 + 1,00 = 32,25	
3	0	Max(0, 6,51) + 0,00 + 0,23 + 6,00 = 12,74	Max(12,74, 12,05) + 0,77 + 0,24 + 2,00 = 15,75	Max(15,75, 20,82) + 0,00 + 0,02 + 4,00 = 24,84	Max(24,84, 25,71) + 0,00 + 0,15 + 2,00 = 27,86	Max(27,86, 30,57) + 0,00 + 0,80 + 1,00 = 32,37	Max(32,37, 32,25) + 0,10 + 0,67 + 5,00 + 0,29 = 38,43	

Tabelle 26: Zielwertberechnung (incl.  $\tilde{T}_{ihp_i}^{2a}$ ) für die Ausgangslösung, in der  $p_j = j$  gelten möge

Analog zu der in Tabelle 26 dargestellten Vorgehensweise werden die übrigen Zielwerte berechnet, die sich ergeben, wenn die Aufträge r und s in ihrer Reihenfolge ausgetauscht werden. Die aus den Zielwertvergleichen sich ergebenden Werte von  $D_q^{rs}$  sind in Tabelle 27 zusammengestellt. Daraus folgt: Nach 4 Vertauschungen erreicht man ein (relatives) Optimum von 29,84 ZE, was gegenüber der Ausgangslösung von 38,43 ZE eine Verbesserung um 8,59 ZE bzw. um 22,35 % darstellt. Die entsprechende relativ optimale Reihenfolge ist

6 - 1 - 4 - 3 - 2 - 5

und stimmt nicht mit der unter A. und B.II. ermittelten Reihenfolge überein.

r \ s	2	3	4	5	6
1	-1,16	-1,84	2,21	1,64	1,55
2		-3,69	-3,88	-1,91	-6,48
3			-1,49	0,12	-1,37
4				1,62	-1,28
5					-1,94

$D_0^{rs}$  (Ausgangzielwert 38,43 ZE)

r \ s	2	3	4	5	6
1	-0,75	5,00	2,22	1,19	7,28
2		0,92	2,68	3,44	6,48
3			-0,15	0,29	5,60
4				1,43	0,37
5					-0,82

$D_1^{rs}$  (Ausgangzielwert 31,95 ZE)

r \ s	2	3	4	5	6
1	-0,75	4,02	2,36	4,85	3,35
2		0,38	1,98	5,36	5,39
3			-0,35	1,87	3,20
4				0,10	0,49
5					0,82

$D_2^{rs}$  (Ausgangzielwert 31,13 ZE)

r \ s	2	3	4	5	6
1	0,75	4,09	3,42	4,95	3,69
2		2,10	2,17	6,35	4,75
3			-0,54	2,07	3,58
4				0,19	0,49
5					0,82

$D_3^{rs}$  (Ausgangzielwert 30,38 ZE)

r \ s	2	3	4	5	6
1	0,94	3,59	4,81	7,91	4,44
2		0,43	2,13	6,35	3,62
3			0,54	4,42	1,30
4				3,69	4,23
5					1,70

$D_4^{rs}$  (Ausgangzielwert 29,84 ZE)

**Tabelle 27:** Die Werte von  $D_0^{rs}$  bis  $D_4^{rs}$ , wenn Leerzeiten soweit möglich für Rüstvorgänge genutzt werden

Daß der relativ optimale Zielwert mit 29,84 ZE größer ist als der Zielwert zu B.II. mit 27,37 ZE ist darin begründet, daß die Rüstzeiten der Art (2)a gegenüber der Situation in B.II. zusätzlich auftreten.

### **C. Zur Problematik der Implementierung von Optimallösungen**

Die Implementierung einer gefundenen Optimallösung kann auf den Widerstand der Arbeitnehmer stoßen. Der Grund hierfür wird erkennbar, wenn man das Gantt-Tableau der Abbildung 1 mit dem Gantt-Tableau der Abbildung 2 vergleicht. Die Verkürzung der Durchlaufzeit der sechs Aufträge ergibt sich durch die Verringerung der Leerzeiten. Diese Leerzeiten stellen jedoch in der Regel für die Arbeitnehmer bezahlte arbeitsablaufbedingte Pausenzeiten dar. Die Reduzierung der Durchlaufzeit ist für die Arbeitnehmer also mit einem Rückgang der ihnen zur Verfügung stehenden Pausenzeiten verbunden. Ein Betrieb ist deshalb gut beraten, seinen Arbeitnehmern zu zeigen, daß die Optimierung der Auftragsfolge auch in ihrem Interesse ist. Wird in einem solchen Betrieb z.B. Akkordlohn gezahlt, dann ist die Reduzierung der Leerzeiten für die Arbeitnehmer mit höherem Einkommen verbunden. Sofern Zeitlohn gezahlt wird, ist auf folgendes zu verweisen: Längere Pausenzeiten als Folge längerer Leerzeiten sind nur ein sehr relativer Vorteil, denn sie führen für den Betrieb zu höheren Kosten. Wenn der Betrieb jedoch, weil er höhere Kosten hat als die Konkurrenz, keine Aufträge mehr bekommt, dann nutzen auch längere Pausenzeiten seinen Arbeitnehmern nicht mehr, weil sie dann auf Dauer gesehen evtl. arbeitslos werden.