

Albrecht, Peter

Article

Kreditrisiken - Modellierung und Management: Ein Überblick

German Risk and Insurance Review (GRIR)

Provided in Cooperation with:

Department of Risk Management and Insurance, University of Cologne

Suggested Citation: Albrecht, Peter (2005) : Kreditrisiken - Modellierung und Management: Ein Überblick, German Risk and Insurance Review (GRIR), ISSN 1860-5400, Universität zu Köln, Seminar für ABWL, Risikomanagement und Versicherungslehre, Köln, Vol. 1, Iss. 2, pp. 22-152

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/68725>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

http://www.dipp.nrw.de/lizenzen/dppl/dppl/DPPL_v2_de_06-2004.html

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

German RISK and INSURANCE Review



Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick

Peter Albrecht

Universität Mannheim

**Lehrstuhl für ABWL, Risikotheorie, Portfolio Management und Ver-
sicherungswirtschaft**

Schloss, Raum O 223, 68131 Mannheim, Germany

Zusammenfassung

Die Messung und Bewertung von Kreditrisiken stellt sich aktuell als ein sehr bedeutsames (Stichworte : Basel II, Solvency II, Kreditderivate) Gebiet dar. Allerdings hat sich hierbei keine einheitliche Vorgehensweise herausgebildet, sondern es existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Ansatzpunkte und Modelle. Aus diesem Grund wird in dem vorliegenden Überblicksaufsatz versucht, einen systematischen Überblick über Problemfelder, Modellierungsansätze und Methoden des Risikomanagements im Kontext von Kreditrisiken zu geben. Nach einer einführenden Charakterisierung von Kreditrisiken und einem Abriss über Ratingsysteme werden zunächst die vier grundlegenden Kategorien von Kreditrisikomodellen (statische Modellierung der Ausfallverteilung, Unternehmenswertmodelle, Intensitätsmodelle und ratingbasierte Modelle) erörtert. Sodann erfolgt eine Darstellung der wichtigsten Industriemodelle (Credit Risk⁺, KMV, Credit Metrics, Credit Portfolio View). Behandelt werden ferner die Grundzüge von Basel II und die hierbei zugrunde liegende modelltheoretische Fundierung in Form von Einfaktormodellen sowie die Bewertung von ausfallbedrohten Zinstiteln. Abschließend wird auf Kreditderivate eingegangen.

Schlagworte: Kreditrisiko, Risikomanagement

Abstract

Measurement and valuation of credit risks is a very important (Basel II, Solvency II, Credit Derivatives) topic of current interest. However, the field is very heterogeneous and there exist many different approaches. Therefore the present survey intends to give a systematic overview of fields of problems, of approaches to modelling and of methods of risk management in context of credit risks. We begin with an introductory characterization of credit risks and a sketch on rating systems and proceed with the four central categories of credit risk models (loan loss distributions, firm value models, intensity models, rating based models). We go on with presenting the most important industry models (Credit Risk⁺, KMV, Credit Metrics, Credit Portfolio View). Further topics are Basel II, especially the underlying methodology (one factor models), and the valuation of defaultable bonds. We close with a treatment of credit derivatives.

Keynotes: Credit Risk, Risk Management

Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick

Peter Albrecht*

1	Einführung	25
2	Grundlagen von Kreditrisikomodellen	26
	2.1 Charakterisierung von Kreditrisiken	26
	2.2 Ratingsysteme	31
	2.3 Problemstellungen und Anwendungsfelder	34
3	Grundlegende Kategorien von Kreditrisikomodellen	35
	3.1 Statische Modellierung der Ausfallverteilung	35
	3.1.1 Ausfallverteilung eines Kreditportfolios	35
	3.1.2 Bedingte und gemischte Ausfallverteilungen	40
	3.1.3 Einfaktormodell für Bonitätsindikatoren	44
	3.1.4 Mehrfaktormodelle für Bonitätsindikatoren	48
	3.1.5 Poissonapproximation	51
	3.2 Unternehmenswertmodelle	54
	3.2.1 Das Basismodell von Merton (1974)	54
	3.2.2 Merton-Einfaktormodell	61
	3.2.3 Erweiterung des Merton-Basismodells	62
	3.2.4 Mehr-Unternehmens-Fall	64
	3.3 Reduktionsmodelle I : Zählprozesse als Ausfallerzeuger	66
	3.3.1 Ein-Unternehmens-Fall	66
	3.3.2 Mehr-Unternehmens-Fall	70
	3.4 Reduktionsmodelle II : Ratingbasierte Modelle	73
	3.5 Ausblick	76
4	Industriemodelle	77
	4.1 Eine erste Übersicht	77
	4.2 Credit Risk[±] : Das Basismodell	78
	4.3 Das KMV-Modell	82
	4.4 Credit Metrics	84
	4.4.1 Grundstruktur	84
	4.4.2 Analyse auf Finanztitelebene	85
	4.4.3 Bestimmung von Ausfallkorrelationen: Zwei-Unternehmens-Fall	89
	4.4.4 Bestimmung von Ausfallkorrelationen: Faktormodell	96
	4.5 Credit Portfolio View	98
5	Basel II	101
	5.1 Modelltheoretische Grundlagen: Einfaktormodell	101
	5.2 Kapitalunterlegungsvorschriften	103
6	Bewertung ausfallbedrohter Zinstitel	109
	6.1 Zur Zinsstruktur von Unternehmensanleihen	109
	6.2 Das Modell von Fons	112
	6.3 Beziehungen zwischen ausfallfreien und ausfallbedrohten Zerobonds	114
	6.3.1 Beziehungen bei Unabhängigkeit von Ausfallzeiten und Zinsprozess	114
	6.3.2 Der allgemeine Fall	117
	6.4 Bewertung im Merton/KMV-Modell	119

* Universität Mannheim; Lehrstuhl für ABWL, Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft; Schloss, Raum O 223; 68131 Mannheim; <http://www.bwl.uni-mannheim.de/Albrecht/index.php>; email: risk@bwl.uni-mannheim.de

6.5	Bewertung in Intensitätsmodellen.....	121
6.6	Bewertung in Migrationsmodellen.....	129
7	<u>Kreditderivate</u>	132
7.1	Überblick über Kreditderivate.....	132
7.1.1	Credit Default Swap.....	132
7.1.2	Credit Spread-Produkte.....	134
7.1.3	Total Return Swap.....	136
7.1.4	Credit Linked Notes.....	137
7.2	Zur Bewertung von Kreditderivaten.....	138
Anhang 16A: Erweiterung des Credit Risk⁺ -Basismodells.....		141
Anhang 16B: Diversifikation idiosynkratischer Risiken im Einfaktormodell.....		144
Literaturhinweise.....		146

1 Einführung

Seit Mitte der 90er Jahre hat die Messung, Bewertung und Steuerung von Kreditausfallrisiken in Wissenschaft und Praxis verstärkte Aufmerksamkeit erfahren. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Ein entscheidender Impuls ging dabei von bankaufsichtsrechtlichen Entwicklungen (Stichwort: [Basel II](#)) aus, die auf eine risikoadäquate Kapitalunterlegung von Kreditrisiken abzielen sowie der diese Entwicklung begleitenden methodischen, empirischen und politischen Diskussion. Der sich verstärkt entwickelnde Handel mit Kreditrisiken macht eine Bewertung dieser Risiken ebenfalls notwendig. Auch für Versicherungsunternehmen wird künftig infolge der Einführung von [Solvency II](#) die Bewertung von Ausfallrisiken im Rahmen der Kapitalanlage (sowie im Rahmen von Rückversicherungsbeziehungen) verstärkt an Bedeutung gewinnen.

Die Messung und Bewertung von Kreditrisiken stellt sich aktuell als ein sehr heterogenes Gebiet dar. Es hat sich keine einheitliche Vorgehensweise herausgebildet, stattdessen existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Ansatzpunkte und Modelle. Aus diesem Grund wird in dem vorliegenden Beitrag versucht, einen systematischen Überblick über Problemfelder, Modellierungsansätze und Methoden des Risikomanagements im Kontext von Kreditrisiken zu geben.

Nach einem ersten Abriss über die Charakterisierung von Kreditrisiken und der Behandlung von Ratingsystemen in Abschnitt 2 werden in Abschnitt 3 die vier grundlegenden Kategorien von Kreditrisikomodellen (statische Modellierung der Ausfallverteilung, Unternehmenswertmodelle, Intensitätsmodelle und ratingbasierte Modelle) ausführlich erörtert. Es folgt in Abschnitt 4 eine detaillierte Darstellung der wichtigsten Industriemodelle (Credit Risk⁺, KMV, Credit Metrics, Credit Portfolio View). Abschnitt 5 behandelt die Grundzüge von Basel II und der hierbei zugrunde liegenden modelltheoretischen Fundierung in Form von Einfaktormodellen. Abschnitt 6 widmet sich umfassend der Bewertung von ausfallbedrohten Zinstiteln und Abschnitt 7 befasst sich abschließend mit Kreditderivaten und (exemplarisch) deren Bewertung.

2 Grundlagen von Kreditrisikomodellen

2.1 Charakterisierung von Kreditrisiken

Zunächst ist festzuhalten, dass der Terminus *Kreditrisiko* in einem verschieden weiten Verständnis gebraucht wird. Das Kreditrisiko im engeren Sinne umfasst das *Ausfallrisiko* (*Default Risk*), das Risiko, dass der Schuldner eines Kredits nicht in der Lage ist, seinen Zahlungsverpflichtungen (beispielsweise die Zinszahlungen oder die Rückzahlung des Kreditbetrages) in vollständiger Weise nachzukommen. Das Kreditrisiko im weiteren Sinne umfasst das *Migrationsrisiko* (*Credit Migration*). Dieses beinhaltet das Risiko einer Bonitätsverschlechterung (einhergehend etwa mit einer Ratingabstufung) und damit einer Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit. Der Unterschied zwischen diesen beiden Varianten des Kreditrisikos liegt offenbar in der Behandlung des zeitlichen Aspekts. Das Ausfallrisiko zu einem bestimmten Zeitpunkt t (etwa heute) bezieht sich auf eine fixierte künftige Periode $[t, T]$ und wird für diese Periode als unveränderlich betrachtet. Das Migrationsrisiko berücksichtigt zusätzlich die Gefahr, dass sich das Ausfallrisiko auch während der fixierten künftigen Periode verschlechtern kann, was seinen Niederschlag etwa in einer entsprechenden Ratingherabstufung findet.

Diesen beiden verschieden weiten Varianten des Kreditrisikos entsprechen auf der Modellebene zwei grundsätzliche Modellvarianten, *Default Mode-Modelle* (*Ausfallmodelle*) auf der einen Seite und *Mark to Market-Modelle* auf der anderen. Im Rahmen von Default Mode-Modellen beschränkt man sich auf die Quantifizierung von Ausfallrisiken. Solche Modelle werden eingesetzt im traditionellen Kreditgeschäft der Banken. Diese Kredite werden üblicherweise nicht gehandelt, daher existieren keine Marktpreise. Ebenso werden sie in der Regel nicht verkauft, d.h. die Haltezeit entspricht der restlichen Laufzeit des Kredits. Anwendung finden Ausfallrisikomodelle ebenfalls im Rahmen der Bewertung von nicht börsengehandelten Anleihen. Mark to Market-Modelle werden eingesetzt zur Bewertung aller Arten von börsengehandelten Schuldtiteln, beispielsweise Anleihen, ausfallbedrohte OTC-Derivate sowie Kreditderivate.

Abbildung 1 illustriert noch einmal die vorstehend erörterten Basisvarianten des Kreditrisikos sowie die damit einhergehende Modelldifferenzierung.

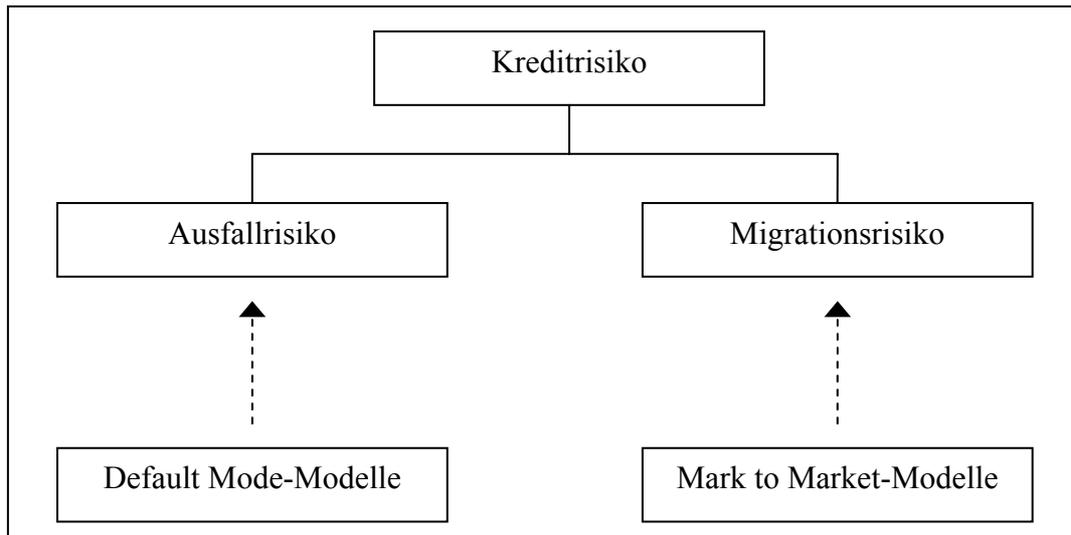


Abb. 1: Basisvarianten von Kreditrisiken und Kreditrisikomodellen

Wenden wir uns nunmehr dem *Basismodell des Ausfallrisikos* zu. Wir betrachten hierzu einen Individualkredit und definieren eine Verlustvariable $L \geq 0$ (*Ausfallhöhe*), die die Höhe des möglichen Ausfalls am Ende einer fixierten Periode (beispielsweise ein Monat oder ein Jahr) erfasst. Das Basismodell des Ausfallrisikos ist mithin ein statisches Modell. In seinem Rahmen gilt die folgende fundamentale Beziehung:

$$(1) \quad L = EAD \cdot LGD \cdot D .$$

Dabei bedeutet EAD den *ausfallbedrohten Betrag (Exposure at Default)*. Dieser entspricht der Höhe der noch offenen Forderung zum Zeitpunkt des Ausfalls. Mit *LGD (Loss Given Default)* wird die *Verlustquote* bei Eintritt eines Ausfalls bezeichnet, d.h. der Anteil der offenen Forderungshöhe, der infolge des Ausfalls verloren ist. Alternativ hierzu betrachtet man die *Wiedereinbringungsquote (Recovery Rate) RC* und es gilt $RC = 1 - LGD$. Schließlich bezeichnet *D* den *Ausfallindikator (Default Indicator, Default Variable)*. Diese ist eine zweiwertige Zufallsgröße mit

$$(2) \quad D = \begin{cases} 1 & \text{ein Ausfall tritt ein} \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Grundsätzlich ist jede Komponente der Basisbeziehung (1) eine Zufallsgröße, wobei zur Modellvereinfachung bzw. aus didaktischen Gründen oftmals *EAD* und *LGD* (zunächst) als de-

terministische Größen aufgefasst werden. Unterstellt man, dass die Basisgrößen EAD , LGD sowie D jeweils stochastisch unabhängig sind, so gilt für die erwartete Ausfallhöhe

$$(3a) \quad E(L) = E(EAD) \cdot E(LGD) \cdot PD ,$$

wobei

$$(3b) \quad PD = P(D = 1)$$

die *Ausfallwahrscheinlichkeit (Default Probability)* bezeichnet. Die Grundgrößen von Ausfallrisikomodellen sind mithin der ausfallbedrohte Betrag, die Verlust- bzw. Wiedereinbringungsquote sowie die Ausfallwahrscheinlichkeit. Im Rahmen von Mark to Market-Modellen sind zusätzlich noch die *Migrationswahrscheinlichkeiten* zu erfassen. Betrachtet man Portfolios aus Kreditrisiken, so sind darüber hinaus noch die Korrelationen zwischen den Grundgrößen von Bedeutung.

Hinsichtlich einer Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit unterscheidet man Ansätze, die auf externen oder internen Ratings basieren, von Ansätzen, die auf Marktdaten (beispielsweise Anleihekurse oder Aktienkurse) beruhen. Voraussetzung für die letztere Kategorie von Ansätzen ist, dass der Kredit gehandelt wird (etwa Unternehmensanleihen) oder aber zumindest die Aktien des Anleiheemittenten, des Kreditschuldners, im Handel sind.

Traditionell werden Ausfallwahrscheinlichkeiten auf der Basis statistisch-ökonomischer Verfahren im Bereich der Kreditwürdigkeitsprüfung (beispielsweise Diskriminanzanalyse, Regressionsanalyse, Logit- und Probitmodelle sowie neuronale Netze) eingesetzt. Für einen Überblick verweisen wir etwa auf *Hartmann-Wendels et al.* (2004, S. 643 ff.) oder *Oehler/Unser* (2002, S. 207 ff.), ferner auf *Kaiser/Szczesny* (2003), *Müller/Härdle* (2004) sowie *Wingenroth* (2004, S. 103 ff.). Eine Problematik dieser Modellansätze besteht darin, dass ein großer Teil der Inputgrößen dem externen Rechnungswesen entnommen sind und damit nur jährlich oder bestenfalls vierteljährlich auf den neuesten Stand gebracht werden. Die relevanten Daten liegen damit nur mit einer gewissen Zeitverzögerung vor und hinken der Marktdynamik, insbesondere im Falle von gehandelten Unternehmensanleihen, hinterher. Dies hat zu einer verstärkten Aufmerksamkeit für Kreditrisikomodelle geführt, in die insbesondere der

aktuelle Aktienkurs des Emittenten als Information eingeht, wie etwa die im weiteren Verlauf dargestellten Unternehmenswertmodelle, beispielsweise [KMV](#) oder [Credit Metrics](#).

Die zu erreichenden Recovery Rates sind primär abhängig zum einen von der bestehenden *Besicherung (Collateral)* der Kredite bzw. Schuldtitel sowie zum anderen von der *Vorrangigkeit* der Bedienung des Gläubigers im Falle der Insolvenz. Die Besicherung wird in den *Anleihebedingungen (Bond Indentures)* näher geregelt. Sie kann dinglicher Art (Grundschild, Hypothek, Wertpapiere) oder persönlicher Art sein (beispielsweise Patronatserklärung seitens der Muttergesellschaft). Anleihen ohne Sicherheiten (der Regelfall) werden als *Debentures* bezeichnet. Der Rang einer Anleihe bestimmt, in welcher Reihenfolge die Gläubiger an der Verwertung des Unternehmensvermögens partizipieren. *Senior Bonds* liegen dabei im Rang vor anderen Forderungen, *Subordinated Bonds* sind nachrangige Anleihen, d.h. sie werden im Insolvenzfall erst aus dem Unternehmensvermögen bedient, wenn vorrangige Anleihen befriedigt worden sind. Allerdings besteht beim Rang von Anleihen eine Problematik darin, dass im Insolvenzfall bei der Aushandlung von Konkursquoten ex ante bestehende Vorrangigkeiten gegebenenfalls außer Kraft gesetzt werden können. Meist wird dann jede Wertpapiergattung mit einem Teil des Liquidationsergebnisses befriedigt. Allerdings besitzt der Rang einen entscheidenden Einfluss auf die Höhe des Liquidationserlöses, der der Anleihe zuerkannt wird. In Anlehnung an *Wingenroth* (2004, S.18) gibt die nachfolgende Abbildung 2 eine Strukturierung der Rangfolge von Unternehmensanleihen im Insolvenzfall.

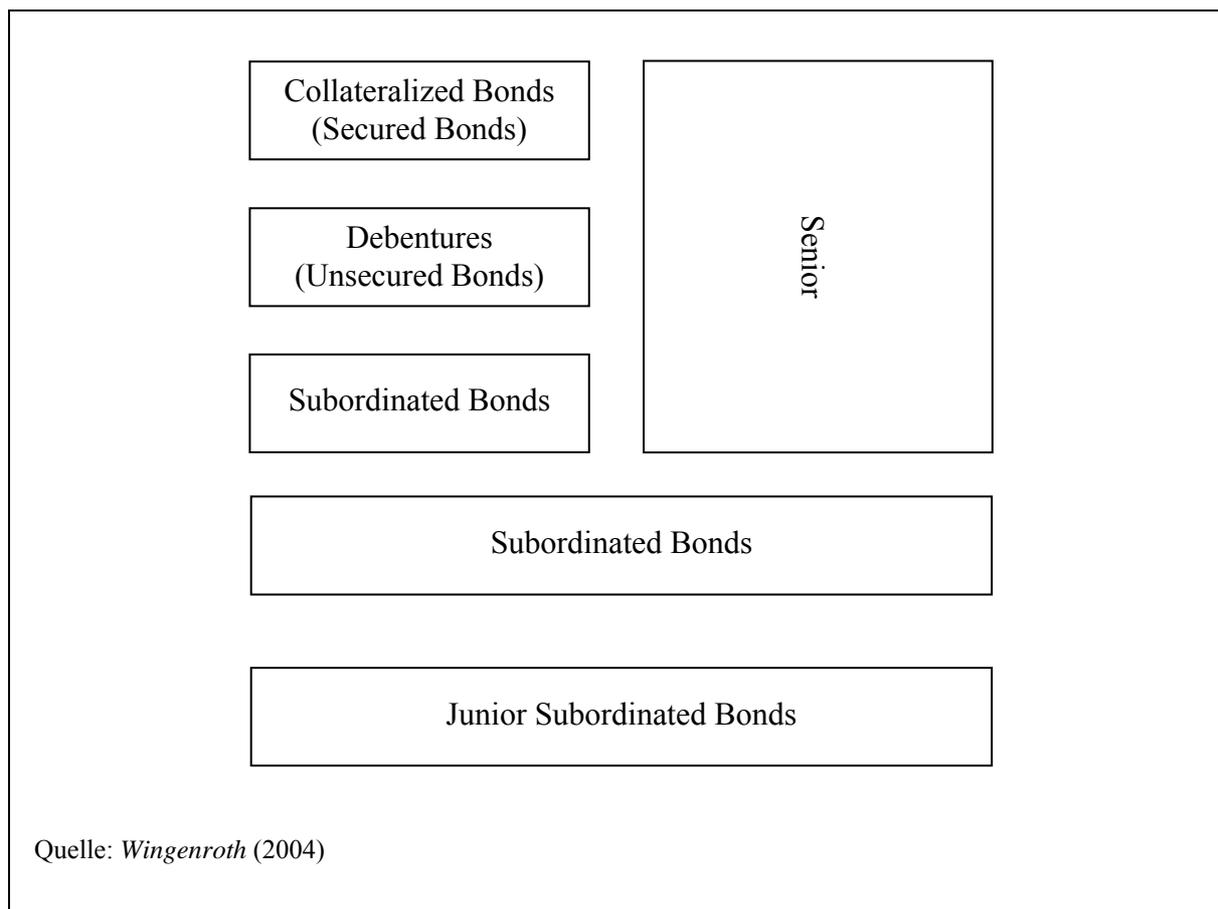


Abb. 2: Rangfolge von Anleihen im Insolvenzfall

Die Größenordnung von Recovery Rates wird jährlich von Ratingagenturen veröffentlicht. Die Tabelle 1 entstammt einer aktuellen Studie von [Moody's](#), vgl. *Hamilton et al. (2005)*, beruht auf dem Zeitraum 1982 – 2004 und bezieht sich auf die weltweite Datenbank von [Moody's](#).

	Mittelwert	Median	Std.-Abw.	Min	Max
Sr. Secured	57,4	55,3	14,3	35,7	83,6
Sr. Unsecured	44,9	45,2	11,2	23,1	62,8
Sr. Subordinated	39,1	43,5	11,4	20,3	67,9
Subordinated	32,0	33,4	10,5	12,3	46,2
Jr. Subordinated	28,9	23,7	18,9	7,8	62,0

Angaben in Prozent; Quelle: *Hamilton et al. (2005, S. 34)*

Tab. 1: Recovery Rates von Unternehmensanleihen 1982 – 2004

Die Tabelle 1 macht deutlich, dass die Recovery Rates auch innerhalb einer Rangklasse deutliche statistische Schwankungen aufweisen und ein deterministischer Ansatz daher unbefriedigend ist.

digend ist. Ein Standardansatz besteht dabei darin, mit einer Beta-Verteilung 1. Art über das Intervall $(0,1)$ als Zufallsgesetzmäßigkeit für die Recovery Rate-Verteilung zu arbeiten.

Daneben weisen Recovery Rates auch eine Zeitvariabilität auf. Eine differenziertere statistische Prognose von Recovery Rates ermöglicht der von [Moody's KMV](#) entwickelte [Loss CalcTM \(Version 2.0\)](#), zu den entsprechenden Details vgl. [Gupton/Stein \(2005\)](#).

Insgesamt erweist sich damit neben der Ermittlung von Ausfallwahrscheinlichkeiten die Ermittlung realistischer Recovery Rates als zentral für die Güte eines Kreditrisikomodells. Auch für die Kurse ausfallbedrohter Anleihen ist die Recovery Rate ein zentraler Einflussfaktor.

2.2 Ratingsysteme

Ratings basieren auf der Einordnung von Schuldnern, beispielsweise Emittenten von Staats- oder Unternehmensanleihen, in eine von K Ratingklassen. Das Rating kann dabei bankintern sein oder auf dem externen Rating einer Ratingagentur beruhen. Die Tabelle 2 stellt die Ratingklassen und die damit verbundenen Ratingsymbole der Ratingagenturen [Standard & Poor's](#) und [Moody's Investor Service](#) dar.

S & P	Moody's	Interpretation
Investment-grade ratings		
AAA	Aaa	Highest quality, extremely strong
AA+	Aa1	High quality
AA	Aa2	
AA-	Aa3	
A+	A1	Strong payment capacity
A	A2	
A-	A3	
BBB+	Baa1	Adequate payment capacity
BBB	Baa2	
BBB-	Baa3	
Speculative-grade ratings		
BB+	Ba1	Likely to fulfill obligations, ongoing uncertainty
BB	Ba2	
BB-	Ba3	
B+	B1	High risk obligations
B	B2	
B-	B3	
CCC+	Caa1	Current vulnerability to default
CCC	Caa2	
CCC-	Caa3	
CCC		
C	Ca	In bankruptcy or default, or other marked shortcoming
D		
Quelle: Schmid (2004, S. 17)		

Tab. 2: Ratingklassen/Ratingsymbole für Long Term Senior Debt

Die Ratingklassen spiegeln dabei bestimmte (typischerweise einjährige) implizite Ausfallwahrscheinlichkeiten wider, die sich durch historische Ausfallwahrscheinlichkeiten empirisch bestimmen lassen. Da die Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht stationär sind, ist dabei die gewählte Stützperiode von Bedeutung. Das Gleiche gilt für die Wahrscheinlichkeiten einer einperiodigen Ratingänderung (Migrationswahrscheinlichkeiten). Die Schmid (2004, S. 23) entnommene Tabelle 3 dokumentiert die Migrations- und Ausfallwahrscheinlichkeiten im historischen Durchschnitt der Jahre 1980 – 2002 für das Standard & Poor's-Rating. Dabei wurde eine No Report-Bereinigung, d.h. eine getrennte Erfassung und Adjustierung von Abgängen, aus der Grundgesamtheit, die nicht auf einen Ausfall zurückzuführen sind, vorgenommen.

Initial Rating	Rating at year end							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	93.06	6.29	0.45	0.14	0.06	0.00	0.00	0.00
AA	0.59	90.99	7.59	0.61	0.06	0.11	0.02	0.01
A	0.05	2.11	91.43	5.63	0.47	0.19	0.04	0.05
BBB	0.03	0.23	4.44	88.98	4.70	0.95	0.28	0.39
BB	0.04	0.09	0.44	6.07	82.73	7.89	1.22	1.53
B	0.00	0.08	0.29	0.41	5.32	82.06	4.90	6.95
CCC	0.10	0.00	0.31	0.63	1.57	9.97	55.82	31.58
D	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Quelle: Schmid (2004); Standard & Poor's

Tab. 3: Durchschnittliche einjährige Migrations- und Ausfallwahrscheinlichkeiten, Stützperiode 1980 - 2002

Die Ratings werden dabei in Abhängigkeit von der Änderung der Bonität der Schuldner im Zeitverlauf angepasst. Zwischenberichte werden in Form eines *Rating Outlook* (etwa: positive, negative, stable, developing) gegeben, die Tendenzaussagen enthalten, aber nicht zwangsläufig exekutiert werden müssen, da sich im weiteren Verlauf eine neue Informationslage ergeben kann.

Ratinginformationen weisen eine Reihe von Problemen auf. Ratings sind auf Stabilität angelegt. Sie spiegeln langfristige und konjunkturzyklusübergreifende Informationen wider ("rating through-the-cycle") und nicht „aktuelle“ Informationen („current-condition“ bzw. „point-in-time“ ratings) bzw. aktuelle Informationen werden nicht vollständig verarbeitet. Ratings stellen somit keine guten Schätzer für das kurzfristige Ausfallrisiko dar. Ignoriert wird ferner der Aspekt der Volatilität. Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten variieren in der Zeit, insbesondere in Abhängigkeit von konjunkturellen Einflüssen. Einen Ausweg bietet hier die Ableitung von auf den Status des Konjunkturzyklus bedingten Ratings/Ratingmigrationen, man vgl. hierzu etwa Schmid (2004, 30 ff.). Schließlich sind Ratinginformationen retrospektiver Natur, Kreditrisiken hingegen beziehen sich auf eine künftige Zeitperiode und weisen damit einen prospektiven Charakter auf.

2.3 Problemstellungen und Anwendungsfelder

Kreditrisikoanalysen auf der Basis von Kreditrisikomodellen sind für vielfältige Problemkreise und Anwendungsfelder von Relevanz, die abschließend noch stichwortartig skizziert seien:

- Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten sowie Recovery Rates
- Kreditwürdigkeitsanalyse bzw. Bonitätsprüfung
- Pricing (sowohl gehandelter als auch nicht-gehandelter) Schuldtitel
- Analyse von Kreditportfolien, insbesondere Bestimmung von Ausfallkorrelationen
- Kapitalunterlegung („[Basel II](#)“)
- (Erfolgsorientierte) Steuerung von Kreditportfolien.

Versicherungsunternehmen vergeben keine Kredite, sie investieren aber in ausfallbedrohte Finanztitel (beispielsweise Anleihen oder strukturierte Produkte). Gegenparteirisiken entstehen ferner im Rahmen von Rückversicherungsverträgen. Insofern existieren für Versicherungsunternehmen die folgenden Problemfelder im Kontext von Kreditrisiken:

- Pricing ausfallbedrohter Finanztitel, vor allem von Unternehmensanleihen (Corporate Bonds)
- Asset Allocation (beispielsweise die Steuerung der simultanen Allokation in Aktien, Staatsanleihen und Corporate Bonds)
- Asset/Liability-Management (Abstimmung der Asset Allocation mit den versicherungstechnischen Verpflichtungen)
- Kapitalunterlegung („[Solvency II](#)“)
- Quantifizierung von Gegenparteirisiken.

Ferner bestehen im spezifischen Kontext der Kreditversicherung eine Vielzahl von Anlässen und Fragestellungen, die auf die Bewertung von Kreditrisiken hinauslaufen.

3 Grundlegende Kategorien von Kreditrisikomodellen

3.1 Statische Modellierung der Ausfallverteilung

3.1.1 Ausfallverteilung eines Kreditportfolios

Zur Modellierung des Ausfallrisikos eines Kreditportfolios greifen wir auf das Basismodell des Ausfallrisikos in Abschnitt 2.1 zurück. Die Ausfallhöhe L eines Einzelkredits wird dabei gemäß (1) in die Komponenten $L = EAD \cdot LGD \cdot D$ zerlegt. Die impliziten Hypothesen des Modells bestehen dabei in der Annahme einer über die Zeitperiode konstanten Ausfallwahrscheinlichkeit, was vor allem bei längeren Zeitperioden problematisch ist sowie in der Annahme, dass der Ausfall stets am Periodenende eintritt.

Der Defaultindikator D folgt einer Zweipunktverteilung (Bernoulli-Verteilung), $D \sim B(1; \pi)$, wobei $\pi = PD = P(D = 1)$ der Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht. Hieraus folgt unmittelbar

$$(4) \quad E(D) = \pi, \quad \sigma(D) = \sqrt{\pi(1-\pi)} .$$

Wie bereits in Abschnitt 2.1 betont, sind im Allgemeinen EAD bzw. LGD und damit $EAD \cdot LGD$ Zufallsgrößen. Ein Spezialfall (von primär didaktischem Nutzen) ergibt sich dadurch, dass man von einem deterministischen Ausfallbetrag $E := EAD \cdot LGD$ ausgeht. In diesem Fall gilt $L = E \cdot D$ und somit

$$(5) \quad E(L) = E \pi, \quad \sigma(L) = E \sqrt{\pi(1-\pi)} .$$

Betrachten wir nunmehr ein Portfolio aus n Krediten mit Verlustvariablen (potenzielle Ausfallhöhe) L_i ($i = 1, \dots, n$) und entsprechend definierten Größen EAD_i , LGD_i sowie D_i . Der Portfolioverlust, den wir der Einfachheit wegen ebenfalls mit L bezeichnen, ist dann gegeben durch

$$(6) \quad L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n EAD_i \cdot LGD_i \cdot D_i .$$

Wie zuvor sei insbesondere der didaktische Spezialfall eines deterministischen Ausfallsbetrags $E_i = EAD_i \cdot LGD_i$ betrachtet. Wir definieren dann zunächst die gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten $\pi_{ij} (i \neq j)$ durch

$$(7) \quad \pi_{ij} = P(D_i = 1, D_j = 1) .$$

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht somit der Wahrscheinlichkeit, dass sowohl der Kredit i als auch der Kredit j am Ende der Periode ausfällt. Unter Benutzung der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten folgt nun für die *Ausfallkorrelation* ρ_{ij}

$$(8) \quad \rho_{ij} := \rho(D_i, D_j) = \frac{\pi_{ij} - \pi_i \pi_j}{\sigma_i \sigma_j} ,$$

wobei $\sigma_i = \sigma(D_i) = \sqrt{\pi_i(1-\pi_i)}$ und $\sigma_j = \sigma(D_j) = \sqrt{\pi_j(1-\pi_j)}$.

Man erkennt für den Spezialfall eines deterministischen Exposures, dass die Ausfallverteilung des Portfolios nicht nur von den individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten bestimmt wird, sondern auch von den Ausfallkorrelationen. Im allgemeinen Falle (6) treten weitere Korrelationen hinzu.

Für das gesamte Portfolio gilt in dem betrachteten Spezialfall dann

$$(9) \quad L = E_1 D_1 + \dots + E_n D_n = \sum_{i=1}^n E_i D_i$$

und damit

$$(10a) \quad E(L) = \sum_{i=1}^n E_i \pi_i$$

sowie

$$(10b) \quad \sigma(L) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i E_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} .$$

Man beachte, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten π_i sowohl den erwarteten Portfolioverlust als auch aufgrund von (8) die Portfoliostandardabweichung beeinflussen. Damit sind die Parameter $E(L)$ und $\sigma(L)$ an sich nicht unabhängig festsetzbar.

Weitere Informationen über den Portfolioverlust erhält man durch Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfolioverlusts.

Betrachten wir zunächst den Fall unabhängiger Defaultvariablen und eines einheitlichen Exposures E . In diesem Fall gilt mit $D := D_1 + \dots + D_n$

$$(11) \quad L = DE .$$

Die Portfolioausfallverteilung wird damit bestimmt durch die Verteilung der Anzahl der Ausfälle im betrachteten Kollektiv. Als Summe von unabhängigen Bernoulli-Verteilungen ist D binomialverteilt mit den Parametern n und p , $D \sim B(n, p)$. Insbesondere gilt ($k = 0, \dots, n$)

$$(12) \quad P(D = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Die Beziehung (12) liefert die Wahrscheinlichkeit für genau k Ausfälle bei n Krediten. Abbildung 3 illustriert diese Situation für $n = 200$ Kredite und $p = 5\%$.

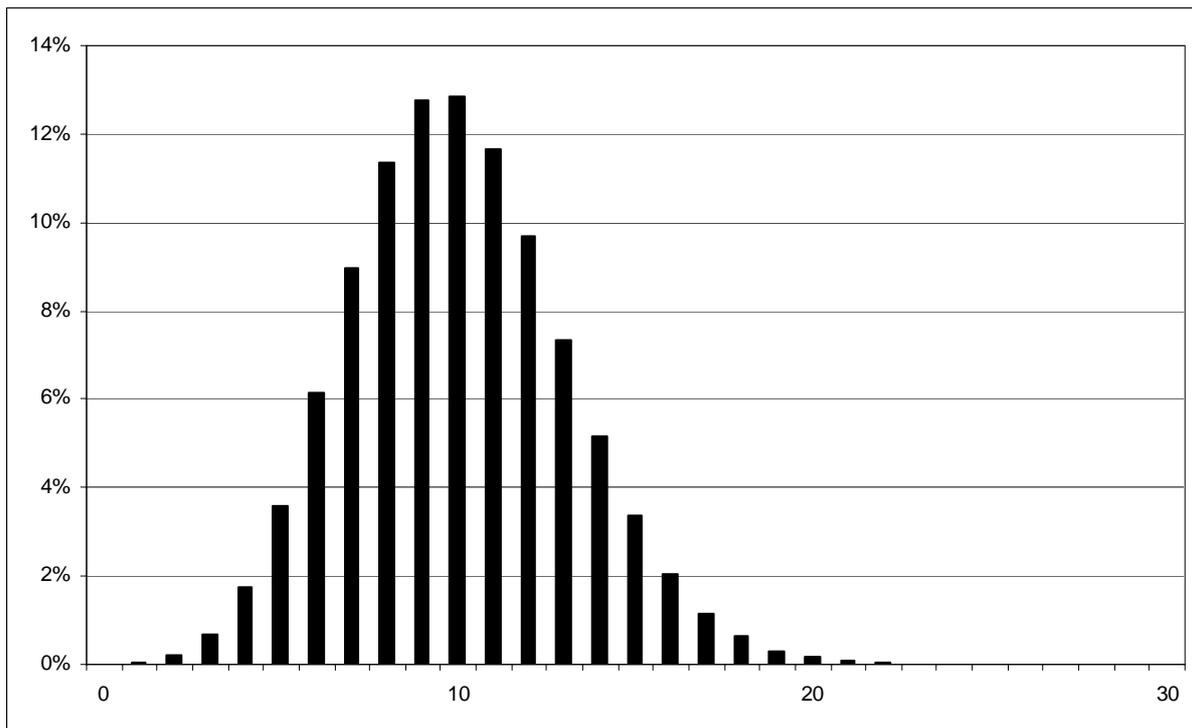


Abb. 3: Portfolioausfallverteilung bei unabhängigen Risiken

Für wachsende Kollektive nähert sich die Binomialverteilung der Normalverteilung an. Dies kennzeichnet auch den allgemeinen Fall bei unabhängigen Defaultvariablen. Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes gilt für (sehr) große n für $L_n = D_1 E_1 + \dots + D_n E_n$ (hier wird im Unterschied zu (9) noch die Abhängigkeit von der Portfoliogröße explizit gemacht) approximativ

$$(13) \quad P(L_n \leq x) \approx N[x; E(L_n), \text{Var}(L_n)] .$$

Die Portfolioverlustverteilung kann damit durch eine Normalverteilung mit den Parametern $E(L_n)$ und $\sigma(L_n)$ approximiert werden. Aufgrund der im Kreditkontext typischerweise vorliegenden Ausfallkorrelationen ist diese Approximation jedoch wenig realistisch.

Im allgemeinen Fall müssen daher alternative analytische Resultate abgeleitet (man vgl. hierzu etwa [Vasicek, 1991](#), sowie [Schönbucher, 2002](#)) oder alternative Verteilungsapproximationen (etwa die Beta-Verteilung, vgl. etwa [Bluhm et al., 2003](#), S. 38 f., oder die Normal Power-Verteilung, vgl. etwa [O'Connor et al., 1999](#)) verwendet werden. Eine weitere Alternative, auf die standardmäßig zurückgegriffen wird, ist schließlich die Methode der stochastischen Simulation ([Monte Carlo-Simulation](#), vgl. etwa [Bluhm et al., 2003](#), S. 34 ff.). Abbildung 4 illust-

riert eine idealtypische „realistische“ Portfolioverlustverteilung, die im Vergleich zum Normalverteilungsfall deutlich rechtsschief ist.

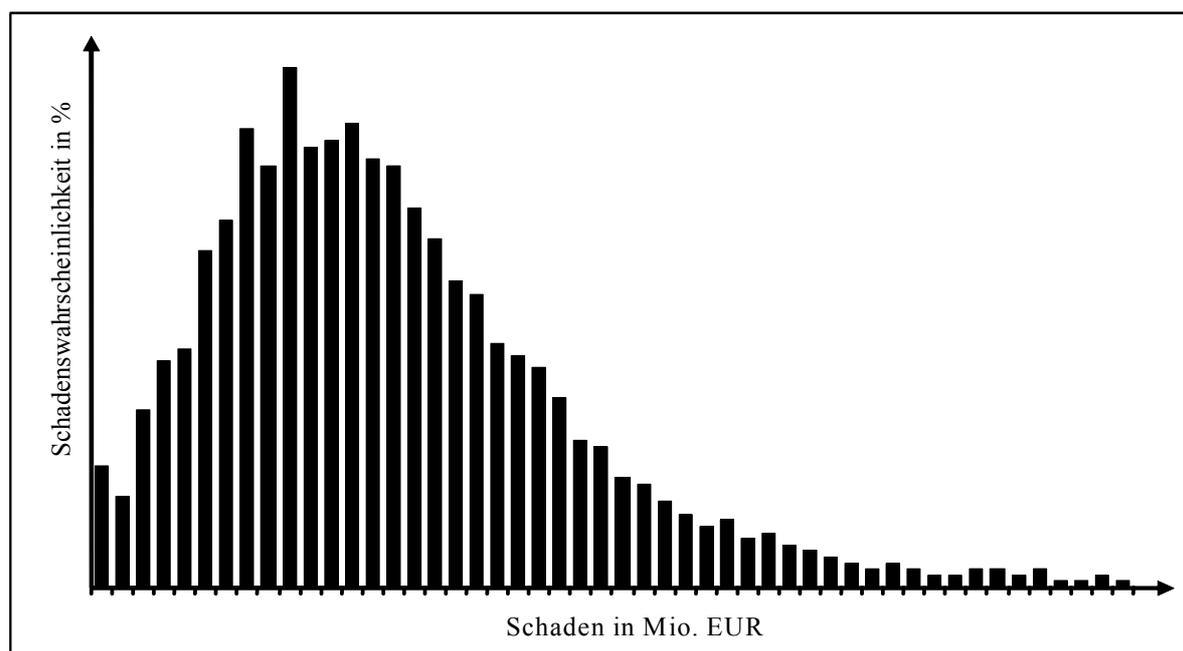


Abb. 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfolioverlustes

Die Portfolioverlustverteilung ihrerseits ist dann der Ausgangspunkt für die Kreditportfoliosteuerung. Ein erstes Beispiel hierfür ist die Risikomessung bzw. Kapitalunterlegung auf der Basis der Risikomaße Value at Risk bzw. Conditional Value at Risk, man vgl. hierzu allgemein *Albrecht/Maurer 2005*, Abschnitt 3.6.5 sowie Kapitel 15.

Entsprechend definieren wir den Credit-Value at Risk $CrVaR_\alpha$ zum Konfidenzniveau α durch die Forderung

$$(14a) \quad P(L > CrVaR_\alpha) = \alpha$$

sowie den Conditional Credit-Value at Risk $CCrVaR_\alpha$ durch

$$(14b) \quad CCrVaR_\alpha := E[L \mid L > CrVaR_\alpha] .$$

Die Differenz zwischen dem gemäß $CrVaR$ bzw. $CCrVar$ bestimmten Kapital und dem erwarteten Portfolioverlust $E(L)$ wird auch als *ökonomisches Kapital* bezeichnet.

Auf der Grundlage dieser VaR-Kapitalien bzw. dem jeweiligen ökonomischen Kapital entfalten sich weitere Elemente der Kreditportfoliosteuerung. So etwa die Bestimmung der Risikobeiträge (Risk Contribution) der einzelnen Kredite bzw. Kreditsegmente zum Gesamtkreditrisiko und damit einhergehend die Kreditrisikokapitalallokation. Das Pricing der Kreditrisiken kann über die Festlegung von risikoadjustierten Mindestmargen erfolgen, etwa in der Form (jeweils auf Segmentebene)

Erwarteter Kreditverlust

+ *Kosten des Vertragsprozesses*

+ *Kosten des Kreditrisikokapitals*

- *Vergütung für das Kreditrisikokapital (Anlageerträge).*

Eine weitere Anwendung ist in Analogie zu entsprechenden Ansätzen bei der Steuerung von Marktrisiken, vgl. etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Abschnitt 15.5), das Management des Credit-RORAC (RORAC = Return on Risk Adjusted Capital), der beispielsweise auf der Basis des Credit-VaR definiert wird durch

$$(15) \quad CrRORAC = \frac{G}{CrVaR} .$$

Dabei entspricht G dem Ergebnis einer Periode aus dem gesamten Kreditrisikogeschäft bzw. einem Segment von Kreditrisiken. Der Fokus der Credit-RORAC-Steuerung liegt auf den risikoadjustierten Ergebnissen, nicht auf den absoluten Ergebnissen.

3.1.2 Bedingte und gemischte Ausfallverteilungen

Die Ausfallkorrelation von Krediten spielt in praxi eine wesentliche Rolle. Zur Auswertung von (10b) sind $n(n-1)/2$ Ausfallkorrelationen zu bestimmen, was für große Kreditportfolien durchaus problematisch ist. Eine Standardvorgehensweise zur Erzeugung von Ausfallkorrelationen, die demgegenüber zu einer erheblichen strukturellen Vereinfachung führt, basiert auf der Verwendung von Einflussfaktoren für den Kreditausfall und der Anwendung der Konzeption der *bedingten Unabhängigkeit*. Nehmen wir an, dass die Defaultindikatoren von einem (zufallsabhängigen) Vektor $X = (X_1, \dots, X_m)$ beeinflusst werden, der beispielsweise konjunkturelle Einflüsse und Ratingeinflüsse umfasst.

Wir analysieren nun zunächst das Kreditportfolio gegeben eine Realisation x von X . Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $\pi_i(x)$ ist dann gegeben durch

$$(16) \quad \pi_i(x) = P(D_i = 1 | X = x) .$$

Entsprechend erhalten wir für den Portfolioverlust $L = E_1 D_1 + \dots + E_n D_n$

$$(17a) \quad E[L | X = x] = \sum_{i=1}^n E_i \pi_i(x)$$

sowie allgemein

$$(17b) \quad \text{Var}(L | X = x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_i E_j \text{Cov}(D_i, D_j | X = x) .$$

Die Fixierung einer Realisation $X = x$ bedeutet, dass alle betrachteten Einflussfaktoren eine bestimmte Ausprägung (bestimmter Status der Konjunktur, bestimmtes Land, bestimmter Sektor, bestimmtes Rating) annehmen. Sind im Zufallsvektor X alle systematischen Einflüsse auf die Kreditrisiken des Portfolios erfasst, so verbleiben für jeden Einzelkredit nur noch die auf ihn wirkenden spezifischen Einflüsse (nicht-systematische bzw. idiosynkratische Einflüsse). Da diese jeweils nur kreditspezifisch wirken, kann davon ausgegangen werden, dass diese unabhängig voneinander sind. Man kann in diesem Fall somit von einer *bedingten Unabhängigkeit* ausgehen, d.h. ($i, j = 1, \dots, n$)

$$(18) \quad D_i | X = x \text{ und } D_j | X = x \text{ stochastisch unabhängig für } i \neq j .$$

Die Annahme der bedingten Unabhängigkeit beinhaltet eine erhebliche strukturelle Vereinfachung für die bedingte Varianz des Portfolioverlustes. Aufgrund von $\text{Cov}(D_i, D_j | X = x) = 0$ für $i \neq j$ folgt nunmehr

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \text{Var}(L | X = x) &= \sum_{i=1}^n E_i^2 \text{Var}(D_i | X = x) \\
 &= \sum_{i=1}^n E_i^2 \pi_i(x) [1 - \pi_i(x)].
 \end{aligned}$$

Auf der unbedingten Ebene hingegen sind die Defaultvariablen korreliert. Es gilt hierbei für $i \neq j$:

$$(20) \quad \rho(D_i, D_j) = \frac{\text{Var}[\pi(X)]}{E[\pi(X)]\{1 - E[\pi(X)]\}} > 0.$$

Hieraus resultiert somit eine positive Korrelation zwischen allen Krediten, die vollständig durch den Einflussfaktor X bestimmt wird. Die zugrunde liegenden Wirkungszusammenhänge werden in Abb. 5 nochmals grafisch festgehalten.

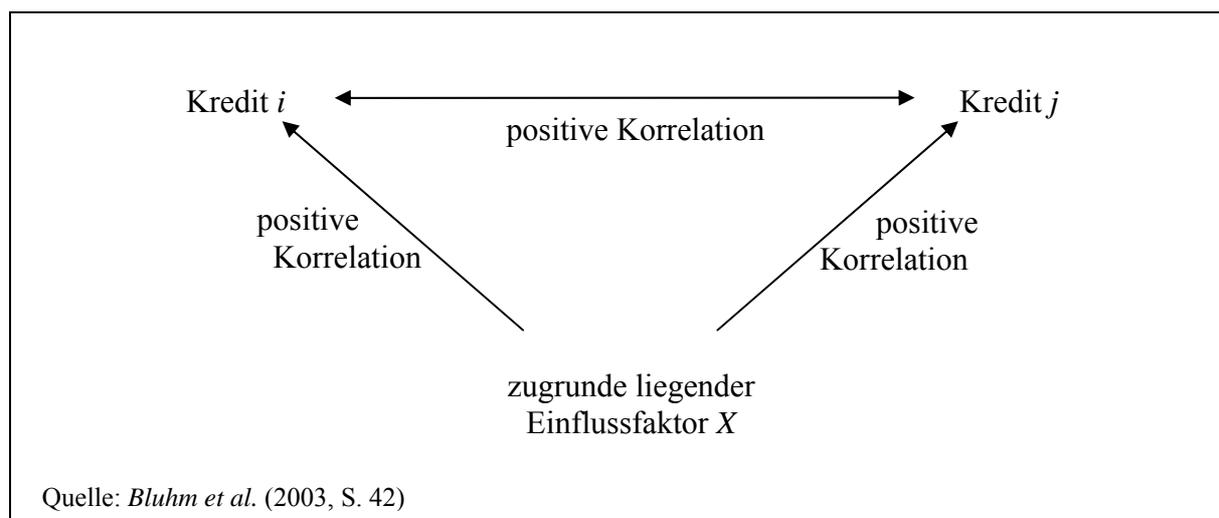


Abb. 5: Durch einen zugrunde liegenden Einflussfaktor induzierte Korrelation

Das Prinzip der Erzeugung von Ausfallkorrelationen durch einen zugrunde liegenden Faktor verbunden mit der Annahme der bedingten Unabhängigkeit erweist sich als zentral für eine Reihe von Kreditrisikomodellen und Kreditrisikoanalysen.

Weitergehende Ergebnisse lassen sich erzielen, wenn ein Zusammenhang zwischen den Defaultindikatoren und dem zugrunde liegenden Faktor spezifiziert wird. Dies wird (unter anderem) im nächsten Abschnitt aufgegriffen.

Eine verwandte Konstruktion liegt dem *Bernoulli-Mischungsmodell* zugrunde. Hierbei wird der zugrunde liegende Faktor nicht explizit spezifiziert, sondern die Ausfallwahrscheinlichkeiten werden direkt als Zufallsgrößen Π_i aufgefasst. Als Annahmen treffen wir hierbei

$$(21a) \quad D_i | \Pi_i = \pi_i \sim B(1; \pi_i)$$

$$(21b) \quad D_i | \Pi_i = \pi_i \text{ und } D_j | \Pi_j = \pi_j \text{ sind unabhängig } (i \neq j).$$

Die Bedingung (21a) besagt, dass der Defaultindikator bedingt auf jede Ausprägung π_i von Π_i bernoulliverteilt ist, d.h. wir sind dann in der Situation des Basismodells in Abschnitt 3.1.1. Es gelten hierbei die folgenden Eigenschaften:

$$(22a) \quad E(D_i) = E(\Pi_i)$$

$$(22b) \quad \text{Var}(D_i) = E(\Pi_i)[1 - E(\Pi_i)]$$

$$(22c) \quad \text{Cov}(D_i, D_j) = \text{Cov}(\Pi_i, \Pi_j) .$$

Insbesondere wird damit die Kovarianzstruktur der Defaultvariablen durch die multivariate Verteilung von (Π_1, \dots, Π_n) bestimmt.

Der Ansatz eines zugrunde liegenden Faktors ist auch hilfreich für eine weitere implizite Problematik des Basismodells des Abschnitts 3.1.1, der Stationarität der Ausfallwahrscheinlichkeiten. Dies impliziert, dass – bei Wahl eines längerfristigen Zeithorizonts – die gewonnenen Größen entweder als langjährige Durchschnittsgrößen zu interpretieren sind, oder dass – bei Wahl eines kürzerfristigen Zeithorizonts – die Werte der geschätzten Größen jeweils im Zeitablauf anzupassen sind. Ein expliziter Bezug zu zeitlich variablen Rahmenbedingungen kann hergestellt werden, wenn man zu einem bedingten Ausfallmodell übergeht.

Wir betrachten dazu allgemein einen zeitabhängigen Vektor $X_t = x_t$ von Einflussfaktoren und definieren für Unternehmen i in Periode t die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(23) \quad \pi_{it} := P(D_{it} = 1 | x_t) ,$$

wobei D_{it} den Defaultindikator von Schuldner i in Periode t bezeichne. Auch hierbei besteht die Standardvorgehensweise darin, von der Annahme der bedingten Unabhängigkeit auszugehen, woraus insbesondere $Cov(D_{it}, D_{jt} | x_t) = 0$ für i und j resultiert.

Konkretisiert man den Zusammenhang zwischen D_{it} und x_t weiter, so gelangt man etwa zu dem Standardansatz eines linearen Faktormodells der Form

$$(24) \quad D_{it} = b_{0t} + b_{1t} x_{1t} + \dots + b_{mt} x_{mt} + \varepsilon_{it} .$$

Die Faktoren x_{kt} sind dabei typischerweise makroökonomische Faktoren (BIP-Wachstum, Zinssätze) sowie mikroökonomische Faktoren (Sektorzugehörigkeit).

Der zentrale Vorteil dieser dynamisierten Betrachtungsweise liegt in der zeitnahen Modellierung und der Erleichterung der Durchführung von Prognosen.

Eine Verfeinerung des vorstehend dargestellten Ansatzes beinhaltet das Credit Portfolio View-Modell, das wir in Abschnitt 4.5 behandeln werden.

3.1.3 Einfaktormodell für Bonitätsindikatoren

Wir gehen aus von dem folgenden allgemeinen Modellzusammenhang. Gegeben seien n Kredite von n Schuldnern. Schuldner i ($i = 1, \dots, n$) sei charakterisierbar durch einen Bonitätsindikator Y_i , dessen genaue Spezifikation sich im Rahmen der jeweiligen Konkretisierung des allgemeinen Modellrahmens ergibt. Für Y_i gelte das folgende spezifische Einfaktormodell:

$$(25) \quad Y_i = \sqrt{\rho_i} F + \sqrt{1 - \rho_i} U_i .$$

Dabei seien sowohl F als auch U_i (und damit auch Y_i) jeweils standardnormalverteilte Zufallsgrößen, $F, U_i \sim N(0,1)$. Ferner seien die Zufallsgrößen F und U_i (für $i=1, \dots, n$) sowie U_i und U_j ($i, j=1, \dots, n; i \neq j$) stochastisch unabhängig.

Die Beziehung (25) besagt nun, dass die Bonitätsindikatoren der n Schuldner nur von einem gemeinsamen („systematischen“) Faktor, beispielsweise der konjunkturellen Lage, beeinflusst werden und ansonsten nur von unternehmensspezifischen („idiosynkratischen“) Gegebenheiten.

Die weitere Modellvorstellung ist nun, dass ein Ausfall des Schuldners genau dann eintritt, wenn die Bonitätsvariable eine spezifische Ausfallschranke H_i unterschreitet, d.h.

$$(26) \quad D_i = 1 \Leftrightarrow Y_i < H_i .$$

Auch hier ergibt sich die Festlegung der Ausfallschranke im Rahmen der jeweiligen Konkretisierung des allgemeinen Modellrahmens.

Wir betrachten nun wieder den Spezialfall, dass alle Kredite ein einheitliches Exposure E sowie eine identische Ausfallwahrscheinlichkeit $\pi_i = \pi$ besitzen und in Beziehung (25) alle i identisch sind, $\rho_i = \rho$. Dies hat insbesondere zur Folge, dass $\rho(Y_i, Y_j) = \rho$, d.h. dass alle Bonitätsindikatoren die gleiche Korrelation untereinander aufweisen. Im Unterschied zu dem in Abschnitt 3.1.1 betrachteten Homogenitätsfall, in dem die Unabhängigkeit der Defaultvariablen vorausgesetzt wurde, liegt hier somit eine (einheitliche) Kreditkorrelation vor.

Der Portfoliokreditausfall ist im vorliegenden Falle gegeben durch $L = E(D_1 + \dots + D_n) = ED$.

Die Anzahl $D = D_1 + \dots + D_n$ der Ausfälle in der betrachteten Periode bestimmt somit die Portfolioausfallverteilung. Für die Zahl der Ausfälle im Portfolio lässt sich unter den voranstehenden Voraussetzungen das folgende Resultat erzielen ($k = 0, \dots, n$):

$$(27) \quad P(D = k) = \binom{n}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Phi \left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right]^k \left[1 - \Phi \left(\frac{H - \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right]^{n-k} \varphi(x) dx .$$

Dieses Resultat geht zurück auf [Vasicek \(1991\)](#), man vgl. hierzu auch [Schönbucher \(2000\)](#). Entscheidend ist dabei, dass aus dem Modellansatz (25) die bedingte Unabhängigkeit der Bonitätsindikatoren Y_i gegeben eine Realisation $F = x$ des Faktors F folgt. Dies unterstreicht nochmals die im letzten Abschnitt getroffene Aussage über die Bedeutung der Annahme der bedingten Unabhängigkeit im Kontext der Analyse von Kreditrisiken.

Wir betrachten nun den *anteiligen* (relativen, prozentualen) *Portfolioverlust* relativ zum Gesamtexposure \bar{L}_n definiert durch

$$(28) \quad \bar{L}_n := \frac{D_1 E + \dots + D_n E}{n E} = \frac{1}{n} (D_1 + \dots + D_n) .$$

Dabei wird dieses Mal auch notationsmäßig die Abhängigkeit von der Größe des Kreditportfolios explizit gemacht. Es lassen sich nun die folgenden, ebenfalls auf [Vasicek \(1991\)](#) zurückgehenden, Aussagen über die Verteilungsfunktion $F_\infty(x)$ bzw. die Dichtefunktion $f_\infty(x)$ der Grenzverteilung \bar{L}_∞ von \bar{L}_n für $n \rightarrow \infty$ nachweisen:

$$(29) \quad F_\infty(x) = \Phi \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(\pi) \right] \right\}$$

$$(30) \quad f_\infty(x) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\Phi^{-1}(x) \right]^2 - \frac{1}{2\rho} \left[\Phi^{-1}(\pi) - \sqrt{1-\rho} \Phi^{-1}(x) \right]^2 \right\} .$$

Die nachfolgende Abbildung 6 illustriert diese Dichte für die Parameterkonstellation $\rho = 0.05$ und $\pi = 0.005$.

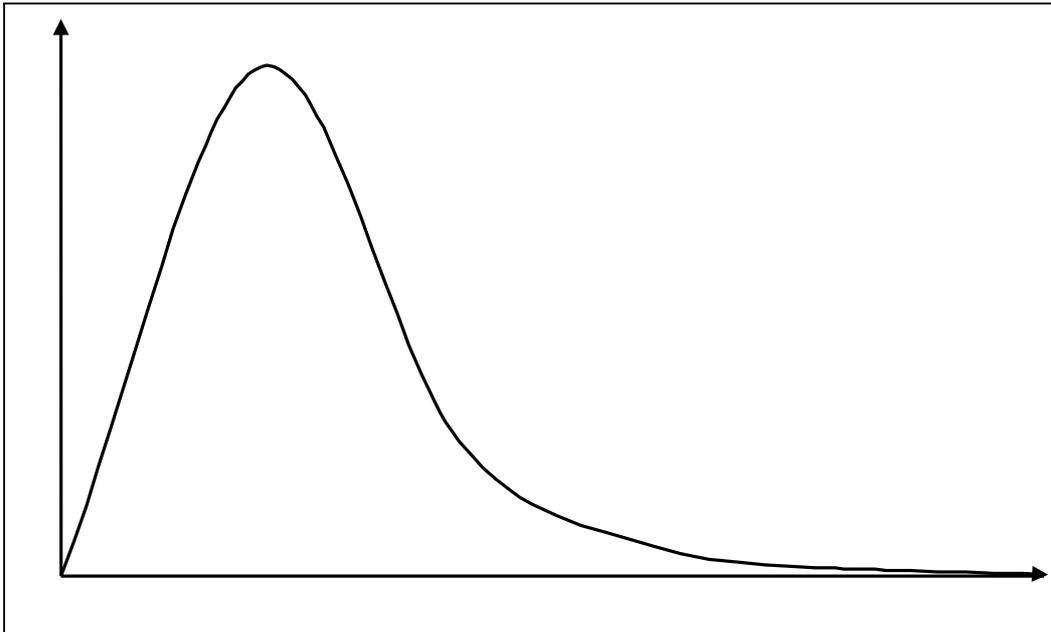


Abb. 6: Grenzdichte des anteiligen Portfolioverlustes im homogenen Einfaktormodell

Im Vergleich zu Abbildung 3, die auf der Annahme der Unabhängigkeit der Kreditrisiken beruht, resultiert im vorliegenden Fall eine deutlich höhere Rechtsschiefe.

Ferner gilt für die Grenzvariable \bar{L}_∞

$$(31a) \quad E(\bar{L}_\infty) = \pi$$

$$(31b) \quad \text{Median}(\bar{L}_\infty) = \Phi \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \Phi^{-1}(\pi) \right].$$

Weitergehende analytische Resultate für allgemeinere Portfoliokonstellationen, insbesondere auch bei Lockerung der Homogenitätsannahme, enthalten [Schönbucher \(2000, 2002\)](#), [Lucas et al. \(2001, 2002\)](#) sowie [Wehrspohn \(2003\)](#).

3.1.4 Mehrfaktormodelle für Bonitätsindikatoren

Der einfaktorische Modellansatz des Abschnitts 3.1.3 kann entsprechend auf einen Mehrfaktormodellansatz verallgemeinert werden. Wir konzentrieren uns dabei auf einen Standardansatz im Rahmen von Kreditrisikomodellen, der auf einer hierarchischen Struktur der Faktoreinflüsse beruht. Die grundsätzlichen Hierarchieebenen sind in Abbildung 7, angelehnt an *Bluhm et al.* (2003, S. 46), dargestellt, denen wir auch bei der weiteren Analyse folgen.

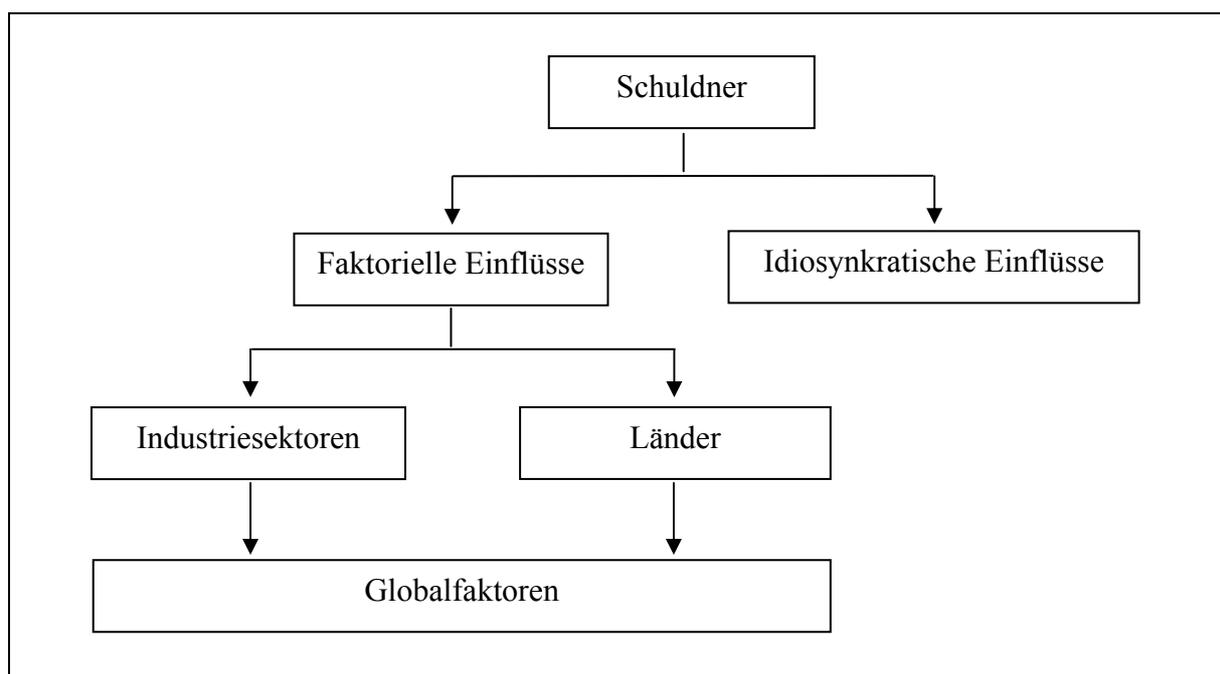


Abb. 7: Faktormodell mit einer hierarchischen Struktur über drei Ebenen

Auf der ersten Ebene gilt für die (nicht-standardisierten) Bonitätsindikatoren Y_i ein faktorieller Zusammenhang der Form

$$(32) \quad Y_i = \beta_i F_i + U_i .$$

Die Zufallsgrößen F_i und U_i sind jeweils normalverteilt, die Größen U_i sind stochastisch unabhängig ($i = 1, \dots, n$). Dies gilt ebenfalls für die Größen F_i und U_i ($i = 1, \dots, n$). Entsprechend lässt sich die Varianz zerlegen gemäß

$$(33) \quad \text{Var}(Y_i) = \beta_i^2 \text{Var}(F_i) + \text{Var}(U_i) ,$$

d.h. in einem faktoriellen (systematischen) und einen schulderspezifischen (idiosynkratischen) Einfluss.

Auf der zweiten Ebene wird jeder Faktor F_i aufgespalten in einen Industrie- bzw. Sektoranteil einerseits und einen Länderanteil andererseits:

$$(34a) \quad F_i = \sum_{j=1}^J w_{ij} G_j .$$

Dabei sind G_1, \dots, G_{j_0} Sektorindices und G_{j_0+1}, \dots, G_J Länderindices. Die Koeffizienten w_{ij} werden entsprechend als Industrie(Sektor)gewichte bzw. als Ländergewichte bezeichnet und es gilt ($i = 1, \dots, n$)

$$(34b) \quad \sum_{j=1}^{j_0} w_{ij} = \sum_{j=j_0+1}^J w_{ij} = 1 .$$

Auf der dritten und letzten Ebene werden schließlich die Größen G_j auf unabhängige globale Einflussfaktoren zurückgeführt. Es gilt dabei ($j = 1, \dots, J$)

$$(35) \quad G_j = \sum_{k=1}^K b_{jk} H_k + \varepsilon_k .$$

Verwendet man für die einzelnen Ebenen die Matrix/Vektorschreibweise, so erhalten wir $G = AH + \varepsilon$ auf Ebene 3, $F = WG$ auf Ebene 2 und $Y = BF + U$ auf Ebene 1, dabei ist B hier eine Diagonalmatrix. Insgesamt erhalten wir damit das spezifische Faktormodell

$$(36) \quad Y = BW(AH + \varepsilon) + U .$$

Im Unterschied zu einem allgemeinen Faktormodell der Form $Y = BF + U$, vergleiche etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Anhang 7C), ist das vorliegende Faktormodell durch eine spezifische Faktorstruktur gekennzeichnet.

Zur Analyse der Korrelation der Bonitätsvariablen gehen wir zunächst über zu den standardisierten Bonitätsvariablen ($\sigma_i := \sigma(Y_i)$)

$$(37a) \quad Y_i^* := [Y_i - E(Y_i)] / \sigma_i .$$

Hieraus folgt die alternative Faktordarstellung ($i = 1, \dots, n$)

$$(37b) \quad Y_i^* = \frac{\beta_i}{\sigma_i} F_i^* + U_i^* ,$$

mit normalverteilten Faktoren F_i^* und U_i^* , für die $E(F_i^*) = E(U_i^*) = 0$ gilt. Für die Korrelationen der standardisierten Bonitätsindikatoren folgt hieraus

$$(38) \quad \rho(Y_i^*, Y_j^*) = \text{Cov}(Y_i^*, Y_j^*) = E(Y_i^* Y_j^*) = \frac{\beta_i \beta_j}{\sigma_i \sigma_j} E(F_i^* F_j^*) .$$

Gemäß *Albrecht/Maurer* (2005, Beziehung 6.83) gilt für das Bestimmtheitsmaß

$$(39) \quad R_i^2 = \beta_i^2 \frac{\text{Var}(F_i)}{\text{Var}(Y_i)} = \left[\frac{\beta_i}{\sigma_i} \sigma(F_i) \right]^2 .$$

Setzen wir dies in (38) ein und beachten $\sigma(F_i) = \sigma(F_i^*)$ – es wurde ja nur eine deterministische Verschiebung der F_i vorgenommen –, so erhalten wir

$$(40) \quad \rho(Y_i^*, Y_j^*) = \frac{R_i R_j}{\sigma(F_i^*) \sigma(F_j^*)} E(F_i^* F_j^*) = R_i R_j \rho(F_i^*, F_j^*) .$$

Wir standardisieren nunmehr noch die Beziehung (37a) zu

$$(41) \quad Y^* = \tilde{B}W(A\tilde{H} + \tilde{\varepsilon}) + \tilde{U} = \tilde{B}F^* + \tilde{U} .$$

Dabei ist \tilde{B} eine Diagonalmatrix mit Elementen β_i / σ_i und es gilt $E(\tilde{H}) = E(\tilde{\varepsilon}) = E(\tilde{U}) = 0$. Darüber hinaus werden die Risiken $\tilde{\varepsilon}$ und \tilde{U} als untereinander unabhängig und sowie unabhängig von \tilde{H} angenommen. Es lässt sich nun das folgende Resultat nachweisen, vgl. hierzu *Bluhm et al.* (2003, S. 49 f.), das auf der angenommenen spezifischen Faktorstruktur beruht:

$$(42) \quad E(Y_i^* Y_j^*) = W [A E(\tilde{H} \tilde{H}^T) A^T + E(\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^T)] W^T .$$

Die Matrizen $E(\tilde{H} \tilde{H}^T)$ und $E(\tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^T)$ sind dabei Diagonalmatrizen.

3.1.5 Poissonapproximation

Zur Darstellung der Poissonapproximation betrachten wir die Größe $D = \sum_{i=1}^n D_i$, die (potenzielle) Anzahl von Ausfällen in der betrachteten Periode und definieren den Parameter λ durch

$$(43) \quad \lambda := E(D) = \sum_{i=1}^n \pi_i .$$

Wir approximieren nun die Verteilung von D durch die Poissonverteilung mit dem Parameter λ , $D \sim Po(\lambda)$. Hieraus folgt

$$(44) \quad P(D = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Dies charakterisiert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den n betrachteten Schuldnern genau k ausfallen. Ferner gilt im Rahmen der Poissonverteilung

$$(45) \quad E(D) = Var(D) = \lambda .$$

Unter der Poissonannahme stimmen die erwartete Anzahl von Defaults sowie die Varianz der Defaults überein. Der Parameter λ wird als *Ausfallintensität* des betrachteten (Teil-)Kollekt-

tivs von Kreditrisiken bezeichnet. Eine alternative Vorgehensweise, die ebenfalls auf (44) führt, besteht darin, für jeden Defaultindikator D_i direkt eine Poissonapproximation $D_i \sim Po(\lambda_i)$ vorzunehmen und dann $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ zu setzen. Beide Vorgehensweisen implizieren allerdings, dass jeder Kredit mehrmals ausfallen kann. Dieser Effekt ist jedoch durch eine entsprechende Kalibrierung von λ auf der Kollektivebene unproblematisch.

Auch im Falle der Poissonapproximation kann wie in Abschnitt 3.1.2 mit einer dynamisierten und bedingten Variante gearbeitet werden. Der Standardsatz lautet hierbei (logistisches Modell):

$$(46) \quad \lambda_{it} = \frac{\exp(b_{0t} + b_{1t}x_{1t} + \dots + b_{mt}x_{mt})}{1 + \exp(b_{0t} + b_{1t}x_{1t} + \dots + b_{mt}x_{mt})} .$$

Dabei bezeichne λ_{it} die Ausfallintensität des Kreditrisikosegments i in Periode t .

Ebenfalls in Analogie zu Abschnitt 3.1.2 ist der Übergang zu einer *gemischten Poissonverteilung* möglich. Es sei dazu D eine diskrete Verteilung, die die Anzahl von Defaults in einer Periode erfasst und es gelte

$$(47) \quad P[D = k | \Lambda = \lambda] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Die Ausfallintensität ist nunmehr nicht mehr deterministisch, sondern selbst eine Zufallsgröße Λ . Bedingt auf eine Realisation ist man in der Situation von Beziehung (44). D besitzt nun eine gemischte Poissonverteilung und es gilt

$$(48) \quad E(D) = E(\Lambda)$$

$$(49) \quad \text{Var}(D) = \text{Var}(\Lambda) + E(\Lambda)$$

sowie allgemein

$$(50) \quad P(D = k) = \int_0^{\infty} (\lambda^k e^{-\lambda} / k!) dU(\lambda) .$$

Im Rahmen von (50) gehen wir dabei davon aus, dass Λ die Verteilungsfunktion U besitzt, $\Lambda \sim U$. U wird auch als *mischende Verteilung* bezeichnet. Ein Standardbeispiel besteht darin, dass Λ einer Gammaverteilung mit den Parametern $a > 0$ und $b > 0$ folgt, d.h. die Dichtefunktion

$$(51) \quad u(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(a)} b^{-a} \lambda^{a-1} e^{-\lambda/b} \text{ für } x > 0$$

besitzt. Mit $p := b/(1+b)$ gilt dann

$$(52) \quad P(D = k) = \binom{k+a-1}{k} (1-p)^a p^k .$$

Es liegt damit eine *negative Binomialverteilung* vor. Ferner gilt

$$(53a) \quad E(D) = ab$$

sowie

$$(53b) \quad \text{Var}(D) = ab(1+b) > E(D) .$$

Im Vergleich zur Poissonverteilung besitzt somit die negative Binomialverteilung eine höhere Varianz.

Überträgt man diese Konstruktion der gemischten Poissonverteilung auf ein Portfolio von Einzelkrediten bzw. auf ein Portfolio von Kreditsegmenten, so gelangt man in Analogie zum Bernoulli-Mischungsmodell zum *Poisson-Mischungsmodell*. Im Falle von n Defaultvariablen (für Einzelkredite bzw. Kreditsegmente) sind die (21) entsprechenden Bedingungen

$$(54a) \quad D_i | \Lambda_i = \lambda_i \sim Po(\lambda_i)$$

$$(54b) \quad D_i | \Lambda_i = \lambda_i \text{ und } D_j | \Lambda_j = \lambda_j \text{ sind unabhängig } (i \neq j) .$$

Zu weiteren Eigenschaften des Poisson-Mischungsmodells vergleiche man *Bluhm et al.* (2003, S. 63 ff.). Insbesondere können Bernoulli- und Poisson-Mischungsmodell so kalibriert werden, dass die ersten beiden Momente für jedes i identisch („gematcht“) sind. Aufgrund der höheren Varianz der Poisson-Variante führt dies zu geringeren Ausfallkorrelationen. Das Bernoulli-Mischungsmodell führt somit zu einem „fatter tail“, vgl. hierzu *Bluhm et al.* (2003, S. 65 ff.).

3.2 Unternehmenswertmodelle

3.2.1 Das Basismodell von [Merton \(1974\)](#)

Unternehmenswertmodelle (Firmenwertmodelle) werden auch als *strukturelle Modelle (Structural Models)* bezeichnet. Sie stellen explizit auf die Entwicklung des Unternehmenwertes ab und verwenden diesen im Rahmen eines optionspreistheoretischen Ansatzes als Ausgangspunkt für die Bewertung von Eigenkapital und Fremdkapital auf Marktwertbasis. Generelles Anwendungserfordernis ist somit die Beobachtbarkeit des Unternehmenwertes des Schuldners. Die Konzeption der Unternehmenswertmodelle geht zurück auf *Merton (1974)*, dessen Basismodell auch im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht.

Ausgangspunkt des Modells von *Merton* ist die Entwicklung der Marktwerte $\{A_t\}$ der Aktiva (Assets) und $\{L_t\}$ der Passiva (Liabilities) eines Unternehmens über das Zeitintervall $[0, T]$. Die Differenz

$$(55) \quad E_t = A_t - L_t$$

entspricht dann dem Marktwert des Eigenkapitals, dem Börsenwert, des Unternehmens.

Hinsichtlich der Struktur der Verpflichtungen geht man im Basismodell von einem Zerobond mit Fälligkeit in T aus. Der entsprechende Rückzahlungsbetrag, die Höhe des aufgenommenen Fremdkapitals betrage F . Die Deckung dieser Verpflichtung besitzt Vorrang vor der Bedienung der Eigenkapitalgeber. Unter der Annahme einer konstanten Zinsrate r ist damit der Wert L_t der Verpflichtung zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$(56) \quad L_t = F \exp[-r(T-t)] .$$

Wie sieht nun die Situation am Ende der Laufzeit aus? Im Falle $A_T < F$ können die Verpflichtungen nicht vollständig bedeckt werden. Die Eigenkapitalgeber wählen die Insolvenz zur Wahrung der Haftungsbeschränkung, die Fremdkapitalgeber erhalten die vorhandene Vermögensmasse A_T . Im Falle $A_T \geq F$ erhalten die Eigenkapitalgeber die Differenz $A_T - F$ und die Verpflichtung kann vollständig gedeckt werden. Insgesamt gilt somit für die Position der Eigenkapitalgeber zum Zeitpunkt T :

$$(57a) \quad E_T = \max(A_T - F, 0) .$$

Der Besitz des Unternehmens entspricht zum Zeitpunkt T aus Sicht der Eigenkapitalgeber der Position eines Europäischen Calls auf die Aktiva des Unternehmens mit einem Ausübungspreis in Höhe von F . Damit entspricht E_t dem Wert des Calls zum Zeitpunkt t .

Für die Position der Fremdkapitalgeber zum Zeitpunkt T gilt

$$(57b) \quad L_T = \min(A_T, F) = F - \max(F - A_T, 0) .$$

Die Position der Fremdkapitalgeber zum Zeitpunkt T entspricht der Kombination einer sicheren Anlage mit einer Short-Position in einem Europäischen Put auf die Aktiva des Unternehmens, ebenfalls mit Ausübungspreis F . Der Put quantifiziert das bestehende Ausfallrisiko bzw. die dadurch bedingte Minderung des Wertes des Fremdkapitals aus Sicht der Fremdkapitalgeber. Zum Zeitpunkt t gilt entsprechend

$$(58) \quad L_t = F \exp[-r(T-t)] - P_t ,$$

wobei P_t den Wert des Puts zum Zeitpunkt t bezeichne. Dies entspricht somit dem Wert des ausfallbedrohten Fremdkapitals (hier: Zerobond). Insbesondere gilt $L_t \leq F \exp[-r(T-t)] = FB(t, T)$. Bei der Bewertung der Verpflichtungen (des Zerobonds) ist ein Abschlag für das bestehende Ausfallrisiko vorzunehmen.

Insgesamt lässt sich damit sowohl die Position der Eigenkapitalgeber als auch die Position der Fremdkapitalgeber als Optionsposition hinsichtlich der Entwicklung der Aktiva des Unternehmens interpretieren. Beide Positionen können damit grundsätzlich einer optionspreistheoretischen Bewertung zugeführt werden. Zumindest vor dem Hintergrund der beispielsweise in *Albrecht/Maurer* (2005, Kapitel 11) dargestellten Ansätze einer arbitragefreien Bewertung besteht allerdings hierbei das implizite Problem, dass Hedgeoperationen in Bezug auf $\{A_t\}$, den Aktiva des Unternehmens, nicht durchführbar sind. Insofern sind zu einer theoretischen Stützung dieser Vorgehensweise Gleichgewichtsansätze im Rahmen der Optionspreistheorie vorzuziehen.

Im Basismodell von [Merton \(1974\)](#) wird insbesondere davon ausgegangen, dass ein Ausfall nur am Periodenende, d.h. zum Zeitpunkt T , eintreten kann. Das den Ausfall auslösende Ereignis ist die Situation $A_T < F$, die (statische) Ausfallwahrscheinlichkeit PD ist somit gegeben durch

$$(59) \quad PD = P(A_T < F) .$$

Die Ausfallhöhe entspricht $F - A_T$. Abbildung 8 enthält zunächst eine grafische Illustration des Sachverhalts, dabei wird nochmals verdeutlicht, dass ein Unterschreiten des Verpflichtungswertes F während der Periode keinen Ausfall induziert. Nur die Wertposition am Periodenende ist von Bedeutung.

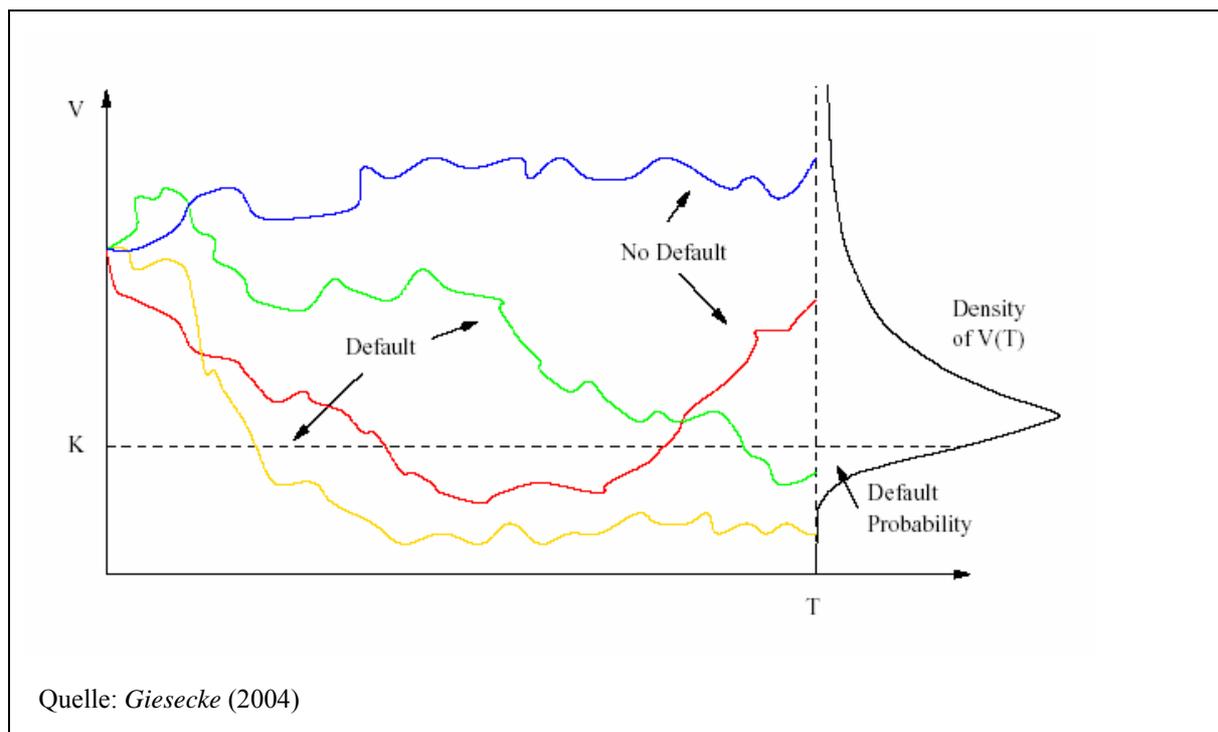


Abb. 8: Ausfallwahrscheinlichkeit im Modell von Merton (1974)

Die weiteren Basisgrößen gemäß (1) sind im Basismodell von Merton gegeben durch $EAD = F$ und $LGD = (F - A_T)/F = 1 - RC$, wobei $RC = A_T/F$. Der Loss Given Default bzw. die Recovery Rate sind somit zufallsabhängig.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit gemäß (59) kann weiter konkretisiert werden, wenn man die Zufallsgesetzmäßigkeit von A_T spezifiziert. Unterstellt man etwa den Rahmen des [Black/Scholes-Modells](#), so ist für $\{A_t\}$ eine [geometrische Brownsche Bewegung](#) anzusetzen und es gilt ($m := \mu - \sigma^2/2$) $A_T = A_t \exp[m(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Z]$, wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsgröße ist, $Z \sim N(0,1)$. Entsprechend folgt für die Ausfallwahrscheinlichkeit (gegeben die Information über den Wert A_t der Aktiva zum Zeitpunkt t)

$$PD(t,T) := P(A_T < F | A_t)$$

$$(60) \quad PD(t,T) = N \left[\frac{\ln(F/A_t) - m(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right].$$

Berechnet man die Ausfallwahrscheinlichkeit nicht unter der Wahrscheinlichkeitsbelegung, die den Beobachtungen zugrunde liegt, sondern unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsbelegung Q (*RNPD: Risk Neutral Probability of Default*), so gilt entsprechend

$$(61a) \quad RNPD(t, T) := Q(A_T < F) = N[-d_2(t)] ,$$

wobei

$$(61b) \quad d_2(t) = \frac{\ln(A_t / F) + m^*(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

und

$$(61c) \quad m^* = r - \sigma^2 / 2 .$$

Die Größe r entspricht dabei der risikolosen Zinsrate. Die Bewertung erfolgt dabei wiederum gegeben die Information über den Wert der Aktiva A_t zum Zeitpunkt t .

Vergleicht man (60) mit (61), so unterscheiden sich, da $-d_2(t) = [\ln(F / A_t) - m^*(T - t)] / \sigma \sqrt{T - t}$, Ausfallwahrscheinlichkeit und risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit nur dadurch, dass der Driftkoeffizient μ durch die risikolose Zinsrate r bzw. m durch m^* ersetzt wird.

Im Modellrahmen des [Black/Scholes-Ansatzes](#) lässt sich neben der Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit nunmehr auch der Wert des ausfallbedrohten Fremdkapitals näher bestimmen. Unter der Verwendung der Black/Scholes-Formel für die Europäische Putoption, d.h. $P_t = F \exp[-r(T - t)] N(-d_2) - S_t N(-d_1)$ folgt aus (58)

$$(62) \quad L_t = A_t N[-d_1(t)] + F \exp[-r(T - t)] N[-d_2(t)] .$$

Wenden wir uns nunmehr der Bestimmung des *Credit Spread*, definiert als Differenz zwischen der Zinsrate eines ausfallbedrohten Zerobonds und eines ausfallfreien Zerobonds zu.

Bezeichnen wir mit $CS(t, T)$ den entsprechenden Spread zum Zeitpunkt t , wobei die Zerobonds in T fällig werden, so lässt sich ein allgemeiner Ausdruck für $CS(t, T)$ folgendermaßen herleiten. Für den Wert des ausfallfreien Zerobonds mit Nennwert $F = 1$ zum Zeitpunkt t gilt $B(t, T) = \exp[-r(T - t)]$. Entsprechend setzen wir den Wert $B^d(t, T)$ des ausfallbedrohten Zerobonds an zu $B^d(t, T) = \exp\{-[r + CS(t, T)](T - t)\}$. Hieraus folgt

$$(63) \quad B^d(t, T) = B(t, T) \exp[-CS(t, T)(T - t)]$$

sowie

$$(64) \quad CS(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln[B^d(t, T) / B(t, T)] .$$

Der Credit Spread ist somit im Allgemeinen zeitabhängig. Im Black/Scholes-Falle gilt $B^d(t, T) = L_t$ gemäß (62) und mit $B(t, T) = F \exp[-r(T - t)]$ folgt hieraus

$$(65) \quad CS(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln \left\{ N[-d_2(t)] + \frac{A_t}{F} N[-d_1(t)] e^{r(T-t)} \right\} .$$

Determinanten des Credit Spread sind somit der restliche Zeithorizont $T - t$, die zur Zeit t bestehende Leveragequote A_t / F sowie (implizit in d_1 bzw. d_2) die Volatilität der Entwicklung der Aktiva des Unternehmens.

Das Basismodell *Merton* (1974) weist eine ganze Reihe von Problemen auf. Ein Ausfall kann nur am Periodenende stattfinden. Die Struktur der Verpflichtungen (Zerobond) und die ausfallfreie Zinsumgebung (konstante risikolose Zinsintensität) sind jeweils sehr einfach. Der Credit Spread gemäß (65) geht für $t \uparrow T$ gegen null. In praxi hingegen bleibt der Credit Spread auch für kurze Laufzeiten substantziell. Auch im Allgemeinen ist die empirische Erklärungsqualität des Modells eher gering. Eine besondere Problematik besteht darin, dass die Wertentwicklung $\{A_t\}$ der Aktiva nicht beobachtet werden kann, sondern nur die Entwicklung des Unternehmenswertes. Ein entsprechender Rückschluss ist aber approximativ möglich, dies soll im Weiteren abschließend behandelt werden.

Wir gehen dabei davon aus, dass die zufallsabhängige Entwicklung des Assetwertes (Asset-Dynamik) ebenso wie die zufallsabhängige Entwicklung des Marktwertes des Eigenkapitals (Equity-Dynamik) einer [geometrische Brownschen Bewegung](#) folgt, d.h. $dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t$ und $dE_t = \mu_E E_t dt + \sigma_E E_t dW_t$. Nun gilt gemäß (57a) $E_T = \max(A_T - F, 0)$, d.h. es liegt ein Europäischer Call vor. Bewerten wir diesen nach der [Black/Scholes-Formel](#), so erhalten wir

$$(66a) \quad E_t = A_t N(d_1) - F e^{-r(T-t)} N(d_2) = f(A_t) .$$

Auf der anderen Seite gilt nach Itô's Lemma, man vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Anhang 4C),

$$df(A_t) = \dots dt + f_x(A_t, t) \sigma(t, A_t) dW_t = \dots dt + f_x(A_t, t) \sigma_A A_t dW_t .$$

Auf der Basis von (66a) erhalten wir $f_x(A_t, t) = N(d_1)$. Da auf der anderen Seite die Dynamik von E_t einer [geometrischen Brownschen Bewegung](#) folgt, erhalten wir insgesamt

$$(67) \quad \sigma_E E_t = \sigma_A A_t N[d_1(t)] .$$

Aufgrund von $d_1(t) = [\ln(A_t / F) + (r + \frac{1}{2} \sigma_A^2)(T - t)] / \sigma \sqrt{T - t}$ und $d_2(t) = d_1(t) - \sigma \sqrt{T - t}$ ist (66a) eine implizite Gleichung in A_t und σ_A , d.h. es gilt

$$(66b) \quad E_t = g(A_t, \sigma_A) .$$

Mit (66) und (67) liegt somit ein Gleichungssystem, bestehend aus zwei (nichtlinearen) Gleichungen für zwei Unbekannte A_t und σ_A vor, das numerisch gelöst werden kann. In praxi ist dabei allerdings problematisch, dass die Inputgröße σ_E in dieses Gleichungssystem keine konstante Größe ist. Insofern werden bei der praktischen Umsetzung dieses Ansatzes weitere Überlegungen notwendig, so etwa beim [KMV-Ansatz](#), vgl. hierzu *Crouhy et al.* (2001, S. 370 f.).

3.2.2 Merton-Einfaktormodell

Im Rahmen des in Abschnitt 3.1.3 dargestellten Einfaktormodells wurde offen gelassen, wie im Einzelfall der standardnormalverteilte Bonitätsindikator Y_i zu konstruieren ist. Im Rahmen des Merton-Modells ist diese Konkretisierung in einfacher Weise möglich. Die Assetwerte A_{it} folgen einer [geometrischen Brownschen Bewegung](#), d.h. es gilt

$$(69) \quad A_{it} = A_{i0} \exp \{ m_i t + \sigma_i \sqrt{t} W_i(t) \} .$$

Ein Ausfall des Schuldners i findet nur am Ende des Zeithorizonts T statt und genau dann, wenn der Wert der Aktiva A_{iT} eine kritische Grenze F_i unterschreitet. Damit gilt

$$(70a) \quad \pi_i = P(A_{iT} < F_i) = P[W_i(T) < H_i] ,$$

wobei

$$(70b) \quad H_i = [\ln(F_i / A_{i0}) - m_i T] / \sigma_i \sqrt{T} .$$

Unterstellen wir für die standardnormalverteilte Größe $W_i(T)$ nun ein Einfaktormodell der Form ($i = 1, \dots, n$)

$$(71) \quad W_i(T) = \sqrt{\rho_i} F + \sqrt{1 - \rho_i} U_i ,$$

so sind wir genau in der Situation des Abschnitts 3.1.3. Der Bonitätsindikator entspricht dem normierten Assetwert zum Zeitpunkt T , konkret

$$(72) \quad Y_i = W_i(T) = [\ln(A_{iT} / A_{i0}) - m_i T] / \sigma_i \sqrt{T} .$$

Aus einer vorgegebenen Ausfallwahrscheinlichkeit π_i lässt sich die zugrunde liegende (normierte) Ausfallschranke dann ermitteln zu

$$(73) \quad H_i = \Phi^{-1}(\pi_i) .$$

3.2.3 Erweiterung des [Merton-Basismodells](#)

Die im Rahmen des letzten Abschnitts dargestellten Probleme des Basismodells von *Merton* haben in der Literatur zu einer Reihe von Erweiterungen geführt. Diese betreffen etwa

- die Berücksichtigung einer stochastischen Zinsstruktur, vgl. [Longstaff/Schwartz \(1995\)](#),
- die Möglichkeit eines strategischen Defaults seitens der Eigenkapitalgeber, um Konzessionen seitens der Fremdkapitalgeber zu erwirken, vgl. etwa [Anderson/Sundaresan/Tychon \(1996\)](#) und [Mella-Barral/Perraudin \(1997\)](#),
- die Berücksichtigung einer endogenen Defaultschranke, vgl. etwa [Black/Cox \(1976\)](#), [Leland \(1994\)](#) und [Leland/Toft \(1996\)](#),
- die Möglichkeit der Anpassung des Fremdkapitals an Änderungen des Unternehmenswertes, was zu einer Mean-reverting stochastischen Leverageratio führt, vgl. [Collin-Dufresne/Goldstein \(2001\)](#),
- die Möglichkeit intraperiodischer Ausfälle (First Passage Time-Ansätze), vgl. etwa [Zhou \(2001a\)](#),
- der Ansatz allgemeinerer Assetprozesse, wie etwa Jump Diffusion-Prozesse, vgl. [Zhou \(2001b\)](#), [Huang/Huang \(2003\)](#), oder spezieller Levy-Prozesse, vgl. [Rachev et al. \(2000\)](#),
- Berücksichtigung einer zeitvariablen Asset Risk-Prämie, vgl. [Huang/Huang \(2003\)](#).

Literaturüberblicke bieten etwa die Beiträge [Giesecke \(2004\)](#), [Huang/Huang \(2003\)](#), [Schönbucher \(2003\)](#), [Uhrig-Homburg \(2002\)](#) sowie [Wingenroth \(2004, Kapitel 7\)](#). Wie [Huang/Huang \(2003\)](#) nachweisen, ist es auf der Grundlage der entsprechenden Modellerweiterungen durchaus möglich, Credit Spreads zu erzeugen, die konsistent zu empirisch relevanten Größenordnungen sind.

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass das [KMV-Modell](#), auf das wir in Abschnitt 4.3 eingehen werden, als „Praxisvariante“ des Merton-Modells anzusehen ist.

Im Weiteren gehen wir dabei nur noch auf die Möglichkeit intraperiodischer Ausfälle ein. Zur Modellierung intraperiodischer Ausfälle folgen wir [Black/Cox \(1976\)](#) und nehmen an, dass für das Unternehmen eine zeitabhängige Ausfallschranke $F(t)$ (Default Boundary) existiert. Wenn der Wert der Aktiva des Unternehmens zu irgendeinem Zeitpunkt den Wert dieser Aus-

fallschranke annimmt oder unterschreitet, dann wird der Ausfall der bestehenden Verpflichtungen ausgelöst. *Black/Cox* (1976) gehen dabei von einer exponentiell verlaufenden Ausfallschranke der Form

$$(74) \quad F(t) = e^{\lambda t} K$$

aus. Nach [Zhou \(2001a\)](#) kann K als gewichtetes Mittel der kurz- und langfristigen Verpflichtungen des Unternehmens angesehen werden und λ als Wachstumsrate dieser Verpflichtungen.

Wir definieren nun einen (dynamischen) Defaultindikator $D(t)$ durch die Forderung

$$(75) \quad D(t) = \begin{cases} 1 & \text{das Unternehmen ist bis zum Zeitpunkt } t \text{ ausgefallen} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definieren wir ferner den *Ausfallzeitpunkt* τ durch

$$(76) \quad \tau = \inf \{t \geq 0; A(t) < F(t)\} ,$$

dann gilt

$$(77) \quad P[D(t) = 1] = P[\tau \leq t] .$$

Im Weiteren betrachten wir eine Ausfallschranke der Form (74) und unterscheiden dabei zwei Fälle. Im ersten Fall entspricht der Driftkoeffizient der Wertentwicklung der Aktiva der Wachstumsrate der Verpflichtungen, d.h. $\lambda = \mu$. Die Aktiva und die Ausfallschranke weisen somit die gleiche Wachstumsrate auf. In diesem Falle lässt sich das folgende Ergebnis erzielen:

$$(78) \quad P[D(t) = 1] = 2N \left[-\frac{\ln(A_0 / K)}{\sigma \sqrt{t}} \right] = 2N \left[-\frac{DD}{\sqrt{t}} \right] .$$

Dabei kann $DD = \ln(A_0/K)/\sigma = (\ln A_0 - \ln K)/\sigma$ als standardisierter „Abstand“ (in logarithmierten Termen) des Wertes der Aktiva zur Ausfallschranke (*Distance to Default*) interpretiert werden.

Im allgemeinen Falle, d.h. $\lambda \neq \mu$, wird die Situation komplexer und es gilt

$$(79) \quad P[D(t) = 1] = N\left(-\frac{DD}{\sqrt{t}} - \frac{\mu - \lambda}{\sigma} \sqrt{t}\right) + \exp\left[\frac{2(\lambda - \mu)DD}{\sigma}\right] N\left(-\frac{DD}{\sqrt{t}} + \frac{\mu - \lambda}{\sigma} \sqrt{t}\right).$$

3.2.4 Mehr-Unternehmens-Fall

Das in Abschnitt 3.2.1 behandelte [Basismodell von Merton](#), das auf die Situation eines einzelnen Unternehmens zugeschnitten ist, lässt sich entsprechend auf den Fall mehrerer Unternehmen verallgemeinern. Im Falle von n Unternehmen werden dabei die Wertentwicklungen der jeweiligen Aktiva als n -dimensionale [geometrische Brownsche Bewegung](#), vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Anhang 4E), modelliert. Zur Illustration dieses Ansatzes konzentrieren wir uns im Weiteren auf den Fall $n = 2$.

Die Asset-Prozesse $\{A_t^1\}$ und $\{A_t^2\}$ der beiden Unternehmen 1 und 2 folgen dann einer zweidimensionalen [geometrischen Brownschen Bewegung](#). Insbesondere gilt $dA_t^i / A_t^i = \mu_i dt + \sigma_i dW_t^i$ ($i = 1, 2$) sowie $\rho(W_t^1, W_t^2) = \rho t$. Die Höhe des aufgenommenen Fremdkapitals betrage entsprechend F_1 bzw. F_2 . Die Wahrscheinlichkeit $PD_{12}(T) := P[A_1(T) < F_1, A_2(T) < F_2]$ für einen Simultanausfall beider Unternehmen am Ende eines spezifizierten Zeithorizonts ist dann gegeben durch

$$(80) \quad PD_{12}(T) = N_2\left[\rho; \frac{\ln(F_1/A_0^1) - m_1 T}{\sigma_1 \sqrt{T}}, \frac{\ln(F_2/A_0^2) - m_2 T}{\sigma_2 \sqrt{T}}\right],$$

wobei $N_2(\rho; \cdot, \cdot)$ die bivariate Standardnormalverteilung mit Korrelationskoeffizient ρ bezeichnet und $m_i = \mu_i - \sigma_i^2/2$ gilt.

Eine Erweiterung der Resultate des Abschnitts 3.2.3 im Kontext intraperiodischer Ausfälle auf den Zwei-Unternehmens-Fall wird in [Zhou \(2001a\)](#) vorgenommen.

[Zhou \(2001a, S. 562 f.\)](#) kommt dabei zu den folgenden Schlussfolgerungen:

- Ausfallkorrelation und Korrelation ρ auf Assetebene haben das gleiche Vorzeichen. Je höher die Korrelation auf Assetebene, desto höher die Ausfallkorrelation.
- Ausfallkorrelationen sind für kurze Zeithorizonte sehr gering. Sie steigen mit dem Zeithorizont zunächst an, um dann wieder sehr langsam zu sinken.
- Hohe Bonität impliziert geringe Ausfallkorrelation, geringe Bonität hohe Ausfallkorrelationen.
- Die Ausfallkorrelation ist zeitabhängig, da auch die Bonität der Unternehmen zeitvariabel ist.

Die beiden ersten Aussagen werden in den folgenden Abbildung 9 illustriert.

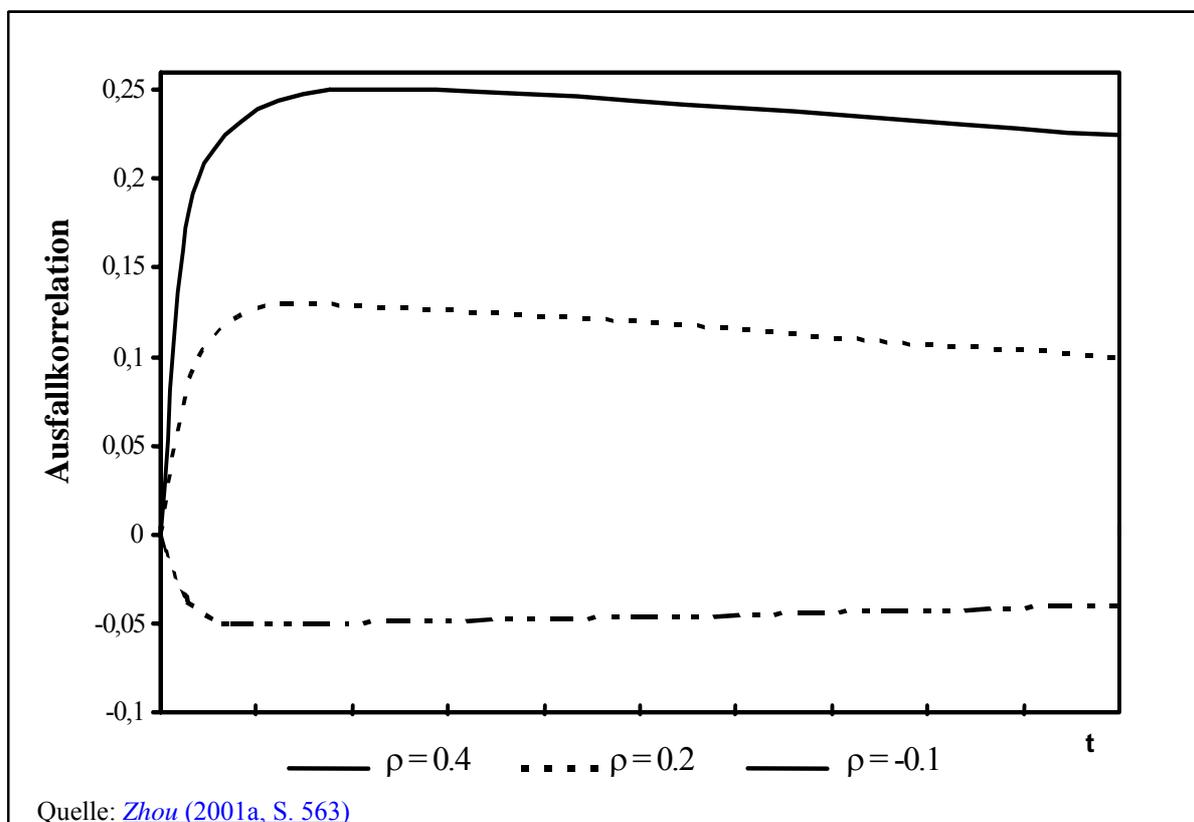


Abb. 9: Entwicklung der Ausfallkorrelation im Zeitablauf bei gegebener Assetkorrelation

Der Übergang zu einer normierten Variante analog zu Abschnitt 3.2.2 und die Anwendung eines Faktormodells wie in Abschnitt 3.1.4 sind nahe liegende Weiterentwicklungen dieses Grundmodells. Zum Zusammenhang zwischen dem mehrdimensionalen Unternehmensmodell und dem Einfaktormodell vergleiche etwa *Huschens/Vogel* (2002, S. 290 ff.).

3.3 Reduktionsmodelle I: Zählprozesse als Ausfallerzeuger

3.3.1 Ein-Unternehmens-Fall

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 3.2 behandelten Unternehmenswertmodellen liegt den Reduktionsmodellen (Reduced Form Model) kein „fundamentaler“ ökonomischer Ansatz zur Erklärung des Ausfalls zugrunde. Angestrebt wird lediglich eine marktkonsistente Darstellung der Preise von ausfallbedrohten Bonds und den daraus resultierenden implizit bestehenden Ausfallwahrscheinlichkeiten. Der Zeitpunkt des Ausfalls wird dabei als Zufallsvariable definiert.

Die grundlegende Konstruktion ist dabei wie folgt. Ausgangspunkt ist ein Zählprozess $\{N(t); t \geq 0\}$, d.h. ein Prozess mit der Eigenschaft $N(0) = 0$, der zu bestimmten Zeitpunkten (bei Eintritt bestimmter Ereignisse) Sprünge der Höhe eins macht. Der Prozess besitzt somit einen ganzzahligen Wertebereich und seine Pfade sind monoton nicht abnehmend. Wir definieren nun den *Ausfallzeitpunkt (Ausfallzeit, Time of Default)* τ als Zeitpunkt des ersten Sprungs des zugrunde liegenden Zählprozesses N , d.h.

$$(81) \quad \tau := \inf \{t \geq 0; N(t) > 0\} .$$

Der Vergleich dieser Definition mit derjenigen unter (76) macht nochmals den Unterschied von Reduktionsmodellen und Unternehmenswertmodellen deutlich. Im Rahmen von (76) wird die Ausfallzeit ökonomisch definiert, im Kontext von (81) hingegen rein formal.

Die Wahrscheinlichkeit PS (Survival Probability), am Ende des Zeitintervalls $[0, t]$ noch nicht ausgefallen zu sein (*Überlebenswahrscheinlichkeit*), beträgt

$$(82a) \quad PS(t) = P[N(t) = 0] = P(\tau > t) .$$

Entsprechend beträgt die Ausfallwahrscheinlichkeit bis zum Zeithorizont t

$$(82b) \quad PD(t) = 1 - PS(0, t) = P[N(t) > 0] = P(\tau \leq t) .$$

Der Ausfall kann dabei wie in Abschnitt 3.2.3 auch während des Zeitintervalls erfolgen. Allgemeiner beträgt die Überlebenswahrscheinlichkeit für das Zeitintervall $[s, t]$ (bedingt auf das Überleben bis s)

$$(83a) \quad PS(s, t) = P[N(t) = 0 \mid N(s) = 0] = P(\tau > t \mid \tau > s)$$

und die entsprechende Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(83b) \quad \begin{aligned} PD(s, t) &= 1 - PS(s, t) = P[N(t) > 0 \mid N(s) = 0] \\ &= P(\tau \leq t \mid \tau > s) . \end{aligned}$$

Je nach Modellierung des ausfallerzeugenden Zählprozesses $N(t)$ resultieren unterschiedliche (risikoneutrale) Ausfallwahrscheinlichkeiten. Ein erstes Standardbeispiel liefert der [homogene Poissonprozess \(HPP\)](#). Dieser ist gekennzeichnet durch unabhängige und stationäre Zuwächse sowie durch eine konstante Ausfallintensität λ , d.h.

$$(84) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [N(t+h) - N(t) > 0] = \lambda .$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess im Zeitintervall n Sprünge macht, beträgt

$$(85) \quad P[N(t) = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} .$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht damit einer Poissonverteilung mit Parameter λt . Insbesondere folgt hieraus $PS(t) = \exp(-\lambda t)$ und damit

$$(86) \quad PD(t) = 1 - \exp(-\lambda t) .$$

Ferner kann gezeigt werden, dass die Ausfallzeit τ gemäß (81) exponentialverteilt mit Parameter λt

$$(87) \quad P(\tau \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} .$$

Weiterhin gilt $E[\tau] = 1/\lambda$, d.h. die erwartete Ausfallzeit ist reziprok zur Ausfallintensität.

Eine allgemeinere Konstruktion ist der *Inhomogene Poissonprozess (IPP)*. Dieser besitzt immer noch unabhängige Zuwächse, die nun aber nicht mehr stationär, d.h. identisch verteilt sind. Die Ausfallintensität $\lambda(t)$ definiert durch

$$(88) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} P[N(t+h) - N(t) > 0] = \lambda(t)$$

ist nun zeitvariabel, aber immer noch deterministisch.

Definieren wir die Zählverteilung durch

$$(89) \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds ,$$

so folgt

$$(90) \quad P[N(t) = n] = \exp[-\Lambda(t)] [\Lambda(t)]^n / n! .$$

Es liegt wiederum eine Poissonverteilung vor, nun aber mit Parameter $\Lambda(t)$. Für die Ausfallwahrscheinlichkeit folgt hieraus

$$(91) \quad PD(t) = 1 - \exp[-\Lambda(t)] .$$

Bei der Anwendung der bisherigen Modelle mit deterministischer Ausfallintensität auf die Quantifizierung von Credit Spreads erweist es sich, vgl. etwa *Schönbucher* (2003, S. 118 f.), dass die resultierenden – ebenfalls deterministischen – Credit Spreads empirisch wenig valide sind. Empirische Credit Spreads variieren nicht relativ glatt und vorhersehbar, sondern weisen

ein stochastisches Element auf. Dies führt dazu, dass man allgemeinere Zählprozesse betrachten muss, um empirisch valide Credit Spreads zu generieren. Dazu fasst man die zeitvariable Intensität gemäß (88) nun selbst als stochastischen Prozess $\tilde{\lambda}(t)$ auf und gelangt somit zu der Familie der [Cox-Prozesse](#) (auch: *doppelt-stochastischer Poissonprozess*). Definieren wir (als pfadweise gebildetes Integral)

$$(92a) \quad \tilde{\Lambda}(t) = \int_0^t \tilde{\lambda}(s) ds$$

und die Verteilungsfunktion

$$(92b) \quad U(\lambda, t) = P(\tilde{\Lambda}(t) \leq \lambda t) ,$$

so gilt insgesamt

$$(92c) \quad \begin{aligned} P[N(t) = n] &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} U(d\lambda, t) \\ &= E \left[e^{-\tilde{\Lambda}(t)} \frac{\tilde{\Lambda}^n(t)}{n!} \right] . \end{aligned}$$

Hieraus resultiert als Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(93) \quad PD(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(d\lambda, t) = 1 - E[e^{-\tilde{\Lambda}(t)}] .$$

Ein erstes in der Literatur betrachtetes Modell, das diesen allgemeinen Ansatz illustriert, ist die Annahme eines Prozesses für die Ausfallintensität der Form

$$(94) \quad \tilde{\lambda}(t) = \alpha + \beta \tilde{\lambda}(t-1) + \varepsilon(t) ,$$

d.h. mit einem autoregressiven Effekt 1. Ordnung. Die Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit gemäß (93) muss dabei auf Basis einer [Monte Carlo-Simulation](#) erfolgen.

In der zeitstetigen Variante würde (94) auf einen Ornstein/Uhlenbeck-Prozess, vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Abschnitt 4.3.4), hinauslaufen. Dieser beinhaltet allerdings die Möglichkeit der Realisierung einer negativen Ausfallintensität. Eine Alternative hierzu bietet daher ein Diffusionsprozess vom Cox/Ingersoll/Ross-Typus, vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Abschnitt 4.3.5). Eine entsprechende Verallgemeinerung bieten [Duffie/Garleanu \(2001\)](#), indem sie für den Ausfallintensitätsprozess einen Sprung-Diffusionsprozess des CIR-Typus definieren durch

$$(95) \quad d\tilde{\lambda}(t) = \alpha[\mu - \tilde{\lambda}(t)]dt + \sigma\tilde{\lambda}(t)^{1/2}dW(t) + \Delta J(t) ,$$

wobei die Komponente $J(t)$ den Sprungprozess quantifiziert.

3.3.2 Mehr-Unternehmens-Fall

Im allgemeinen Fall betrachten wir n Schuldner mit zugehörigen Ausfallzeiten τ_1, \dots, τ_n und entsprechenden (deterministischen oder stochastischen) Ausfallintensitäten $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$. Korrelationen zwischen den Ausfallzeiten können nun auf verschiedene Art und Weise induziert werden.

[Giesecke \(2003\)](#) geht hierzu folgendermaßen vor, wobei wir uns im Weiteren auf den Fall zweier Unternehmen beschränken. Ausgangspunkt sind drei homogene Poissonprozesse N_1 , N_2 und N mit Ausfallintensitäten λ_1 , λ_2 und λ . Die Ausfallintensitäten λ_1 bzw. λ_2 sind schulderspezifische (idiosynkratische) Ausfallintensitäten für Schuldner 1 bzw. Schuldner 2. Die Ausfallintensität λ ist eine Ausfallintensität, die aus einem makroökonomischen oder unternehmensübergreifenden Ereignis resultiert, das sowohl bei Schuldner 1 als auch bei Schuldner 2 zu einem Ausfall führen kann. In Erweiterung von (81) wird dann der unternehmensspezifische Ausfallzeitpunkt τ_i ($i = 1, 2$) definiert durch

$$(96) \quad \tau_i := \inf \{t \geq 0; N_i(t) + N(t) > 0\} .$$

Ein Ausfall findet daher statt, wenn entweder ein idiosynkratisches Ausfallereignis („Schock“) oder ein systematischer Schock oder beides das Unternehmen (zum ersten Mal)

treffen. Die Ausfallintensität von Unternehmen i beläuft sich auf $\lambda_i + \lambda$ und es gilt damit für die Überlebenswahrscheinlichkeit von Unternehmen i

$$(97) \quad PS_i(t) = P(\tau_i > t) = P[N_i(t) + N(t) = 0] = e^{-(\lambda_i + \lambda)t} .$$

Die Ausfallzeiten τ_i sind wiederum exponentiell verteilt mit $E(\tau_i) = 1/(\lambda_i + \lambda)$. Für die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit gilt

$$(98) \quad \begin{aligned} PS(t, u) &= P(\tau_1 > t, \tau_2 > u) \\ &= PS_1(t) PS_2(u) \min(e^{\lambda t}, e^{\lambda u}) . \end{aligned}$$

Die Korrelation zwischen τ_1 und τ_2 beträgt

$$(99) \quad \rho(\tau_1, \tau_2) = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1 + \lambda_2} .$$

Schließlich ist die Korrelation zwischen den gemäß (75) definierten Defaultindikatoren $D_1(t)$ und $D_2(t)$ gegeben durch

$$(100) \quad \rho[D_1(t), D_2(t)] = \frac{PS(t, t) - PS_1(t) PS_2(t)}{\sqrt{PS_1(t)[1 - PS_1(t)] PS_2(t)[1 - PS_2(t)]}} .$$

Für weitere Modelleigenschaften sowie die Verallgemeinerung auf n Unternehmen, die von unterschiedlichen Arten von Ausfallschocks getroffen werden können, verweisen wir auf [Giesecke \(2003\)](#).

Ein weiterer Ansatz, vgl. hierzu etwa [Das et al. \(2002\)](#), setzt auf der autoregressiven Modellierung gemäß (94) an, und überträgt dies auf den mehrdimensionalen Fall. Im Falle von zwei Unternehmen führt dies zu dem Ansatz

$$(101a) \quad \tilde{\lambda}_i(t) = \alpha_i + \beta_i \tilde{\lambda}_i(t-1) + \varepsilon_i(t) , \quad i = 1, 2$$

$$(101b) \quad \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \rho .$$

Die Auswertung erfolgt dabei auf der Basis einer [Monte Carlo-Simulation](#). Wir betrachten dazu folgendes Beispiel, das auf eine entsprechende Auswertung in [Das et al. \(2002\)](#) zurückgeht.

Beispiel:

Wir setzen $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,012\%$, $\beta_1 = \beta_2 = 0,94$ und $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0,2\%$. Zu bestimmen ist die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit $\pi_{12}(5) = p(\tau_1 \leq 5, \tau_2 \leq 5)$ über einen Fünfjahreshorizont für unterschiedliche Korrelationen ρ gemäß (16.100b). Auf Basis einer [Monte Carlo-Simulation](#) erhält man:

ρ	-0,6	-0,2	0	0,2	0,6
$\pi_{12}(5)$	0,64%	1,56%	1,80%	2,36%	2,96%

Das illustriert den Einfluss der Korrelation zwischen den Ausfallintensitäten auf die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit.

[Das et al. \(2002\)](#) kommen auf der Grundlage ihrer empirischen Studie zu den folgenden Schlussfolgerungen:

- Ausfallkorrelationen zwischen Schuldnern sind im Durchschnitt positiv
- Im Durchschnitt sind die Ausfallkorrelationen von Unternehmen mit hoher Bonität höher als von Unternehmen mit niedriger Bonität. Dies ist ein bemerkenswerter Unterschied zu der in Abschnitt 3.2.4 dargestellten Studie von [Zhou \(2001a\)](#) im Kontext eines Unternehmenswertmodells.
- Die Ausfallkorrelationen sind zeitvariabel, aber in unterschiedlichem Ausmaß. Die größte Zeitvariabilität weisen Unternehmen mit hoher Bonität auf.
- Die Ausfallkorrelationen variieren in Abhängigkeit von einem volkswirtschaftlichen Ausfallfaktor, d.h. in Abhängigkeit vom Konjunkturzustand. Ausfallkorrelationen und gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeiten sind höher bei schlechtem Konjunkturzustand und vice versa.

Eine alternative Vorgehensweise zur Modellierung der gemeinsamen Ausfallstruktur von n Schuldnern besteht darin, die respektiven Ausfallintensitäten $\lambda_i(t)$ von einem gemeinsamen (mehrdimensionalen) Zustandsprozess X_t abhängig zu machen, d.h.

$$(102) \quad \lambda_i(t) = \lambda_i(X_t) .$$

Das Resultat ist ein multivariater [Cox-Prozess](#). Der (mehrdimensionale) Prozess X_t repräsentiert die Einflussgrößen, die auf die Ausfallintensität wirken. Erklärt werden hierdurch beispielsweise konjunkturzyklusbedingte bzw. makroökonomisch bedingte Ausfallkorrelationen. Gegeben eine Realisation $X_t = x_t$ sind die unternehmensspezifischen Ausfallzeitpunkte τ_i stochastisch unabhängig, d.h. es liegt wiederum der Fall einer bedingten Unabhängigkeit vor, dessen Bedeutung schon in Abschnitt 3.1.2 herausgestellt worden ist.

Ein Spezialfall von (102) verdient dabei besondere Beachtung. Ist die Ausfallintensität λ eine lineare Funktion von Zustandsvariablen, die Diffusionsprozessen folgen, und resultiert hieraus eine affine (ausfallbedrohte) Zinsstruktur, so ist der resultierende Prozess einer Analyse gut zugänglich. Die verschiedenen Varianten von Reduktionsmodellen unterscheiden sich dann primär durch die vorgenommene Wahl der Zustandsvariablen und der Spezifikation des zugehörigen stochastischen Prozesses. Wir kommen hierauf in Abschnitt 6 zurück.

Im Hinblick auf die durch (102) induzierte Defaultkorrelation ist in der Literatur die Meinung zu finden, dass diese zu gering im Vergleich zu empirisch beobachteten Verhältnissen ist. Wie [Yu \(2003\)](#) nachweist, ist dies jedoch kein strukturelles Defizit von Reduktionsmodellen, sondern abhängig von der sorgfältigen Wahl eines spezifischen Reduktionsmodells.

3.4 Reduktionsmodelle II: Ratingbasierte Modelle

Im Weiteren betrachten wir K Ratingklassen $\{1, \dots, K\}$, die nach absteigender Qualität indiziert werden. Der Zustand K entspricht damit dem Defaultzustand, d.h. $K = D$. Mit $RA(t)$ bezeichnen wir den zufallsabhängigen Ratingzustand eines Unternehmens bzw. Schuldners zum Zeitpunkt t . Es gilt $RA(t) \in \{1, \dots, K\}$ für jeden Zeitpunkt t . Das Ausgangsrating $RA(0)$ ist bekannt.

Unterstellen wir, dass $\{RA(t)\}$ ein zeitdiskreter Markovprozess ist, dann lassen sich Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(103) \quad q_{ij}(t, T) := P[RA(T) = j \mid RA(t) = i]$$

definieren sowie die zugehörige Übergangsmatrix $Q(t, T) = (q_{ij}(t, T))$. Wie *Schönbucher* (2003, S. 249 f.) zeigt, lässt sich in dieses Basismodell auch das Phänomen des Rating Momentums integrieren, indem man den Zustandsraum entsprechend erweitert. Bezeichnen wir mit $p(t) = (p_1(t), \dots, p_K(t))$ den Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t , wobei

$$(104) \quad p_i(t) = P[RA(t) = i] ,$$

so gilt allgemein

$$(105) \quad p(t) = p(0) Q(0, t) .$$

Im Falle einer [homogenen Markovkette](#), d.h. zeitunabhängigen einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} gilt mit $Q = (p_{ij})$ die Beziehung $Q(t, T) = Q^{T-t}$ und damit

$$(106) \quad p(t) = p(0) Q^t .$$

Auch im Falle einer zeitstetigen Modellierung lässt sich eine analoge Vorgehensweise implementieren, indem man auf das Konzept einer *Generatormatrix* Λ zurückgreift, die die entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten enthält. In diesem Falle gilt

$$(107) \quad Q(t, T) = \exp\{(T - t)\Lambda\} .$$

Zur Definition, Existenz und Schätzung der Generatormatrix vergleiche man im Einzelnen *Schönbucher* (2003, S. 229 ff.).

Aus den vorstehenden Basiswahrscheinlichkeiten lassen sich nun grundlegende Wahrscheinlichkeiten höherer Ordnung ableiten. Die *kumulierte Ausfallwahrscheinlichkeit* wird definiert durch ($k = 1, \dots, K - 1$)

$$(108) \quad PD_k(t) := P[RA(t) = K \mid RA(0) = k] .$$

Sie entspricht der Wahrscheinlichkeit, bei einem Ausgangsrating von k während der nächsten t Perioden auszufallen. Die *kumulierte Überlebenswahrscheinlichkeit* ist entsprechend gegeben durch ($k = 1, \dots, K - 1$)

$$(109) \quad PS_k(t) := P[RA(t) \neq K \mid RA(0) = 0] = 1 - PD_k(t) .$$

Die *marginale Ausfallwahrscheinlichkeit* ist definiert durch ($k = 1, \dots, K - 1$).

$$(110) \quad \begin{aligned} PM_k(t) &:= P[RA(t) = K \mid RA(t-1) \neq K, RA(0) = k] \\ &= \sum_{j=1}^{K-1} P[RA(t) = K \mid RA(t-1) = j, RA(0) = k] . \end{aligned}$$

Die marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten werden von den Ratingagenturen, etwa von [Moody's](#), auch direkt zur Verfügung gestellt. Nach *Fons* (1994, S. 26) nehmen die marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten für Investment Grade-Anleihen mit t zu, für High Yield-Anleihen nehmen sie mit t ab.

Schließlich definieren wir noch *die aufgeschobene Ausfallwahrscheinlichkeit* durch

$$(111) \quad \begin{aligned} PD_k^*(t) &:= P[RA(t) = K \mid RA(t-1) \neq K, \dots, RA(1) \neq K, RA(0) = k] \\ &= PS_k(t-1)PM_k(t) . \end{aligned}$$

Da $1 - PM_k(t) = P[RA(t) \neq K \mid RA(t-1) \neq K, RA(0) = K]$, gilt insbesondere der Zusammenhang

$$(112) \quad PS_k(t) = \prod_{j=1}^t [1 - PM_k(j)] .$$

Die aufgeschobene Ausfallwahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall genau in Periode t an.

3.5 Ausblick

[Frey/McNeil \(2003\)](#) zeigen, dass eine Vielzahl der gängigen Kreditrisikomodelle entweder unter die Klasse der Latente Variable-Modelle (etwa: [Merton-Modell](#), Faktormodelle für Bonitätsvariable, [KMV-Modell](#)) oder unter die Klasse der Bernoulli-Mischungsmodelle (etwa: Intensitätsmodelle, [Credit Risk⁺](#)) subsumiert werden können. Die gängigen Latente Variablen-Modelle können dabei entsprechend in äquivalente Mischungsmodelle transformiert werden. Dieses Ergebnis verallgemeinert frühere Resultate für spezielle Fälle, etwa von [Koyluoglu/Hickman \(1998\)](#), [Gordy \(2000\)](#) oder [Wahrenburg/Nieten \(2000\)](#). Darüber hinaus lassen sich gemäß [Frey/McNeil \(2003\)](#) durch die Betrachtung von Non-Gaussian Copulas Erweiterungen der gängigen Modelle gewinnen, die es insbesondere erlauben, die Gefahr eines Extreme Credit Risk, d.h. des Eintritts „übermäßig vieler“ gemeinsamer Ausfälle, modelltheoretisch besser zu erfassen.

Eine aktuelle Entwicklung stellen des Weiteren die sogenannten *Incomplete Information-Modelle* dar. Die Annahme einer Informationsunsicherheit über den Unternehmenswert und/oder die Ausfallschranke führt zu einer realistischeren Modellierung. Es resultieren hierbei insbesondere „hybride“ Modelle, die sowohl Aspekte von Unternehmenswertmodellen als auch von Reduktionsmodellen beinhalten. Man vergleiche hierzu etwa [Duffie/Lando \(2001\)](#), [Giesecke \(2001\)](#) sowie [Bühler/Thabe \(2004\)](#).

4 Industriemodelle

4.1 Eine erste Übersicht

Im Laufe der letzten Jahre wurden eine Reihe von Kreditrisikomodelle entwickelt, die spezifisch im Hinblick auf eine praktikable Implementierung sowie die Bestimmung des Kreditrisikos großer Kreditportfolien konzipiert worden sind und heute als Industriestandard angesehen werden. Diese „Industriemodelle“ werden in diesem Abschnitt näher beleuchtet. Eine erste Übersicht gibt die folgende Abbildung 10.

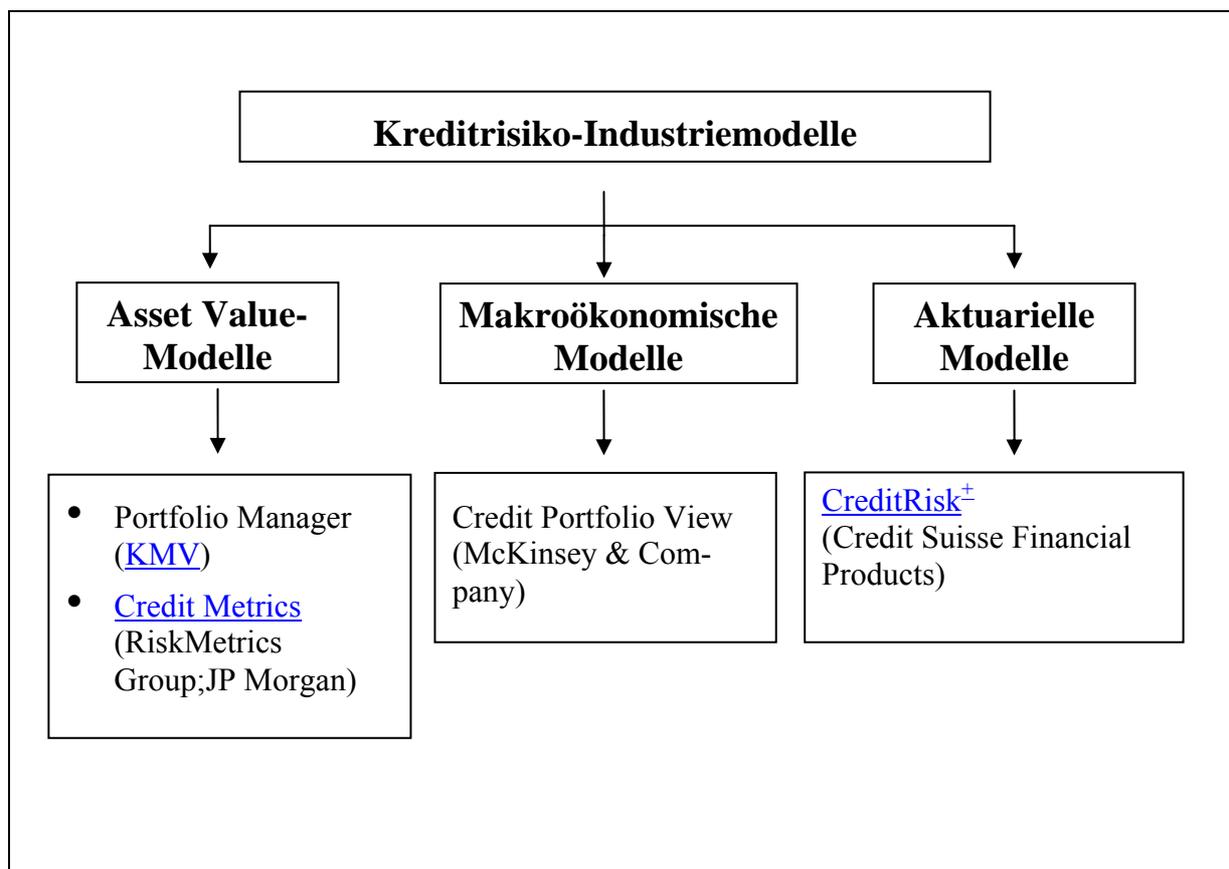


Abb. 10: Kreditrisiko-Industriemodelle: Eine erste Übersicht

Die Kreditrisiko-Industriemodelle unterscheiden sich in einer Vielzahl von Merkmalen, beispielsweise dem Risikoverständnis, der Art der Modellierung stochastischer Abhängigkeiten oder hinsichtlich der Berücksichtigung von Ratingmigrationen. Einen ersten Überblick gibt die folgende, *Bluhm et al.* (2003, S. 68) entnommene Grafik. Weitere Details werden in den sich daran anschließenden Ausführungen dargestellt.

	<u>KMV-Model</u>	<u>CreditMetrics</u>	Credit Portfolio View	<u>CreditRisk⁺</u>
Risk Driver	Asset Value Process	Asset Value Process	Macroeconomic Factors	Default Intensity
Definition of Risk	Distance to Default (DtD)	Mark-to-Model of Loan Value	Mark-to-Model of Loan Value	Default Risk only
Risk Scale	DtD on contin. Scale	Down / Upgrade and Default	Default	Default
Transition Probabilities	EDF - Concept, high migration probabilities	Historic Rating Changes, e.g. from S&P	Stochastic, via Macrofactors	Not Implemented
Correlations	Asset Value Factor Model	Equity Value Factor Model	Implicit by Macroeconomy	Implicit by Sectors
Severity	Stochastic (Beta-Distr.) and Fixed	Stochastic (Beta-Distr.) and Fixed	Stochastic, Empirically Calibrated	Deterministic LGD, Stoch. Modifications

Abb. 11: Kreditrisiko-Industriemodelle: Wesentliche Unterscheidungsmerkmale

4.2 [Credit Risk⁺](#): Das Basismodell

[Credit Risk⁺](#) ist ein Default Mode-Modell, d.h. es wird nur auf den Ausfall bzw. Nichtausfall von Krediten abgestellt. Die einzelnen Ausfallbeträge $E_i = EAD_i \cdot LGD_i$ werden als deterministisch angenommen. Ziel ist – in Fortführung der Ausführungen des Abschnitts 3.1 – die Bestimmung der Ausfallverteilung des analysierten Kreditportfolios.

Die erste zentrale Idee von [Credit Risk⁺](#) besteht nun darin, die möglichen Ausfallhöhen in einer bestimmten Art als diskrete Verteilung zu modellieren. Dazu definieren wir einen Standardausfallbetrag E , beispielsweise $E = 100\,000$ EUR, und betrachten alle Ausfallhöhen E_i als – gegebenenfalls aufgerundetes – ganzzahliges Vielfaches von E , d.h. $E_i = v_i E$.

Wir ordnen nun jedes Kreditrisiko des betrachteten Kollektivs in eine von m Größenklassen (Exposurebänder) ein. Damit gilt für Gruppe j mit n_j Einzelrisiken einheitlich

$E_{jk} = v_j E(k = 1, \dots, n_j)$, dabei bezeichne E_{jk} das Exposure des k -ten Einzelrisikos in Gruppe j . Entsprechend sei D_{jk} der Defaultindikator dieses Risikos. Damit ist

$$(113) \quad D_j = \sum_{k=1}^{n_j} D_{jk}$$

der Defaultindikator, d.h. die Anzahl der Kreditausfälle, von Größenklasse j . Wir nehmen nun – wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben – eine Poissonapproximation für D_j vor, $D_j \sim Po[\lambda_j]$. Der Parameter λ_j entspricht somit der Ausfallintensität der Größenklasse j und ist auf der Grundlage der Daten des Kreditportfolios zu bestimmen.

Anstelle der Ausfallhöhe $L_j = v_j E D_j$ der Größenklasse j betrachten wir die normierte Größe $LN_j = v_j D_j$. LN_j entspricht damit der Anzahl von Ausfällen der Höhe E in der Größenklasse j . Die Größe LN_j ist nun der Gegenstand der weiteren Analyse. Hierbei bestehen strukturelle Ähnlichkeiten mit den in der Schadenversicherungsmathematik betrachteten Schadenzahlverteilungen. Deswegen wird [Credit Risk⁺](#) auch als aktuarieller oder versicherungsmathematischer Ansatz apostrophiert. Bei gegebenen Resultaten für die Größe LN_j erhält man aufgrund von $L_j = LN_j E$ das entsprechende Resultat für die Ausfallhöhe der Größenklasse j . Analog geht man für die Ausfallhöhe des gesamten Kreditportfolios vor.

Ein zentrales Hilfsmittel zur Analyse der Schadenzahl- bzw. hier Ausfallzahlverteilung ist nun die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion. Allgemein ist die *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* G einer diskreten Zufallsgröße X definiert durch ($|z| \leq 1$)

$$(114) \quad G(z) = E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,$$

wobei $p_n := P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Für stochastisch unabhängige Zufallsgrößen X und Y mit erzeugenden Funktionen G_X und G_Y gilt für die erzeugende Funktion G_{X+Y} der Summe der beiden Zufallsgrößen

$$(115) \quad G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) .$$

Ferner besteht die Beziehung

$$(116) \quad p_n = P(X = n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n G(z)}{\partial z^n} \right|_{z=0} .$$

Bei Kenntnis der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion kann man somit die Einzelwahrscheinlichkeiten und damit auch die Verteilungsfunktion durch entsprechende Differentiation der erzeugenden Funktion bestimmen.

Ferner gelten die Beziehungen:

$$(117a) \quad E(X) = G'(1)$$

$$(117b) \quad E(X^2) - E(X) = G''(1)$$

$$(117c) \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 .$$

Da $P(LN_j = kv_j) = P(D_j = k)$ gilt zunächst für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von LN_j :

$$(118) \quad \begin{aligned} G_{LN_j}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(D_j = k) z^{kv_j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^k}{k!} e^{-\lambda_j} z^{kv_j} \\ &= e^{-\lambda_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j z^{v_j})^k}{k!} \\ &= \exp(-\lambda_j + \lambda_j z^{v_j}) . \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass die normierten Ausfallhöhen LN_j stochastisch unabhängig sind, so ergibt sich gemäß (114) für die erzeugende Funktion der normierten Ausfallverteilung

$LN := \sum_{j=1}^m LN_j$ des Kreditportfolios die Beziehung

$$\begin{aligned}
 (119) \quad G_{LN}(z) &= \prod_{j=1}^m \exp(-\lambda_j + \lambda_j z^{v_j}) \\
 &= \exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda_j + \sum_{j=1}^m \lambda_j z^{v_j}\right).
 \end{aligned}$$

Die Einzelwahrscheinlichkeiten $P(LN = n)$ können nun auf der Grundlage der Beziehung (116) bestimmt werden. Hieraus resultiert die folgende rekursive Beziehung, die eine effiziente Bestimmung der Einzelwahrscheinlichkeiten ermöglicht:

$$(120a) \quad P(LN = 0) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \lambda_j\right)$$

$$(120b) \quad P(LN = n) = \sum_{j; v_j \leq n} \frac{v_j \lambda_j}{n} P(LN = n - v_j) .$$

Dieses Ergebnis unterstreicht die Vorteile des Credit Risk⁺-Ansatzes. Das Basismodell erfordert wenig Inputdaten, nur die Größen v_j sowie λ_j , und das Ergebnis ist in analytisch geschlossener Form darstellbar. Allerdings sind bei Anwendung des Basismodells größere Diskrepanzen zwischen der empirischen Ausfallverteilung und der Modellverteilung zu registrieren. Hierfür sind eine Reihe von Gründen ausschlaggebend. Problematisch ist beispielsweise die vorgenommene Poissonapproximation.

Gemäß Abschnitt 3.1.3 folgt hieraus $E(D_j) = Var(D_j) = \lambda_j$, in praxi ist aber regelmäßig eine Überdispersion, d.h. $Var(D_j) > \lambda_j$ zu beobachten. Auch die Annahme der Unabhängigkeit zwischen den Kreditrisiken der einzelnen Exposurebänder ist nicht realistisch. Weitere Probleme bestehen im deterministischen Ansatz für die Recovery Rates und in der implizit angenommenen zeitlichen Konstanz der Ausfallwahrscheinlichkeiten bzw. der Ausfallintensitäten. Letzteres bedingt die Betrachtung kürzerer Zeiträume und eine regelmäßige Aktualisierung der Inputdaten.

Die vorstehend dargestellten Probleme zeigen die Notwendigkeit für Verallgemeinerungen des Basismodells auf. In Anhang A werden zwei solche Modellerweiterungen aufgegriffen. Diese betreffen zum einen die Poissonapproximation und zum anderen die Unabhängigkeitsannahme.

Eine Vielzahl von weiteren Verallgemeinerungen des [Credit Risk⁺](#)-Basismodells sowie eine Darstellung weiterer Problemkreise im [Credit Risk⁺](#)-Kontext enthält die Monographie *Gundlach/Lehrbaß* (2004).

4.3 Das [KMV-Modell](#)

Das KMV-Modell beruht auf dem in Abschnitt 3.2.1 dargestellten Unternehmenswertmodell nach [Merton](#). Die Verpflichtungen werden dabei jedoch nicht zu Marktwerten angesetzt, sondern zu Buchwerten. Vorgegeben wird ein Zeithorizont der Länge T , standardmäßig ein Jahr. Die Verpflichtungen werden als Default Point $DPT = DPT(T)$ bezeichnet und bestimmen sich gemäß

$$(121) \quad DPT = \text{Short Term Debt} + \frac{1}{2} \text{ Long Term Debt}.$$

Dabei entspricht die Größe Short Term Debt der Summe derjenigen Verpflichtungen, die im betrachteten Zeithorizont zu erfüllen sind. Die restlichen Verpflichtungen werden unter Long Term Debt zugeordnet. Die Wahl von DPT wurde auf der Grundlage empirischer Studien getroffen.

Definiert wird nun des Weiteren die Größe *Distance to Default* $DD = DD(T)$ durch

$$(122) \quad DD = \frac{E[\ln(A_T)] - \ln(DPT)}{\sigma_A \sqrt{T}}.$$

Die Größe A_T entspricht dabei dem Wert der Aktiva des Unternehmens zum Zeitpunkt T . Der Distance to Default beinhaltet somit intuitiv eine Messung des „Abstands“ (in logarithmierten Termen) des erwarteten Wertes der Aktiva vom kritischen Punkt, den Verpflichtungen, pro Einheit Standardabweichung.

Definieren wir $m_A := \mu_A - \sigma_A^2 / 2$, so gilt im [Merton-Modell](#)

$$(123) \quad E[\ln(A_T)] = \ln(A_0) + m_A T$$

und damit

$$(124) \quad DD = \frac{\ln(A_0 / DPT) + m_A T}{\sigma_A \sqrt{T}} .$$

Im Rahmen des [Merton-Modells](#) kann man ferner nachweisen, dass für die Ausfallwahrscheinlichkeit $PD = PD(T)$ gilt:

$$(125) \quad PD = N(-DD) = 1 - N(DD) .$$

[KMV](#) verwendet nun aber nicht die auf der Normalverteilung basierende Ausfallwahrscheinlichkeit (125). Sie ermitteln auf der Grundlage ihrer umfangreichen Datenbasis, die aus weltweit 25000 börsengehandelten (!) Unternehmen besteht, eine (höhere) empirische Ausfallwahrscheinlichkeit. Dabei wird der Distance to Default fixiert, $DD = dd$, und die so genannte *Expected Default Frequency (EDF)* nach dem Prinzip

$$(126) \quad EDF = \frac{\text{Firms actually defaulted with } DD = dd}{\text{Total population of firms with } DD = dd}$$

ermittelt. Nach [Kealhofer \(2003a\)](#) erlaubt diese Vorgehensweise erheblich bessere Kurzfristprognosen der Änderungen von Ausfallwahrscheinlichkeiten und von Ausfallereignissen als die Einschätzungen von Rating-Agenturen, die typischerweise auf einem konjunkturzyklusübergreifenden Rating basieren. Zudem beruhen Ratings auf „Ausfallklassen“, d.h. im Grunde auf einer mittleren Ausfallwahrscheinlichkeit für diese Klasse. Die Aktualisierung der EDF-Größen erfolgt einmal pro Monat.

Neben dieser Analyse auf der Unternehmensebene existiert auch eine Portfoliovariante des [KMV-Modells](#). Die Assetkorrelationen werden dabei auf der Grundlage des bereits in Abschnitt 3.1.4 dargestellten Faktormodells bestimmt.

4.4 [Credit Metrics](#)

4.4.1 Grundstruktur

Die [Credit Metrics](#)-Methodologie zielt – in Anlehnung an die entsprechende, etwa in *Albrecht/Maurer* (2005, Kapitel 15) dargelegte Vorgehensweise zur Quantifizierung des Marktwerttrisikos – ab auf die Ermittlung der Verteilung der Wertänderung eines Kreditportfolios – typischerweise bestehend aus ausfallbedrohten Zinstiteln – über einen gegebenen künftigen Zeithorizont, beispielsweise ein Jahr. Die Wertänderungen der Einzeltitel werden dabei durch entsprechende Änderungen des Ratingstatus beeinflusst. Im Portfoliokontext sind darüber hinaus die entsprechenden Korrelationen dieser Ratingänderungen von Bedeutung.

Die nachfolgende – aus *Crouhy/Galai/Mark* (2001) entnommene – Grafik 12 illustriert zunächst die Grundstruktur des Gesamtmodells auf der Grundlage von vier zentralen Bausteinen.

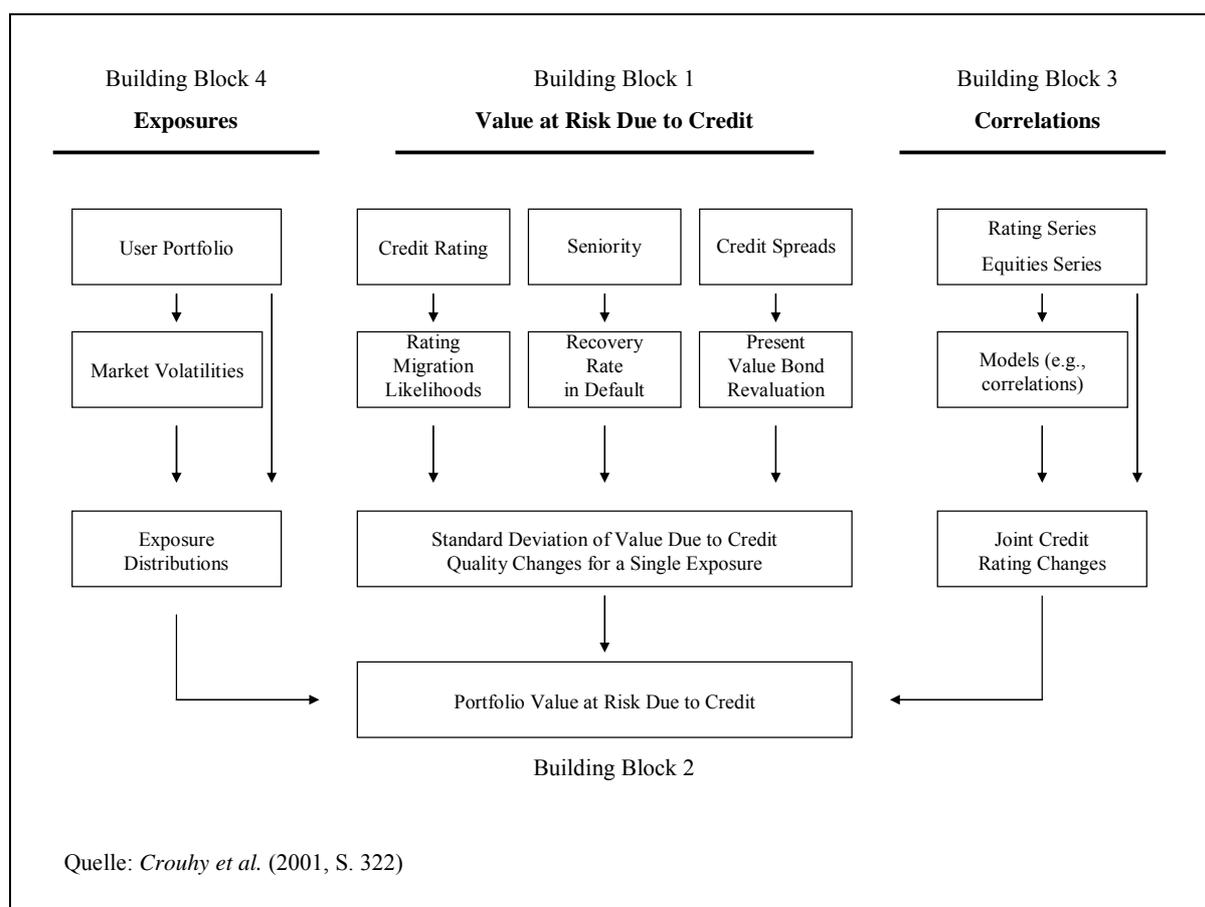


Abb. 12: Die Bausteine von [Credit Metrics](#)

Die konstitutiven Elemente des [Credit Metrics](#)-Ansatzes bestehen insbesondere aus:

1. Der Quantifizierung der Ratingmigration in Form einer [Markovkette](#)
2. Marktbasierten Forward-Rates pro Ratingklasse
3. Recovery Rates in Form einer Beta-Verteilung 1. Art über das Intervall $(0,1)$
4. Gewinnung der Ausfallkorrelationen von ausfallbedrohten Anleihen auf der Basis eines modifizierten Unternehmenswertmodells.

Die Vorgehensweise von [Credit Metrics](#) erfolgt dabei in zwei Stufen:

1. Bestimmung des Credit Value at Risk für einen einzelnen Zinstitel
2. Bestimmung des Credit-VaR auf Portfolioebene.

In der weiteren Darstellung des [Credit Metrics](#)-Ansatzes folgen wir dabei dieser zweistufigen Vorgehensweise.

4.4.2 Analyse auf Finanztitelebene

Zur Quantifizierung der Ratingmigration wird ein Markovmodell gemäß Abschnitt 3.4 verwendet. Spezifiziert seien dazu K Ratingklassen $\{1, \dots, K\}$, wobei die Ratingklasse K dem Defaultzustand entspreche. Ist die Start-Ratingklasse gegeben durch $i \neq K$, so gilt für den Startvektor (in Zeilenform)

$$(127a) \quad p_i(0) = e(i) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Gegeben die einperiodige Übergangsmatrix

$$(127b) \quad P = (p_{ij})$$

der Ratingübergangswahrscheinlichkeiten p_{ij} , erhalten wir dann den Zustandsvektor $p_i(t) = (p_{iI}(t), \dots, p_{iK}(t))$ durch

$$(128) \quad p_i(t) = p(0)P^t .$$

Das j -te Element dieses Zustandsvektors in Zeilenform, $p_{ij}(t)$, entspricht dabei der Wahrscheinlichkeit – gegeben die Start-Ratingklasse i – zum Zeitpunkt t in Ratingklasse j zu sein.

Implizit wird damit angenommen, dass alle Emittenten von ausfallbedrohten Zinstiteln der gleichen Ratingklasse homogene Kreditrisiken in dem Sinne sind, dass sie die gleichen Ausfall- und Übergangswahrscheinlichkeiten besitzen. Dies ist ein Unterschied zum [KMV-Ansatz](#), da bei diesem mit emittentenspezifischen Größen (Asset-Wertentwicklung, Verpflichtungsstruktur) gearbeitet wird.

Pro Ratingklasse j werden nun die einperiodigen Forward Rates

$f_j(t, t+1)$: einperiodige Forward Rate der Ratingklasse j in t

marktbasiert kalibriert und in den Bewertungsprozess eingespeist. Es ist darauf hinzuweisen, dass hierbei mit deterministischen Forward Rates gearbeitet, und damit das Marktrisiko im Zinsbereich ausgeklammert wird.

Es kennzeichne nun im Weiteren der Zeitraum $[0, t]$ den betrachteten Risikohorizont der Länge t , typischerweise $t = 1$, und der Zeitraum $[0, T]$ den erfassten Gesamthorizont der Länge $T > t$. Angestrebt wird eine Bewertung des Portfoliowerts in t bzw. die Charakterisierung der Änderung des Portfoliowerts über $[0, t]$.

Zur konkreteren Illustration der Vorgehensweise betrachten wir im Weiteren einen Zinstitel mit der Zahlungsstruktur $\{Z_1, \dots, Z_{T-1}, Z_T + N\}$, wobei Z_t die Zinszahlungen am Ende der Periode t und N den Nennwert des Titels bezeichne. Ferner definieren wir die (annualisierten) Forward Rates $f_j(u, v)$ bezüglich der Ratingklasse j durch $(v = u + k)$

$$(129) \quad [1 + f_j(u, v)]^{v-u} = \prod_{j=0}^{k-1} [1 + f(u + j, u + j + 1)] .$$

Entsprechend bezeichne $f(u, v)$ die (annualisierten) Forward Rates über den Zeitraum $[u, v]$ für ausfallfreie Zinstitel, beispielsweise Staatsanleihen.

Befindet sich nun der betrachtete Bond mit gegebener Start-Ratingklasse i in 0 zum Zeitpunkt t in Ratingklasse $j \neq K$, d.h. es sei bis zum Zeitpunkt t kein Default eingetreten, so gilt für den Wert des Bond zum Zeitpunkt t offenbar

$$(130a) \quad V_{ij}(t, T) = \sum_{k=1}^t Z_k [1 + f(k, t)]^{t-k} + \sum_{k=t+1}^T Z_k [1 + f_j(t, k)]^{-(k-t)} + N [1 + f_j(t, T)]^{-(T-t)} .$$

Gilt hingegen $j = K$, d.h. bis zum Zeitpunkt t ist der Default eingetreten, so wird pauschal die Summe der bis zu T zu leistenden Zahlungen betrachtet und mit einer durchschnittlichen Recovery Rate r_c , abhängig von der Seniority Class des Bonds multipliziert, d.h. es gilt

$$(130b) \quad V_{iK}(t, T) = \left(\sum_{k=1}^T Z_k + N \right) r_c .$$

Allgemeiner wird mit einer Betaverteilung 1. Art für die Recovery Rates gearbeitet, worauf wir hier aber nicht weiter eingehen.

Der Wert $V_i(t)$ zum Zeitpunkt t eines Bond i aus der Start-Ratingklasse i ist nun eine Zufallsgröße und es gilt bei Verwendung der zuvor eingeführten Größen

$$(131) \quad P[V_i(t) = V_{ij}(t, T)] = p_{ij}(t) .$$

Definieren wir nun noch den durch eine Ratingänderung induzierten Verlust $L_i(t)$ eines Bonds mit Start-Rating i über den Zeitraum $[0, t]$ durch

$$(132) \quad L_i(t) = V_{ii}(t, T) - V_i(t) ,$$

wobei $V_{ii}(t, T)$ dem Wert des Bonds in t bei unveränderter Ratingklasse und $V_i(t)$ dem zufallsabhängigen Wert des Bonds in t entspreche, so ist die Verlustverteilung damit gesamthaft spezifiziert und es kann ein Credit-VaR sowie andere Kennzahlen wie etwa $E[L_i(t)]$ und $\sigma[L_i(t)]$ auf Einzeltitelebene bestimmt werden. Typischerweise ergibt sich eine stark rechtschiefe Verteilung. Wir greifen zur Illustration auf ein Beispiel in *Crouhy/Galai/Mark* (2001) zurück. Dabei ist der betrachtete Zeithorizont $t = 1$ und das Ausgangsrating des analysierten Bonds sei BBB.

Rating $t = 1$	$p_{\text{BBB}}(1)$	$V_{\text{BBB}}(1)$	$L_{\text{BBB}}(1)$
AAA	0,02%	109,37	-1,82
AA	0,33%	109,19	-1,64
A	5,95%	108,66	-1,11
BBB	86,93%	107,55	0
BB	5,30%	102,02	5,53
B	1,17%	98,10	9,45
C	0,12%	83,64	23,91
D	0,18%	51,13	56,42

Quelle: *Crouhy et al.* (2001, S. 330)

Tab. 4: Beispielhafte Kreditverlustverteilung

Abbildung 13 illustriert (in idealisierter Form) die entsprechende Verlustverteilung.

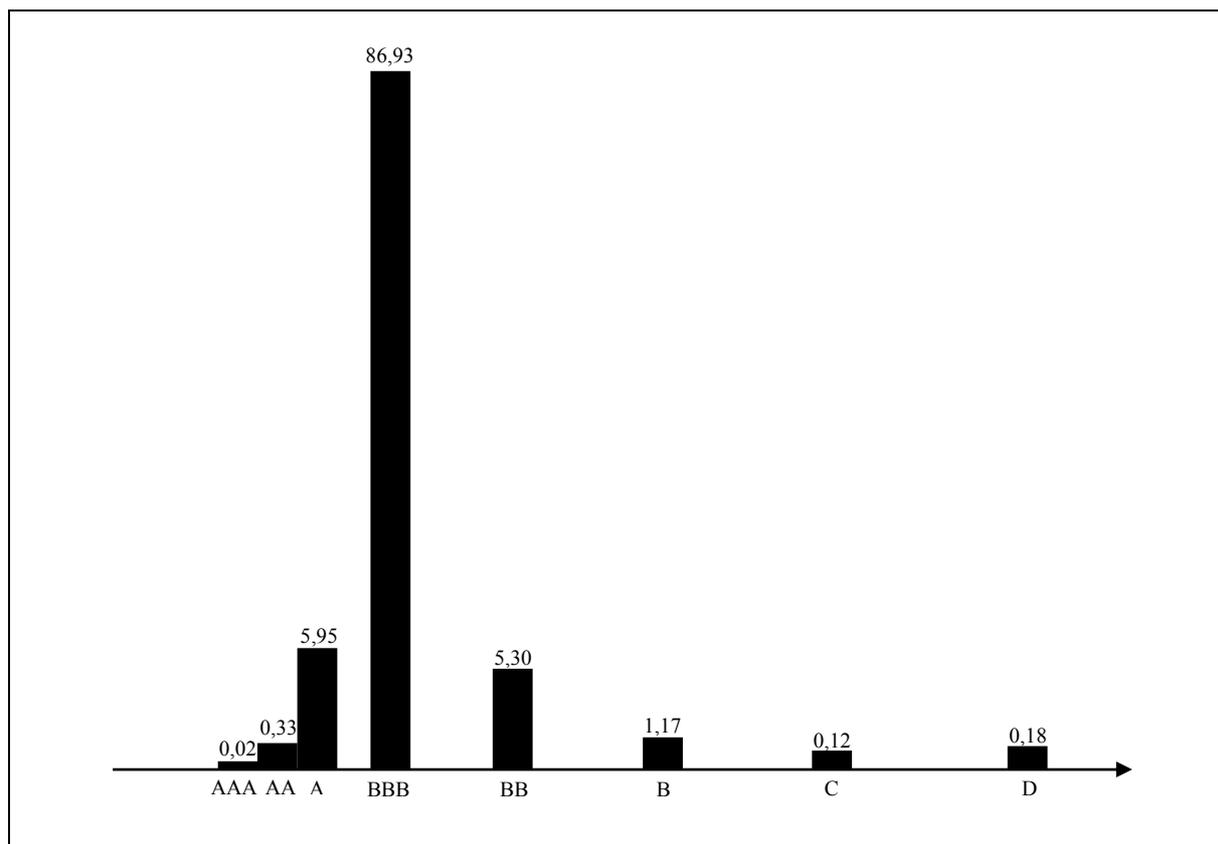


Abb. 13: Beispielhafte Kreditverlustverteilung auf Einzeltitelebene

Der Erwartungswert $E[L_{\text{BBB}}(1)]$ der Kreditverlustverteilung bestimmt sich zu 0,46 und die Varianz $\text{Var}[L_{\text{BBB}}(1)]$ zu 8,95, entsprechend ist die Standardabweichung $\sigma[L_{\text{BBB}}(1)] = 2,99$. Bei Annahme einer Normalverteilung wäre damit der Credit-VaR zum Konfidenzniveau 1% gegeben durch $0,46 + 2,33(2,99) = 7,43$. Der empirische Credit-VaR der Verteilung gemäß Tabelle 4 ist hingegen 23,91. Dies dokumentiert nochmals die extreme Rechtsschiefe der Kreditverlustverteilung auf Einzeltitelebene.

4.4.3 Bestimmung von Ausfallkorrelationen: Zwei-Unternehmens-Fall

Zur Bestimmung der Verlustverteilung des Kreditportfolios ist es erforderlich, für je zwei Ausgangsratingklassen i_0 und j_0 ($i_0, j_0 \neq K$) den gemeinsamen Übergang in zwei Zielratingklassen i_1 und j_1 zu quantifizieren. Wir konzentrieren uns im Weiteren zur Illustration des systematischen Ansatzes auf den Fall zweier Unternehmen und dabei zunächst auf die Default Mode-Variante von [Credit Metrics](#), d.h. Berücksichtigung findet nur der Ausfall eines Kredits durch Insolvenz des Kreditnehmers.

Gedanklicher Ansatzpunkt von [Credit Metrics](#) ist hierbei das Unternehmenswertmodell von [Merton](#) gemäß Abschnitt 3.2.1. Beim [Merton-Modell](#) tritt der Default eines Unternehmens genau dann ein, wenn der Wert der Aktiva am Periodenende den Wert der Verpflichtungen unterschreitet. Im Einperiodenfall ist daher die Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben durch (Φ bezeichne wie üblich die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung)

$$\begin{aligned}
 PD &= P(A_1 < F) \\
 &= P\left[\frac{\ln(A_1) - m}{\sigma} < \frac{\ln(F) - m}{\sigma}\right] \\
 (133) \quad &= \Phi\left[\frac{\ln(F) - m}{\sigma}\right] \\
 &= \Phi[F^*],
 \end{aligned}$$

wobei A_1 den Wert der Aktiva am Periodenende sowie F die Höhe der Verpflichtung bezeichne und unterstellt wird, dass A_1 einer Lognormalverteilung mit den Parametern m und σ folgt. Mit $F^* = [\ln(F) - m]/\sigma$ als „normierter“ Ausfallschranke ergibt sich somit die Ausfallwahrscheinlichkeit durch $PD = \Phi(F^*)$. Bei vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeit lässt sich entsprechend die zugehörige Ausfallschranke gemäß $F^* = \Phi^{-1}(PD)$ ermitteln. Wird diese Ausfallschranke unterschritten, dann geht das Unternehmen in Konkurs und vom Unternehmen emittierte Zinstitel werden in eine Ratingklasse eingeordnet, die dem Defaultstatus entspricht. Der Übergang zum Defaultstatus entspricht somit dem Unterschreiten einer kritischen Größe F^* , die bei gegebener Ausfallwahrscheinlichkeit modellendogen bestimmt werden kann. Alternativ zur Betrachtung von A_1 kann in (133) auch äquivalent den Wertzuwachs $A_1 - A_0$ bzw. (wie üblich) die Assetrendite $(A_1 - A_0)/A_0$ betrachten, wenn man den Wert der Verpflichtung entsprechend zu $F - A_0$ bzw. $(F - A_0)/A_0$ transformiert.

Geht man daher nun allgemein von einer einperiodigen Assetrendite R eines Unternehmens aus, die entsprechend normiert und daher als standardnormalverteilt angenommen werden kann, so ergibt sich bei Vorgabe der Ausfallwahrscheinlichkeit PD die zugrunde liegende äquivalente Ausfallschranke Z_D für den Übergang zum Defaultstatus zu

$$(134) \quad Z_D = \Phi^{-1}(PD) .$$

Diesen Ansatz kann man nun entsprechend auf zwei Unternehmen verallgemeinern. Es seien dazu R_1 und R_2 die Assetrenditen zweier Unternehmen, die entsprechend normiert sind und daher als bivariat (korreliert) standardnormalverteilt angenommen werden können, kurz $(R_1, R_2) \sim \Phi_2(x, y; \rho_{12})$. Die bivariate (korrelierte) Standardnormalverteilung besitzt hierbei den Erwartungsvektor μ bzw. die Varianz/Kovarianzmatrix Σ gegeben durch

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} \\ \rho_{12} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Größe ρ_{12} wird dabei auch als *Assetkorrelation* bezeichnet.

Die isolierten Ausfallsschranken Z_1 und Z_2 ergeben sich nun entsprechend zu

$$(135) \quad Z_1 = \Phi^{-1}(PD_1) \text{ und } Z_2 = \Phi^{-1}(PD_2).$$

Gesucht ist nun die *gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit* PD_{12} , die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass beide Unternehmen zugleich am Periodenende ausgefallen sind. Offenbar gilt

$$(136) \quad \begin{aligned} PD_{12} &= P[R_1 < Z_1, R_2 < Z_2] = \Phi_2(Z_1, Z_2; \rho_{12}) \\ &= \Phi_2(\Phi^{-1}(PD_1), \Phi^{-1}(PD_2); \rho_{12}). \end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften der Dichte der bivariaten Normalverteilung ist PD_{12} monoton wachsend in der Assetkorrelation ρ_{12} und ebenso monoton wachsend in PD_1 bzw. PD_2 . Eine grafische Illustration der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit PD_{12} enthält die folgende Abbildung 14. Die Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht dem Volumen des Gebietes über den Quadranten $(-\infty, Z_1) \times (-\infty, Z_2)$, das durch die zweidimensionale Dichtefunktion der bivariaten Normalverteilung begrenzt wird.

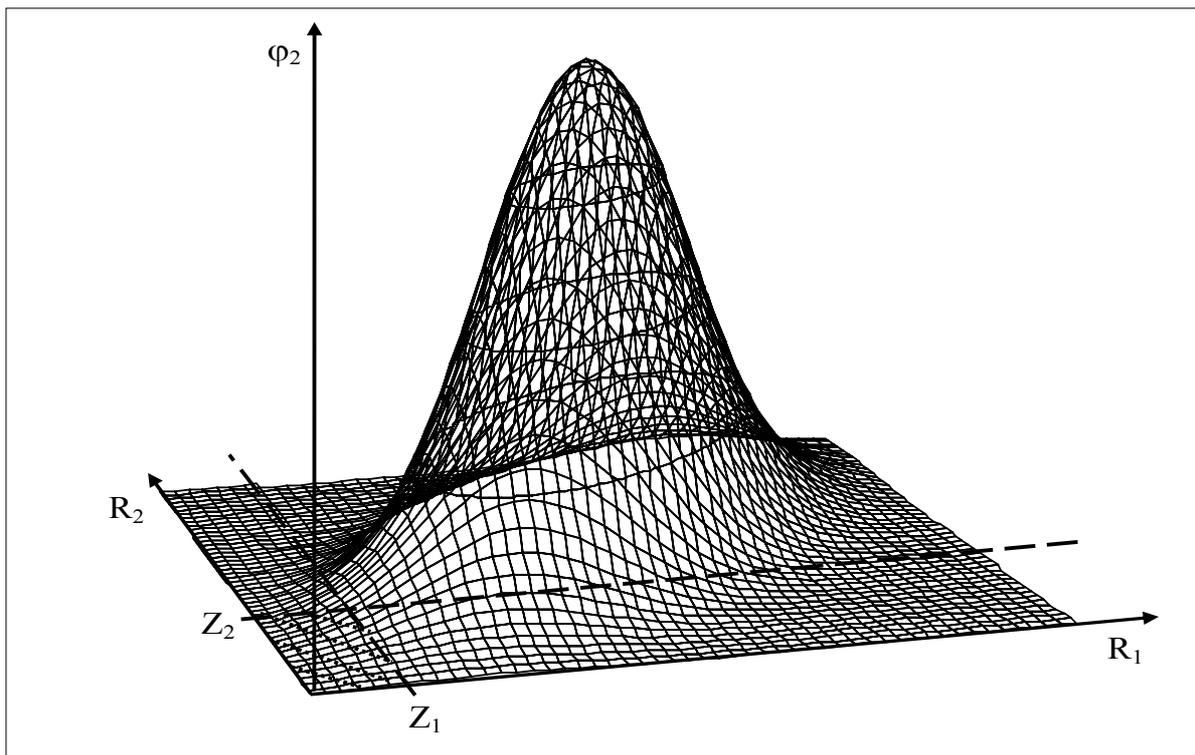


Abb. 14: Illustration der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit zweier Schuldner

Auf dieser Grundlage lässt sich nun auch die Ausfallverteilung eines Portfolios, das aus zwei Krediten der beiden Unternehmen mit (deterministischer) Ausfallhöhe E_1 und E_2 besteht, bestimmen. Bezeichnen wie üblich D_1 und D_2 die Defaultgrößen, so gilt für den Portfolioverlust L die Beziehung $L = E_1 D_1 + E_2 D_2$ und die Portfolioausfallverteilung ist entsprechend gegeben durch die folgenden Ausfallwahrscheinlichkeiten. Zunächst gilt

$$(137a) \quad P(L = E_1 + E_2) = P(D_1 = 1, D_2 = 1) = P(R_1 < Z_1, R_2 < Z_2) = PD_{12} ,$$

wobei PD_{12} durch (136) gegeben ist. Es gilt weiterhin

$$(137b) \quad \begin{aligned} P(L = E_1) &= P(D_1 = 1, D_2 = 0) = P(R_1 < Z_1, R_2 \geq Z_2) \\ &= P(R_1 < Z_1) - P(R_1 < Z_1, R_2 < Z_2) \\ &= PD_1 - PD_{12} . \end{aligned}$$

und analog

$$(137c) \quad P(L = E_2) = P(D_1 = 0, D_2 = 1) = PD_2 - PD_{12}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 (137d) \quad P(L = 0) &= P(D_1 = 0, D_2 = 0) \\
 &= 1 - PD_{12} - (PD_1 - PD_{12}) - (PD_2 - PD_{12}) \\
 &= 1 - PD_1 - PD_2 + PD_{12} .
 \end{aligned}$$

Die Porfolioausfallverteilung ist somit vollständig spezifiziert, wenn man die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten PD_1 und PD_2 sowie die Assetkorrelation ρ_{12} kennt bzw. identifiziert.

Anzumerken ist in diesem Kontext zur Vorgehensweise von [Credit Metrics](#) noch, dass – da die Assetrenditen nicht direkt beobachtet werden können – im Rahmen von [Credit Metrics](#) die Assetrendite durch die Aktienrendite als Proxyvariable ersetzt wird. Äquivalent zu dieser Approximation ist die Annahme, dass die Unternehmensaktivitäten rein eigenkapitalfinanziert sind. Dies ist ein zentrales Manko des [Credit Metrics](#)-Ansatzes, denn bei Anwendung auf Unternehmen mit einem hohen Fremdkapitalanteil ist davon auszugehen, dass die Aktienkursentwicklung erheblich volatiler als die Wertentwicklung der Assets des Unternehmens ist.

Die vorstehend dargelegte Ansatzweise für den Default Mode kann man entsprechend auf den Mark to Market Mode, bei dem nicht nur der Defaultzustand, sondern ein Universum von Ratingklassen betrachtet wird, verallgemeinert werden. Ausgehend von einem fixierten Ausgangsrating wird angenommen, dass jegliche Ratingänderung auf dem Über- bzw. Unterschreiten bestimmter kritischer Grenzen durch die (entsprechend normierte) Assetrendite (bzw. in praxi die Aktienrendite) bestimmt wird. Die kritischen Grenzen können nun wieder durch Kalibrierung auf Basis der Ratingwahrscheinlichkeiten bestimmt werden. Betrachten wir zu weiteren Konkretisierung ein Beispiel.

Beispiel: Ratingänderungen und Assetrenditenänderungen

Gegeben sei ein Ratingsystem der Form $\{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, D\}$. Das Ausgangsrating des Unternehmens sei BBB. Wir definieren nun kritische Grenzen $Z_D, Z_{CCC}, Z_B, Z_{BB}, Z_{BBB}, Z_A, Z_{AA}$ für die standardnormalverteilte Assetrendite R . Die Ratingübergangswahrscheinlichkeiten seien wie in Tabelle 4 wiederum gegeben durch

$p_{BBB,AAA} = 0,02\%$	$p_{BBB,BB} = 5,30\%$
$p_{BBB,AA} = 0,33\%$	$p_{BBB,B} = 1,17\%$
$p_{BBB,A} = 5,95\%$	$p_{BBB,CCC} = 0,12\%$
$p_{BBB,BBB} = 86,93\%$	$p_{BBB,D} = 0,18\%$

Ein Übergang von BBB nach D ist nun äquivalent mit $R < Z_D$. Insofern gilt $0,0018 = P(R < Z_D) = \Phi(Z_D)$ und damit $Z_D = \Phi^{-1}(0,0018) = -2,9112$.

Ein Übergang von BBB nach CCC findet nun statt, wenn Z unter Z_{CCC} fällt, Z_D dabei aber nicht unterschreitet, d.h. $Z_D \leq R < Z_{CCC}$. Damit gilt $0,0012 = P(Z_D \leq R < Z_{CCC}) = \Phi(Z_{CCC}) - \Phi(Z_D) = \Phi(Z_{CCC}) - 0,0018$. Hieraus folgt $\Phi(Z_{CCC}) = 0,003$ und damit $Z_{CCC} = \Phi^{-1}(0,003) = 2,7479$. Entsprechend geht man vor für alle Wertschranken sowie alle Ausgangsratings. Insgesamt entspricht somit jede Ratingklasse einem Realisationsintervall der Assetrendite, wobei gilt:

$D \Leftrightarrow [-\infty, Z_D)$	$BBB \Leftrightarrow [Z_{BB}, Z_{BBB})$
$CCC \Leftrightarrow [Z_D, Z_{CCC})$	$A \Leftrightarrow [Z_{BBB}, Z_A)$
$B \Leftrightarrow [Z_{CCC}, Z_B)$	$AA \Leftrightarrow [Z_A, Z_{AA})$
$BB \Leftrightarrow [Z_B, Z_{BB})$	$AAA \Leftrightarrow [Z_{AA}, \infty)$

Abbildung 15 illustriert nochmals diesen Zusammenhang, nun aber mit dem Rating BB als Ausgangsrating.

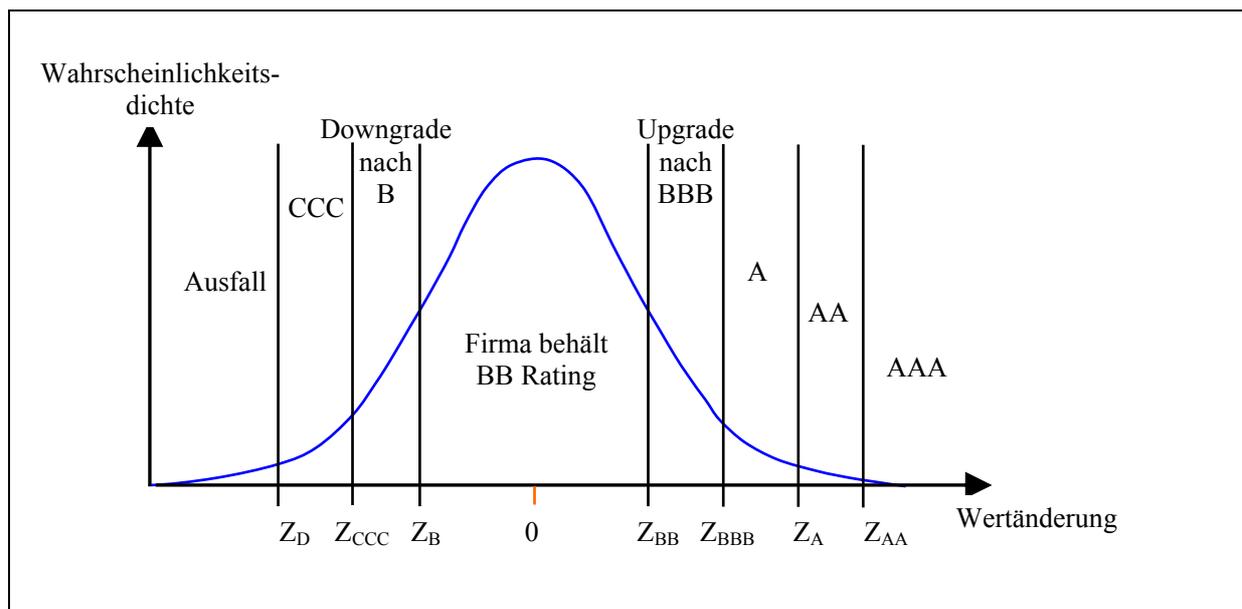


Abb. 15: Ratingänderungen und Ratingschranken

Wie schon im Default Mode kann dieser gedankliche Ansatz nun auch dazu verwendet werden, das gemeinsame Übergangsverhalten zu charakterisieren. Zur Illustration des Ansatzes bleiben wir wieder im Zwei-Unternehmens-Fall. Wir gehen aus von einem Ratingsystem $\{K_1 = D, K_2, \dots, K_n\}$ und ersetzen entsprechend die Defaultindikatoren durch zwei Ratingindikatoren $D_1 = D_1(1)$ und $D_2 = D_2(1)$ mit jeweiligem Wertebereich $\{1, \dots, n\}$. Wir fixieren so dann die Ausgangsratings gemäß $D_1(0) = i^* \neq 1$ und $D_2(0) = j^* \neq 1$. Bei fixierten Ausgangsratings entspricht im Ein-Unternehmens-Fall der Ratingübergang einer Skala von Ausfall-schranken $Z_1(D), \dots, Z_1(K_n)$ bzw. $Z_2(D), \dots, Z_2(K_n)$, wobei $Z_1(K_i) = Z_1(K_i; K_{i^*})$ und $Z_2(K_j) = Z_2(K_j; K_{j^*})$.

Bei bivariat (korreliert) standardnormalverteilten Assetrenditen $R_1, R_2 \sim \Phi_2(x, y; \rho_{12})$ ist daher der Übergang $R_1 \rightarrow K_i$ und $R_2 \rightarrow K_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) äquivalent zu $Z_{K_{i-1}}^1 = R_1 < Z_{K_i}^1$ und gleichzeitig $Z_{K_{j-1}}^2 = R_2 < Z_{K_j}^2$ ($i, j = 1, \dots, n+1$). Dabei ist jeweils noch $Z_{K_{n+1}}^1 = Z_{K_{n+1}}^2 = +\infty$ zu setzen.

Die gemeinsame Übergangswahrscheinlichkeit – gegeben i^* und j^* – in die Ratings i bzw. j am Periodenende ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
(138) \quad p(i, j) &= p_{i^*, j^*}(i, j) = P[D_1 = i, D_2 = j] \\
&= P[Z_1(K_{i-1}) \leq R_1 < Z_1(K_i), Z_2(K_{j-1}) \leq R_2 < Z_2(K_j)] \\
&= P[a_{i-1} \leq R_1 < a_i, b_{j-1} \leq R_2 < b_j] \\
&= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \int_{b_{j-1}}^{b_j} \varphi_2(x, y; \rho_{12}) dx dy .
\end{aligned}$$

Dabei bezeichne entsprechend φ_2 die Dichtefunktion der bivariaten (korrelierten) Standardnormalverteilung. Auch hier genügt wiederum die Kenntnis der univariaten Ausfallsschranken $a_i = Z_1(K_i)$ bzw. $b_i = Z_2(K_i)$ sowie die Korrelation ρ_{12} der Assetrenditen, um die gemeinsame Übergangswahrscheinlichkeit zu bestimmen.

Ersichtlich wird an der vorstehenden Analyse des Zwei-Unternehmens-Falls aber, dass die Anzahl der benötigten Inputdaten sowie die Modellkomplexität erheblich ansteigt, wenn dieser Ansatz direkt auf n Unternehmen ausgedehnt wird. Einen Ausweg bietet die Verwendung eines Faktormodells, wie im nächsten Abschnitt dargestellt.

4.4.4 Bestimmung von Ausfallkorrelationen: Faktormodell

Im Allgemeinen werden im Rahmen von [Credit Metrics](#) jedem Schuldner sowohl Länder- als auch Industriegewichte zugeordnet. Im Weiteren konzentrieren wir uns auf einen Spezialfall, der darin besteht, dass wir eine rein nationale Analyse vornehmen und jeder Schuldner $i = 1, \dots, n$ im Kreditportfolio genau einem Industriezweig $k = 1, \dots, m$ zugeordnet werden kann. O.B.d.A. betrachten wir die Gruppe k derjenigen Schuldner $i_k = 1, \dots, n_k$ ($n = n_1 + \dots + n_m$), die dem k -ten Industriezweig zugeordnet wird. Dieser werde durch den Index F_k repräsentiert, der so normiert wurde, dass $F_k \sim N(0,1)$. Für die Assetrendite (bzw. in [Credit Metrics](#) die Aktienrendite) R_{i_k} der Gruppe k gelte jeweils das Einfaktormodell

$$(139) \quad R_{i_k} = \sqrt{w_{i_k}} F_k + \sqrt{1 - w_{i_k}} U_{i_k}, \quad i_k = 1, \dots, n_k,$$

wobei $U_{i_k} \sim N(0,1)$ und $\{F_k, U_{i_k}\}$ sowie $\{U_{i_k}, U_{j_k}\}, i_k \neq j_k$ stochastisch unabhängige Größen seien. Die Assetrenditen $i = 1, \dots, n_k$ der Gruppe k werden somit beeinflusst durch einen ge-

meinsamen („systematischen“) Faktor, ansonsten nur von unternehmensspezifischen („idiosynkratischen“) Gegebenheiten.

Für Assetrenditen aus der gleichen Industriegruppe k gilt einheitlich

$$(140a) \quad \rho(R_{i_k}, R_{j_k}) = w_{i_k} .$$

Für Assetrenditen R_{i_k} und R_{i_l} aus verschiedenen Industriegruppen k und l gilt

$$(140b) \quad \begin{aligned} \rho_{i_k i_l} &= \rho(R_{i_k}, R_{i_l}) = \text{Cov}(R_{i_k}, R_{i_l}) \\ &= E(R_{i_k} R_{i_l}) - E(R_{i_k}) E(R_{i_l}) = E(R_{i_k} R_{i_l}) \\ &= \sqrt{w_{i_k} w_{i_l}} E(F_k F_l) = \sqrt{w_{i_k} w_{i_l}} \rho(F_k, F_l) . \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der $n(n-1)/2$ Korrelation der Assetrenditen ist daher die Kenntnis der $m(m-1)/2$ Korrelationen $\rho(F_k, F_l)$ sowie der zu Größen w_{i_1}, \dots, w_{i_m} erforderlich.

Aus den Ergebnissen von Abschnitt 4.1.2 wissen wir, dass bei einer univariaten linearen Regression der Assetrenditen der Gruppe k auf den Faktor F_k für das Bestimmtheitsmaß R_k^2 gilt $R_k^2 = \rho^2(R_{i_k}, F_k)$. Da des Weiteren $\rho(R_{i_k}, F_k) = \sqrt{w_{i_k}}$ gilt, folgt insgesamt

$$(141) \quad R_k^2 = \rho^2(R_{i_k}, F_k) = w_{i_k} .$$

Damit ist das empirische Bestimmtheitsmaß ein natürlicher Schätzer für die Gewichte w_{i_k} ($k=1, \dots, m$). Der natürliche Schätzer für die Korrelationen $\rho(F_k, F_l)$ ist der entsprechende Stichprobenkorrelationskoeffizient.

Die solchermaßen bestimmten Korrelationen der Assetrenditen können nun im Rahmen der Ergebnisse des Abschnitts 4.4.3 sowohl im Rahmen der Default Mode-Variante als auch im Rahmen der Mark to Market-Variante benutzt werden, um die Verteilung des Portfolioverlustes (auf simulativem Wege) zu bestimmen.

4.5 Credit Portfolio View

Das Credit Portfolio View (CPV)-Modell setzt sich aus zwei zentralen Blöcken zusammen. Zum einen aus einem Multifaktormodell für das Ausfallrisiko eines Portfolios zur Bestimmung und zur Simulation von bedingten, (durchschnittlichen) Ausfall- und Übergangswahrscheinlichkeiten, abhängig von der aktuellen Wirtschaftslage und industrie- bzw. länderspezifischen Einflussfaktoren. Zum anderen aus einer Methode zur Bestimmung der diskreten Ausfallverteilung eines Kreditportfolios.

Im Rahmen des Multifaktormodells steht dabei vor allem der Einfluss makroökonomischer Faktoren (beispielsweise BIP-Wachstum, Langfristzins, Beschäftigungszahlen, Sparquote, Haushaltslage) im Vordergrund. Betrachtet wird hierbei ein Zeithorizont $[0, T]$, der in einjährige Perioden mit Index t aufgeteilt wird. Alle Kreditrisiken im Portfolio lassen sich m länder- und sektorspezifischen Segmenten zuordnen und durch entsprechende Segmentindices Y_j bzw. in dynamisierter Form Y_{jt} repräsentieren. Für die Indexwerte Y_{jt} wird ein Faktormodell der folgenden Form angenommen

$$(142a) \quad Y_{jt} = b_{j0} + b_{j1} X_{j1t} + \dots + b_{jm} X_{jmt} + \varepsilon_{jt} ,$$

wobei $\varepsilon_{jt} \sim N(0, \sigma_j)$. Die Größen X_{j1t} repräsentieren makroökonomische Variable, die den j -ten Indexwert beeinflussen. Jede makroökonomische Variable folgt ihrerseits einem univariaten $AR(2)$ -Prozess.

$$(142b) \quad X_{j1t} = c_{j10} + c_{j11} X_{j1t-1} + c_{j12} X_{j1t-2} + e_{j1t} ,$$

wobei der Fehlerterm e_{j1t} normalverteilt ist, $e_{j1t} \sim N(0, \sigma_{j1})$. Zwischen den Störtermen können auch Korrelationen zugelassen werden.

Bezeichne des Weiteren nun D_{jt} den Defaultindikator für Segment j in Periode t und $p_{jt} := P(D_{jt} = 1)$ die (vom Rating unabhängige) zugehörige durchschnittliche Segmentausfallwahrscheinlichkeit. Angenommen wird nun der folgende Zusammenhang (Logit-Modell)

$$(142c) \quad p_{jt} = \frac{1}{1 + \exp(-Y_{jt})} .$$

Innerhalb eines jeden Marktsegments wird nun noch das Rating der einzelnen Kreditrisiken berücksichtigt. Dazu betrachtet man zunächst Übergangsmatrizen, basierend auf den Daten von Ratingagenturen. Diese sind von ihrer Konstruktion her unbedingt, d.h. berücksichtigen nicht den aktuellen Stand der Volkswirtschaft. Insofern müssen die Übergangsmatrizen modifiziert werden, um sie an die jeweils aktuelle Wirtschaftslage anzupassen. Die (historischen) Übergangsmatrizen werden damit in bedingte Übergangsmatrizen transformiert. Die Transformation basiert für jedes Marktsegment und für jede Periode t auf einer Skalierung der Elemente der (unbedingten) Rating-Übergangsmatrix anhand der Verhältnisse der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten p_{jt} gemäß (142c) zu den durchschnittlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten \bar{p}_j gemäß der Daten der Ratingagentur. Gilt $p_{jt} > \bar{p}_j$, so liegen erhöhte Ausfallwahrscheinlichkeiten vor und die Adjustierung wird so vorgenommen, dass mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in die Downgrade-Zustände und den Default-Zustand geschoben wird. Vice versa geht man im Falle $p_{jt} < \bar{p}_j$ vor. Für die genaue (Ad hoc-)Adjustierungsprozedur sei auf die Literatur verwiesen, etwa *Bluhm et al.* (2003, S. 76 ff.). Ein Beispiel findet sich in *Trück/Peppel* (2003, S. 320 f.).

Aus der unbedingten Übergangsmatrix \bar{M} werden auf diese Weise T bedingte Übergangsmatrizen M_t ($t = 1, \dots, T$) abgeleitet. Die entsprechende (bedingte) T -periodige Übergangsmatrix M_{0T} bis zum Ende der betrachteten Periode $[0, T]$ ist dann durch $M_{0T} = M_1 \cdot \dots \cdot M_T$ gegeben. Damit erhält man insgesamt zu jedem Segment und zu jedem Startrating eine bedingte, von der (prognostizierten) Entwicklung der Wirtschaftslage abhängige, Verteilung von Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Zur Bestimmung der Ausfallverteilung eines Kreditportfolios werden im Rahmen von CPV, zunächst unter der Annahme der (bedingten) Unabhängigkeit der Ausfälle der Kreditrisiken bei gegebenem makroökonomischen Zustand, die bedingte Portfolioausfallverteilung bestimmt und dies für jeden möglichen Zustand der Wirtschaft. Diese bedingten Ausfallverteilungen werden dann zu einer unbedingten Ausfallverteilung aggregiert. Für Einzelheiten sei wiederum auf die Literatur verwiesen.

Abschließend sei noch angemerkt, dass der vorstehend dargestellte, auf makroökonomischen Regressionsmodellen beruhende CPV-Ansatz der traditionellen CPV Makro-Variante entspricht. In der Version Credit Portfolio View 2.0 wird alternativ eine CPV Direct-Variante angeboten, in deren Rahmen die segmentspezifischen bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten unter Zugrundelegung einer Gammaverteilung „gezogen“ werden. Für weitere Einzelheiten vergleiche man etwa *Bluhm et al.* (2003, S. 80 f.)

5 Basel II

5.1 Modelltheoretische Grundlagen: Einfaktormodell

Wir knüpfen an dem in Abschnitt 3.1.3 eingeführten Einfaktormodell der Form $Y_i = \sqrt{\rho_i} F + \sqrt{1-\rho_i} U_i$ für den Bonitätsindikator Y_i von Schuldner i . Für den Defaultindikator D_i von Schuldner i gilt nun $D_i = 1$ genau dann, wenn $Y_i < H_i$, wobei H_i eine unternehmensspezifische (normierte) Ausfallschranke ist. Bei Vorgabe der einperiodigen Ausfallwahrscheinlichkeit π_i , z.B. als durchschnittliche einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit für Schuldner der gleichen Ratingklasse, ergibt sich aufgrund von $Y_i \sim N(0,1)$ die zugrunde liegende Ausfallschranke zu

$$(143) \quad H_i = \Phi^{-1}(\pi_i) ,$$

wobei Φ wie üblich die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichne.

Wir betrachten nun des Weiteren die bedingte Defaultwahrscheinlichkeit $\pi_i(x)$ gegeben eine Realisation $F = x$ des Faktors F und definieren entsprechend

$$(144) \quad \pi_i(x) := P(D_i = 1 | F = x) .$$

Hieraus folgt $\pi_i(x) = P[\sqrt{\rho_i} x + \sqrt{1-\rho_i} U_i \leq H_i] = P[U_i \leq (H_i - \sqrt{\rho_i} x) / \sqrt{1-\rho_i}]$

und damit aufgrund von $U_i \sim N(0,1)$ insgesamt

$$(145) \quad \pi_i(x) = \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(\pi_i) - \sqrt{\rho_i} x}{\sqrt{1-\rho_i}} \right] .$$

Aufgrund der strengen Monotonieeigenschaft von stetigen Verteilungsfunktionen ist insbesondere $\pi_i(x)$ streng monoton fallend in x . Mit anderen Worten: Je kleiner x ist, desto größer ist $\pi_i(x)$.

Wir betrachten nun ein „Stress-Szenario“ für den Risikofaktor F , d.h. wir wählen $x = x_\alpha$ mit

$$(146) \quad P(F \leq x_\alpha) = \alpha .$$

Da auch $F \sim N(0,1)$, gilt

$$(147) \quad x_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha) .$$

Insgesamt folgt hieraus

$$(148) \quad \begin{aligned} \pi_i(\alpha) := \pi_i(x_\alpha) &= \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(\pi_i) - \sqrt{\rho_i} x_\alpha}{\sqrt{1-\rho_i}} \right] \\ &= \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(\pi_i) + \sqrt{\rho_i} \Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{1-\rho_i}} \right] . \end{aligned}$$

Die weitere Vorgehensweise beruht nun darauf, dass für sehr große Kreditportfolios, für die das Volumen jedes einzelnen Kredits in Relation zum Volumen des Gesamtportfolios verschwindend gering ist (Eigenschaft der „Granularität“) näherungsweise gilt

$$(149) \quad L_n \approx E(L_n | F) ,$$

wobei $L_n = \sum_{i=1}^n E_i D_i$ wiederum den Gesamtverlust des Portfolios bezeichne.

Die Eigenschaft (149) besagt intuitiv, dass sich die idiosynkratischen Risiken im Kreditportfolio näherungsweise vollständig diversifizieren lassen. Für eine präzise Definition der Granularität und eine exakte Formulierung der Diversifikation idiosynkratischer Risiken vergleiche man Anhang B.

Die Beziehung (149) besagt insbesondere, dass die Verteilungsfunktionen von L_n und $E(L_n | F)$ (für jedes x) „nahe beieinander“ liegen. Da nun $E(L_n | F = x)$ monoton fallend in x ist, entspricht $E[L | F = x_\alpha]$ genau dem $(1-\alpha)$ -Quantil der Verteilung von $E(L_n | F)$, wenn

x_α gemäß (147) dem α -Quantil von F entspricht. Da nach Verteilung $L_n \approx E(L_n | F)$, folgt daraus insgesamt für den Value at Risk der Portfolioverlustverteilung

$$(150) \quad CrVaR_\alpha(L_n) = Q_{1-\alpha}(L_n) \approx E(L_n | F = x_\alpha) .$$

Der Credit-Value at Risk kann somit für große Kreditportfolien zurückgeführt werden auf den bedingten Portfolioverlust, wenn die Bedingung auf ein entsprechend (gleiche Wahrscheinlichkeit) ungünstiges Szenario für den systematischen Einflussfaktor F erfolgt.

5.2 Kapitalunterlegungsvorschriften

Die neue Eigenkapitalvereinbarung („[Basel II](#)“) des Baseler Ausschusses für Bankenaufsicht wurde nach einer längeren Entwicklungs- und Diskussionsphase nunmehr am 26. Juni 2004 verabschiedet, vgl. hierzu [Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht \(2004\)](#). [Basel II](#) zielt auf die internationale Harmonisierung der Bankenaufsicht ab und dehnt den Anwendungsbereich des Baseler Eigenkapitalakkords von 1988 (Basel I) vom Bereich der [Markttrisiken](#) auf die Bereiche [Kreditrisiko](#) (im Weiteren im Vordergrund stehend) und [Operationales Risiko](#) aus. Der neue Baseler Eigenkapitalakkord, vgl. hierzu im Weiteren etwa [Becker/Wolf \(2005\)](#), [Hartmann-Wendels/Grundke/Spörk \(2005\)](#), [Rudolph \(2004\)](#) sowie [Schulte-Matter/Manns \(2005\)](#) besteht aus drei sich gegenseitig ergänzenden Säulen ([Säule I: Kapitalanforderungen](#), [Säule II: Aufsichtsrechtliche Überprüfungsverfahren](#), [Säule III: Offenlegung](#)). Wir konzentrieren uns im Weiteren auf die zentrale [Säule I](#), welche die Mindesteigenkapitalanforderungen der Kreditinstitute definiert.

Grundsätzlich gilt, dass das Verhältnis von *haftendem Eigenkapital (EK)* zu den *gewichteten Risikoaktiva (Risk Weighted Assets, RWA)* nicht geringer sein darf als 8%, d.h. es gilt die Anforderung

$$(151) \quad EK \geq 0,08 RWA .$$

Die Summe aller gewichteten Risikoaktiva wird bestimmt, indem die Eigenkapitalanforderungen für Markttrisiken und operationelle Risiken mit 12,50 (dem Kehrwert der Mindestei-

genkapitalquote von 8%) multipliziert und zur Summe der gewichteten Risikoaktiva aus dem Kreditgeschäft addiert werden. Es gilt somit

$$\begin{aligned} \text{RWA (gesamt)} &= \text{RWA (Kreditrisiko)} \\ &+ 12,5 \text{ Kapitalanforderung (Marktrisiko)} \\ &+ 12,5 \text{ Kapitalanforderung (Operationales Risiko)} \end{aligned}$$

und damit die Anforderung

$$\begin{aligned} \text{EK} &\geq 0,08 \text{ RWA (Kreditrisiko)} \\ &+ \text{Kapitalanforderung (Marktrisiko)} \\ &+ \text{Kapitalanforderung (Operationales Risiko)}. \end{aligned}$$

Die für jeden Einzelkredit gültige Basisformel zur Ermittlung der *RWA* lautet dabei

$$(152) \quad RWA = 12,5 \text{ EAD} \cdot RW ,$$

wobei *EAD* dem Exposure at Default entspricht und *RW* dem Risikogewicht des Kredits.

Zur Bestimmung der Risikogewichte stellt die Bankenaufsicht drei Verfahren zur Wahl, den

- Standardansatz (*Standardised Approach*)

sowie den

- Internen Ansatz (*Internal Ratings Based Approach, IRB-Ansatz*) in Form des
 - IRB-Basisansatzes (*Foundation Approach*)
 - oder des
 - fortgeschrittenen IRB-Ansatzes (*Advanced Approach*).

Im Weiteren konzentrieren wir uns auf den IRB-Ansatz. Wendet man den IRB-Ansatz auf Beziehung (152) an, dann wird das Risikogewicht *RW* eines Unternehmenskredits aus einer Formel berechnet, in welche die folgenden Risikokomponenten eingehen:

- die einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit π
- die erwartete Ausfallhöhe im Ausfallzeitpunkt LGD
- der Forderungsbetrag im Ausfallzeitpunkt EAD sowie die
- Restlaufzeit M in Form eines Restlaufzeitanpassungsfaktors (Maturity Factor) MF .

Während im IRB-Basisansatz von den Kreditinstituten ausschließlich die Ausfallwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von den Ratingklassen geschätzt werden und alle übrigen Komponenten von der Bankenaufsicht vorgegeben werden, besitzt der fortgeschrittene IRB-Ansatz die Möglichkeit, für alle Risikokomponenten bankintern geschätzte Parameter zu verwenden. Wegen der hohen Datenanforderungen an diesen Ansatz ist dabei davon auszugehen, dass nur große, international tätige Banken den fortgeschrittenen IRB-Ansatz werden realisieren können. Die folgende Abbildung 16 in Anlehnung an *Rudolph* (2004) gibt einen Überblick über die zu spezifizierenden Parameter.

Dateninput für Risikokomponenten	IRB-Basisansatz	Fortgeschrittener IRB-Ansatz
Ausfallwahrscheinlichkeit π	Von der Bank aufgrund eigener Schätzungen	Von der Bank aufgrund eigener Schätzungen
Loss Given Default LGD	Vom Ausschuss vorgegebener Wert $LGD = 45\%$ (Regelfall vor Berücksichtigung von Sicherungen) $LGD = 75\%$ (nachrangige Forderungen)	Von der Bank aufgrund eigener Schätzungen
Exposure at Default EAD	Vom Ausschuss vorgegebene Werte	Von der Bank aufgrund eigener Schätzungen
Maturityfaktor MF	Vom Ausschuss vorgegebener Wert	Von der Bank aufgrund eigener Schätzungen

Abb. 16: Dateninput für die Varianten des IRB-Ansatzes

Bei der Schätzung der Parameter wird ferner unterschieden in

- Unternehmenskredite
- Kredite an Banken
- Kredite an Staaten
- Ausgefallene Forderungen.

Im Rahmen der Unternehmenskredite sind ferner spezielle Regelungen (Größenanpassungen) für kleine und mittelgroße Unternehmen (*KMU*) vorgesehen.

Differenzierte Ansätze sind ferner vorgesehen für

- Retailkredite
- Spezialfinanzierungen
- Beteiligungspositionen sowie
- Kreditderivate.

Im Folgenden konzentrieren wir uns dabei auf den Bereich nicht ausgefallener Unternehmenskredite im Bereich des IRB-Basisansatzes, wobei wir den *KMU*-Fall ausklammern. Das Risikogewicht für einen einzelnen Unternehmenskredit hat dann die generelle Struktur

$$(153) \quad RW = LGD \cdot VaR \cdot MF ,$$

dabei ist *VaR* eine auf den Überlegungen des Abschnitts 5.1 basierende Value at Risk-Größe.

Der *LGD* ist wie in Abbildung 16 dargelegt zu bestimmen, für Details bei der Berücksichtigung von Sicherheiten vgl. man [Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht \(2004, S. 71 ff.\)](#).

Die Value at Risk-Größe ist gegeben durch

$$(154) \quad VaR(\pi, \rho) = \Phi \left[\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \Phi^{-1}(\pi) + \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \Phi^{-1}(0,999) \right] - \pi .$$

Das bei der Bestimmung der *VaR*-Größe eingehende Konfidenzniveau ist $\alpha = 0,001$, dabei gilt $\Phi^{-1}(0,999) = 3,09023$. Die *VaR*-Größe gemäß (154) ist dabei identisch mit der modelltheoretisch bestimmten *VaR*-Größe gemäß (148) bis auf den Subtraktionsterm in Höhe der Ausfallwahrscheinlichkeit. Dieser Subtraktionsterm taucht erst in der Schlussfassung des neuen Baseler Eigenkapitalakkords, vgl. [Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht \(2004\)](#), auf und war in früheren Fassungen nicht enthalten. Insofern besteht hier eine Abweichung zwischen den modelltheoretischen Grundlagen und den Regulierungsanforderungen. Hintergrund ist

dabei offenbar eine politisch gewollte Absenkung des Risikogewichts, um die Eigenkapitalanforderungen zu reduzieren.

Der in (154) eingehende Korrelationskoeffizient ist im IRB-Basisansatz zu bestimmen durch

$$(155) \quad \rho = 0,12 \frac{1 - e^{-50\pi}}{1 - e^{-50}} + 0,24 \left(1 - \frac{1 - e^{-50\pi}}{1 - e^{-50}} \right).$$

Auch der Ansatz für den Korrelationskoeffizienten hat im Laufe der Zeit verschiedene Änderungen erfahren. Im Rahmen von (155) fällt er mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit und bewegt sich insgesamt in einem Intervall zwischen 0,12 und 0,24.

Der Restlaufzeitanpassung ist gegeben durch

$$(156a) \quad MF = \frac{1 + (M - 2,5)b(\pi)}{1 - 1,5b(\pi)},$$

wobei

$$(156b) \quad b(\pi) = [0,11852 - 0,05478 \ln(\pi)]^2.$$

Als Benchmark-Restlaufzeit wird damit $M = 2,5$ unterstellt.

Abschließend geben wir noch eine Illustration der IRB-Risikogewichte, entnommen aus dem Anhang von [Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht \(2004, S. 230\)](#), wobei die Forderungskategorie Unternehmenskredite (ohne *KMU*) betrachtet, ein *LGD* von 45% angesetzt und eine Restlaufzeit $M = 2,5$ Jahre angenommen wird.

Ausfallwahrscheinlichkeit	Risikogewicht
0,03%	14,44%
0,05%	19,65%
0,10%	29,65%
0,25%	49,47%
0,40%	62,72%
0,50%	69,61%
0,75%	82,78%
1,00%	92,32%
1,30%	100,95%
1,50%	105,59%
2,00%	114,86%
2,50%	122,16%
3,00%	128,44%
4,00%	139,58%
5,00%	149,86%
6,00%	159,61%
10,00%	193,09%
15,00%	221,54%
20,00%	238,23%
Quelle: Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004)	

Tab. 5: Risikogewichte für Unternehmenskredite im IRB-Ansatz

Für weitere Details zum IRB-Ansatz nach [Basel II](#) vergleiche man [Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht \(2004\)](#) sowie *Schulte-Mattler/Manns (2005)*.

6 Bewertung ausfallbedrohter Zinstitel

6.1 Zur Zinsstruktur von Unternehmensanleihen

Wir knüpfen im Weiteren an etwa an die Ausführungen in *Albrecht/Maurer* (2005, Abschnitt 8.3) im Hinblick auf die Konstruktion von Zinsstrukturkurven von Zinstiteln, d.h. der Erfassung der Laufzeitabhängigkeit des Zinsgefüges. Die dortige Darstellung – ebenso wie die Ausführungen des entsprechenden Anhangs 8B hinsichtlich der methodischen Vorgehensweise zur empirischen Identifikation von Zinsstrukturkurven – haben zunächst generelle Gültigkeit, d.h. gelten unabhängig von der spezifisch betrachteten Klasse von Zinstiteln, wie etwa Staatsanleihen, Pfandbriefe oder Unternehmensanleihen. Im Vergleich zu Staatsanleihen treten aber bei der Analyse von Unternehmensanleihen eine Reihe von neuen Aspekten hinzu, etwa die Berücksichtigung des Kreditrisikos, der Marktliquidität sowie von gegebenenfalls in den Anleihen enthaltene Kündigungsrechten.

In praxi hat sich darüber hinaus eine relative Betrachtungsweise unter der Verwendung von Spreads etabliert. Man nimmt die Rendite- bzw. Zinsstrukturkurve von Staatsanleihen eines fixierten Landes als Ausgangspunkt bzw. Benchmark und betrachtet Staatsanleihen als risikolose oder zumindest quasi-risikolose Titel in einem Ausfallkontext. Die entsprechende Rendite- bzw. Zinsstrukturkurve der Unternehmensanleihen dieses Landes oder einer Subkategorie hiervon (etwa alle AA-gerateten Industriefinanzen) weist dann einen (positiven) Spread gegenüber dieser Benchmark auf, den *Zinsspread von Unternehmensanleihen*. Dieser Zinsspread kann dabei entweder durch Subtraktion der entsprechend separat ermittelten Rendite- bzw. Zinsstrukturkurven gewonnen werden oder aber der Zinsspread ist modellendogen und wird auf der Basis einer gemeinsamen Analyse von Staats- und Unternehmensanleihen gewonnen. Ein Beispiel für die letztere Vorgehensweise findet sich beispielsweise in *Albrecht/Maurer* (2005, Abschnitt 8.4.3), darüber hinaus sei auf die Untersuchung von [Houweling et al. \(2001\)](#) hingewiesen. [Houweling et al. \(2001\)](#) dokumentieren die Vorzüge der gemeinsamen Schätzung der Zinsstrukturkurven von Staatsanleihen und der Zinsspreads von Unternehmensanleihen. Die entsprechenden Resultate sind robuster und stabiler im Vergleich zur separaten Ermittlung der Zinsstrukturkurven.

Aus der Existenz des Kreditrisikos ergibt sich nun eine spezielle Problematik bei der Interpretation der gewonnenen Zinsstrukturkurve von Unternehmensanleihen bzw. Zinsspreads. Die zugrunde liegende Methodik basiert auf der Diskontierung der Rückflüsse der Anleihe. Die

Rückflüsse werden damit implizit als sicher unterstellt, was insbesondere im Falle von Unternehmensanleihen nicht realistisch ist. *Die ermittelten Spot Rates bzw. Zinsspreads von Unternehmensanleihen entsprechen somit weder realisierten Renditen bzw. Zinsspreads noch können sie als erwartete Renditen bzw. Zinsspreads angesehen werden.* Insofern sind sie rein rechnerische Größen, die einen einfachen Vergleich mit der (als ausfallfrei angenommenen) Zinsstruktur von Staatsanleihen ermöglichen.

Der Zinsspread von Unternehmensanleihen soll zunächst anhand empirischer Resultate von [Elton et al. \(2001\)](#) illustriert werden. [Elton et al. \(2001\)](#) analysieren die Zehnjahresperiode 1987 – 1996 und betrachten dabei neben Staatsanleihen (Treasuries) Titel der Ratingkategorien AA, A und BBB jeweils separat für den Finanzsektor (Financial Sector) sowie den Industriesektor (Industrial Sector). Für Restlaufzeiten von 2 bis 10 Jahren werden dann die durchschnittlichen Spot Rates für Staatsanleihen sowie die durchschnittlichen Spreads über den betrachteten Analysezeitraum ermittelt. Tabelle 6 stellt die entsprechenden Resultate dar.

		Financial Sector			Industrial Sector		
Maturity	Treasuries	AAA	A	BBB	AAA	A	BBB
2	6,414	0,586	0,745	1,199	0,414	0,621	1,167
3	6,689	0,606	0,791	1,221	0,419	0,680	1,205
4	6,925	0,624	0,837	1,249	0,455	0,715	1,210
5	7,108	0,637	0,874	1,274	0,493	0,738	1,205
6	7,246	0,647	0,902	1,293	0,526	0,753	1,199
7	7,351	0,655	0,924	1,308	0,552	0,764	1,193
8	7,432	0,661	0,941	1,320	0,573	0,773	1,188
9	7,496	0,666	0,955	1,330	0,589	0,779	1,184
10	7,548	0,669	0,965	1,337	0,603	0,785	1,180

Quelle: [Elton et al. \(2001, S. 253\)](#)

Tab. 6: Empirische Zinsspreads von Unternehmensanleihen

Die Tabelle dokumentiert, dass die Zinsspreads durchgängig positiv sind und dabei für Anleihen des Finanzsektors durchgängig höher als für Industrianleihen. Der Spread ist zudem für beide Sektoren und über alle Laufzeiten umso höher, je schlechter das Rating ist. Dies unterstreicht sehr deutlich die Relevanz der Ratinginformation für die Zinsspreads. Des Weiteren erhöhen sich – bis auf den Fall der BBB-Industrianleihen – die Spreads mit der Restlaufzeit. Intuitiv ist ein entsprechendes Verhalten zu erwarten, da mit längerer Laufzeit die Gefahr einer Bonitätsverschlechterung zunimmt und die Investoren hierfür eine Kompensation erwarten. Durch zusätzliche Betrachtung der Subperioden 1987 – 1991 und 1992 – 1996 weisen

[Elton et al. \(2001\)](#) nach, dass die ermittelten (durchschnittlichen) Spreads in größerem Umfang zeitvariabel sind.

Welches sind nun die Einflussfaktoren auf die Höhe des Zinsspreads und welchen quantitativen Anteil weisen diese Faktoren auf? Generell spielen die folgenden Faktoren eine Rolle:

- Kreditrisiken (Ausfall- und Migrationsrisiken)
- Liquiditätsrisiko
- Steuerliche Effekte
- Optionselemente in Anleihen
- Systematische Anleiherisiken.

Optionselemente in Anleihen beziehen sich auf bestehende Kündigungsrechte oder den Fall von Wandelanleihen. Optionselemente in Anleihen führen zu einer Reihe von Sonderproblemen und entsprechende Titel werden in der Literatur bei der Bestimmung von Zinsspreads von Unternehmensanleihen üblicherweise zunächst ausgeschlossen. Steuerliche Effekte bestehen dann, wenn – wie etwa in den USA – Staatsanleihen und Unternehmensanleihen einer unterschiedlichen Besteuerung unterliegen. Auf die Natur des systematischen Risikos kommen wir noch zurück.

Welchen quantitativen Einfluss besitzen nun die vorstehend dargestellten Einflussfaktoren auf den Zinsspread? In einer wegweisenden Studie kommen [Elton et al. \(2001\)](#) zum Schluss, dass das Ausfallrisiko nur einen relativ geringen Einfluss auf den gesamten Zinsspread aufweist, etwa 10% für AA-geratete, etwa 20% für A-geratete und etwa 40% für BBB-geratete Unternehmen. Vergleichbare Resultate erzielen [Collin-Dufresne et al. \(2001\)](#), [Höfling et al. \(2004\)](#) sowie [Huang/Huang \(2003\)](#), letztere im Kontext von Unternehmenswertmodellen und unter Betrachtung der gesamten Prämie für das Kreditrisiko anstelle des reinen Ausfallrisikos. Steuerliche Effekte tragen zum Zinsspread nach [Elton et al. \(2001\)](#) für den Fall von US-Unternehmensanleihen – etwa 55% für AA-geratete, etwa 35% für A-geratete sowie etwa 25% für BBB-geratete Bonds bei. Damit bleibt immer noch ein relativ großer Anteil von 35% - 45% unerklärt. [Elton et al. \(2001\)](#) weisen nun nach, dass der – nach einer Adjustierung für das Ausfallrisiko und steuerliche Effekte – restliche Zinsspread von Unternehmensanleihen sich zu einem substantiellen Anteil durch gemeinsame Faktoren erklären lässt, die sowohl den Aktienmarkt als auch den Markt der Unternehmensanleihen (nicht aber den Markt für

Staatsanleihen!) beeinflussen. Konkret liegt dabei ein Dreifaktormodell nach [Fama/French \(1993\)](#) zugrunde. [Höfling et al. \(2004\)](#) kommen zu vergleichbaren Resultaten und weisen noch darauf hin, dass der Einfluss der Liquidität vergleichsweise gering ist.

Insgesamt weisen damit die Preise von Unternehmensanleihen eine beträchtliche Risikoprämie für systematische, d.h. nicht-diversifizierbare Risiken auf, die insbesondere mit der Entwicklung des Aktienmarktes in Verbindung stehen.

Neben der Höhe des Credit Spread ist auch dessen Veränderung im Zeitablauf, die *Spreadvolatilität*, von großem Interesse, denn diese ist entscheidend für das *Spreadrisiko*. Das Spreadrisiko besteht in einer Ausweitung des Credit Spread und damit einhergehend einem Kursverlust der entsprechenden Anleihe. Wir greifen im Folgenden ein Resultat von *Kao (2000)* auf, um die Bedeutung des Spreadrisikos zu illustrieren.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B
Mittelwert	61,0	61,5	85,8	132,1	301,6	535,2
Standardabweichung	20,3	15,0	23,7	36,4	92,2	166,9

Tab. 7: Mittelwert und Volatilität von Spreads, Angabe in Basispunkten, Zeitraum: 1990 – 1998, Quelle: *Kao (2000, S. 51)*

Die Spreadvolatilitäten liegen somit im Bereich von einem Viertel bis einem Drittel des Spreadniveaus. *Wingenroth (2004, S. 53)* weist allerdings darauf hin, dass der betrachtete Zeitraum eine lange Phase einer relativ ruhigen Spreadentwicklung enthält.

6.2 Das Modell von [Fons](#)

Das traditionelle Barwert-Bewertungsmodell im Falle von Zinstiteln mit deterministischen Rückflüssen muss erweitert werden, um ausfallbedrohte Rückflüsse zu berücksichtigen. Ein erstes Modell in dieser Hinsicht wurde von [Fons \(1994\)](#) entwickelt. Fons unterstellt dabei risikoneutrale Investoren. Dies impliziert, dass sich die Bewertung an den erwarteten Rückflüssen orientiert, die zum risikofreien Zins diskontiert werden.

Fixieren wir eine anfängliche Ratingklasse k und gehen von Rückflüssen $\{Z_1, \dots, Z_T\}$ des Bonds sowie einer konstanten Recovery Rate von rc aus, so resultiert hieraus die folgende modifizierte Barwertformel:

$$(157) \quad V_k = \sum_{t=1}^T Z_t PS_k(t) (1 + r_T)^{-t} + \sum_{t=1}^T Z_t rc PD_k^*(t) (1 - r_T)^{-t} .$$

Dabei entspricht zunächst r_T dem Marktzins der Fristigkeit T im Falle ausfallfreier Rückflüsse. $PS_k(t)$ entspricht des Weiteren der Wahrscheinlichkeit eines Unternehmens, mit Ausgangsrating k zum Zeitpunkt t noch nicht ausgefallen zu sein (mehrperiodige Überlebenswahrscheinlichkeit) und $PD_k^*(t)$ entspricht der aufgeschobenen Ausfallwahrscheinlichkeit, d.h. das Unternehmen mit Ausgangsrating k überlebt $t - 1$ Perioden und fällt genau in der t -ten Periode aus. Zur Definition und Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten $PD_k^*(t)$ und $PS_k(t)$ vergleiche man Abschnitt 3.4.

Das Modell von [Fons \(1994\)](#) unterstellt aufgrund der Risikoneutralität der Investoren, dass diese nur für den „erwarteten Verlust“ entschädigt werden. Risikoprämien für Abweichungen vom erwarteten Verlust, für Bonitätsverschlechterungen oder für schwankende Ausfallwahrscheinlichkeiten werden nicht berücksichtigt. Entsprechend (und konsistent mit den Ergebnissen des Abschnitts 6.1) fallen die auf der Grundlage des Modells von [Fons](#) bestimmten Zinsspreads zu gering im Vergleich zu empirischen Zinsspreads aus. [Elton et al. \(2001, S. 274 f.\)](#) verwenden eine rekursive Variante des vorstehenden Ansatzes, um den in Abschnitt 6.1 angesprochenen Anteil des Zinsspreads zu bestimmen, der aus dem reinen Ausfallrisiko resultiert.

Im weiteren Verlauf des Abschnitts 6 wenden wir uns nun Modellansätzen zu, die auf den Grundsätzen einer arbitragefreien Bewertung beruhen.

6.3 Beziehungen zwischen ausfallfreien und ausfallbedrohten Zerobonds

6.3.1 Beziehungen bei Unabhängigkeit von Ausfallzeiten und Zinsprozess

Wie üblich bezeichne $B(t, T)$ den Preis eines in T fälligen ausfallfreien Einheitszerobonds zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$. Entsprechend bezeichne $B^d(t, T)$ den Preis eines ausfallbedrohten Zerobonds.

Unter „der“ risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsbelegung Q , deren Existenz und Eindeutigkeit wir im Weiteren voraussetzen, gilt bei gegebenem Prozess $\{R(t)\}$ für die Spot Rates

$$(158) \quad \begin{aligned} B(t, T) &= E_Q^t \left[\exp \left(- \int_t^T R(s) ds \right) B(T, T) \right] \\ &= E_Q^t \left[\exp \left(- \int_t^T R(s) ds \right) \right], \end{aligned}$$

wobei E_Q^t immer als bedingter Erwartungswert gegeben $R(t) = r$ zu verstehen ist. Wir bezeichnen nun mit τ die Ausfallzeit des den ausfallbedrohten Zerobond emittierenden Unternehmens. Als vereinfachende Annahme setzen wir zunächst voraus

$$(159) \quad \begin{aligned} &\text{Risikoneutrale Unabhängigkeit:} \\ &\text{Unter } Q \text{ sind } \tau \text{ und } \{R(t)\} \text{ stochastisch unabhängig.} \end{aligned}$$

Bei komplexeren und realitätsnäheren Ansätzen wird diese Annahme jedoch wieder fallen gelassen, wir kommen hierauf zurück.

Zu modellieren sind nun des Weiteren die Ausfallkonsequenzen. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, der in einem vollständigen Ausfall des Zerobonds besteht. Hieraus resultiert der folgende Rückfluss in T (gegeben $\tau > t$):

$$(160) \quad V_T = \begin{cases} 1 & \tau > T \\ 0 & \tau \leq T. \end{cases}$$

Hieraus folgt aufgrund der angenommenen Unabhängigkeit

$$B^d(t, T) = E_Q^t \left[\exp \left(- \int_t^T R(s) ds \right) V_T \right] = E_Q^t \left[\exp \left(- \int_t^T R(s) ds \right) \right] \cdot E_Q(V_T) \quad \text{und aufgrund von}$$

$$E_Q(V_T) = Q(\tau > T) \quad \text{insgesamt}$$

$$(161) \quad B^d(t, T) = B(t, T) Q(t, T) = B(t, T) [1 - RNP D(t, T)] .$$

Dabei ist $Q(t, T) = Q(\tau > T)$ bzw. präziser $Q(t, T) = Q(\tau > T \mid \tau > t)$ die risikoneutrale (bzw. implizite) Überlebenswahrscheinlichkeit und $RNP D(t, T) = 1 - Q(t, T)$ die risikoneutrale (bzw. implizite) Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitintervall $[t, T]$.

Eine komplette Modellspezifikation erfordert damit eine Annahme über den „Zinsprozess“ einerseits sowie eine Annahme über den „ausfallerzeugenden Prozess“ andererseits. Im Weiteren betrachten wir daher explizite Pricing-Modelle, bei denen die vorgenannten Komponenten spezifiziert werden.

Der generelle Ansatz für den Credit Spread $CS(t, T)$ auf Zerobondebene ist

$$(162a) \quad B^d(t, T) = B(t, T) \exp[-CS(t, T)(T - t)] .$$

Eine entsprechende Auflösung nach $CS(t, T)$ führt zu

$$(162b) \quad CS(t, T) = - \frac{1}{T - t} [\ln B^d(t, T) - \ln B(t, T)] .$$

Betrachten wir nun als zweite Konstellation den Fall eines nur partiellen Ausfalls. Wir nehmen dabei an, dass der Default nur in T oder später erfolgen kann, oder aber allgemeiner, dass auch bei einem Default vor T die partielle Rückzahlung erst in T erfolgt, d.h.

$$(163) \quad V_T = \begin{cases} 1 & \tau > T \\ rc & \tau \leq T . \end{cases}$$

Im Rahmen der Beziehung (162) wird weiterhin eine konstante Recovery Rate $Rc(T) = rc$ angenommen. Im allgemeinen Fall wird somit sowohl die Recovery Rate zu spezifizieren als auch der Rückzahlungsmodus präziser festzulegen sein. Im vorstehenden Fall folgt $B^d(t, T) = B(t, T) E_Q(V_t) = B(t, T) \{Q(t, T) + rc[1 - Q(t, T)]\}$ und damit

$$(164) \quad B^d(t, T) = B(t, T)[rc + (1 - rc)Q(t, T)] = B(t, T)[1 - LGD \cdot RNPd(t, T)] .$$

Aus (164) folgt nun des Weiteren $B(t, T) - B^d(t, T) = B(t, T)[1 - rc - (1 - rc)Q(t, T)]$ und damit

$$(165) \quad B(t, T) - B^d(t, T) = B(t, T)(1 - rc)RNPd(t, T) = B(t, T) LGD RNPd(t, T) .$$

Bezogen auf die Marktwerte zum Zeitpunkt t und auf die risikoneutrale Bewertung ist dies eine Variante der Basisbeziehung „(Erwarteter) Verlust = Exposure at Default mal Loss Given Default mal Ausfallwahrscheinlichkeit“.

Aus (164) kann nun weiterhin ein Ausdruck für die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit in Termen der Marktwerte für ausfallbedrohte sowie ausfallfreie Zerobonds gewonnen werden. Es gilt

$$(166a) \quad RNPd(t, T) = \frac{1}{LGD} \left[1 - \frac{B^d(t, T)}{B(t, T)} \right]$$

und analog für die risikoneutrale Überlebenswahrscheinlichkeit

$$(166b) \quad RNPS(t, T) = \frac{1}{1 - rc} \left[\frac{B^d(t, T)}{B(t, T)} - rc \right] .$$

Aus (164) ergibt sich weiterhin für den Credit Spread auf Zerobondebene in Termen der risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeit

$$(167a) \quad CS(t, T) = -\frac{1}{T - t} \ln [1 - LGD \cdot RNPd(t, T)]$$

bzw. vice versa die folgende Charakterisierung der risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeit in Termen des Credit Spreads

$$(167b) \quad RNPD(t, T) = \frac{1}{LGD} [1 - e^{-CS(t, T)(T-t)}] .$$

6.3.2 Der allgemeine Fall

Im allgemeinen Fall ist sowohl die Recovery Rate $Rc(\tau)$ im Ausfallzeitpunkt τ zu spezifizieren, als auch der Referenzwert $RV(\tau)$ für die Erstattung im Ausfallzeitpunkt τ . Die allgemeine Bewertungsgleichung, vgl. etwa [Uhrig-Homburg \(2002, S. 45\)](#) oder in vereinfachter Form [Bluhm et al. \(2003, S. 216\)](#) lautet dann

$$(168) \quad B^d(t, T) = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} I_{\{\tau > T\}} + e^{-\int_t^\tau R(s) ds} Rc(\tau) RV(\tau) I_{\{\tau \leq T\}} \right] .$$

Dabei bezeichne allgemein E_Q^t den (bedingten) Erwartungswert unter Q gegeben die Informationen bis zum Zeitpunkt t und I_A die Indikatorfunktion mit $I_A = 1$, wenn das Ereignis A eintritt und $I_A = 0$, wenn das Ereignis A nicht eintritt.

Der erste Summand in (168) quantifiziert den Fall, dass kein Ausfall in $[0, T]$ eintritt und der zweite Summand den Ausfall im Zeitpunkt $\tau \leq T$. Im letzteren Falle müssen zusätzlich noch die Recovery Rate sowie der Referenzwert, auf den sich die Recovery Rate bezieht, spezifiziert werden.

In der Literatur haben sich dabei drei Standardverfahren zur Modellierung dieses Referenzwertes herauskristallisiert:

1. Recovery of Face Value (auch Recovery of Par)
2. Recovery of Treasury Value
3. Recovery of Market Value.

Im ersten Fall ist der Referenzwert der Nennwert der Anleihe, im zweiten Fall der Wert einer identischen, aber ausfallfreien Anleihe in τ . Der dritte Ansatz geht auf [Duffie/Singleton \(1999\)](#) zurück, dies werden wir in Abschnitt 6.5 aufgreifen.

Wir betrachten ein Beispiel zum zweiten Ansatz. Wir bewerten einen ausfallbedrohten Zerobond und unterstellen weiterhin die Unabhängigkeit von Ausfallzeit und Spot Rate-Prozess. Wir treffen die Recovery of Treasury-Annahme und unterstellen eine konstante Recovery Rate. Hieraus folgern wir zunächst

$$(169) \quad Rc(\tau) RV(\tau) = rcB(\tau, T) \quad .$$

Die getroffene Annahme hinsichtlich des Recovery of Treasury beinhaltet die Wahl des Wertes eines ausfallfreien Zerobonds zum Ausfallzeitpunkt τ als Referenzwert. Aufgrund der Unabhängigkeitsannahme erhalten wir auf der Basis von (168) zunächst

$$B^d(t, T) = E_Q^t \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right] \left\{ E_Q^t [I_{\{\tau > T\}}] \right. \\ \left. + E_Q^t \left[e^{-\int_t^T R(s) ds} \right] rc B(\tau, T) E_Q^t [I_{\{\tau \leq t\}}] \right\}$$

und damit insgesamt

$$B^d(t, T) = B(t, T) \{Q(t, T) + rc[1 - Q(t, T)]\} \\ = B(t, T) \{rc + (1 - rc)Q(t, T)\} \quad .$$

Das Resultat ist somit identisch mit (164), dem Falle eines partiellen Ausfalls bei Rückzahlung in T . Insofern stützt dieses Resultat die Verwendung von (164) als allgemeine Bewertungsgleichung bei deterministischer Recovery sowie einer Unabhängigkeit von Ausfallprozess und Zinsprozess.

Damit sind wir nun auch in der Lage, einen ausfallbedrohten Kuponbond zu bewerten. Die Hypothese der Unabhängigkeit von Zinsintensität und Ausfallzeit bleibt dabei aufrecht erhal-

ten. Wir nehmen an, dass der Bond zu den Zeitpunkten $t_i = ih$ ($i = 1, \dots, n$) einen Kupon c ($0 < c < 1$) in Termen des Nennwertes N zahlt. Im Falle eines Ausfalls in $0 < \tau \leq t_n$ werden die künftigen Kupons nicht bei der Erstattung berücksichtigt. Der Nennwert hingegen unterliegt einer Erstattung gemäß der Recovery of Treasury Value-Hypothese. Betrachtet werden nun zwei Bewertungsarten für Zerobonds. Die Größen $B_0^d(t, u)$ bezeichnen eine Bewertung gemäß der Zero Recovery-Annahme, d.h. $B_0^d(t, T) = B(t, T)Q(t, T)$ gemäß (161). Die Größe $B^d(t, t_n)$ hingegen bezeichne eine Bewertung gemäß der Recovery of Treasury Value-Hypothese, d.h. $B^d(t, T) = B(t, T)[rc + (1 - rc)Q(t, T)]$ gemäß (164). Insgesamt ergibt sich dann als Bewertungsgleichung für den ausfallbedrohten Kuponbond in $0 \leq t < t_1$:

$$(170) \quad V^d(t) = cN \sum_{i=1}^n B_0^d(t, t_i) + NB^d(t, T) \quad .$$

6.4 Bewertung im [Merton/KMV-Modell](#)

Im Rahmen des [Merton-Modells](#) des Abschnitts 3.2.1 ist die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit für die Periode $[t, T]$ gemäß (61a) gegeben durch $RNPD(t, T) = N[-d_2(t)]$. Nehmen wir weiter an, dass – wie im [Merton-Modell](#) vorausgesetzt – der Default nur in T eintreten kann und ein deterministischer Loss Given Default LGD vorliegt, so folgt mit (163)

$$(171) \quad B^d(t, T) = B(t, T) \{1 - N[-d_2(t)]LGD\} \quad ,$$

wobei im Kontext des Merton-Modells $B(t, T) = e^{-r(T-t)}$ gilt. Im Unterschied zum Modell von Merton, in dem sich der Loss Given Default, wie in Abschnitt 3.2.1 dargelegt, modellendogen als stochastische Größe ergibt, wird allerdings bei Beziehung (171) von einer modellexogenen Spezifikation des LGD ausgegangen.

Zwischen der risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeit $RNPD(t, T)$ unter der „physischen“ Ausfallwahrscheinlichkeit $PD(t, T)$ unter der Ausgangswahrscheinlichkeitsbelegung besteht nun die folgende Beziehung:

$$(172) \quad RNPD(t, T) = \Phi \left\{ \Phi^{-1}[PD(t, T)] + \frac{\mu_A - r}{\sigma_A} \sqrt{T - t} \right\} .$$

Aus einer Schätzung der physischen Ausfallwahrscheinlichkeit kann auf dieser Basis auf die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit zurückgeschlossen und die Bewertungsgleichung (171) umgesetzt werden.

Ein beliebiger ausfallbedrohter Bond mit der Zahlungsstruktur $\{Z_1, \dots, Z_T\}$ kann nun entsprechend auf ausfallbedrohte Zerobonds zurückgeführt werden, was zu der allgemeinen Bewertungsgleichung

$$(173) \quad V^d(0) = \sum_{t=1}^T Z_t B^d(t, T)$$

führt.

Im Rahmen des Basismodells von *Merton* ist (173) nicht konsistent umsetzbar, da hier nur ein Ausfall in T und keine intraperiodischen Ausfälle möglich sind.

Auch das in Abschnitt 3.2.3 behandelte First Passage Time-Modell von [Zhou \(2001a\)](#) ist nicht direkt einsetzbar, da hier die Ausfallwahrscheinlichkeiten unter der physischen Wahrscheinlichkeitsbelegung bestimmt werden. Eine entsprechende (approximative) Umrechnung der First Passage Time-Ausfallwahrscheinlichkeiten wird im Rahmen des [KMV-Modells](#) vorgenommen. Hier lautet die Bewertungsgleichung

$$(174a) \quad V^d(0) = \sum_{t=1}^T Z_t e^{-rt} [1 - RNPD(0, t) LGD] ,$$

wobei

$$(174b) \quad RNPD(0, t) = 2 \Phi \left\{ \Phi^{-1} \left(\frac{PD(0, t)}{2} \right) + \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{t} \right\} .$$

Die Umrechnung (171b) beruht dabei auf einem nicht veröffentlichten Resultat von *Vasicek*.

Die Marktrisikoprämie $(\mu - r)/\sigma$ wird dann auf der Grundlage eines [CAPM-Ansatzes](#) gewonnen, d.h. $\mu - r = \text{Cov}(R_A, R_M)(\mu_M - r)/\text{Var}(R_M)$

$$(175) \quad \frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\text{Cov}(R_A, R_M)}{\sigma_M} \cdot \frac{\mu_M - r}{\sigma_M} = \rho \lambda .$$

Die Marktrisikoprämie wird entsprechend empirisch bestimmt, zu weiteren Einzelheiten vgl. etwa *Crouhy et al.* (2001, S. 383 f.), und ist zeitvariabel. Die physischen Ausfallwahrscheinlichkeiten werden durch die in Abschnitt 4.3 behandelte Expected Default Frequency EDF gemäß des [KMV-Ansatzes](#) bestimmt.

Insgesamt können auf diese Weise ausfallbedrohte Bonds bewertet und damit auch Credit Spreads quantifiziert werden. Nach [Kealhofer \(2003b\)](#) erweist sich diese Methodologie (mit weiteren Verfeinerungen seitens KMV) als sehr Erfolg versprechend.

6.5 Bewertung in Intensitätsmodellen

Im Weiteren wird angenommen, dass die Ausfallzeit τ unter der Ausgangswahrscheinlichkeitsbelegung P einem Intensitätsmodell mit (zufallsabhängiger) Intensität $\tilde{\lambda}_p(t)$ und unter „der“ risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsbelegung Q einem Intensitätsmodell mit Intensität $\tilde{\lambda}_Q(t)$ folgt. P und Q seien äquivalent, was darauf hinausläuft, dass für alle $t > 0$ $\tilde{\lambda}_p(t) > 0$ genau dann, wenn $\tilde{\lambda}_Q(t) > 0$. Die risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeit ist dann gemäß (93) allgemein gegeben durch

$$(176a) \quad RNP(t, T) = 1 - E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T \tilde{\lambda}_Q(s) ds \right) \right]$$

und entsprechend die Überlebenswahrscheinlichkeit unter Q durch

$$(176b) \quad Q(t, T) = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T \tilde{\lambda}_Q(s) ds \right) \right] .$$

Betrachten wir zunächst den Fall des inhomogenen Poissonprozesses, d.h. einer zeitvariablen deterministischen Ausfallintensität $\lambda_Q(t)$. Gemäß Abschnitt 3.3.1 gilt hierbei

$RNPD(t,T) = 1 - \exp\left(-\int_t^T \lambda_Q(s) ds\right)$ und $Q(t,T) = \exp\left(-\int_t^T \lambda_Q(s) ds\right)$. Unterstellen wir die Unabhängigkeit von τ und $\{R(t)\}$, so gilt gemäß Abschnitt 6.2.2 unter der Recovery of Treasury-Annahme

$$(177) \quad B^d(t,T) = B(t,T) \left\{ rc + (1 - rc) \exp\left(-\int_t^T \lambda_Q(s) ds\right) \right\}.$$

Im Falle eines vollständigen Ausfalls ($rc = 0$) gilt damit

$$(178) \quad \begin{aligned} B^d(t,T) &= E_Q \left[\exp\left(-\int_t^T R(s) ds\right) \exp\left(-\int_t^T \lambda(s) ds\right) \right] \\ &= E_Q \left[\exp\left(-\int_t^T R(s) + \lambda(s) ds\right) \right]. \end{aligned}$$

Die Bewertung des ausfallbedrohten Zerobonds läuft damit auf eine Diskontierung des um die Ausfallintensität modifizierten Spot Rate-Prozesses $R^*(t) = R(t) + \lambda(t)$ hinaus. Die Größe $\lambda(t)$ quantifiziert den ausfallrisikoinduzierten Spread auf die Spot Rate. Der Fall $\lambda(t) = \lambda$ (homogener Poissonprozess) wurde von [Jarrow/Turnbull \(1995\)](#) behandelt, die auch eine ausführliche Analyse des zugrunde liegenden arbitragefreien Marktes vornehmen, man vgl. hierzu auch [Cairns \(2004, S. 208f.\)](#).

Im Falle einer deterministischen Zinsstruktur mit konstanter Zinsintensität r gilt in Spezialisierung von (177)

$$(179) \quad \begin{aligned} B^d(t,T) &= e^{-r(T-t)} \left\{ rc + (1 - rc) \exp\left(-\int_t^T \lambda_Q(s) ds\right) \right\} \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ 1 - (1 - rc) \left[1 - \exp\left(-\int_t^T \lambda_Q(s) ds\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist nun nach $\lambda_Q(s)$ auflösbar und es gilt

$$(180) \quad \lambda_Q(s) = -\frac{\partial}{\partial s} \ln[e^{r(s-t)} B^d(t, s) - rc] .$$

Bei Kenntnis der (beobachtbaren) ausfallbedrohten Zerobondpreise, der Zinsintensität und der Recovery Rate lässt sich somit die risikoneutrale Ausfallintensität wiedergewinnen.

Im Falle eines [homogenen Poissonprozesses](#), d.h. $\lambda_Q(t) = \lambda_Q$, erhalten wir darüber hinaus als spezifische Preisgleichung

$$(181) \quad B^d(t, T) = e^{-r(T-t)} \{rc + (1 - rc)e^{-\lambda_Q(T-t)}\} .$$

Der risikoneutrale Intensitätsparameter λ_Q lässt sich anhand dieser Beziehung rekonstruieren. Auf dieser Basis kann dann empirisch leicht überprüft werden, ob die Annahme einer konstanten (risikoneutralen) Ausfallintensität realistisch ist.

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 dargelegt, sind die im Falle des inhomogenen Poissonprozesses sich ergebenden Credit Spreads zwar zeitvariabel, empirische Credit Spreads haben aber darüber hinaus einen irregulären (zufallsabhängigen) Charakter. Dies legt den Ansatz von Cox-Prozessen für die Ausfallintensität nahe.

In diesem allgemeinen Kontext hat sich der Ansatz von [Duffie/Singleton \(1999\)](#) als sehr fruchtbar erwiesen. Dieser beruht auf einer spezifischen Recovery of Market Value-Annahme. Zum Defaultzeitpunkt $\tau = s$ wird unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsbelegung Q ein Loss Given Default $L(s)$ in Termen des Marktwertes (unmittelbar vor Ausfall) realisiert. Bei Annahme eines Ausfallprozesses mit stochastischer Ausfallintensität $\tilde{\lambda}(t)$ unter Q resultiert dann das folgende zentrale und elegante Pricing-Resultat:

$$(182) \quad B^d(t, T) = E_Q^t \left[\exp \left(- \int_t^T [R(s) + L(s) \tilde{\lambda}(s)] ds \right) \right] .$$

Die Diskontierung erfolgt somit auf der Basis des modifizierten Spot Rate-Prozesses

$$(183a) \quad R^*(t) = R(t) + L(t) \tilde{\lambda}(t) .$$

Die Größe $SP(t) := L(t) \tilde{\lambda}(t)$ quantifiziert hierbei den ausfallrisikoinduzierten Spread auf die Spot Rate. Die getroffene spezifische Recovery-Annahme ermöglicht im vorliegenden Kontext die Anwendung von Standardverfahren, vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer (2005, Abschnitt 9.3.2)*, zur Quantifizierung der Zinsstruktur und besitzt damit eine Reihe von Umsetzungs- und Anwendungsvorteilen. Letztlich wird aber hier ein Trade off zwischen einzelnen Anforderungen an ein realistisches und gleichzeitig umsetzbares Modell vorgenommen. In der konkreten praktischen Anwendung ist dabei darauf zu achten, welche Recovery-Annahme realistisch ist. [Duffie/Singleton \(1999, S. 702 ff.\)](#) weisen aber darauf hin, dass in einigen von ihnen analysierten Beispielfällen die Unterschiede in den Modellergebnissen bei alternativer Anwendung der Recovery of Face Value-Annahme nur gering sind.

Da der Spread $SP(t)$ in (183a) in Produktform eingeht, kann auf empirischem Wege nicht ohne weiteres ein Aufschluss über die beiden Bestandteile des Produkts erhalten werden. Insofern ist es üblich, direkt die Größe $SP(t)$ zu spezifizieren.

Arbeitet man jedoch mit einer modellexogenen konstanten Recovery Rate bzw. einem entsprechenden Loss Given Default, so bleibt dies auf der risikoneutralen Ebene erhalten und der ausfallmodifizierte Spot Rate-Prozess reduziert sich auf

$$(183b) \quad R^*(t) = R(t) + L \tilde{\lambda}(t) .$$

Geht man darüber hinaus von einer Recovery Rate von $rc = 0$ aus, so gilt $L = 1$ und wir erhalten als weiter reduzierten Ausdruck

$$(183c) \quad R^*(t) = R(t) + \tilde{\lambda}(t) .$$

Ein entsprechendes Modell wurde insbesondere in [Lando \(1998\)](#) betrachtet. Der Spot Rate-Prozess $R(t)$ und der Ausfallprozess können dabei des Weiteren einer Abhängigkeitsstruktur unterliegen. Betrachten wir hierzu ein Beispiel. Nehmen wir die Existenz von n Risikofaktoren $X_1(t), \dots, X_n(t)$ an, die einem multivariaten Quadratwurzelprozess des Cox/Ingersoll/Ross-

Typus folgen. Wir nehmen weiterhin die Gültigkeit der folgenden linearen Beziehungen an, wobei $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$:

$$(184a) \quad R(t) = a_r(t) + b_r(t) X(t)$$

$$(184b) \quad \tilde{\lambda}(t) = a_\lambda(t) + b_\lambda(t) X(t) .$$

$R(t)$ und $\tilde{\lambda}(t)$ sind dabei gegeben $X(t) = x(t)$ bedingt unabhängig, auf unbedingter Ebene aber durch ihre gemeinsame Koppelung an $X(t)$ stochastisch abhängig.

Offenbar besitzt auch der Prozess $R^*(t) = R(t) + \tilde{\lambda}(t)$ eine Repräsentation der Form $R^*(t) = a(t) + b(t) X(t)$, d.h. eine *affine Form* in Bezug auf $X(t)$. Es lässt sich nun zeigen, vgl. hierzu etwa [Duffie/Singleton \(2003, S. 107\)](#), dass geeignete Koeffizienten $\alpha(t, T)$, $\beta(t, T)$, $\alpha_d(t, T)$ und $\beta_d(t, T)$ existieren mit

$$(185a) \quad B^d(t, T) = \exp[\alpha_d(t, T) + \beta_d(t, T) X(t)]$$

$$(185b) \quad B(t, T) = \exp[\alpha(t, T) + \beta(t, T) X(t)] .$$

Entsprechend lässt sich für den Credit Spread auf Zerobondeebene zeigen, vgl. wiederum [Duffie/Singleton \(2003, S. 108\)](#), dass auch dieser in einer einfachen Beziehung zu $X(t)$ steht, nämlich

$$(186) \quad CS(t, T) = -\frac{\alpha_{CS}(t, T) + \beta_{CS}(t, T) X(t)}{T - t} ,$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_{CS}(t, T)$ und $\beta_{CS}(t, T)$.

Die Struktur von (185b) stellt offenbar eine Verallgemeinerung der etwa in *Albrecht/Maurer* (2005, Anhang 9E) betrachteten affinen Zinsstrukturen dar. Diese Verallgemeinerung ist nun auch der Ausgangspunkt für weiterführende Resultate. Dabei geht man aus von der Klasse der *affinen Diffusionsprozesse* $X(t)$, die durch die folgende Eigenschaft gekennzeichnet sind

$$(187) \quad E_Q^t \left[\exp \left\{ - \int_t^T [\lambda_0 + \lambda_1 X(u)] du \right\} e^{a+bX(T)} \right] = e^{\alpha(t) + \beta(t)X(t)} .$$

Dies kann wie folgt interpretiert werden. Ist der Spot Rate Prozess $R(T)$ oder der ausfallmodifizierte Spot Rate Prozess $R^*(t)$ affin in $X(t)$ und der zu bewertende Payoff in T exponentiell-affin in $X(t)$, so ist das Bewertungsergebnis, d.h. das Integral gemäß (16.187) exponentiell-affin in $X(t)$. Die Koeffizienten $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ ergeben sich als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung, die in bestimmten Fällen explizit gelöst werden kann, ansonsten aber numerisch zu lösen ist. Im univariaten Fall und bei Betrachtung des Spot Rate-Prozesses $R(t)$ sind die Ornstein/Uhlenbeck-Prozesse nach *Vasicek* und *Hull/White* sowie der Quadratwurzelprozess nach *Cox/Ingersoll/Ross* – vgl. hierzu etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Anhänge 9E oder 16F) – Beispiele für die Existenz einer expliziten Lösung. Im Kontext der Bewertung ausfallbedrohter Zerobonds ist gemäß (182) der Fall $a = b = 0$ der relevante Ausgangspunkt für entsprechende Analysen.

In der Literatur haben dabei die folgenden Zwei- bzw. Dreifaktormodelle größere Beachtung gefunden. Im Zweifaktorfall betrachtet man die folgenden affinen Modelle für den Spot Rate-Prozess $R(t)$ bzw. den ausfallinduzierten Spread $SP(t) = L(t) \tilde{\lambda}(t)$

$$(188a) \quad R(t) = \delta_0 + \delta_1 X_1(t) + \delta_2 X_2(t)$$

$$(188b) \quad SP(t) = \gamma_0 + \gamma_1 X_1(t) + \gamma_2 X_2(t) ,$$

im Dreifaktorfall geht man entsprechend aus von

$$(189a) \quad R(t) = \delta_0 + \delta_1 X_1(t) + \delta_2 X_2(t) + \delta_3 X_3(t)$$

$$(189b) \quad SP(t) = \gamma_0 + \gamma_1 X_1(t) + \gamma_2 X_2(t) + \gamma_3 X_3(t) .$$

Die Prozesse $X_1(t)$ und $X_2(t)$ bzw. $X_1(t)$, $X_2(t)$ und $X_3(t)$ sind dabei jeweils entweder Vasicek-Prozesse oder Cox/Ingersoll/Ross-Prozesse. Es hat sich dabei die folgende Notation eingebürgert, vgl. etwa [Dai/Singleton \(2000\)](#) sowie *Benkert* (2004). Man betrachtet die Klas-

sen $A_m(2)$ oder im Dreifaktorfall $A_m(3)$, wobei m die Anzahl der $X_i(t)$ vom Cox/Ingersoll/Ross-Typus angibt. So bedeutet etwa $A_0(2)$, dass beide Faktoren im Zweifaktormodell vom Vasicek-Typus sind und $A_2(3)$, dass (o.B.d.A.) $X_1(t)$ vom Vasicek-Typus ist und (o.B.d.A.) $X_2(t)$ und $X_3(t)$ vom Cox/Ingersoll/Ross-Typus ist.

Sind die Prozesse $X_1(t)$ und $X_2(t)$ im Zweifaktormodell bzw. $X_1(t)$, $X_2(t)$ und $X_3(t)$ im Dreifaktormodell stochastisch unabhängig, so lässt sich, wie in Anhang 16F dargelegt, in einfacher Weise eine explizite Lösung des Bewertungsproblems erreichen, indem man die entsprechenden univariaten Ergebnisse für [Vasicek](#) bzw. *Cox/Ingersoll/Ross* in geeigneter Weise miteinander multipliziert. Aber auch im Falle korrelierter Faktoren lassen sich entsprechende Ergebnisse erzielen, vergleiche wiederum etwa *Albrecht/Maurer* (2005, Anhang 16F), nun aber nurmehr auf numerischem Wege. Für eine Anwendung der Klassen $A_2(m)$ sowie $A_3(m)$ auf den deutschen Kapitalmarkt verweisen wir auf *Benkert* (2004).

Auf einige weitere Literaturergebnisse, die breitere Beachtung gefunden haben, sei im Weiteren noch eingegangen.

[Duffee \(1998\)](#) dokumentiert das Bestehen eines inversen Zusammenhangs zwischen dem Niveau des ausfallfreien Zinses und den Spreads ausfallbedrohter Unternehmensbonds relativ zu Staatsanleihen. Dieses Phänomen kann dadurch erklärt werden, dass im Kontext niedriger Zinsen sich die Wirtschaft eher in einem Konjunkturtal befindet und die Investoren eine entsprechend höhere Kompensation für das Ausfallrisiko fordern. [Duffee \(1999\)](#) geht vor diesem Hintergrund und im Kontext der zuvor dargestellten Modellklassen zweistufig vor. Zunächst spezifiziert er ein Modell für die ausfallfreie Zinsstrukturkurve auf Basis des Ansatzes

$$(190a) \quad R_t = \alpha + X_1(t) + X_2(t) .$$

Dabei sind $X_1(t)$ und $X_2(t)$ unabhängige Prozesse vom Cox/Ingersoll/Ross-Typus. Dieses Faktormodell wird nun an empirische Daten angepasst. Hieraus resultiert ein negativer Wert für α . Infolge der Datenlage ist [Duffee \(1999\)](#) nicht in der Lage, den exakten Wert für α zu bestimmen und arbeitet im Weiteren mit $\alpha = -1$. Insgesamt eröffnet er damit, obwohl $X_1(t)$ und $X_2(t)$ vom Cox/Ingersoll/Ross-Typus sind, die Möglichkeit negativer Zinsraten. Nur auf

diese Weise kann er angesichts der im Beobachtungszeitraum herrschenden Zinsstrukturen, die sowohl „tief und flach“ als auch „sehr steil“ sind, eine genügende Anpassungsgüte erzielen. Gegeben diese Anpassung, d.h. bei Fixierung des Parameters α , wählt [Duffee \(1999\)](#) als Ansatz für die Ausfallintensität von Unternehmen j nun

$$(190b) \quad \tilde{\lambda}_j(t) = \beta + \lambda_j^*(t) + \beta_{1j} [X_1(t) - \bar{X}_1(t)] + \beta_{2j} [X_2(t) - \bar{X}_2(t)] .$$

Dabei sind $X_1(t)$ und $X_2(t)$ die Faktoren aus dem Zinsstrukturmodell und $\bar{X}_1(t)$ und $\bar{X}_2(t)$ die entsprechenden Stichprobenmittel. Auch der unternehmensspezifische Faktor $\tilde{\lambda}_j(t)$ wird als CIR-Prozess angenommen, wobei dieser unabhängig von $X_1(t)$ und $X_2(t)$ ist. Auch untereinander sind die unternehmensspezifischen Faktoren unabhängig. Die Korrelation zwischen den Ausfallintensitäten $\tilde{\lambda}_j(t)$ und der Spot Rate R_t wird durch die gemeinsame Abhängigkeit von den Faktoren $X_1(t)$ und $X_2(t)$ induziert. Die entsprechenden Sensitivitäten β_{1j} und β_{2j} sind unternehmensspezifisch.

Da Ausfallintensität und Recovery Rate nicht separat voneinander geschätzt werden können, wird die Recovery Rate exogen spezifiziert und einheitlich – basierend auf Durchschnittswerten von [Moody's](#) – als 44% angenommen.

Eine Weiterentwicklung der Vorgehensweise von [Duffee \(1999\)](#) bietet [Driessen \(2002\)](#), dessen Modellansatz im Folgenden noch skizziert sei.

Der Ansatz für den Spot Rate-Prozess R_t erfolgt in erweiterter Form eines zweidimensionalen Prozesses (R_t, V_t) , wobei V_t ein (korrelierter) Faktor ist, der die Volatilität steuert. Dies entspricht insoweit dem Ansatz von [Duffie/Pedersen/Singleton \(2003\)](#). Der Spreadprozess $SP(t) = L\tilde{\lambda}(t)$ wird nun des Weiteren auf die folgende Weise modelliert (wobei wir uns auf den Spezialfall zweier gemeinsamer Faktoren F_1 und F_2 beschränken):

$$(191) \quad SP_j(t) = \alpha_j + \gamma_{1j} F_1(t) + \gamma_{2j} F_2(t) + G_j(t) + \beta_{rj} R_t + \beta_{vj} V_t .$$

Dabei sind $F_1(t)$ und $F_2(t)$ zwei gemeinsame Faktoren, die auf alle Unternehmen wirken und $G_j(t)$ ist ein unternehmensspezifischer Faktor. Dabei folgen die Faktoren F_1 und F_2 sowie die Faktoren G_j jeweils unabhängigen Prozessen des Cox/Ingersoll/Ross-Typus. Der Unterschied zum Ansatz von [Duffee \(1999\)](#) liegt neben der komplexeren Modellierung der ausfallfreien Zinsstruktur in der Einführung gemeinsamer ausfallbeeinflussender Faktoren. In einem empirischen Vergleich beider Modelle merkt [Yu \(2003\)](#) an, dass diese Einführung von gemeinsamen ausfallbeeinflussenden Faktoren die Defaultkorrelationen in einem erheblichen Ausmaß ansteigen lässt und hierbei Größenordnungen erreicht werden, die in Übereinstimmung mit der Empirie stehen.

6.6 Bewertung in Migrationsmodellen

Die im vorstehenden Abschnitt behandelten Intensitätsmodelle betrachten nur einen Übergang und zwar vom Nicht-Default-Zustand in den Default-Zustand. Migrationsmodelle berücksichtigen zusätzlich die Übergänge zwischen einzelnen Ratingklassen $k = 1, \dots, K$, wobei $K = D$ dem Defaultzustand entspricht. Die Klasse dieser Migrationsmodelle wurde begründet durch [Jarrow/Lando/Turnbull \(1997\)](#), auf deren Resultate wir im Folgenden eingehen werden. Aufgrund der großen Komplexität der Vorgehensweise können wir dabei aber nur einige Hauptpunkte skizzieren, wobei wir [Cairns \(2004, S. 209 ff.\)](#) folgen.

Die zeitabhängigen Übergangintensitäten unter der physischen (beobachtbaren) Wahrscheinlichkeitsbelegung P seien gegeben durch $\lambda_{ij}(t)$ und werden in einer Intensitätsmatrix $\Lambda(t)$ zusammengefasst. Die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(192) \quad p_{ij}(t, s) = P[RA(s) = j \mid RA(t) = i]$$

werden ebenfalls in einer Matrix $\Pi(t, s)$ zusammengefasst.

Es gilt dann

$$(193) \quad \Pi(t, s) = \exp \left[\int_t^s \Lambda(u) du \right],$$

wobei $\exp(B) := E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$.

Unter der – als existent und eindeutig vorausgesetzten – risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsbelegung existieren entsprechende Übergangintensitäten $\tilde{\lambda}_{ij}(t)$. Dabei sei $\tilde{\lambda}_{ij}(t) > 0$ genau dann, wenn $\lambda_{ij}(t) > 0$, um die Äquivalenz der beiden Wahrscheinlichkeitsbelegungen zu gewährleisten. Die risikoneutralen Übergangintensitäten $\tilde{\lambda}_{ij}(t)$ definieren ihrerseits die Intensitätsmatrix $\tilde{\Lambda}(t)$ und damit die Übergangsmatrix $\tilde{\Pi}(t, s)$.

Wir definieren des Weiteren

$$(194) \quad \mu_{ij}(t) = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{ij}(t) / \lambda_{ij}(t) & \text{für } \lambda_{ij}(t) > 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wir betrachten nun einen ausfallbedrohten Zerobond, der im Zeitpunkt T bei Nichtausfall eine Geldeinheit zahle und bei Ausfall eine konstante Recovery Rate rc , d.h. es gilt das Modell (163). Nehmen wir noch an, dass der Ratingprozess $\{RA(t)\}$ und der Zinsintensitätsprozess $\{R(t)\}$ stochastisch unabhängig voneinander sind, so ergibt sich als Bewertungsgleichung zum Zeitpunkt t , gegeben $RA(t) = i$:

$$(195) \quad B^d(t, T, i) = B(t, T) \{1 - (1 - rc) Q[RA(T) = D \mid RA(t) = i]\} .$$

Neben die für die Zinsstruktur relevanten Marktpreise des Risikos treten nun noch Marktpreise für das Kreditrisiko, die gegeben sind durch $\mu_{ij}(t)$. Es liegen somit für alle $i \neq D$ zeitabhängige Marktpreise des Kreditrisikos vor, und die Verbindung zwischen den beobachtbaren Übergangintensitäten $\lambda_{ij}(t)$ und den für das Pricing relevanten Übergangintensitäten $\tilde{\lambda}_{ij}(t)$ ist für $i \neq D$ gegeben durch

$$(196) \quad \tilde{\lambda}_{ij}(t) = \mu_{ij}(t) \lambda_{ij}(t) .$$

Zur Durchführung der Bewertung gemäß (195) sind somit die physischen Übergangintensitäten $\lambda_{ij}(t)$ sowie die Marktpreise des Kreditrisikos $\mu_{ij}(t)$ zu bestimmen. Eine größere Problematik stellen dabei die zeitabhängigen Marktpreise des Kreditrisikos dar. Hier werden regelmäßig strukturelle Vereinfachungen vorgenommen, etwa $\mu_{ij}(t) = \mu_i(t)$ für alle j und $i \neq D$ oder sogar $\mu_i(t) = \mu_i$. Die entsprechende Bestimmung der Marktpreise des Kreditrisikos erfolgt anhand von Marktpreisen für ausfallfreie und ausfallbedrohte Zerobonds auf der Grundlage der Bewertungsgleichung (195). Beispiele für eine entsprechende empirische Identifizierung finden sich etwa in *Cairns* (2004, S. 214 ff), [Jarrow/Lando/Turnbull \(1997, S. 501 ff.\)](#) und *Wingenroth* (2004, S. 183 ff.).

Verallgemeinerungen des [Jarrow/Lando/Turnbull-Ansatzes](#) bieten etwa [Arvanitis/Gregory/Laurent \(1999\)](#), *Demchak* (2000) sowie [Kijima/Komoribayashi \(1998\)](#). Hinsichtlich der beiden ersteren Modellansätze vergleiche auch im Überblick *Wingenroth* (2004, S. 189 ff.).

7 Kreditderivate

7.1 Überblick über Kreditderivate

Ein Kreditderivat ist ein Finanzkontrakt, der es den Vertragsparteien erlaubt, das Kreditrisiko bzw. Bestandteile des Kreditrisikos (Ausfallrisiko, Migrationsrisiko) eines oder mehrerer Referenzschuldner zu isolieren und damit handelbar zu machen. Kreditderivate sind dabei bislang ausschließlich OTC-Produkte oder existieren in Verbindung mit Schuldtiteln. Im Folgenden gehen wir auf die wesentlichen Basisvarianten von Kreditderivaten ein und beginnen hier mit dem Credit Default Swap. Hinsichtlich komplexerer („exotischer“) Kreditderivate verweisen wir an dieser Stelle auf *Posthaus* (2005).

7.1.1 Credit Default Swap

Der Risikotransfer bei einem Credit Default Swap (CDS) gestaltet sich derart, dass der *Risikoverkäufer (Risk Seller, Protection Buyer)* gegen die Zahlung einer Prämie für einen festgelegten Zeitraum das Recht erwirbt, vom *Risikokäufer (Risk Buyer, Protection Seller)* bei Eintreten eines vertraglich fixierten Kreditereignisses (Credit Event) bezogen auf einen Referenzwert (Underlying) eine Ausgleichszahlung zu erhalten. Abbildung 17 illustriert zunächst die Grundstruktur eines CDS.

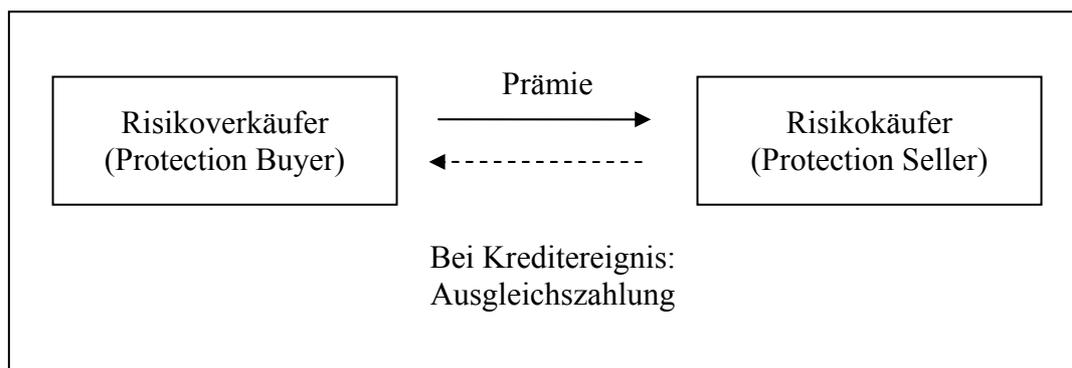


Abb. 17: Grundstruktur eines Credit Default Swap

Grundsätzlich sind die Kreditereignisse von den Vertragsparteien frei vereinbar, etwa Insolvenz, Zahlungsverzögerung, Ratingherabstufung (Downgrade) oder Umschuldung. Üblicherweise wird der CDS mit Eintritt des definierten Kreditereignisses terminiert. Die Prämienzahlung erfolgt entweder einmalig im Voraus (upfront) oder periodisch nachschüssig über die

Laufzeit, längstens aber bis zum eventuellen Eintritt des Kreditereignisses. Sie wird in der Regel in Basispunkten des Nominalwertes der Forderung ausgedrückt. Das Underlying kann dabei eine einzelne Forderung oder ein Korb von Forderungen sein. Die Ausgleichszahlung schließlich kann marktorientiert (etwa: Ausgleich der Differenz zwischen Nominalbetrag und Marktwert der Forderung nach Default) oder pauschal definiert sein (etwa: 30% des Nominalbetrages der Forderung) und erfolgt üblicherweise via Cash Settlement. Alternativ erfolgt eine Lieferung des Basistitels par.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel zum [CDS](#).

Beispiel: (Credit Default Swap)

Am 01. März 2005 treten zwei Parteien ein in einen fünfjährigen CDS über einen Nennwert von 100 Mio. EUR. Die als Referenzwert zugrunde liegende ausfallbedrohte Anleihe weist ebenfalls einen Nominalwert von 100 Mio. EUR auf. Der Risikoverkäufer zahlt eine jährliche Prämie von 90 Basispunkten für den Ausfallschutz.

Tritt kein Default während der Laufzeit ein, so erhält der Risikoverkäufer keine Ausgleichszahlung und zahlt jeweils am 01. März 2006, 2007, 2008, 2009 und 2010 eine Risikoprämie in Höhe von 900.000 EUR.

Alternativ falle der Referenzwert zum 01. September 2008, d.h. nach 3,5 Jahren aus. Im Falle eines physischen Settlement erhält der Risikokäufer die Anleihe und entrichtet hierfür den ursprünglichen Nennwert in Höhe von EUR 100 Mio. Im Falle eines Cash Settlement wird eine vorab vereinbarte Anzahl von Tragen (Grace Period) nach dem Ausfallereignis abgewartet. Ist an dem vereinbarten Datum der Marktwert der Anleihe auf 40 Mio. EUR gesunken, so leistet der Risikokäufer eine Ausgleichszahlung in Höhe von EUR 60 Mio.

In beiden vorstehenden Fällen zahlt der Risikoverkäufer Prämien in Höhe von 900.000 EUR am 01.03.2006, am 01.03.2007 und am 01.03.2008. Ferner leistet er eine anteilige Prämienzahlung in Höhe von EUR 450.000 am 01.09.2008.

Im Standardfall dienen als Referenzwerte meist Anleihen, da hier die Bewertung im Fall einer Zahlungsstörung deutlich einfacher ist als bei einem Kredit. Des Weiteren wird hierbei als

Credit Event üblicherweise die Zahlungsunfähigkeit verwendet. Vom Nominalwert (Par-Preis) der Anleihe wird dabei entweder der Marktwert nach Kreditereignis oder der Recovery-Wert abgezogen. Bei einem *Digital Default Swap* wird hingegen bei Ausfall ein fester Betrag gezahlt. Der Vorteil hierbei liegt in der Trennung von Ausfallwahrscheinlichkeit und Recovery Rate.

7.1.2 Credit Spread-Produkte

Während ein CDS direkt an einem definierten Kreditereignis ansetzt, ist der Ausgangspunkt für Credit Spread-Produkte der Zinsspread (typischerweise) einer Anleihe gegenüber einer quasi-risikolosen Anleihe im Falle von Festzinstiteln oder aber gegenüber den Referenzzinssätzen [LIBOR](#) bzw. [EURIBOR](#) im Falle von variabel verzinslichen Titeln. Ein zentrales Beispiel hierfür ist der *Credit Spread Put* (CSP). Wird der Spread hierbei größer als der vereinbarte Ausübungspreis (*Basisspread*), so kann die Option ausgeübt werden. Als Ausgleichszahlung erfolgt im Falle der Ausübung die (positive) Differenz zwischen dem Spread bei Ausübung und dem Basisspread (multipliziert mit dem Nennwert sowie gegebenenfalls einem Gewichtungsfaktor wie der Restlaufzeit oder der Duration), mithin

$$(197) \quad \begin{aligned} & \text{Ausgleichszahlung} \\ & = \max \{ (\text{Zinsspread} - \text{Basisspread}) \times \text{Gewichtungsfaktor} \times \text{Nennwert}, 0 \}. \end{aligned}$$

Die Ausübung kann dabei nur am Ende der vereinbarten Laufzeit (Europäischer Typ), zu vorab definierten Zeitpunkten (Multi-Europäischer Typ) oder aber während der gesamten Laufzeit (Amerikanischer Typ) erfolgen. Die Abbildungen 18 und 19 illustrieren die Grundstruktur eines CSP sowie das resultierende Gewinn/Verlust-Diagramm (unter Vernachlässigung von Nominalbetrag und Gewichtungsfaktor).

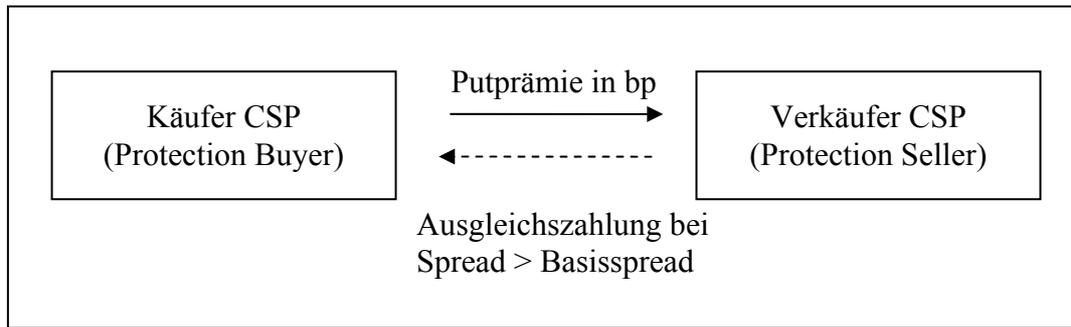


Abb. 18: Grundstruktur eines Credit Spread Put

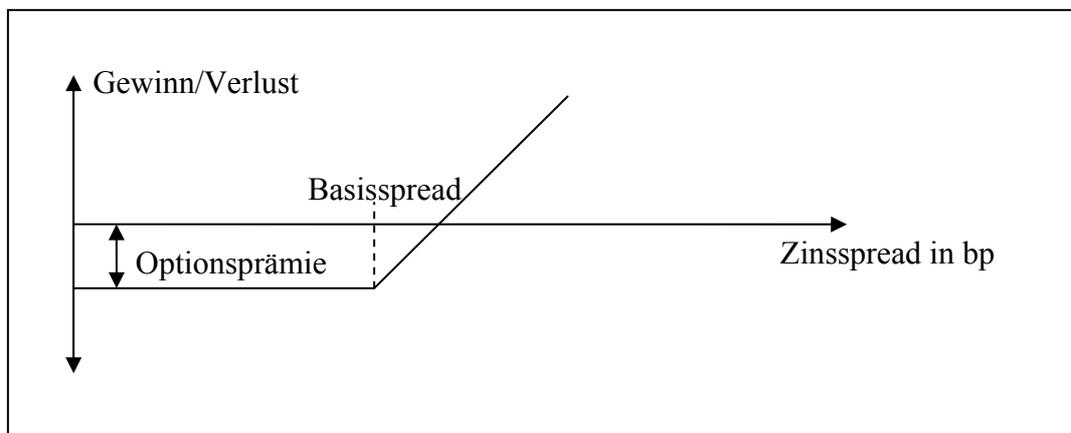


Abb. 19: Gewinn/Verlust-Diagramm des Käufers eines Credit Spread Put

Im Falle des Credit Spread Put profitiert der Käufer von einer Ausweitung des Zinsspreads (Spread Widening Risk), welcher auf der anderen Seite einhergeht mit einem Kursverlust der zugrunde liegenden Anleihe. Somit beinhaltet der CSP einen Schutz gegen einen spreadinduzierten Kursverlust des Basistitels.

Oftmals wird beim CSP eine Knock out-Grenze in Höhe eines maximalen Zinsspread vereinbart. Damit kann sichergestellt werden, dass nur das Spreadrisiko transferiert wird, nicht aber das Ausfallrisiko.

Neben dem Credit Spread Put zählen entsprechend Credit Spread Calls, Credit Spread Forwards und Credit Spread Swaps zu den Credit Spread-Produkten.

7.1.3 [Total Return Swap](#)

Bei einem [Total \(Rate of\) Return Swap \(TRS\)](#) wird im Unterschied zu den bisher dargestellten Kreditderivaten nicht nur das Kreditrisiko, sondern auch das Marktwertisiko übertragen. Insgesamt zahlt der Risikoverkäufer (*Total Return Payer*) den (positiven) Total Return (Kupons und Marktwertsteigerungen) auf ein festgelegtes Referenzasset an den Risikokäufer (*Total Return Receiver*) und erhält dafür [LIBOR](#)-Zahlungen (plus/minus einen Aufschlag) sowie im Falle von Marktwertverlusten den entsprechenden Ausgleich. Dadurch überträgt er neben dem Marktwertisiko aufgrund reiner Zinsänderungen auch das Bonitätsrisiko des Referenzassets an den Risikokäufer. Die Grundstruktur eines TRS wird in Abbildung 20 illustriert.

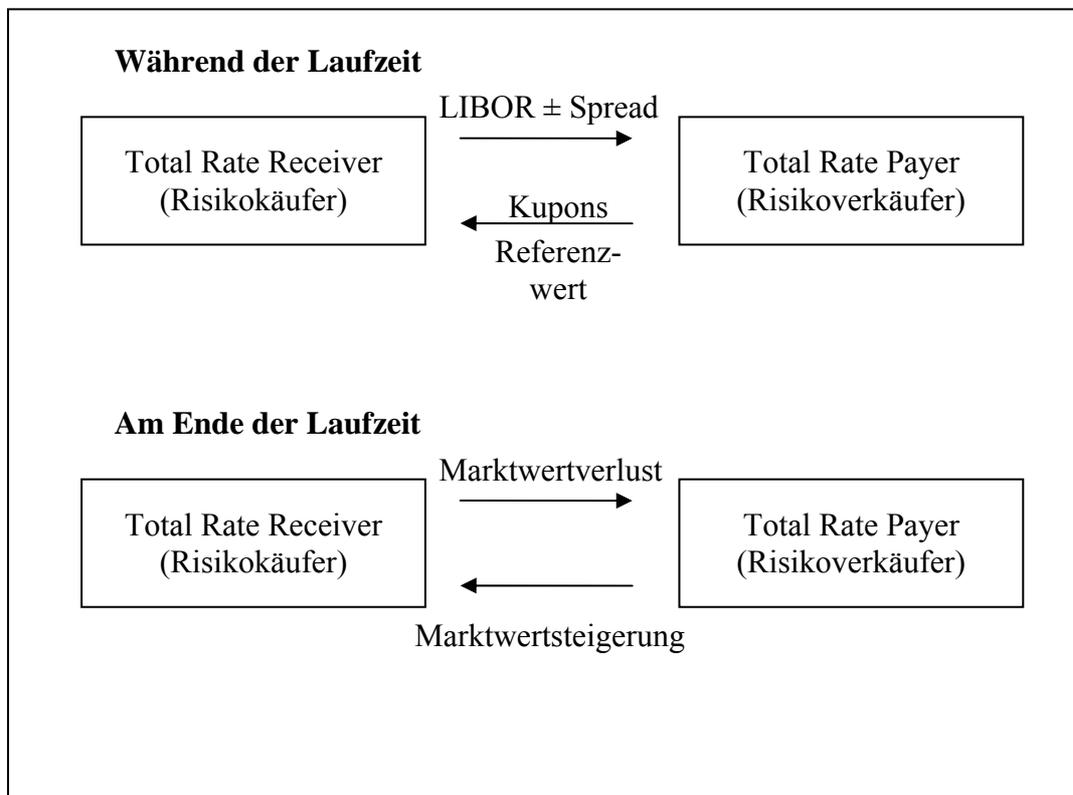


Abb. 20: Grundstruktur eines [Total Return Swap](#)

Beim Ausfall des Referenzassets endet der TRS vorzeitig und es erfolgt eine Abschlussausgleichszahlung bzw. eine Übergabe des Referenzassets selbst gegen Zahlung des Nominalbetrags.

7.1.4 [Credit Linked Notes](#)

Bei den bisher dargestellten Produkten wird zwar das Kreditrisiko des Referenzwertes verändert, jedoch entsteht nun ein Kontrahentenrisiko mit dem Partner des Derivategeschäfts. Eine [Credit Linked Note \(CLN\)](#) ist eine Anleihe, in die ein Kreditderivat eingebettet ist. Infolge der Vorleistung des Emissionsbetrags der CLN durch den Risikokäufer an den Emittenten der CLN (Risikoverkäufer) wird neben dem durch das Kreditderivat transferierte Kreditrisiko auch das aus dem Derivatkontrakt resultierende Kontrahentenrisiko übertragen.

Je nach eingebettetem Kreditderivat werden unterschiedliche Varianten von CLN generiert, wie Abb. 21 verdeutlicht.

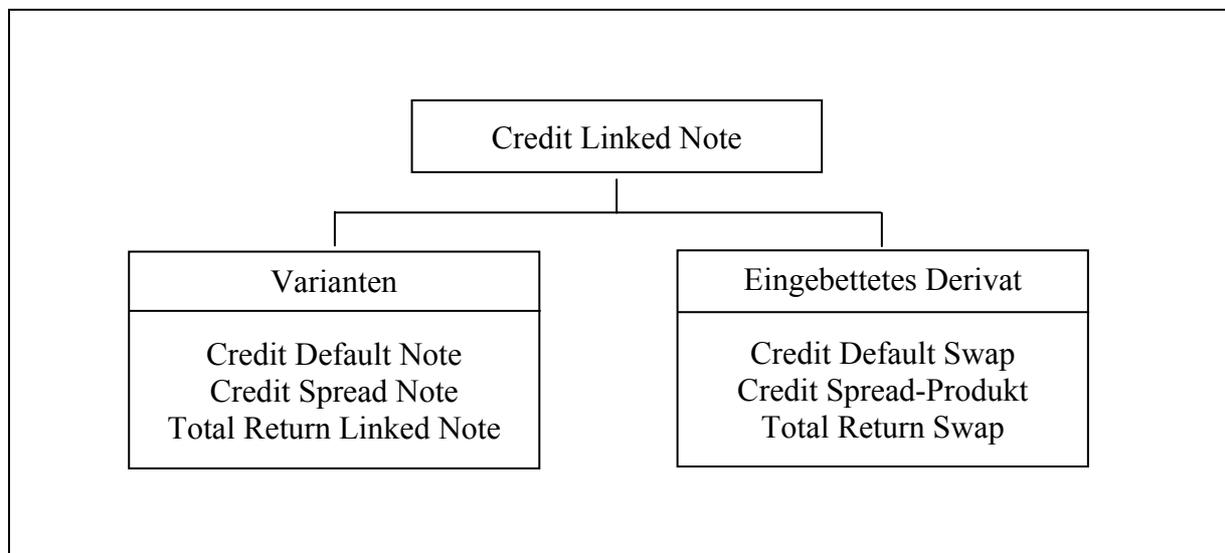


Abb. 21: Varianten von [Credit Linked Notes](#)

Im Weiteren erörtern wir die Konstruktion einer CLN am Beispiel der [Credit Default Note](#) (CDN). Der Risikokäufer (Investor) erhält hierbei vom Emittenten der CDN gegen Zahlung eines Nominalbetrags (Emissionsbetrags) eine in der Regel variable Verzinsung erhöht um eine risikoadäquate Prämie. Die Tilgung der CDN ist nun abhängig vom Eintritt eines Kreditereignisses. Tritt dies nicht ein, so wird der Nominalbetrag zurückgezahlt. Tritt das Kreditereignis (typischerweise: Kreditausfall) ein, wird hingegen nur der Nominalbetrag abzüglich einer Ausgleichszahlung erstattet. Abbildung 22 illustriert diese Grundstruktur einer CDN.

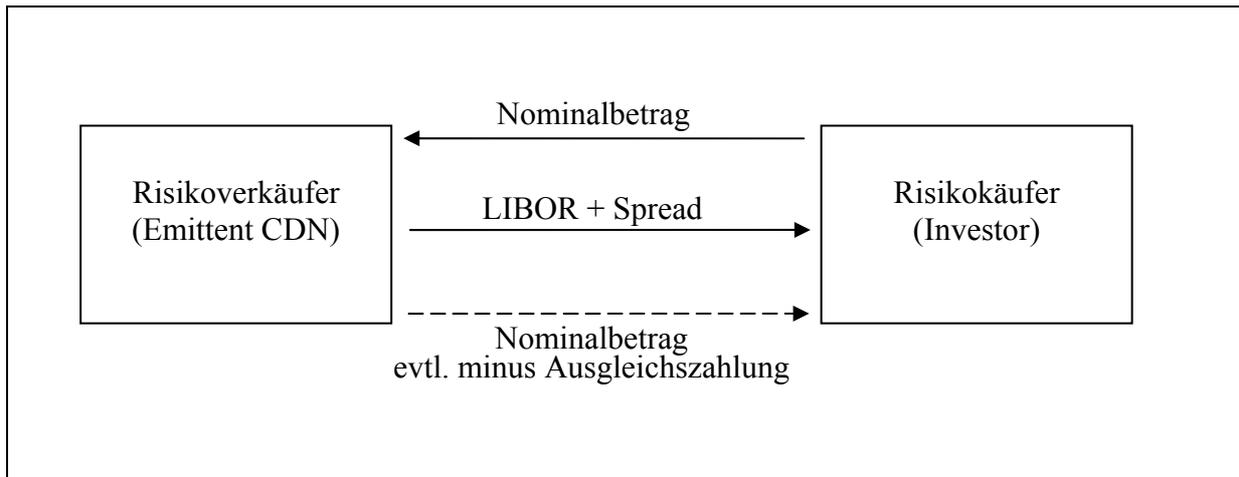


Abb. 22: Grundstruktur einer Credit Default Note

7.2 [Zur Bewertung von Kreditderivaten](#)

Wir beschränken uns an dieser Stelle auf die Bewertung eines Credit Default Swap, wobei wir zu Illustrationszwecken vereinfachend von einer zeitdiskreten Modellumgebung ausgehen und das Kontrahentenrisiko (Ausfall des Kontraktpartners) vernachlässigen.

Alle weiteren Überlegungen finden unter der risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsbelegung Q statt und unterstellen eine Unabhängigkeit von Spot Rate-Prozess $\{R(t)\}$ und Ausfallzeit τ . Wir gehen aus von den Zahlungszeitpunkten $t_i = ih$ ($i = 0, \dots, n$) und nehmen vereinfachend an, dass ein Default nur zu den Zeitpunkten t_1, \dots, t_n (oder später) stattfinden kann. Damit arbeiten wir mit dem gestutzten (curtate) Ausfallzeitpunkt τ_c und es gilt dabei $\tau_c = t_i \Leftrightarrow t_{i-1} < \tau \leq t_i$ in Termen der ungestutzten Ausfallzeit τ . Hieraus folgt

$$(198) \quad Q(\tau_c = t_i) = Q(0, t_{i-1}) - Q(0, t_i) .$$

Ferner nehmen wir an, dass zum Zeitpunkt τ der Risikoverkäufer eine Ausgleichszahlung in Höhe von $(1 - rc)N = LGD \cdot N$ erhält, d.h. wir unterstellen die Recovery of Par-Hypothese mit einer deterministischen Recovery Rate.

Für den Wert der Ausgleichszahlung gilt dann $LGD \cdot N \cdot E_Q \left[\exp \left(- \int_0^{\tau} R(s) ds \right) \right]$. Nach dem

[Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit](#) gilt nun

$$\begin{aligned} E_Q \left[\exp \left(- \int_0^{\tau} R(s) ds \right) \right] &= \sum_{i=1}^n E_Q \left[\exp \left(- \int_0^{\tau} R(s) ds \right) \mid \tau_c = t_i \right] Q(\tau_c = t_i) \\ &= \sum_{i=1}^n E_Q \left[\exp \left(- \int_0^{t_i} R(s) ds \right) \right] Q(\tau_c = t_i) \\ &= \sum_{i=1}^n B(0, t_i) [Q(0, t_{i-1}) - Q(0, t_i)]. \end{aligned}$$

Damit ist eine Bewertung der Zahlung des Risikokäufers gelungen und es gilt

$$(199) \quad V_{RK}(0) = LGD \cdot N \cdot \sum_{i=1}^n B(0, t_i) [Q(0, t_{i-1}) - Q(0, t_i)].$$

Auf der anderen Seite zahlt der Risikoverkäufer eine Prämie $\pi_{CDS} N$ zu den Zeitpunkten t_1, \dots, t_n , aber – gemäß der in Abschnitt 7.1.1 dargestellten Konvention letztmals im Zeitpunkt τ_c , wenn $\tau \leq t_n$. Für den Wert in $t = 0$ einer Zahlung der Höhe eins zum Zeitpunkt t_i gilt damit unter Q die Beziehung $B(t_0, t_i) Q(0, t_{i-1})$ und damit ergibt sich insgesamt die Bewertung der Zahlungen des Risikoverkäufers zu

$$(200) \quad V_{RV}(0) = \pi_{CDS} N \sum_{i=1}^n B(0, t_i) Q(0, t_{i-1}).$$

Insgesamt erhalten wir damit für den fairen Wert der Prämienzahlung

$$\begin{aligned} (201) \quad \pi_{CDS} &= LGD \frac{\sum_{i=1}^n B(0, t_i) [Q(0, t_{i-1}) - Q(0, t_i)]}{\sum_{i=1}^n B(0, t_i) Q(0, t_{i-1})} \\ &= LGD \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^n B(0, t_i) Q(0, t_i)}{\sum_{i=1}^n B(0, t_i) Q(0, t_{i-1})} \right]. \end{aligned}$$

Hinsichtlich der Bewertung eines Credit Default Swap unter realistischeren Modellumgebungen sowie der Bewertung von Kreditderivaten im Allgemeinen verweisen wir an dieser Stelle abschließend auf *Bluhm et al.* (2003, S. 216 ff.), *Duffie/Singleton* (2003, S. 178 ff.), *Grundke* (2003), *Schönbucher* (2003, S. 61 ff.) sowie *Schönbucher* (2005).

Anhang A: Erweiterung des Credit Risk⁺-Basismodells

Als zwei zentrale Probleme für die empirische Validität des in Abschnitt 4.2 dargestellten Credit Risk⁺-Basismodells erweisen sich die Annahme einer Poissonverteilung für die Defaultvariablen der einzelnen Exposurebänder sowie die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit zwischen den Risiken der Exposurebänder.

Zur Überwindung dieser Probleme arbeiten wir mit der in Abschnitt 3.1.3 behandelten Konzeption der gemischten Poissonverteilung. Wir nehmen zu diesem Zwecke die Existenz von n stochastisch unabhängigen Einfluss- bzw. Hintergrundfaktoren X_1, \dots, X_n an. In einem ersten vereinfachenden Schritt wird dabei davon ausgegangen, dass jedes Kreditrisiko nur von einem der Hintergrundfaktoren beeinflusst wird. Das Kreditportfolio lässt sich entsprechend in n Segmente oder Sektoren unterteilen, wobei alle Risiken eines solchen Sektors jeweils nur von einem einzelnen Hintergrundfaktor beeinflusst werden. Dabei werde Sektor j nur von X_j beeinflusst ($j = 1, \dots, n$). In praxi kann man in dieser Situation auch umgekehrt vorgehen und das Kreditportfolio in Abhängigkeit von Geschäftsbereichen, Regionen, Bonität, u.ä. in n Segmente unterteilen und dabei annehmen, dass jedes Segment nur von einem Hintergrundfaktor beeinflusst wird.

Die Hintergrundfaktoren folgen dabei jeweils einer Gammaverteilung

$$(A.1a) \quad X_k \sim \text{Gamma}(a_k, b_k)$$

mit

$$(A.1b) \quad a_k = \mu_k^2 / \sigma_k^2, \quad b_k = \sigma_k^2 / \mu_k.$$

In diesem Falle gilt:

$$(A.2a) \quad E(X_k) = a_k b_k = \mu_k$$

$$(A.2b) \quad \text{Var}(X_k) = a_k b_k^2 = \sigma_k^2.$$

Wir betrachten nun die Defaultgröße D_k , die die Anzahl der Ausfälle in Sektor k ($k = 1, \dots, n$) erfasst und nehmen an ($n = 0, 1, \dots$)

$$(A.3) \quad P(D_k = n | X_k = \lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} .$$

Bedingt auf die Hintergrundvariable folgt somit D_k einer Poissonverteilung. Gemäß den Ergebnissen des Abschnitts 3.1.3 ist dann die unbedingte Verteilung von D_k eine negative Binomialverteilung.

Im Einzelnen gilt [$p_k := b_k / (1 + b_k)$]

$$(A.4) \quad P(D_k = n) = \binom{n + a_k - 1}{n} (1 - p_k)^{a_k} p_k^n$$

sowie

$$(A.5a) \quad E(D_k) = a_k b_k = \mu_k$$

$$(A.5b) \quad \text{Var}(D_k) = E(D_k)(1 + b_k) = \mu_k \left[1 + \frac{\sigma_k^2}{\mu_k} \right] = \mu_k + \sigma_k^2 .$$

Da der Defaultindikator D_k eine empirisch beobachtbare Zufallsgröße ist – er erfasst die Anzahl der Ausfälle im Segment k des Kreditportfolios – sind damit die Parameter μ_k sowie σ_k und damit a_k sowie b_k bzw. p_k statistisch identifizierbar.

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von D_k ist gegeben durch

$$(A.6) \quad G_{D_k}(z) = \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k z} \right)^{a_k} .$$

Wie im Basismodell wird nun jeder Sektor k in Exposurebänder unterteilt, es ergeben sich dabei m_k Exposurebänder. Es bezeichne V_{ki} das einheitliche Exposure (als Vielfaches des Standardausfallbetrags E) der Kreditrisiken des i -ten Exposurebands in Sektor k . Verbunden mit diesem Exposureband ist eine mittlere Anzahl von Ausfällen μ_{ki} , dabei gilt $\mu_k = \sum \mu_{ki}$. Wir definieren nun die Funktion

$$(A.7) \quad F_k(z) = \frac{1}{\mu_k} \sum_{i=1}^{m_k} \mu_{ki} z^{V_{ki}}.$$

Diese Funktion entspricht der erzeugenden Funktion der Ausfallhöhe in Sektor k gegeben einen Ausfall in Sektor k . Unter der Annahme unabhängiger Hintergrundfaktoren X_1, \dots, X_n ergibt sich dann insgesamt als wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion des (normierten) Portfolioverlustes LN :

$$G_{LN}(z) = E[z^{LN}] = \prod_{k=1}^m \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_k F_k(z)} \right)^{a_k}.$$

Wie bereits im Basismodell lässt sich auch in diesem Falle eine Rekursionsbeziehung für $P(LN = n)$ ableiten. Die beschriebene Vorgehensweise beinhaltet zunächst eine realistischere Ausfallverteilung pro Risikosegment. Infolge der gemeinsamen Abhängigkeit von Faktor X_k sind alle Risiken in Sektor k korreliert. Aufgrund der Unabhängigkeit der Faktoren sind aber die Risiken aus unterschiedlichen Sektoren ebenfalls unabhängig. Eine weitere Verallgemeinerung besteht nun darin anzunehmen, dass die Hintergrundfaktoren X_1, \dots, X_n auf alle Sektoren simultan wirken und sich die Ausfallintensität eines Einzelrisikos als gewichtete Summe von faktorspezifischen Ausfallintensitäten ergibt. Auch in diesem Fall existiert nach wie vor eine Rekursionsbeziehung zur Bestimmung von $P(LN = n)$, vgl. etwa [Lehrbaß et al. \(2001, S. 300 f.\)](#)

Anhang B: Diversifikation idiosynkratischer Risiken im Einfaktormodell

Wir betrachten ein Kreditportfolio der (variablen) Größe n , d.h. das Portfolio besteht aus n Schuldnern, mit der (relativen) Verlustvariable \bar{L}_n gegeben durch

$$(B.1) \quad \bar{L}_n = \sum_{j=1}^n h_j^{(n)} l_j D_j .$$

Dabei bezeichne wie üblich D_j den Defaultindikator von Schuldner j , l_j den als deterministisch angenommenen Loss Given Default im Falle des Schuldners j sowie $h_j^{(n)}$ den Anteil des Exposure at Default von Schuldner j am EAD des Portfolios, d.h.

$$(B.2) \quad h_j^{(n)} = \frac{EAD_j}{\sum_{i=1}^n EAD_i} .$$

Es gilt $0 \leq h_j^{(n)} \leq 1$ und $\sum_{j=1}^n h_j^{(n)} = 1$.

Wir treffen nun die folgende Annahme:

$$(B.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (h_j^{(n)})^2 = 0 .$$

Diese Annahme kennzeichnet die so genannte *Granularität* des Portfolios. Sie ist beispielsweise erfüllt, wenn gilt $h_j^{(n)} = 1/n$, d.h. alle individuellen Kreditexposures sind gleich groß. Hinreichend ist aber auch die Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_j h_j^{(n)} = 0$. Intuitiv besagt die letztere Bedingung, dass der Exposureanteil des jeweils größten vergebenen Kredits bei wachsender Portfoliogröße gegen null geht. Unter der Bedingung (B.3) lässt sich nun die folgende Schlussfolgerung ziehen:

$$(B.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left([\bar{L}_n - E(\bar{L}_n | Z)]^2 \right) = 0 .$$

Es liegt somit eine Konvergenz im quadratischen Mittel vor. Ein Beweis dieser Aussage findet man in *Huschens/Vogl* (2002, S. 295). Dabei gilt diese Aussage für eine beliebige Variable Z , auf die bedingt wird, d.h. unabhängig von der Gültigkeit der Einfaktorstruktur (25). Setzt man im Spezialfall das Einfaktormodell (25) voraus, so ist mit $Z = F$ die Größe $E(\bar{L}_n | F)$ als bedingter Erwartungswert des relativen Portfolioverlusts, gegeben den systematischen Faktor F , zu interpretieren.

Für große Portfolien gilt somit grob gesagt

$$(B.5) \quad \bar{L}_n \approx E(\bar{L}_n | Z) ,$$

wobei das Ungefährzeichen \approx sich sowohl auf den Abstand von \bar{L}_n und $E(\bar{L}_n | Z)$ im quadratischen Mittel bezieht, als auch – da aus der quadratischen Konvergenz stets die Verteilungskonvergenz folgt – auf den punktweisen („für jedes x “) Abstand der Verteilungsfunktion von \bar{L}_n und $E(\bar{L}_n | Z)$.

Eine umfassende Analyse der Eigenschaften von $\bar{L}_n | F$ im Kontext von Faktormodellen bietet [Gordy \(2003\)](#). [Gordy](#) lässt dabei auch zufallsabhängige Loss Given Default-Variable zu und leitet eine Korrekturformel für das notwendige Kapital für endliche Portfolios her.

Abschließend sei noch festgehalten, dass mit $L_n = \sum_{j=1}^n l_j EAD_j D_j$ für endliche Portfolios auf der Basis von (B.5) und $Z = F$ auch gilt

$$(B.6) \quad L_n \approx E(L_n | F) ,$$

da hierzu auf beiden Seiten von (B.5) lediglich mit $\sum EAD_i$ durchmultipliziert wird.

Literaturhinweise

Monographien

- Albrecht, P., R. Maurer* (2005): Investment- und Risikomanagement, 2. Aufl., Stuttgart.
- Becker, A., M. Gaulke, M. Wolf* (Hrsg., 2005): Praktiker-Handbuch Basel II, Stuttgart.
- Benkert, C.* (2004): Default Risk in Bond and Credit Derivatives Markets, Berlin, Heidelberg, New York.
- Bielecki, T.R., M. Rutkowski* (2002): Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging, Berlin, Heidelberg.
- Bluhm, C., L. Overbeck, C. Wagner* (2003): An Introduction to Credit Risk Modeling, Boca Raton, London u.a.
- Bol, G. et al.* (Hrsg., 2003): Credit Risk, Heidelberg, New York.
- Burghof, H.P. et al.* (Hrsg., 2005): Kreditderivate, 2. Aufl., Stuttgart.
- Cairns, A.J.G.* (2004): Interest Rate Models, Princeton, Oxford.
- Crouhy, M., D. Galai, R. Mark* (2001): Risk Management, New York u.a.
- Duffie, D., K.J. Singleton* (2003): Credit Risk. Pricing, Measurement and Management, Princeton.
- Frenkel, M., U. Hommel, M. Rudolf* (Hrsg., 2005): Risk Management, 2. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York.
- Grundke, P.* (2003): Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken, Wiesbaden.
- Gundlach, M., F. Lehrbaß* (Hrsg., 2004): Credit Risk⁺ in the Banking Industrie, Berlin, Heidelberg, New York.
- Hartmann-Wendels, T., A. Pfingsten, M. Weber* (2004): Bankbetriebslehre, 3. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York.
- Oehler, A., M. Unser* (2002): Finanzwirtschaftliches Risikomanagement, 2. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York.
- Schmid, B.* (2004): Credit Risk Pricing Models, 2. Aufl., Berlin, Heidelberg.
- Schönbucher, P.J.* (2003): Credit Derivatives Pricing Models, Chichester.
- Wingenroth, T.* (2004): Risikomanagement für Corporate Bonds, Bad Soden/Ts.

Aufsätze

- [Altman, E.I., A. Saunders \(1998\)](#): Credit Risk Measurement: Developments over the Last 20 Years, *Journal of Banking and Finance* 21, S. 1721 – 1742.
- [Anderson, R., S. Sundaresan, R. Tychon \(1996\)](#): Strategic Analysis of Contingent Claims, *European Economic Review* 40, S. 871 – 881.
- [Arvanitis, A., G. Gregory, J.-P. Laurent \(1999\)](#): Building Models for Credit Spreads, *Journal of Derivatives*, Spring 1999, S. 27 – 43.
- [Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht \(2004\)](#): Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen, Übersetzung der Deutschen Bundesbank, Juni 2004.
- Benzin, A., S. Trück, S.T. Rachev (2003)*: Approaches to Credit Risk in the New Basel Accord, in: *Bol, G. et al. (Hrsg.): Credit Risk*, Heidelberg, New York, S. 1 – 33.
- Black, F., J.C. Cox (1976)*: Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, *Journal of Finance* 31, S. 351 – 367.
- Bühler, W., T. Thabe (2004)*: Bewertung von Anleihen bei potenzieller Zahlungsunfähigkeit, in: *Bank, M., B. Schiller (Hrsg.): Finanzintermediation*, Stuttgart, S. 1 – 24.
- [Collin-Dufresne, P., R. Goldstein \(2001\)](#): Do Credit Spreads Reflect Stationary Leverage Ratios?, *Journal of Finance* 56, S. 1929 – 1957.
- [Collin-Dufresne, P., R. Goldstein, J.S. Martin \(2001\)](#): The Determinants of Credit Spread Changes, *Journal of Finance* 56, S. 2177 – 2207.
- [Dai, Q., K. Singleton \(2000\)](#): Specification Analysis of Affine Term Structure Models, *Journal of Finance* 55, S. 1943 – 1978.
- [Dai, Q., K. Singleton \(2003\)](#): Term structure dynamics in theory and reality, *Review of Financial Studies* 16, S. 631 – 678.
- [Das, S.R., L. Freed, G. Geng, N. Kapadia \(2002\)](#): Correlated Default Risk, Working Paper, Santa Clara University.
- [Davis, M., V. Lo \(2001\)](#): Infectious defaults, *Quantitative Finance* 1, S. 383 – 387.
- Demchak, B. (2000)*: Modelling Credit Migration, *Risk*, February 2000, S. 99 – 103.
- [Driessen, J. \(2002\)](#): Is default event risk priced in corporate bonds? Working Paper, University of Amsterdam.
- Duan, J.C. (1994)*: Maximum likelihood estimation using price data of derivative contracts, *Mathematical Finance* 4, S. 155 – 167.
- Duffee, G.R. (1998)*: The Relation between Treasury Yields and Corporate Bond Yield Spreads, *Journal of Finance* 53, S. 2225 – 2241.

- [Duffee, G.R. \(1999\)](#): Estimating the Price of Default Risk, *Review of Financial Studies* 12, S. 197 – 226.
- [Duffee, G.R. \(2002\)](#): Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models, *Journal of Finance* 57, S. 405 – 443.
- [Duffee, G.R., R.H. Stanton \(2000\)](#): EMM Estimation of Affine and Nonaffine Term Structure Models, Working Paper, Haas School of Business, University of California at Berkeley.
- [Duffie, D., D. Filipovic, W. Schachermayer \(2003\)](#): Affine Processes and Applications in Finance, *Annals of Applied Probability* 13, S. 984 - 1053.
- [Duffie, D., N. Garleanu \(2001\)](#): Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations, *Financial Analysts Journal*, January/February 2001, S. 41 – 59.
- [Duffie, D., D. Lando \(2001\)](#): Term structures of credit spreads with incomplete accounting information, *Econometrica* 69, 633 – 664.
- [Duffie, G.R., L.H. Pedersen, K.J. Singleton \(2003\)](#): Modelling Sovereign Yield Spreads: A Case Study of Russian Debt, *Journal of Finance* 58, S. 119 – 159.
- [Duffie, D., K.J. Singleton \(1999\)](#): Modeling term structures of defaultable bonds, *Review of Financial Studies* 12, S. 687 – 720.
- [Duffie, D., J. Pan, K. Singleton \(2000\)](#): Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump Diffusions, *Econometrica* 68, S. 1343 – 1376.
- [Elton, E.J., M.J. Gruber, D. Agrawal, C. Mann \(2001\)](#): Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds, *Journal of Finance* 56, S. 247 – 277.
- [Fama, E.F., K.R. French \(1993\)](#): Common risk factors in the returns on stocks and bonds, *Journal of Financial Economics* 33, S. 3 – 56.
- [Fons, J. \(1994\)](#): Using Default Rates to Model the Term Structure of Credit Risk, *Financial Analysts' Journal*, September/October 1994, S. 25 – 32.
- [Frey, R., A.J. Mc Neil \(2003\)](#): Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk, *Journal of Risk* 6, S. 59 – 92.
- [Giesecke, K. \(2001\)](#): Default and information, Working Paper, Cornell University.
- [Giesecke, K. \(2003\)](#): A simple exponential model for dependent defaults, *Journal of Fixed Income* 13, S. 74 – 83.
- [Giesecke, K. \(2004\)](#): Credit Risk Modelling and Valuation: An Introduction, erscheint in: *Shimko, D. (Hrsg.): Credit Risk: Models and Management*, Vol. 2, London.
- [Giesecke, K., S. Weber \(2004\)](#): Cyclical correlations, credit contagion, and portfolio losses, *Journal of Banking and Finance*.

- [Gordy, M.B. \(2000\)](#): A comparative anatomy of Credit Risk Models, *Journal of Banking and Finance* 24, S. 119 – 149.
- [Gordy, M.B. \(2003\)](#): A Risk-Factor Model Foundation for Ratings-Based Bank Capital Rules, *Journal of Financial Intermediation* 12, S. 199 – 232.
- [Gupton, G.M., R.M. Stein \(2005\)](#): Loss Calc V2: Dynamic Prediction of LGD, Moody's KMV.
- [Hahnenstein, L. \(2004\)](#): Calibrating the CreditmetricsTM Correlation Concept – Empirical Evidence from Germany, *Financial Markets and Portfolio Management* 18, S. 358 – 377.
- Hamerle, A. (2000): Statistische Modelle im Kreditgeschäft der Banken, in: *Johanning, L., B. Rudolph* (Hrsg.): *Handbuch Risikomanagement*, Bad Soden/Ts., S. 459 – 490.
- [Hamilton, D.T., P. Varma, S. Ou, R. Cantor \(2005\)](#): Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, 1920 – 2004, Moody's Investor Service.
- Hartmann-Wendels, T., P. Grundke, W. Spork (2005): Basel II and the Effects on the Banking Sector, in: *Frenkel, M., U. Hommel, M. Rudolf* (Hrsg.): *Risk Management*, 2. Aufl., Berlin, Heidelberg, New York, S. 3 - 24.
- [Höfling, H., R. Kiesel, G. Löffler \(2004\)](#): Understanding the Corporate Bond Yield Curve, *Pension Forum*, Society of Actuaries.
- [Houweling, P., J. Hoek, F. Kleiberger \(2001\)](#): The joint estimation of term structures and credit spreads, *Journal of Empirical Finance* 8, S. 297 – 323.
- [Huang, J., M. Huang \(2003\)](#): How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk? Working Paper, Stanford.
- Huschens, S., K. Vogl (2002): Kreditrisikomodellierung im IRB-Ansatz von Basel II, in: *Oehler, A.* (Hrsg.): *Kreditrisikomanagement*, 2. Aufl., S. 279 – 295.
- [Jarrow, R.A., F. Yu \(2001\)](#): Counterparty risk and the pricing of defaultable securities, *Journal of Finance* 56, S. 555 – 576.
- [Jarrow, R.A., D. Lando, S.M. Turnbull \(1997\)](#): A Markov model of the term structure of credit risk spreads, *Review of Financial Studies* 10, S. 481 – 523.
- [Jarrow, R.A., S.M. Turnbull \(1995\)](#): Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance* 50, S. 53 – 86.
- Kaiser, U., A. Szczesny (2003): Ökonometrische Verfahren zur Modellierung von Kreditausfallwahrscheinlichkeiten: Logit- und Probitmodelle, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 55, S. 790 – 822.
- [Kealhofer, S. \(2003a\)](#): Quantifying Credit Risk I: Default Prediction, *Financial Analysts' Journal*, January/February 2003, S. 30 – 44.

- [Kealhofer, S. \(2003b\)](#): Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation, *Financial Analysts' Journal*, May/June 2003, S. 78 – 92.
- [Kao, D.-L. \(2000\)](#): Estimating and Pricing Credit Risk: An Overview, *Financial Analysts' Journal*, July/August 2000, S. 50 – 66.
- [Kijima, M., K. Komoribayashi \(1998\)](#): A Markov Chain Model for Valuing Credit Risk Derivatives, *Journal of Derivatives*, Fall 1998, S. 97 – 108.
- [Kijima, M., T. Suzuki \(2001\)](#): A jump-diffusion model for pricing corporate debt securities in a complex capital structure, *Quantitative Finance* 1, S. 611 – 620.
- [Kou, S.G., H. Wang \(2003\)](#): First Passage Times of a Jump Diffusion Process, *Advances in Applied Probability*.
- [Koyluoglu, H.U., A. Hickman \(1998\)](#): Reconcilable differences, in: *Risk*, October 1998, S. 56 – 62.
- [Lando, D. \(1998\)](#): On Cox processes and credit risky securities, *Review of Derivatives Research* 2, S. 99 – 120.
- [Lehrbaß, F.B., I. Boland, R. Thierbach \(2001\)](#): Versicherungsmathematische Risikomessung für ein Kreditportfolio, *Blätter DGVM*, Band XXV, Oktober 2001, S. 285 – 308.
- [Leland, H. \(1994\)](#): Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure, *Journal of Finance* 49, S. 1213 – 1252.
- [Leland, H., K. Toft \(1996\)](#): Optimal Capital Structure, Endogeneous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads, *Journal of Finance* 51, S. 987 – 1019.
- [Longstaff, F.A., E.S. Schwartz \(1995\)](#): Valuing Risky Debt: A New Approach, *Journal of Finance* 50, S. 789 – 820.
- [Lucas, A., P. Klaassen, P.J.C. Spreij, S. Straetmans \(2001\)](#): An analytic approach to credit risk of large corporate bond and loan portfolios, *Journal of Banking and Finance* 25, S. 1635 – 1664.
- [Lucas, A., P. Klaassen, P.J.C. Spreij, S. Straetmans \(2002\)](#): Tail Behavior of Credit Loss Distributions for General Latent Factor Models, Working Paper, Tinbergen Institute Amsterdam.
- [Mella-Barral, P., W. Perraudin \(1997\)](#): Strategic Debt Service, *Journal of Finance* 52, S. 531 – 566.
- [Merton, R.C. \(1974\)](#): On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* 29, 449 – 470.
- [Müller, M., W. Härdle \(2003\)](#): Exploring Credit Data, in: *Bol, G. et al. (Hrsg.): Credit Risk*, Heidelberg, New York, S. 157 – 173.

- [O'Connor, R., J.F. Golden, R. Beck \(1999\)](#): A Value-at-Risk Calculation of Required Reserves for Credit Risk in Corporate Lending Portfolios, *North American Actuarial Journal* 3, 72 – 83.
- Posthaus, A.* (2005): Exotische Kreditderivate, in: *Burghof, H.-P. et al.* (Hrsg.): *Kreditderivate*, 2. Aufl., Stuttgart, S. 71 – 86.
- [Rachev, S.T., E. Schwartz, I. Khindanova \(2000\)](#): Stable Modeling of Credit Risk, Working Paper, University of California.
- Rehm, F., M. Rudolf* (2000): KMV Credit Risk Modeling, in: *Frenkel, M., U. Hommel, M. Rudolf* (Hrsg.): *Risk Management*, Berlin, Heidelberg, New York, S. 141 – 154.
- Rudolph, B.* (2004): Ursachen und Dämpfungsmechanismen prozyklischer Wirkungen des Neuen Baseler Akkords, in: *Bank, M., B. Schiller* (Hrsg.): *Finanzintermediation*, Stuttgart, S. 247 – 269.
- [Schönbucher, P. \(2000\)](#): Factor Models for Portfolio Credit Risk, Department of Statistics, Bonn University.
- [Schönbucher, P. \(2002\)](#): Taken to the Limit: Simple and Not-so-simple Loan Loss Distributions, Department of Statistics, Bonn University.
- Schönbucher, P.* (2005): Kreditrisikomodelle zur Bewertung von Kreditderivaten, in: *Burghof, H.-P. et al.* (Hrsg.): *Kreditderivate*, 2. Aufl., Stuttgart, S. 661 – 713.
- Schulte-Mattler, H., T. Manns* (2005): Techniken zur Kreditrisikominderung im Framework von Basel II, in: *Becker, A., M. Gaulke, M. Wolf* (Hrsg.): *Praktiker-Handbuch Basel II*, Stuttgart, S. 29 – 61.
- Trück, S., J. Peppel* (2003): Credit Risk Models in Practice: A Review, in: *Bol, G. et al.* (Hrsg.): *Credit Risk*, Heidelberg, New York, S. 291 – 329.
- [Trück, S., S.T. Rachev \(2002\)](#): A structural approach to default risk using the alpha-stable distribution, Arbeitspapier, Universität Karlsruhe.
- [Uhrig-Homburg M. \(2002\)](#): Valuation of Defaultable Claims – A Survey, *Schmalenbach Business Review* 54, S. 24 – 57.
- [Vasicek, O. \(1991\)](#): Limiting Loan Loss Probability Distribution, KMV Corporation.
- Wahrenburg, M., S. Niethen* (2000): Portfolioeffekte bei der Kreditrisikomodellierung, in: *Johanning, L., B. Rudolph* (Hrsg.): *Handbuch Risikomanagement*, Band 1, Bad Soden/Ts., 491 – 523.
- [Wehrspohn, U. \(2003\)](#): Analytic loss distributions of heterogeneous portfolios in the asset value credit risk model, Alfred Weber Institute, Heidelberg University.
- Wilkins, M., R. Baule, D. Entrop* (2002): Basel II – Die neuen Eigenmittelanforderungen im IRB-Ansatz nach QIS3, *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen* 22/2002, S. 1198 – 1201.

Wolf, M. (2005): Basel II – ein Überblick, in: *Becker, A., M. Gaulke, M. Wolf* (Hrsg.): *Praktiker-Handbuch Basel II*, Stuttgart, S. 3 – 25.

[Yu, F. \(2003\):](#) Default Correlation in Reduced-Form Models, University of California, Irvine.

[Zhou, C. \(2001a\):](#) An analysis of default correlations and multiple defaults, *Review of Financial Studies* 14, S. 555 – 576.

[Zhou, C. \(2001b\):](#) The term structure of credit spreads with jump risk, *Journal of Banking and Finance* 25, S. 2015 – 2040.