

Gürtler, Marc; Heithecker, Dirk

**Working Paper**

## Modellkonsistente Bestimmung des LGD im IRB-Ansatz von Basel II

Working Paper Series, No. FW08V3

**Provided in Cooperation with:**

Technische Universität Braunschweig, Institute of Finance

*Suggested Citation:* Gürtler, Marc; Heithecker, Dirk (2004) : Modellkonsistente Bestimmung des LGD im IRB-Ansatz von Basel II, Working Paper Series, No. FW08V3, Technische Universität Braunschweig, Institut für Finanzwirtschaft, Braunschweig

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/55244>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# Working Paper Series



## Modellkonsistente Bestimmung des LGD im IRB-Ansatz von Basel II

von Marc Gürtler und Dirk Heithecker

No.: FW08V3/04  
First Draft: 2004-08-06  
This Version: 2006-04-20

(demnächst in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 58. Jg., 2006)

---

Technische Universität Braunschweig  
Institut für Wirtschaftswissenschaften  
Lehrstuhl BWL, insbes. Finanzwirtschaft  
Abt-Jerusalem-Str. 7  
38106 Braunschweig

---

# Modellkonsistente Bestimmung des LGD im IRB-Ansatz von Basel II

von Marc Gürtler\* und Dirk Heithecker\*\*

**Zusammenfassung.** Gemäß den im Juni 2004 durch den Baseler Ausschuss endgültig verabschiedeten Kapitalstandards (Basel II) sind Kredite in Höhe des so genannten unerwarteten Verlusts mit Eigenkapital zu unterlegen. Für erwartete Verluste hat das jeweilige Kreditinstitut Rückstellungen zu bilden, wobei hier etwaige Differenzen in der Eigenkapitalunterlegung zu berücksichtigen sind. Damit die folglich relevanten Größen des unerwarteten und des erwarteten Verlusts ermittelbar sind, benötigt man für einen Kredit die Kenntnis der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeit (PD) und der erwarteten Verlustquote bei Ausfall (LGD). Während in Basel II für die Größe PD konkrete Vorschriften zur Bestimmung vorliegen, die auf dem Kreditrisikomodell von *Vasicek* (1987/1991) basieren, sind die Vorgaben zur Ermittlung des LGD noch ungenau und bilden allenfalls einen Rahmen, der für die Umsetzung zu beachten ist. Inhalt dieses Beitrags ist daher die Entwicklung einer auf dem Modell von *Vasicek* basierenden Berechnungsvorschrift für die Größe LGD, die den Rahmenbedingungen von Basel II genügt und darüber hinaus eine sachgerechte Berücksichtigung von Kreditsicherheiten vorsieht.

**Summary.** According to the new capital adequacy framework (Basel II) finally adopted by the Basel Committee on Banking Supervision in June 2004 the eligible regulatory capital amounts to the unexpected losses of credits. For expected losses the bank has to make provisions, whereby differences between provisions and expected losses have to be included in the regulatory capital. To determine the relevant variables of unexpected and expected losses, the knowledge of the credit specific probability of default (PD) and the appropriate loss given default (LGD) is necessary. While the determination of PD is regulated in Basel II and based on the credit risk model of *Vasicek* (1987/1991), statements according to the calculation of the LGD are imprecise and can only act as a framework. Therefore this paper deals with the development of a calculation rule for the LGD, which is based on the model of *Vasicek*, and meets the basic conditions of Basel II. Furthermore, credit collaterals are considered.

**Stichworte:** Basel II; Kapitalstandards; Loss Given Default; Probability of Default; Kreditrisiko; Kreditsicherheiten

**Keywords:** Basel II; Capital Adequacy Requirements; Loss Given Default; Probability of Default; Collateral; Credit Risk

**JEL-Classification:** G21, G28

---

\* **Professor Dr. Marc Gürtler**  
Technische Universität Braunschweig  
Institut für Wirtschaftswissenschaften  
Abteilung Finanzwirtschaft  
Abt-Jerusalem-Str. 7  
38106 Braunschweig  
Tel.: +49 531 3912895 - Fax: 3912899  
e-mail: marc.guertler@tu-bs.de

\*\* **Dipl.-Wirtsch.-Ing. Dirk Heithecker**  
Technische Universität Braunschweig  
Institut für Wirtschaftswissenschaften  
Abteilung Finanzwirtschaft  
Abt-Jerusalem-Str. 7  
38106 Braunschweig  
Tel.: +49 531 3912893 - Fax: 3912899  
e-mail: d.heithecker@tu-bs.de

---

## 1 Einführung

Die Bestimmung des mit Eigenkapital zu unterlegenden Kreditrisikos im Rahmen der im Juni 2004 veröffentlichten, endgültigen Kapitalstandards des *Baseler Ausschusses* (Basel II) erfolgt im Wesentlichen auf Basis des so genannten „unerwarteten Verlusts“ (engl. *Unexpected Loss*, UL) eines Kreditportfolios.<sup>1</sup> Auf diese Weise soll eine Absicherung gegen (unerwartete) Überschreitungen des aus Kreditausfällen zu „erwartenden Verlusts“ (engl. *Expected Loss*, EL) gelingen. Zentrale Relevanz zur Ermittlung des UL besitzt dabei das  $\alpha$ -Fraktile (bzw.  $(1-\alpha)$ -Quantil) der Portfolioverlustverteilung, das heißt der Gesamtverlust eines Kreditportfolios, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  nicht überschritten wird. Man bezeichnet eine derartige Verlustgröße auch als Value at Risk (VaR). Konkret ergibt sich mit diesen Größen die folgende Definition des UL:<sup>2</sup>

$$UL = VaR - EL . \quad (1)$$

Insofern ist für eine auf dem UL basierende Eigenkapitalunterlegung die Kenntnis des VaR sowie des EL notwendig, für deren Bestimmung wiederum zwei Komponenten besondere Relevanz besitzen. Zum einen ist die erwartete Ausfallwahrscheinlichkeit (engl. *Probability of Default*, PD) eines Einzelkredits zu schätzen. Zum anderen ist der am Exposure (EAD)<sup>3</sup> gemessene anteilige Verlust eines ausgefallenen Kredits, die so genannte „erwartete Verlustrate bei Ausfall“ (engl. *Loss Given Default*, LGD), zu quantifizieren.<sup>4</sup> Mit dieser Begriffsfindung führen die in Basel II angegebenen Ermittlungsvorgaben für den UL unter Berücksichtigung von (1) zu der folgenden Berechnungsvorschrift:<sup>5</sup>

$$VaR = EAD \cdot LGD \cdot f(PD) . \quad (2)$$

---

<sup>1</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2004), S. 1.

<sup>2</sup> Generell beinhaltet das „unerwartete Risiko“ das durch eine geeignete Risikomaßzahl gemessene „Downside-Risiko“ eines Kreditportfolios. Insbesondere durch die Vorschriften des *Baseler Ausschusses* und die hohe Akzeptanz in der Praxis hat sich die Kennzahl VaR zum Quasi-Standard entwickelt. Aus theoretischer Sicht ist der VaR allerdings nicht unproblematisch, vgl. z.B. *Szegö* (2002).

<sup>3</sup> Da sich auch das Exposure auf die Situation bei Ausfall bezieht, spricht man vom „*Exposure At Default*“.

<sup>4</sup> Es sei betont, dass hier bewusst von der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeit und der erwarteten Verlustquote gesprochen wird, um diese von den Größen Ausfallwahrscheinlichkeit und Verlustquote abzugrenzen. Konkret kommt mit der hier gewählten Formulierung zum Ausdruck, dass die Entscheidungssubjekte zunächst keine exakte Kenntnis hinsichtlich der Ausfallwahrscheinlichkeit und der Verlustquote bei Ausfall besitzen, sondern nur Erwartungen hinsichtlich dieser (anfänglich unsicheren) Größen bilden können. Auf die genauen Zusammenhänge wird noch im Rahmen der Modellierung eingegangen.

<sup>5</sup> Zur Vereinfachung wird von Laufzeitanpassungsparametern abstrahiert, die für die folgende Diskussion ohnehin von untergeordneter Bedeutung sind.

Dabei stellt  $f(\text{PD})$  eine Funktionsvorschrift (in Abhängigkeit von PD) dar, die im Laufe des vorliegenden Beitrags noch genauer erörtert wird. Für die Bestimmung des EL ist die Gleichung

$$\text{EL} = \text{EAD} \cdot \text{LGD} \cdot \text{PD} \quad (3)$$

angegeben. Hinsichtlich der Größe PD gibt Basel II ferner ein Schätzverfahren vor, wonach sich PD als langfristige Durchschnitts-Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kredits bestimmt.<sup>6</sup> Dabei lässt sich ohne weiteres zeigen, dass sich die Unterlegungsvorschriften gemäß (1) bis (3) mit diesem Schätzverfahren im speziellen Fall  $\text{LGD} = 100\%$  aus dem Ein-Faktor-Modell von *Vasicek* (1987/1991) entwickeln lassen, wobei Letzteres wiederum auf dem Unternehmenswertansatz von *Merton* (1974) beruht.<sup>7</sup>

Bezüglich der Größe LGD hingegen fehlt eine zu dieser Vorgehensweise konsistente Schätzvorschrift. Grundsätzlich unterscheidet Basel II zur Bestimmung des LGD zwischen zwei so genannten IRB-Ansätzen (engl. *Internal Ratings Based Approach*), dem IRB-Basis-Ansatz und dem fortgeschrittenen IRB-Ansatz.<sup>8</sup> Im Rahmen des IRB-Basis-Ansatzes finden allerdings kreditspezifische Eigenschaften wenig Berücksichtigung, da nur pauschal festgelegte Werte für den LGD angegeben werden.<sup>9</sup> Weitaus flexibler kann eine Bank im Rahmen einer LGD-Schätzung vorgehen, wenn diese den fortgeschrittenen IRB-Ansatz verwendet. So lauten die in Basel II gewählten diesbezüglichen Ausführungen:<sup>10</sup>

*Subject to certain additional minimum requirements specified below, supervisors may permit banks to use their own internal estimates of LGD for corporate, sovereign and bank exposures. LGD must be measured as the loss given default as a percentage of the*

<sup>6</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 461 bis 467. Zu Schätzverfahren für die Größe PD vgl. *Kaiser/Szczesny* (2003) und die dort angegebenen Literaturhinweise. *Kaiser/Szczesny* untersuchen insbesondere die Anwendung von Logit- und Probit-Modellen. Die Autoren weisen allerdings auch darauf hin, dass solche Vorgehensweisen in der Praxis (noch) wenig eingesetzt werden.

<sup>7</sup> Vgl. zum *Vasicek*-Modell auch *Vasicek* (2002), *Koyluoglu/Hickmann* (1998a,b), *Gordy* (2003) sowie *Bluhm/Overbeck/Wagner* (2003). Der dem *Vasicek*-Modell zugrunde liegende Ein-Faktor-Ansatz stellt ferner einen Spezialfall des im (kommerziellen) Modell *CreditMetrics* gewählten Mehr-Faktor-Ansatzes dar; vgl. *Finger* (1999) bzw. *Gupton/Finger/Bhatia* (1997). Auf die Umsetzung des *Vasicek*-Modells im Rahmen von Basel II wird beispielsweise in *Finger* (2001), *Wilde* (2001), *Bank/Lawrenz* (2004) sowie *Rau-Bredow* (2001), *Gürtler* (2002), *Schulte-Mattler/Tysiak* (2002) und *Wilkins/Baule/Entrop* (2002) genauer eingegangen.

<sup>8</sup> Vgl. hierzu *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 286.

<sup>9</sup> Vgl. zum IRB-Basis-Ansatz genauer *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 287 ff.

<sup>10</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 297. Hinsichtlich konkreter Schätzvorgaben auf Basis von empirischen Daten vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 472 (für Kredite an Unternehmen, Staaten und Banken) und 473 (für Retailkredite).

*EAD. Banks eligible for the IRB approach that are unable to meet these additional minimum requirements must utilise the foundation LGD treatment described above.*

Insbesondere zeigt diese sehr vage Formulierung, dass die quantitative LGD-Ermittlung eine noch offene Frage darstellt. Das zentrale Ziel des vorliegenden Beitrags ist es daher, das Problem einer sachgerechten LGD-Bestimmung zu lösen. Da die Unterlegungsvorschriften gemäß (1) bis (3) für den speziellen Fall  $LGD = 100\%$  modellkonsistent zu *Vasicek* (1987/1991/2002) vorliegen, sollte auch eine allgemeine und für beliebige LGD-Werte gültige Vorschrift auf den entsprechenden Modellprämissen fußen.

In diesem Zusammenhang sei ferner angemerkt, dass die in der Praxis verbreitete einfache Schätzung<sup>11</sup> des LGD als langfristige ausfallgewichtete Verlustquote eines Kredits bei Ausfall nur dann ein richtiges Vorgehen darstellt, wenn Ausfallwahrscheinlichkeit und Verlustquote bei Ausfall als untereinander unabhängig verteilt angenommen werden.<sup>12</sup> Genau diesen Sachverhalt allerdings bezweifeln eine Vielzahl empirischer Studien. So zeigen *Düllmann/Trapp* (2004), *Hu/Perraudin* (2002), *Altmann/Brady/Resti/Sironi* (2003) und *Frye* (2000b/2003), dass der LGD dieselben „zyklischen“ Eigenschaften wie die Ausfallwahrscheinlichkeit besitzt. Ferner erkennen Untersuchungen von *Acharya/Bharath/Srinivasan* (2004) und *Altmann/Kishore* (1996) eine Abhängigkeit zwischen dem LGD und der Unternehmensbranche, wobei Letztere gemäß der Untersuchung von *Hamerle/Liebig/Rösch* (2003b) auch in Abhängigkeit zur Ausfallwahrscheinlichkeit steht. Die Studien der Firma *Moody's* können die genannten Zusammenhänge ebenfalls bestätigen und stellen zudem einen Zusammenhang zwischen dem LGD und dem Rating eines Unternehmens vor Ausfall fest, welches unmittelbar eine Abhängigkeit zwischen Verlustquote bei Ausfall und der Ausfallwahrscheinlichkeit bewirkt.<sup>13</sup>

Mit diesen Ergebnissen ist es nicht verwunderlich, dass auch schon Literaturbeiträge existieren, die solche Abhängigkeiten modelltheoretisch berücksichtigen. Beispielsweise wählt *Frye* (2000a/b) einen Ansatz, der eine Abhängigkeit zwischen der Verlustquote

---

<sup>11</sup> Dieses Vorgehen liegt z.B. für die Modelle *PortfolioManager*<sup>TM</sup> der *KMV Corporation* sowie *CreditMetrics*<sup>TM</sup> vor. Vgl. in diesem Zusammenhang auch die Kritik bei *Frye* (2003), S. 63.

<sup>12</sup> Diese Aussage wird noch im Rahmen des Beitrags genauer dargelegt.

<sup>13</sup> Vgl. stellvertretend für die Vielzahl der Studien der Firma *Moody's* beispielsweise *Hamilton/Cantor/Ou* (2002), *Hamilton/Cantor/West/Fowle* (2002), *Keenan/Hamilton/Berthault* (2000) und *Gupton/Gates/Carty* (2000). Einen allgemeinen und guten empirischen Überblick über die LGD-Problematik gibt ferner *Schuermann* (2003). Die Verweise auf empirisch gemessene Effekte in den folgenden Abschnitten beziehen sich auf die an dieser Stelle genannte Literatur und werden aus Gründen der Übersichtlichkeit an den dortigen Stellen nicht nochmals explizit genannt.

bei Ausfall und der Ausfallwahrscheinlichkeit durch einen gemeinsamen, so genannten „systematischen“ Faktor vorsieht. Die von *Fryes* Modell inspirierten ähnlichen Ansätze zur LGD-Modellierung von *Pykthin/Dev* (2002) und *Schönbucher* (2003) differieren nur hinsichtlich einer (zu *Frye*) modifizierten Verteilungsannahme der Verlustquote bei Ausfall.<sup>14</sup> Diesen drei Ansätzen gemein ist, dass die (unsichere) Verlustquote bei Ausfall „als Ganzes“ abgebildet wird. Das Problem einer solchen gesamthaften Abbildung der Sachverhalte besteht dann allerdings in einer fehlenden Möglichkeit zur Separierung von kreditspezifischen Teilkomponenten. So ist beispielsweise eine für die Verlustquote relevante Trennung in besicherte und unbesicherte Kreditteile mit diesen Modellen nicht möglich. Konkret sieht z.B. *Fryes* Modell vor, dass die Rückzahlungsverpflichtung eines jeden Kredits im Fall des Kreditausfalls (nur) durch den Wert einer Sicherheit geleistet werden kann. Da allerdings die in den empirischen Studien erkannten Abhängigkeiten sowohl bei unbesicherten als auch bei besicherten Krediten vorliegen, wird der in der Praxis und auch bei Basel II bedeutende Fall nur teilweise besicherter Kredite bei *Frye* nicht berücksichtigt.<sup>15</sup> Dies ist insbesondere im Rahmen der LGD-Ermittlung unbefriedigend, da die schon genannten Untersuchungen<sup>16</sup> auch eine Abhängigkeit zwischen dem LGD und der Seniorität eines Kredits, insbesondere bei Existenz einer Sicherheit, festgestellt haben.

Aufgrund der genannten Sachverhalte liegt – wie schon angesprochen – das zentrale Ziel dieses Beitrags in der Entwicklung eines Kreditrisikomodells zur LGD-Schätzung, das zum einen aus Konsistenzgründen zur PD-Schätzung in Basel II auf einem Ein-Faktor-Modell gemäß *Vasicek* basiert, und das zum anderen die Abhängigkeit zwischen Ausfallwahrscheinlichkeit und Verlustquote bei Ausfall berücksichtigt, wobei auch teil- und unbesicherte Kredite abgebildet werden können.

---

<sup>14</sup> Vgl. *Schönbucher* (2003), S. 147 ff. Eine empirische Umsetzung der Modelle erfolgt in *Düllmann/Trapp* (2004). Das Modell von *Pykthin/Dev* (2002), vgl. auch *Pykthin* (2003), stellt dabei die formaltheoretisch wesentlich fundiertere Herleitung des Ansatzes von *Frye* dar. Insbesondere leitet sich das Modell von *Frye* bei Anwendung einer Delta-Approximation für die Log-Normalverteilung von *Pykthin/Dev* ab. Ferner verwenden *Jokivuolle/Peura* (2000) eine ähnliche Vorgehensweise, allerdings berücksichtigen sie keinen portfoliotheoretischen Kontext.

<sup>15</sup> Bezüglich des *Frye*-Modells bleibt hinzuzufügen, dass die Modellierungsvorschrift der Verlustquote bei Ausfall auf Grundlage einer Sicherheit in den Ausführungen zur Modellkalibrierung – losgelöst vom modelltheoretischen Kontext – allerdings auch auf unbesicherte Kredite angewendet wird, vgl. dazu *Pykthin* (2003), S. 76 f. Diese Vorgehensweise ist zum einen modelltheoretisch unsachgemäß. Zum anderen ermöglicht sie nicht die separate Betrachtung der Sicherheit, wie diese in den Baseler Vorschriften vorgenommen wird. Vgl. dazu insbesondere den Abschnitt 6.2 dieses Beitrags.

<sup>16</sup> Vgl. wiederum *Acharya/Bharath/Srinivasan* (2004) und *Altmann/Kishore* (1996) sowie die in Fußnote 13 genannten Studien von *Moody*'s.

Zu diesem Zweck wird im Abschnitt 2 zunächst das dem Beitrag zugrunde liegende Modellumfeld entwickelt, und es werden Begrifflichkeiten konkretisiert. In den Abschnitten 3 und 4 wird die Ermittlung des EL und des UL dargestellt ohne auf die Teilkomponenten PD und LGD näher einzugehen. Im Abschnitt 5 werden die Unterlegungsvorschriften gemäß Basel II auf Basis des Modells kritisch diskutiert und auf Modellkonsistenz hinsichtlich der allgemeinen LGD-Berücksichtigung untersucht. Abschnitt 6 widmet sich der sachgerechten modellkonsistenten Eigenkapitalunterlegung für den IRB-Ansatz. Der Beitrag schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse im Abschnitt 7.

## 2 Das Modellumfeld

Betrachtet wird ein Kreditinstitut, das an  $n$  Unternehmen Kredite vergeben hat, wobei jeder dieser Kredite in einem zukünftigen Zeitpunkt  $T$  in Höhe von  $EAD_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) zurückzuzahlen ist. Der ausfallbedrohte, kreditspezifische Betrag besteht somit genau in dieser Höhe, wobei  $EAD_i$  für das Exposure bei einem (möglichen) Ausfall steht.<sup>17</sup> Die Summe aller Einzelexposures determiniert das Gesamtexposure der Bank. Das somit existente Kredit(verlust)risiko soll anhand der folgenden beiden Maßzahlen analysiert werden. Zum einen interessiert man sich für den zu erwartenden Anteil des Bankenexposures, der nicht zurückgezahlt wird. Dieses Risiko wird allgemein als „erwartetes (Verlust-)Risiko“ (EL) bezeichnet. Es entspricht der erwarteten Verlustquote  $E(\tilde{L}_n)$ , wobei die sich im Zeitpunkt  $T$  realisierende Verlustquote  $\tilde{L}_n$  aus Sicht des aktuellen Zeitpunkts  $t = 0$  unsicher ist.<sup>18</sup> Zum anderen ist eine deutlich höhere Verlustquote zu berechnen, die das so genannte Downside-Risiko des Bankenexposures quantifiziert. Hier besitzt insbesondere der Verlustanteil Relevanz, der mit einer vorgegebenen (geringen) Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  nicht überschritten wird. Dieser Anteil wird auch als Value at Risk (VaR) bezeichnet. Die Differenz zwischen dem auf diese Weise quantifizier-

---

<sup>17</sup> In dem vorliegenden Modell wird zum Fälligkeitszeitpunkt  $t = T$  von einem Kredit bzw. Exposure in einer deterministischen Höhe (Festbetragskredit) ausgegangen. Das Modell ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch für stochastische  $EAD_i$  (wie diese beispielsweise bei Kreditlinien auftreten) gültig, wenn der Kreditbetrag bei Ausfall unabhängig von den weiteren Größen der Modellierung ist. Vgl. zu diesem Sachverhalt auch Gordy (2003), S. 204. Vor dem Hintergrund, dass in diesem Beitrag die Abhängigkeiten zwischen dem LGD und der Ausfallwahrscheinlichkeit untersucht werden sollen, ist diese Annahme zielführend. Zudem favorisiert auch der *Baseler Ausschuss* diese Unabhängigkeitsannahme; vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 475.

<sup>18</sup> Im Weiteren werden unsichere Größen stets mit einer Tilde „ $\tilde{\phantom{x}}$ “ gekennzeichnet.

ten Downside-Risiko und der erwarteten Verlustquote wird durch den *Baseler Ausschuss* mit dem Begriff „unerwartetes (Verlust-) Risiko“ (UL) benannt.

Im Zeitpunkt  $T$  bestehen dabei die Gesamtverbindlichkeiten der betrachteten Unternehmen  $i \in \{1, \dots, n\}$  bei mehreren Gläubigern und belaufen sich jeweils auf eine Gesamthöhe  $B_i$ . In diesem Zusammenhang bezeichne  $\delta_{B,i}$  den Anteil der Rückzahlungsverpflichtung des Unternehmens  $i$  beim betrachteten Kreditinstitut, und somit bezeichnet  $EAD_i = \delta_{B,i} \cdot B_i$  das entsprechende unternehmensspezifische Kreditexposure. Für die Kredit-Rückzahlungen verwendet das Unternehmen Einzahlungen, die durch das unternehmerische Investitionsprogramm im Zeitpunkt  $T$  erzeugt werden.<sup>19</sup> Bezeichnet man mit  $\tilde{A}_{t,i}$  den (unsicheren) Marktwert des unternehmerischen Investitionsprogramms in einem Zeitpunkt  $t$ , so trete der Sachverhalt eines Kreditausfalls dann ein, wenn sich  $\tilde{A}_{T,i}$  unterhalb einer gegebenen Ausfallsschwelle  $k \cdot B_i$  (mit  $k > 0$ ) realisiert, d.h. wenn  $\tilde{A}_{T,i} < k \cdot B_i$  gilt.<sup>20</sup> Im Weiteren wird darauf abgestellt, den Gesamt(unternehmens)wert  $\tilde{A}_{t,i}$  genauer zu modellieren. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird dabei ausschließlich der Spezialfall  $k = 1$  dargestellt, der unmittelbar dem Ansatz von *Vasicek* bzw. *Merton* entspricht.<sup>21</sup>

Der Sachverhalt des Kreditausfalls soll hier gemäß der endgültig im Juni 2004 beschlossenen, neuen Kapitalstandards präzisiert werden. Nach Basel II tritt ein Kreditausfall des Kreditnehmers genau dann ein, wenn der Kreditnehmer seinen Kreditverpflichtungen nicht in voller Höhe nachkommen kann, ohne dass auf besondere Maßnahmen wie die Verwertung von Sicherheiten zurückgegriffen werden muss.<sup>22</sup> Zur (gemäß Basel II) sachgerechten Modellierung eines Kreditausfalls ist somit zwischen dem Marktwert

<sup>19</sup> Hierzu zählen neben direkten liquiden Einzahlungsüberschüssen auch Einzahlungen aus dem potentiellen Verkauf von Investitionsprojekten.

<sup>20</sup> Es sei zunächst darauf hingewiesen, dass das hier gewählte zeitdiskrete Vorgehen (mit nur einem denkbaren Ausfallzeitpunkt) eine Vereinfachung darstellt, die allerdings in Kreditportfoliomodellen, wie *CreditMetrics*, *CreditPortfolioView* sowie *CreditRisk+*, nicht unüblich ist. Vgl. hierzu auch die Vorgehensweise von *Hamerle/Rösch* (2003) und *Hamerle/Liebig/Rösch* (2003a). Ferner bezeichnet man solche Modelle allgemein als „Unternehmenswertmodelle“, die sich allerdings insbesondere in der Modellierung der Ausfallsschwelle unterscheiden. Die vorliegende Ausfalldefinition entspricht weitestgehend dem Vorgehen in *Grundke* (2003), S. 44 ff., *Briys/Varenne* (1997) sowie *Black/Cox* (1976), falls man die hier gewählte zeitdiskrete Betrachtung (mit ausschließlichem Ausfallzeitpunkt  $T$ ) zugrunde legt und von einer deterministischen Zinsstruktur ausgeht. Auch das Kreditausfallmodell von *Moody's KMV* wählt die hier dargelegte Ausfalldefinition, wobei dort die Ausfallsschwelle zusätzlich als Kalibrierungsparameter fungiert; vgl. *Crosbie/Bohn* (2003), S. 17.

<sup>21</sup> Alle Ergebnisse bleiben bei beliebiger Wahl des Parameters  $k > 0$  erhalten. Die sich in der formaltheoretischen Darstellung ergebenden Änderungen sind bei den Autoren erhältlich.

<sup>22</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 452, oder auch *Deutsche Bundesbank* (2003), S. 52.

$\tilde{C}_{t,i}$  der Sicherheiten, die das Unternehmen  $i$  für den Kreditgeber stellt, und dem Marktwert  $\tilde{A}_{t,i}$  des nicht (an die Bank zur Sicherung) abgestellten Teils des Investitionsprogramms zu unterscheiden.<sup>23</sup>

Vor dem dargestellten Modellhintergrund sollen nun die Risikobeiträge der einzelnen Kreditnehmer sowohl zum erwarteten (Gesamt-)Verlust als auch zum (Gesamt-)VaR quantifiziert werden. Für die erwartete Verlustquote des Kreditinstituts gilt:

$$\begin{aligned} E(\tilde{L}_n) &= E\left(\frac{EAD_1 \cdot \tilde{\ell}_1 + \dots + EAD_n \cdot \tilde{\ell}_n}{EAD_1 + \dots + EAD_n}\right) \\ &= \frac{EAD_1}{EAD_1 + \dots + EAD_n} \cdot E(\tilde{\ell}_1) + \dots + \frac{EAD_n}{EAD_1 + \dots + EAD_n} \cdot E(\tilde{\ell}_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{\ell}_i$  die unsichere Verlustquote des Kreditnehmers  $i$ . Die Ermittlung des Risikobeitrags zur erwarteten Gesamt-Verlustquote kann somit gemäß Gleichung (4) auf die Ermittlung der erwarteten Verlustquote  $E(\tilde{\ell}_i)$  eines Einzelkredits (unabhängig vom Portfoliokontext) reduziert werden. Dies ist Inhalt des folgenden Abschnitts 3.

Völlig analog sucht man bei der Zugrundelegung des VaR (bei gegebener Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ ) den Risikobeitrag  $\Delta VaR_{i,1-\alpha}$  eines Kredits  $i$ , so dass sich der Gesamt-VaR gemäß

$$VaR_{ges,1-\alpha} = \frac{EAD_1}{EAD_1 + \dots + EAD_n} \cdot \Delta VaR_{1,1-\alpha} + \dots + \frac{EAD_n}{EAD_1 + \dots + EAD_n} \cdot \Delta VaR_{n,1-\alpha} \quad (5)$$

ermitteln lässt. Eine geschlossene Darstellung des VaR in Form von Gleichung (5) ist im Allgemeinen nicht möglich. Im vorliegenden Beitrag wird die Betrachtung daher auf den Fall eines noch näher zu spezifizierenden „unendlich granularen Kreditportfolios“ unter der Annahme eines Ein-Faktor-Modells eingeschränkt, welches auch in Basel II zugrunde gelegt und im Abschnitt 4 genauer erläutert wird.

Auf Grundlage der beiden Gleichungen (4) und (5) können der „erwartete Verlust“ und der „unerwartete Verlust“ eines Kreditportfolios als Summe der Risikobeiträge der Einzelkredite berechnet werden. Es ergibt sich für einen einzelnen Kredit  $i$

$$EL_i := EAD_i \cdot E(\tilde{\ell}_i) \text{ und } UL_i = EAD_i \cdot (\Delta VaR_{i,1-\alpha} - E(\tilde{\ell}_i)) = EAD_i \cdot \Delta VaR_{i,1-\alpha} - EL_i. \quad (6)$$

<sup>23</sup> Vgl. zu dieser Ausfalldefinition unter Berücksichtigung von Sicherheiten auch *Frye* (2000a).

Die neuen Eigenkapitalstandards für Kreditrisiken schreiben dabei insbesondere die Berechnung des  $UL_i$  eines Einzelkredits vor, wobei die eigentlich interessierende Größe der Verlustquote eines Kredits auf zwei Größen, die eingangs erwähnte erwartete Verlustquote bei Ausfall (LGD) und die Ausfallwahrscheinlichkeit, erweitert wird. Die konkrete formale Gestaltung des UL in Basel II wird in den Abschnitten 5 und 6 vor dem im Folgenden noch zu entwickelnden modelltheoretischen Hintergrund diskutiert.

### 3 Erwarteter Verlust-Beitrag

Da gemäß Gleichung (4) die für den erwarteten Verlustbeitrag eines Kredits  $i$  relevanten erwarteten Verlustquoten  $E(\tilde{\ell}_i)$  unabhängig vom Gesamtportfolio vorliegen, kann ein isolierter Kredit betrachtet und die Indizierung der relevanten Größen mit  $i$  unterlassen werden.

Es wird (in Analogie zum Vorgehen von *Merton* (1974) für allgemeine Vermögenswerte) davon ausgegangen, dass der Marktwert des nicht als Sicherheit verwendeten Teils des unternehmerischen Investitionsprogramms<sup>24</sup> und der Marktwert der Sicherheit jeweils einer geometrisch *Brownschen* Bewegung mit den konstanten Driftparametern  $\mu_A$  bzw.  $\mu_C$  und konstanten Volatilitäten  $\sigma_A$  bzw.  $\sigma_C$  folgt. Es ergeben sich im Zeitpunkt  $t = T$  die folgenden unsicheren Marktwerte der Sicherheit und des sonstigen Teils des Investitionsprogramms:

$$\tilde{A}_T = A_0 \cdot \exp(\mu_A \cdot T + \sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot \tilde{a}) \quad \text{und} \quad \tilde{C}_T = C_0 \cdot \exp(\mu_C \cdot T + \sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot \tilde{c}). \quad (7)$$

Dabei bezeichnen  $\tilde{a}$  und  $\tilde{c}$  standardnormalverteilte Zufallsvariablen, die untereinander über eine Korrelation  $\text{Corr}(\tilde{a}, \tilde{c}) = \rho_{ac}$  zusammenhängen.<sup>25</sup> Beide Größen werden im Weiteren als normierte (stetige) Renditen der entsprechenden Marktwerte bezeichnet.

Mit diesen Vorgaben lässt sich der in Basel II vorgesehene Ausfallbegriff auch modelltheoretisch abbilden. So tritt ein Ausfall in  $t = T$  genau dann ein, wenn der sonstige Teil des Investitionsprogramms für die Befriedigung der Gläubigeransprüche nicht ausreicht, d.h. wenn der Sachverhalt  $\tilde{A}_T < B$  vorliegt. Der Marktwert der Sicherheit besitzt mithin

<sup>24</sup> Der nicht als Sicherheit verwendete Teil wird im Weiteren als sonstiger Teil des Investitionsprogramms bezeichnet.

<sup>25</sup> Vgl. *Merton* (1974), S. 450 f. *Merton* betrachtet allerdings nur den unbesicherten Fall und somit nur den sonstigen Teil des Investitionsprogramms. Zum Ansatz zweier korrelierter *Brownscher* Bewegungen für die Sicherheit und den sonstigen Unternehmenswert vgl. *Jokivouille/Peura* (2000), S. 10, und für die Herleitung der genannten Gleichungen beispielsweise *Hull* (2003), S. 227 f.

für das Ereignis des Ausfalls keine Bedeutung. Die Relevanz des Sicherheitenwerts  $\tilde{C}_T$  kommt erst bei der tatsächlichen Gläubigerbefriedigung zum Tragen. Die aus Sicht des Zeitpunkts  $t = 0$  vorliegende Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD_A$  des Kreditnehmers wird demnach durch den Zusammenhang<sup>26</sup>

$$PD_A = P(\tilde{A}_T < B) = P(\tilde{a} < b_A) = N(b_A) \text{ mit } b_A = [\ln(B) - \ln(A_0) - \mu_A \cdot T] / [\sigma_A \cdot \sqrt{T}] \quad (8)$$

beschrieben. Wenngleich die Rückzahlungsverpflichtung  $B$  die für den Ausfall relevante Grenze für den Marktwert der sonstigen Unternehmensteile darstellt, wird hier – wie in der Literatur üblich – die normierte Größe  $b_A$  als Ausfallsschwelle bezeichnet.<sup>27</sup> Zur Analyse der Ausfallwahrscheinlichkeit ist im Weiteren nur auf diese Ausfallsschwelle  $b_A = N^{-1}(PD_A)$  und auf die normierte, standardnormalverteilte Rendite  $\tilde{a}$  abzustellen.

In einem nächsten Schritt wird der für das in Rede stehende Kreditinstitut zu erwartende Verlust modelliert.<sup>28</sup> Zu diesem Zweck muss zum einen das ausfallbedrohte Exposure  $EAD = \delta_B \cdot B$  des Kreditnehmers und zum anderen der Erwartungswert des (unsicheren) Ausfallanteils  $\tilde{\ell}$  dieses Exposures betrachtet werden.<sup>29</sup> Dabei stehe  $E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A)$  für die entsprechende (bedingte) erwartete Verlustquote bei Ausfall. Anders als bei der Ausfallwahrscheinlichkeit besitzen bei der Ermittlung der Verlustquote sowohl der Wert der Sicherheit als auch der Wert des sonstigen unternehmerischen Vermögens Relevanz.

Zunächst wird der Fall ohne Besicherung, d.h.  $C_0 = 0$ , untersucht. Es wird von gleichrangiger Gläubigerbefriedigung ausgegangen, so dass bei Kreditausfall alle Gläubiger des Kreditnehmers aus dem sonstigen Vermögen  $\tilde{A}_T$  im Verhältnis ihrer Ansprüche gleichrangig bedient werden. Die Höhe der Befriedigungsquote  $\delta_1$  zugunsten des betrachteten Kreditinstituts entspricht demnach dem Anteil des Exposures  $EAD$  an der

<sup>26</sup> Vgl. *Vasicek* (2002), S. 160. Ferner bezeichnet  $P(S)$  die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Ereignisses  $S$ .

<sup>27</sup> Vgl. beispielsweise *Crosbie/Bohn* (2003), S. 7, *Crouhy/Galai/Mark* (2000), S. 59 ff., oder *Ong* (1999), S. 85.

<sup>28</sup> Dieses Vorgehen stellt den zentralen Unterschied zu den bestehenden Ansätzen dar. So wird die erwartete Verlustquote in der Literatur zur Kreditportfoliomodellierung als exogener (von der Ausfallwahrscheinlichkeit unabhängiger) Prozess angesehen. Hier wird dieser Prozess aus den Modellannahmen zunächst endogen ermittelt. Bei der Bestimmung der Parameter kann aber auf exogene (messbare) Größen zurückgegriffen werden; vgl. Fußnote 55.

<sup>29</sup> Natürlich ist der Anteil immer null, wenn der in Rede stehende Kredit nicht ausfällt.

Gesamtverbindlichkeit des Kreditnehmers, d.h.  $\delta_I = \delta_B = EAD/B$ .<sup>30</sup> Die erwartete Verlustquote im unbesicherten Fall beträgt dann<sup>31</sup>

$$E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}}) = PD_A - \exp\left(-\sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(PD_A) + \frac{\sigma_A^2 \cdot T}{2}\right) \cdot N\left(N^{-1}(PD_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right). \quad (9)$$

Schon an dieser Stelle wird deutlich, dass die hier berücksichtigte Kreditbedienung mit sonstigen Vermögenswerten zu einer Verallgemeinerung der bisherigen Literaturansätze führt. So berechnet sich der zweite Term in Gleichung (9) im Fall  $\delta_I = 0$  zu null,<sup>32</sup> und es ergibt sich (wie auch im *Vasicek*-Modell) unmittelbar eine erwartete Verlustquote in Höhe von  $PD_A$ . Ferner wird deutlich, dass zur Untersuchung der erwarteten Verlustquote neben der Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD_A$  nur noch auf das Risiko der unternehmerischen Vermögenswerte gemessen als Standardabweichung  $\sigma_A$  abzustellen ist.

Im Weiteren wird das Vorgehen verallgemeinert, indem von einer Besicherung des Kredits ( $C_0 \geq 0$ ) ausgegangen wird. Zur Vereinfachung sei angenommen, dass alle weiteren Kredite des Kreditnehmers unbesichert sind.<sup>33</sup> Im Fall des Kreditausfalls im Zeitpunkt  $t = T$  wird der Verlust des Kreditinstituts (aufgrund der vorrangigen Bedienung durch den besicherten Anteil) zunächst unmittelbar um den Wert der Sicherheit  $\tilde{C}_T$  gemindert. Soweit die gesamten Ansprüche auf diese Weise nicht abgedeckt werden können,<sup>34</sup> erhält das Kreditinstitut einen weiteren (vom Wert der Sicherheit abhängigen und somit unsicheren) Anteil  $\tilde{\delta}_{I,C}$  aus dem sonstigen Unternehmensvermögen  $\tilde{A}_T$ .<sup>35</sup> Vereinfachend wird weiter angenommen, dass im Falle des Ausfalls der Wert  $\tilde{C}_T$  der Sicherheit klein gegenüber der Gesamtverbindlichkeit  $B$  des Kreditnehmers ist, also

<sup>30</sup> Da die Verlustquote  $\tilde{\ell}$  in Abhängigkeit vom Wert  $\tilde{A}_T$  eine ähnliche Struktur wie die Zahlung einer europäischen Verkaufsoption besitzt, ergibt sich bei der Ermittlung der erwarteten Verlustquote eine analoge Vorgehensweise wie bei *Merton* (1974), so dass man dieses Vorgehen auch als „auf Merton basierend“ bezeichnen kann. Vgl. auch Anhang A.1.

<sup>31</sup> Vgl. dazu die Herleitung in Anhang A.1. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen im Weiteren  $\tilde{\ell}_{\text{unsec}}$  die Verlustquote im unbesicherten und  $\tilde{\ell}_{\text{sec}}$  die Verlustquote im besicherten Fall.

<sup>32</sup> Vgl. dazu insbesondere die in Gleichung (A3) des Anhangs gewählte modifizierte Darstellung der Gleichung (9).

<sup>33</sup> Auch diese Annahme lässt sich aufheben, führt aber in Bezug auf den hier bei einer Bank betrachteten Kredit zu keinen grundlegenden anderen Ergebnissen als den hier präsentierten. Bei weiteren besicherten Krediten des Kreditnehmers ist allerdings insbesondere zu beachten, dass der frei verfügbare „sonstige“ Vermögenswert  $A_0$  ausschließlich den nicht – auch nicht bei anderen Krediten – als Sicherheit unterlegten Anteil ausmacht.

<sup>34</sup> Wäre dieser Fall nicht denkbar, so beliefe sich die Verlustrate eines besicherten Kredits immer auf null. Dies ist durch empirische Studien allerdings nicht belegbar.

<sup>35</sup> Zur Unterscheidung sei betont, dass  $\tilde{\delta}_{I,C}$  die Bedienungsquote nach Verwendung der Sicherheit darstellt, wohingegen  $\delta_I$  die Bedienungsquote ohne Besicherung beschreibt.

$(B - \tilde{C}_T)/B \approx 1$  gilt.<sup>36</sup> Aufgrund dieser Vorgaben ergibt sich die aus Sicht des Zeitpunkts  $t = 0$  unsichere Bedienungsquote  $\tilde{\delta}_{I,C}$  aus dem sonstigen Vermögen im Fall des Ausfalls zu<sup>37</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{I,C} | (\tilde{a} < b_A) &= I(\tilde{C}_T < EAD) \cdot \left( \frac{EAD - \tilde{C}_T}{B - \tilde{C}_T} \right) | (\tilde{a} < b_A) \\ &= \delta_I \cdot \max \left( \frac{(EAD - \tilde{C}_T)/EAD}{(B - \tilde{C}_T)/B}, 0 \right) | (\tilde{a} < b_A) \approx \delta_I \cdot \max \left( \frac{EAD - \tilde{C}_T}{EAD}, 0 \right) | (\tilde{a} < b_A). \end{aligned} \quad (10)$$

Durch diese Näherung wird erreicht, dass zur Berechnung der Bedienungsquote  $\tilde{\delta}_{I,C}$  die (bei fehlender Besicherung vorliegende) Bedienungsquote  $\delta_I$  um den prozentualen Verlust

$$\tilde{\ell}_C := \max \left( \frac{EAD - \tilde{C}_T}{EAD}, 0 \right) | (\tilde{a} < b_A) \quad (11)$$

aus der Verwertung der Sicherheit bereinigt wird. Es wird demnach implizit davon ausgegangen, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  nur der restliche, im Zeitpunkt  $t = T$  unbesicherte Betrag  $EAD - \tilde{C}_T$  das Exposure des Kreditinstituts darstellt. Daraus resultiert unmittelbar, dass im Fälligkeitszeitpunkt  $t = T$  der restliche, nicht durch die Sicherheit abgedeckte Betrag eines besicherten Kredits wie ein ausschließlich in der Höhe dieses Restbetrags bestehender Kredit behandelt werden kann.<sup>38</sup>

Mit diesen Vorgaben lässt sich die auf den Kreditnehmer bezogene erwartete Verlustquote wie folgt bestimmen.<sup>39</sup>

<sup>36</sup> Diese Annahme ist auch empirisch zu beobachten. Beispielsweise erreichen nach Angaben des Statistischen Bundesamtes die Deckungsquoten bei Insolvenz deutscher Unternehmen einen Wert von 5 % bis 10 % der Forderungen; vgl. *Statistisches Bundesamt* (2003), S. 31. Demzufolge ist schon die Gesamtheit der zur Begleichung von Verbindlichkeiten aufgewendeten Vermögenswerte äußerst gering, womit der als Sicherheit Verwendung findende Vermögensteil tendenziell noch geringer als die genannten Deckungsquoten ausfällt.

<sup>37</sup> Im Folgenden bezeichnet „I(S)“ eine so genannte Indikatorfunktion, die den Wert eins annimmt, wenn die Aussage „S“ wahr ist, und ansonsten null beträgt.

<sup>38</sup> Diese Vorgehensweise wird insbesondere auch im IRB-Standardansatz von Basel II bei der Berücksichtigung von Sicherheiten angewendet, demnach der nicht besicherte Teil der Forderung den LGD-Wert von 45 % erhält, vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 291. Dieser LGD-Wert wird ebenfalls bei einem nicht explizit besicherten Kredit auf den Gesamtbetrag angesetzt.

<sup>39</sup> Die Herleitung dieses Sachverhalts befindet sich im Anhang A.2 dieses Beitrags.

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\ell}_{\text{sec}}) &= N_2(N^{-1}(\text{PD}_A), N^{-1}(\text{PD}_C); \rho_{AC}) \\
&\quad - \mathcal{A} \cdot N_2(N^{-1}(\text{PD}_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}, N^{-1}(\text{PD}_C) - \rho_{AC} \cdot \sigma_A \cdot \sqrt{T}; \rho_{AC}) \\
&\quad - C \cdot N_2(N^{-1}(\text{PD}_A) - \rho_{AC} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T}, N^{-1}(\text{PD}_C) - \sigma_C \cdot \sqrt{T}; \rho_{AC}) \\
&\quad + \mathcal{A} \cdot C \cdot \exp(\rho_{AC} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_C \cdot T) \\
&\quad \cdot N_2(N^{-1}(\text{PD}_A) - (\sigma_A + \rho_{AC} \cdot \sigma_C) \cdot \sqrt{T}, N^{-1}(\text{PD}_C) - (\sigma_A \cdot \rho_{AC} + \sigma_C) \cdot \sqrt{T}; \rho_{AC})
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\text{mit } \mathcal{A} = \exp\left(-\sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(\text{PD}_A) + \frac{\sigma_A^2 \cdot T}{2}\right) \tag{13}$$

$$\text{und } C = \exp\left(-\sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(\text{PD}_C) + \frac{\sigma_C^2 \cdot T}{2}\right)$$

Dabei bezeichnet  $N_2(u, v; \rho_{UV})$  die bivariate Normalverteilung an einer Stelle  $(u, v)$  bei einer Korrelation  $\rho_{UV}$ , und  $\text{PD}_C$  steht für die Wahrscheinlichkeit eines „Sicherheitsausfalls“  $\tilde{C}_T \leq \text{EAD}$ . Mit den Gleichungen (12) und (13) ist es mithin gelungen, den Teil der erwarteten Verlustquote eines Kreditinstituts, der sich auf den in Rede stehenden Kreditnehmer bezieht, unter Berücksichtigung von Sicherheiten endogen aus den Modellannahmen zu entwickeln. Auch dieses Resultat stellt eine Verallgemeinerung der gegebenen Literaturansätze dar, insbesondere ergibt sich im Fall  $\delta_I = 0$  das Ergebnis des *Frye-Modells* nach *Pykthin* (2003). Neben den schon aus dem unbesicherten Fall bekannten Modellparametern  $\text{PD}_A$  und  $\sigma_A$  ist für eine vollständige Parametrisierung nur noch die Ausfallwahrscheinlichkeit der Sicherheit  $\text{PD}_C$ , das Risiko der Sicherheit gemessen als Standardabweichung  $\sigma_C$  und die Renditekorrelation  $\rho_{AC}$  zu schätzen.

Es verbleibt noch, auf den Sonderfall unkorrelierter besicherter und sonstiger Vermögensanteile, d.h.  $\rho_{AC} = 0$ , hinzuweisen. In diesem Fall vereinfacht sich die erwartete Verlustquote nach Gleichung (12) zu

$$\begin{aligned}
&E(\tilde{\ell}_{\text{sec}} | \rho_{AC} = 0) \\
&= \left[ \text{PD}_C - \exp\left(-\sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(\text{PD}_C) + \frac{\sigma_C^2 \cdot T}{2}\right) \cdot N\left(N^{-1}(\text{PD}_C) - \sigma_C \cdot \sqrt{T}\right) \right] \\
&\quad \cdot \left[ \text{PD}_A - \exp\left(-\sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(\text{PD}_A) + \frac{\sigma_A^2 \cdot T}{2}\right) \cdot N\left(N^{-1}(\text{PD}_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right) \right] \\
&= E(\tilde{\ell}_C) \cdot E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}}).
\end{aligned} \tag{14}$$

Die Verlustquote<sup>40</sup>  $\tilde{\ell}_{\text{sec}} = \tilde{\ell}_C \cdot \tilde{\ell}_{\text{unsec}}$  berechnet sich demnach (aufgrund der Unkorreliertheit  $\rho_{AC} = 0$ ) als Produkt der erwarteten Verlustquoten der Sicherheit und des sonstigen unternehmerischen Vermögens. Ferner kann das Exposure  $EAD_{\text{eff}} := EAD \cdot E(\tilde{\ell}_C)$  als das um die Sicherheit bereinigte, „effektive“ Exposure bei Ausfall charakterisiert werden. Dieses (effektive) Exposure unterliegt dann der Verlustquote eines unbesicherten Kredits und kann somit auch als das „Exposureäquivalent“ bezeichnet werden. Unterstellt man identische Kreditnehmer (und Unkorreliertheit), so entspricht der erwartete Verlust eines besicherten Kredits dem eines unbesicherten Kredits, wenn das Exposureäquivalent (oder effektive Exposure) des besicherten Kredits mit dem Exposure des unbesicherten Kredits übereinstimmt.

Gleichung (12) (oder im Spezialfall  $\rho_{AC} = 0$  (14)) ermittelt somit den Beitrag eines beliebigen Kredits zur erwarteten Verlustquote eines Kreditportfolios. Gewichtet man diesen Beitrag mit dem Anteil am Gesamtexposure der Bank, so ergibt sich (gemäß (4)) gerade die kreditspezifische Erhöhung der erwarteten Verlustquote auf Portfolioebene.

#### 4 VaR-Beitrag bei einem unendlich granularem Portfolio

Nachdem nun der erwartete Verlustquotenbeitrag eines Kredits für das Kreditinstitut bestimmt werden konnte, wird im Weiteren der Risikobeitrag eines Kredits ermittelt, der sich bei einem Risikomaß in Form des VaR ergibt. Wie schon angesprochen, müssen zu diesem Zweck einige einschränkende Annahmen erfüllt sein, die zunächst erörtert werden.

##### *Annahme 1: Einschränkung der Unternehmenswertverteilung*

Es wird davon ausgegangen, dass die standardnormalverteilten normierten Renditen  $\tilde{c}_i$  (der Sicherheit) und  $\tilde{a}_i$  (der sonstigen Anteile) der  $n$  kreditnehmenden Unternehmen  $i$  durch das folgende Ein-Faktor-Modell beschrieben werden können:<sup>41</sup>

$$\begin{aligned}\tilde{a}_i &= \rho_{A_i,x} \cdot \tilde{x} + \sqrt{1 - \rho_{A_i,x}^2} \cdot \tilde{\varepsilon}_{A_i}, \\ \tilde{c}_i &= \rho_{C_i,x} \cdot \tilde{x} + \sqrt{1 - \rho_{C_i,x}^2} \cdot \tilde{\varepsilon}_{C_i}, \quad (i = 1, \dots, n).\end{aligned}\tag{15}$$

<sup>40</sup> Es sei betont, dass die Darstellung  $\tilde{\ell}_{\text{sec}} = \tilde{\ell}_C \cdot \tilde{\ell}_{\text{unsec}}$  nur aufgrund obiger Näherung möglich ist.

<sup>41</sup> Vgl. zu diesem Ansatz hinsichtlich der Modellierung der Rendite des frei verfügbaren Unternehmenswerts *Koyluoglu/Hickmann* (1998a), S. 5, oder *Pykthin* (2003). Im Folgenden soll allerdings das Faktormodell, welches Basel II unterliegt, entwickelt werden.

Ferner stellt  $\tilde{x}$  einen standardnormalverteilten systematischen Faktor dar,<sup>42</sup> und  $\tilde{\varepsilon}_{A_i}$  sowie  $\tilde{\varepsilon}_{C_j}$  stehen für die normalverteilten unsystematischen „Störterme“. Wie in Ein-Faktor-Modellen üblich seien die folgenden Eigenschaften für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  erfüllt:<sup>43</sup>

$$\begin{aligned} \text{Corr}(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_{A_i}) &= \text{Corr}(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}_{C_j}) = \text{Corr}(\tilde{\varepsilon}_{A_i}, \tilde{\varepsilon}_{C_j}) = 0 \quad \text{und} \\ \text{Corr}(\tilde{\varepsilon}_{A_i}, \tilde{\varepsilon}_{A_j}) &= \text{Corr}(\tilde{\varepsilon}_{C_i}, \tilde{\varepsilon}_{C_j}) = 0, \quad \text{falls } i \neq j. \end{aligned} \quad (16)$$

*Annahme 2: Einschränkung in der Korrelationsstruktur der Unternehmenswerte*

Es wird angenommen, dass die Korrelationen  $\rho_{A_i, x}$  zwischen  $\tilde{a}_i$  und  $\tilde{x}$  für alle  $i = 1, \dots, n$  stets nicht-negativ oder stets nicht-positiv sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Weiteren auf Basis dieser Annahme von einem grundsätzlich nicht-negativen Vorzeichen der in Rede stehenden Korrelationen ausgegangen.<sup>44</sup>

*Annahme 3: Betrachtung eines unendlich granularen Portfolios*

Es wird die Annahme eines breit gestreuten Portfolios gefordert. Konkret wird davon ausgegangen, dass das Kreditportfolio unendlich granular ist, d.h. aus (näherungsweise) unendlich vielen Krediten ( $n \rightarrow \infty$ ) besteht, wobei die Kreditexposures bei Ausfall  $EAD_i$  nach oben und nach unten beschränkt sind, d.h., es existiert eine untere Exposureschranke  $\underline{EAD} > 0$  und eine obere Exposureschranke  $\overline{EAD} < \infty$ , so dass  $EAD_i \in [\underline{EAD}, \overline{EAD}]$  für alle  $i = 1, \dots, n$  vorliegt.<sup>45</sup>

*Annahme 4: Einschränkung eines Verteilungsparameters der Verlustquote*

Die (Gesamt-)Verlustquote  $\tilde{L}_n$  des Kreditinstituts soll folgende Monotonieanforderung an den auf den systematischen Faktor bedingten Erwartungswert erfüllen:

$$E(\tilde{L}_n | x_1) > E(\tilde{L}_n | q_\alpha(\tilde{x})) > E(\tilde{L}_n | x_2) \quad \text{für alle } x_1 < q_\alpha(\tilde{x}) < x_2, \quad (17)$$

<sup>42</sup> Dabei muss der systematische Faktor nicht explizit beobachtbar sein, ausschließlich seine Existenz muss gesichert sein.

<sup>43</sup> Dabei ist – wie auch in anderen Ein-Faktor-Modellen – nur die zweite Zeile als kritische Annahme zu werten, da die Eigenschaften der ersten Zeile ohne weiteres (z.B. im Rahmen einer linearen Regression von  $\tilde{a}_i$  bzw.  $\tilde{c}_i$  auf  $\tilde{x}$ ) erfüllbar sind.

<sup>44</sup> Letzteres stellt in der Tat keine Einschränkung dar, da bei stets vorliegender nicht-positiver Korrelation zwischen sonstigem Unternehmenswert und systematischem Faktor der Faktor  $\tilde{x}$  durch  $-\tilde{x}$  ersetzt werden kann.

<sup>45</sup> Zu einer etwas allgemeineren Definition vgl. *Gordy* (2003), S. 205, oder *Bluhm/Overbeck/Wagner* (2003), S. 87. *Gordy* bezeichnet ein solches Portfolio auch als „asymptotisches Portfolio“.

wobei  $q_\alpha(\tilde{x}) = N^{-1}(\alpha)$  das  $\alpha$ -Quantil des normalverteilten systematischen Faktors  $\tilde{x}$  darstellt.<sup>46</sup>

Mit diesen Annahmen ist man nun in der Lage, den Risikobeitrag eines einzelnen Kredits auf den VaR einer Bank gemäß Gleichung (5) zu ermitteln. Zu diesem Zweck wird zunächst das Ein-Faktor-Modell nach Gleichung (15) in ein zu Basel II konformes Ein-Faktor-Modell<sup>47</sup> überführt. Bezeichnet man zu diesem Zweck mit  $\rho_{A_i}$  bzw.  $\rho_{C_j}$  das systematische (als Varianz gemessene) Risiko von  $\tilde{a}_i$  bzw.  $\tilde{c}_j$ , so folgt gemäß der obigen Annahmen unmittelbar  $\rho_{A_i} = \rho_{A_i,x}^2$  und  $\rho_{C_j} = \rho_{C_j,x}^2$ . Mit den Korrelationen  $\rho_{A_i,A_j} := \text{Corr}(\tilde{a}_i, \tilde{a}_j) = \rho_{A_i,x} \cdot \rho_{A_j,x}$  und  $\rho_{A_i,C_j} := \text{Corr}(\tilde{a}_i, \tilde{c}_j) = \rho_{A_i,x} \cdot \rho_{C_j,x}$  kann das Ein-Faktor-Modell wie folgt modifiziert dargestellt werden:<sup>48</sup>

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \sqrt{\rho_A} \cdot \tilde{x} + \sqrt{1-\rho_A} \cdot \tilde{\varepsilon}_A, \\ \tilde{c} &= \sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x} + \sqrt{1-\rho_C} \cdot \tilde{\varepsilon}_C \text{ für } \rho_{C,x} \geq 0 \text{ oder } \tilde{c} = -\sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x} + \sqrt{1-\rho_C} \cdot \tilde{\varepsilon}_C \text{ für } \rho_{C,x} < 0. \end{aligned} \quad (18A/B)$$

Mithin hängt der Ausfallsachverhalt  $\tilde{a} < b_A$  von zwei unsicheren Komponenten ab, dem systematischen Faktor  $\tilde{x}$  und der unsystematischen Komponente  $\tilde{\varepsilon}_A$ . Insofern stellt die Ausfallwahrscheinlichkeit  $\tilde{p}_A = p_A(\tilde{x})$  für einen Kredit ohne die Kenntnis von  $\tilde{x}$  eine unsichere Größe dar, deren (unbedingter) Erwartungswert schon als Größe  $PD_A$  eingeführt wurde.<sup>49</sup>

$$E(p_A(\tilde{x})) = E(E(I(\tilde{a} < b_A) | \tilde{x})) = E(I(\tilde{a} < b_A)) = P(\tilde{a} < b_A) = N(b_A) = PD_A. \quad (19)$$

Die bedingte, unsichere Ausfallwahrscheinlichkeit lässt sich in Abhängigkeit von der Realisation des systematischen Faktors  $\tilde{x}$  ermitteln:

<sup>46</sup> Es sei angemerkt, dass diese Annahme 4 bei zusätzlich zur Annahme 2 vorliegenden positiven Korrelationen  $\rho_{C_i,x}$  zwischen  $\tilde{c}_i$  und  $\tilde{x}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stets erfüllt ist. Der Nachweis dieses Sachverhalts kann bei den Verfassern dieses Beitrags erhalten werden.

<sup>47</sup> Vgl. auch die Modellierung bei *Vasicek* (2002), S. 160, *Gordy* (2003), S. 203, *Schönbucher* (2000), S. 8, *Rösch* (2004), S. 311, oder *Düllmann/Scheule* (2003), S. 7. In diesen Beiträgen erfolgt nur eine Modellierung des hier mit „sonstig“ bezeichneten Unternehmenswerts. Der Wert der Sicherheit wird hier in ähnlicher Weise abgebildet.

<sup>48</sup> Im Folgenden wird nur noch auf den Kredit  $i = 1$  abgestellt, so dass auf die Indizierung mit „i“ verzichtet werden kann.

<sup>49</sup> Insofern ist in diesem Modellkontext durchaus zwischen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_A(\tilde{x})$  und erwarteter Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD_A$  zu unterscheiden. Exakt handelt es sich bei der Größe  $p_A(\tilde{x})$  um die (auf  $\tilde{x}$ ) bedingte erwartete Ausfallwahrscheinlichkeit und bei der Größe  $PD_A$  um die unbedingte erwartete Ausfallwahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
p_A(\tilde{x}) &= P(\tilde{a} < b_A \mid \tilde{x}) = P(\sqrt{\rho_A} \cdot \tilde{x} + \sqrt{1-\rho_A} \cdot \tilde{\varepsilon}_A < b_A \mid \tilde{x}) \\
&= P\left(\tilde{\varepsilon}_A < \frac{b_A - \sqrt{\rho_A} \cdot \tilde{x}}{\sqrt{1-\rho_A}} \mid \tilde{x}\right) = N\left(\frac{N^{-1}(PD_A) - \sqrt{\rho_A} \cdot \tilde{x}}{\sqrt{1-\rho_A}}\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Ferner wird sich auch die Wahrscheinlichkeit  $\tilde{p}_C = p_C(\tilde{x})$  für den Fall  $\tilde{C}_T \leq EAD$  einer Exposure-Unterschreitung des Sicherheitenwerts von Interesse erweisen. Diese und der zugehörige Erwartungswert  $PD_C$  ergeben sich gemäß

$$p_C(\tilde{x}) = N\left(\frac{N^{-1}(PD_C) - \sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x}}{\sqrt{1-\rho_C}}\right) \text{ mit } PD_C = E(p_C(\tilde{x})) = N(b_C).^{50} \tag{21}$$

Demzufolge ist auch die erwartete Verlustquote des Kredits vor Realisation des systematischen Faktors  $\tilde{x}$  unsicher. Erst mit Kenntnis dieses Parameters kann die erwartete Verlustquote bestimmt werden, die analog zur Ausfallwahrscheinlichkeit als die auf das „Signal“  $\tilde{x}$  bedingte erwartete Verlustquote  $E(\tilde{\ell} \mid \tilde{x})$  bezeichnet werden kann. Beachtet man, dass aufgrund der Annahmen für das Ein-Faktor-Modell die bedingten Renditen  $\tilde{a} \mid \tilde{x}$  und  $\tilde{c} \mid \tilde{x}$  unabhängig sind, kann analog zur Gleichung (14) die bedingte erwartete Verlustquote im allgemeinen besicherten Fall wie folgt bestimmt werden:<sup>51</sup>

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\ell}_{\text{sec}} \mid \tilde{x}) &= E(\tilde{\ell}_C \mid \tilde{x}) \cdot E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}} \mid \tilde{x}) \\
&= \left[ p_C(\tilde{x}) - C_{\tilde{x}} \cdot N\left(N^{-1}(p_C(\tilde{x})) - \sqrt{1-\rho_C} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T}\right) \right] \\
&\quad \cdot \left[ p_A(\tilde{x}) - \mathcal{A}_{\tilde{x}} \cdot N\left(N^{-1}(p_A(\tilde{x})) - \sqrt{1-\rho_A} \cdot \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right) \right]
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\text{mit } \mathcal{A}_{\tilde{x}} = \exp\left(-\sqrt{1-\rho_A} \cdot \sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(p_A(\tilde{x})) + (1-\rho_A) \cdot \sigma_A^2 \cdot T/2\right) \tag{23}$$

$$\text{und } C_{\tilde{x}} = \exp\left(-\sqrt{1-\rho_C} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(p_C(\tilde{x})) + (1-\rho_C) \cdot \sigma_C^2 \cdot T/2\right). \tag{24}$$

Mit den Gleichungen (22) bis (24) wurde bisher nur der schon bekannte Risikobeitrag eines Kredits in Form der erwarteten Verlustquote ermittelt, wobei hier die Konkretisierung auf das Ein-Faktor-Modell dargestellt und von einer (auf den systematischen Faktor) bedingten erwarteten Verlustquote ausgegangen wurde. Ferner kann auf Grundlage dieser Gleichungen wiederum ein auf  $\tilde{x}$  bedingtes, effektives Exposure  $EAD_{\text{eff}} \mid \tilde{x} :=$

<sup>50</sup> Im Sonderfall einer negativen Korrelation  $\rho_{AC} < 0$ , vgl. Gleichung (18B), ergibt sich für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_C(\tilde{x}) = N\left(\left[N^{-1}(PD_C) + \sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x}\right] / \sqrt{1-\rho_C}\right)$ . Ferner bezeichnet die Variable  $b_C$  analog zur Variable  $b_A$  die Ausfallsschwelle der Sicherheit; vgl. die Herleitung im Anhang A.2 Gleichung (A11).

<sup>51</sup> Zu diesem Zweck sind lediglich die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $PD_A$  und  $PD_C$  durch  $p_A(\tilde{x})$  und  $p_C(\tilde{x})$  sowie die Volatilitäten  $\sigma_A$  und  $\sigma_C$  durch  $\sqrt{1-\rho_A} \cdot \sigma_A$  und  $\sqrt{1-\rho_C} \cdot \sigma_C$  zu ersetzen.

$EAD \cdot E(\tilde{\ell}_C | \tilde{x})$  definiert werden, welches ein um die Sicherheit bereinigtes, bedingtes Exposure oder ein bedingtes „Exposureäquivalent“ darstellt.

Der auf diese Weise erhaltene Zusammenhang stellt eine Erweiterung des *Vasicek*-Modells in zweifacher Hinsicht dar. Während bei *Vasicek* die auf  $\tilde{x}$  bedingte, erwartete Ausfallquote nur auf Basis einer exogen vorgegebenen, unbedingten Ausfallquote von eins („Totalausfall“)<sup>52</sup> bei Kreditausfall ermittelt wird, wird die Bedienungsquote bei Ausfall hier endogen aus dem Modellkontext entwickelt, wobei zum einen vorrangige Bedienung durch die Berücksichtigung von Sicherheiten und zum anderen gleichrangige Bedienung durch Verwertung der sonstigen Vermögensgegenstände Berücksichtigung findet. Implikationen der Modellerweiterung lassen sich anhand der Verteilungsdichten veranschaulichen, die sich jeweils für die bedingte erwartete Verlustquote bei Anwendung der unterschiedlichen Modellkontexte ergeben. Zu diesem Zweck werden in *Abbildung 1* die Verteilungsdichten unterschiedlicher bedingter erwarteter Verlustquoten dargestellt. Neben dem von *Vasicek* behandelten unbesicherten Fall bei „Totalausfall“ (sowie  $\rho_A = 0,1$  und  $PD_A = 0,02$ )<sup>53</sup> sind für das vorliegende Modell bei positiver Bedienungsquote aus sonstigem Vermögen zum einen der Fall ohne Sicherheit (bei  $\sigma_A = 10$ ,  $\rho_A = 0,1$  und  $PD_A = 0,02$ ) und zum anderen der Fall mit Sicherheit (bei  $\rho_C = \rho_A = 0,1$ ,  $\sigma_C = \sigma_A = 10$ ,  $PD_A = 0,02$  sowie  $PD_C = 0,7$ ) dargestellt.

*Abbildung 1: Verteilungsdichte der bedingten erwarteten Verlustquote  
für  $\rho_C = \rho_A = 0,1$ ;  $\sigma_C = \sigma_A = 10$ ;  $PD_A = 0,02$ ;  $PD_C = 0,7$*

Sowohl die Berücksichtigung von Sicherheiten als auch die einer positiven Bedienungsquote führen zu einer größeren Rechtsschiefe der Verteilungsdichte. Das bedeutet inhaltlich, dass der Einsatz von Sicherheiten und die Möglichkeit der Teilkreditbedienung bei Ausfall ceteris paribus zu einer Steigerung der Wahrscheinlichkeit für geringe erwartete Verlustquoten und zu einer Verringerung der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt hoher erwarteter Verlustquoten führt.

<sup>52</sup> Das das Vorgehen von *Vasicek* (1987) berücksichtigende Modell von CreditMetrics™ hingegen geht von einer positiven aber weiterhin exogen gegebenen Bedienungsquote aus. Vgl. hierzu auch *Koyluoglu/Hickmann* (1998a), S. 4 f.

<sup>53</sup> Vgl. hierzu auch das Beispiel einer Verteilungsdichte in *Vasicek* (2002), S. 162, *Abbildung 1*. Man beachte, dass diese Verteilungsdichte unabhängig von der Standardabweichung  $\sigma_A$  vorliegt.

Mit den oben ermittelten bedingten erwarteten Verlustquoten ist man ohne weiteres in der Lage, den VaR-Beitrag eines einzelnen Kredits zu ermitteln. So ergibt sich der VaR einer unsicheren (Gesamt-)Verlustquote des Kreditinstituts bei vorgegebenem (VaR-)Quantil  $\alpha$  per definitionem implizit aus der Ungleichung

$$P(\tilde{L}_n \geq \text{VaR}_{1-\alpha}(\tilde{L}_n)) = \alpha \Leftrightarrow \text{VaR}_{1-\alpha}(\tilde{L}_n) = q_{1-\alpha}(\tilde{L}_n), \quad (25)$$

d.h., die Größe  $\text{VaR}_{1-\alpha}(\tilde{L}_n)$  stellt die Verlustquote des Kreditinstituts dar, die mit Wahrscheinlichkeit von  $\alpha$  überschritten bzw. mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1-\alpha$  unterschritten wird und kann daher als  $(1-\alpha)$ -Quantil der Verlustquotenverteilung bezeichnet werden. Für die praktische Umsetzung bedeutet dies, dass ein Kreditinstitut bei einer Eigenkapitalunterlegung in der Höhe des VaR nur einer (Rest-)Insolvenzwahrscheinlichkeit (aus dem Kreditgeschäft) von  $\alpha$  ausgesetzt ist.

Unter Berücksichtigung der in diesem Abschnitt vorausgesetzten Annahmen lässt sich zeigen, dass der VaR des unendlich granularen Portfolios gemäß<sup>54</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{VaR}_{1-\alpha, n}(\tilde{L}_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\tilde{L}_n | x = q_\alpha(\tilde{x})) =: E(\tilde{L}_\infty | x = q_\alpha(\tilde{x})) \quad (26)$$

vorliegt. Insofern lässt sich der VaR in einem unendlich granularen Portfolio auf eine (bedingte) erwartete Verlustquote zurückführen. Bemerkenswert ist hierbei insbesondere, dass im Rahmen der Quantilbildung  $q_{1-\alpha}(\tilde{L}_n) = \text{VaR}_{1-\alpha}(\tilde{L}_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  unsystematische Risiken keine Rolle spielen. Dies ist allerdings nachvollziehbar, da das Portfolio aufgrund vorliegender unendlicher Granularität vollständig diversifiziert und somit nur noch dem systematischen Risiko ausgesetzt ist.

Mit dem Ergebnis (26) lässt sich gemäß Gleichung (5) auch der Risikobeitrag eines jeden Kredits zum gesamten Kreditportfolio bestimmen, da sich (analog zu (4)) die bedingte erwartete (Gesamt-)Verlustquote  $E(\tilde{L}_n | \tilde{x})$  aus der gewichteten Summe der bedingten erwarteten Verlustquoten  $E(\tilde{\ell}_i | \tilde{x})$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) zusammensetzt. Der VaR-Beitrag des betrachteten einzelnen Kredits beläuft sich demzufolge auf

$$\Delta \text{VaR}_{1-\alpha, n}(\tilde{\ell}_{\text{sec}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(\tilde{\ell}_{\text{sec}} | x = N^{-1}(\alpha)), \quad (27)$$

wobei letzterer Erwartungswert gemäß Gleichung (22) ermittelbar ist.

---

<sup>54</sup> Es gilt dann das starke Gesetz der großen Zahlen, insbesondere *Kronecker's Lemma*; vgl. *Bauer* (2001), S. 113 f. Detaillierte Ausführungen sind bei *Gordy* (2003), insbesondere S. 208, Proposition 5, sowie *Bluhm/Overbeck/Stahl* (2003), S. 90, oder auch *Bank/Lawrenz* (2004), S. 542, zu finden.

Mit den in den Abschnitten 3 und 4 entwickelten Risikobeitragsmaßzahlen auf Basis der erwarteten Verlustquote und des VaR ist man nun ohne weiteres in der Lage, die in Basel II relevanten Größen EL und UL modellendogen zu determinieren. Neben den bisher benötigten Parametern ist ausschließlich die Korrelation  $\rho_A$  zu ermitteln.<sup>55</sup> Inwieweit diese modellkonsistente Entwicklung auch in Basel II abgebildet wird, soll Inhalt des folgenden Abschnitts sein.

## 5 Modelltheoretische Analyse von Basel II

Die Eigenkapitalunterlegung eines einzelnen Kredits berechnet sich nach den im Juni 2004 durch den *Baseler Ausschuss* (engl. *Basel Committee on Banking Supervision*, BC) veröffentlichten Kapitalstandards in der Höhe des „unerwarteten Verlusts“ (UL). Für den „erwarteten Verlust“ (EL) sind hingegen seitens der Bank Rückstellungen (P) zu bilden, wobei eine etwaige Differenz bei der Festsetzung der Höhe des aufsichtsrechtlichen Eigenkapitals  $EK_{BC}$  zu berücksichtigen sind. Es ergibt sich formal<sup>56</sup>

$$EK_{BC} - (EL - P) = UL \Leftrightarrow EK_{BC} + P - EL = UL. \quad (28)$$

Erfolgt die Rückstellung gerade in der Höhe des EL, ergibt sich demzufolge die Eigenkapitalunterlegungspflicht genau in der Höhe des UL, welchem aus diesem Grund eine besondere Bedeutung beikommt. Das zur Bestimmung des UL zu quantifizierende Downsiderisiko entspricht nämlich gerade dem VaR-Beitrag bei (vom Baseler Ausschuss vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeit)  $\alpha_{BC} := 0,001$  des zugrunde liegenden Kredits zum Gesamt-VaR des unendlich granularen Portfolios.<sup>57</sup> Berücksichtigt man die Modellprämissen der vorhergehenden Abschnitte, so beläuft sich der UL eines Kredits gemäß den Gleichungen (6), (12) und (27) auf<sup>58</sup>

<sup>55</sup> Alle benötigten Modellparameter liegen für die Sicherheit beispielsweise im Fall von Aktien am Kapitalmarkt vor. Die Parameter für den frei verfügbaren Unternehmenswert – die in der Regel nicht ohne weiteres am Kapitalmarkt zu generieren sind – können implizit über die historische Daten geschätzt werden. Speziell kann  $PD_A$  mit Hilfe ökonomischer Methoden (vgl. beispielsweise *Kaiser/Szczesny* (2003)),  $\rho_A$  über die Ausfallhistorie (vgl. beispielsweise *Gordy/Heitfield* (2000), *Gordy* (2000), *Hamerle/Rösch* (2003), *Rösch* (2004), *Düllmann/Scheule* (2003) sowie *Düllmann/Trapp* (2004)) und der verbleibende Parameter  $\sigma_A$  über die LGD-Historie bestimmt werden. Der VaR kann somit tatsächlich modellendogen ermittelt werden. Vgl. hierzu auch Fußnote 28.

<sup>56</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 43 sowie Tz. 375 ff. Die Differenz aus EL und P wird dabei allerdings auf Basis des Gesamtportfolios bestimmt. Da sich die Differenz aber auch als Exposure-gewichtete Summe der Differenzen zwischen EL und P der Einzelkredite berechnen lässt, ist die hier gewählte Sichtweise auf Basis eines Einzelkredits weiterhin zulässig. Eine detaillierte Beschreibung der Bestimmungen ist bei *Wilkens/Baule/Entrop* (2004) zu finden.

<sup>57</sup> Wie schon angesprochen, vgl. hierzu die Literaturhinweise in Fußnote 7, insbesondere *Wilde* (2001) und *Bank/Lawrenz* (2004).

<sup>58</sup> Die zweite Identität resultiert aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. hierzu z.B. *Schmitz* (1996), S. 133 f.) sowie dem Sachverhalt, dass die Verlustquote bei Solvenz gerade Null beträgt. Man

$$\begin{aligned} \text{UL} &= \text{EAD} \cdot [\Delta \text{VaR}_{1-\alpha_{\text{BC}}, \infty}(\tilde{\ell}) - E(\tilde{\ell})] = \text{EAD} \cdot [E(\tilde{\ell} | x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})) - E(\tilde{\ell})] \\ &= \text{EAD} \cdot [E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A, x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})) \cdot p_A(x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})) - E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A) \cdot \text{PD}_A]. \end{aligned} \quad (29)$$

Der UL berechnet sich demzufolge aus der Differenz der Produkte aus bedingter bzw. unbedingter (erwarteter) Verlustquote bei Ausfall und bedingter bzw. unbedingter (erwarteter) Ausfallwahrscheinlichkeit. Die beiden auf die Realisation  $x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})$  bedingten Erwartungswerte seien hier als  $\text{PD}_{A, \text{VaR}}$  bzw.  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  bezeichnet, da es sich um die (erwartete) Ausfallwahrscheinlichkeit und (erwartete) Verlustquote bei Ausfall im Fall eines Portfolioverlusts genau in der Höhe des VaR handelt. Es gilt also

$$\text{PD}_{A, \text{VaR}} := p_A(x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})) \text{ und } \text{LGD}_{\text{VaR}} := E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A, x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})). \quad (30)$$

Der modelltheoretisch entwickelten Gleichung (29) sei die vom *Baseler Ausschuss* angegebene Formel für den UL des in Rede stehenden Kredits bei einer Laufzeit von einem Jahr gegenübergestellt:<sup>59</sup>

$$\text{UL}_{\text{BC}} = \text{EAD} \cdot [\text{LGD} \cdot \text{PD}_{A, \text{VaR}} - \text{LGD} \cdot \text{PD}_A]. \quad (31)$$

Vergleicht man diese beiden Darstellungen, so stimmen diese nur dann überein, wenn der in Basel II angesetzte LGD die folgenden beiden Bedingungen simultan erfüllt:<sup>60</sup>

$$\text{LDG} = E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A, x = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})) \text{ und } \text{LGD} = E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A). \quad (32)$$

Dieser Fall kann allerdings nur dann vorliegen, wenn die Verlustquote bei Ausfall  $\tilde{\ell} | (\tilde{a} < b_A)$  als vom systematischen Faktor  $\tilde{x}$  und somit von der Ausfallwahrscheinlichkeit unabhängige Variable vorliegt. Das wiederum ist sowohl aus modelltheoretischer<sup>61</sup> aber – wie schon in der Einleitung angesprochen – auch aus empirischer Sicht eher unplausibel. Der UL wird demnach von Basel II unsachgemäß ausgewiesen.

beachte die hier gewählte verkürzte Schreibweise  $E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A, \tilde{x}) := E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A | \tilde{x})$ . Ferner wird im Folgenden auf die Indexierung „sec“ oder „unsec“ verzichtet, wenn es sich um Aussagen handelt, die unabhängig von einer tatsächlichen Besicherung Gültigkeit besitzen.

<sup>59</sup> Vgl. hierzu *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 272. Die Basel II-Größen PD und R entsprechen den hier gewählten Größen  $\text{PD}_A$  und  $\rho_A$ . Ferner sei darauf hingewiesen, dass die Größe  $\text{PD}_{A, \text{VaR}}$  die in der Einleitung aufgeführte Funktion  $f(\text{PD})$  darstellt. Nochmals sei angemerkt, dass mit dem Ziel einer zweckmäßigen, problemorientierten Darstellung hier die Kreditlaufzeit von einem Jahr betrachtet wird, da dann der Anpassungsfaktor für die Laufzeit (MA) die Eigenkapitalunterlegung nicht beeinflusst ( $\text{MA} = 1$ ). Für die ausschließlich bezüglich des LGD untersuchten Effekte reicht die hier gewählte Darstellung aus.

<sup>60</sup> Wie schon bei der erwarteten Ausfallwahrscheinlichkeit PD wäre ferner für den LGD die Bezeichnung ELGD („Expected Loss Given Default“) sachgerecht gewesen, da es sich um die erwartete Verlustquote bei Ausfall handelt.

<sup>61</sup> Die Unabhängigkeit tritt ein, wenn das Kreditinstitut aus dem „sonstigen“ Unternehmenswert in jedem Fall keine Zahlung erhält, d.h.  $\delta_1 = 0$ , und keine Besicherung vorliegt oder der Wert der Sicherheit sich linear unabhängig vom sonstigen Unternehmenswert entwickelt, d.h.  $\rho_{\text{AC}} = 0$ . Diese Sonderfälle, vor allem  $\delta_1 = 0$ , sind aus praktischer Sicht sicherlich von untergeordneter Bedeutung.

Allerdings kann konstatiert werden, dass die isolierte Ausweisung des UL nicht notwendig ist, da die in Basel II vorgesehene Mindest-Kapitalunterlegung (in Form von Rückstellungen und Eigenkapital) für Kredite der Summe aus UL und EL (und damit der Höhe des VaR) entspricht,<sup>62</sup> womit sich die auf Basis des vorliegenden Modells ergebende und die in Basel II vorgesehene Unterlegungspflicht gemäß (29) und (31) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} (\text{UL} + \text{EL})_{\text{Modell}} &= \text{VaR}_{\text{Modell}} = \text{EAD} \cdot \text{LGD}_{\text{VaR}} \cdot \text{PD}_{\text{VaR}}, \\ (\text{UL} + \text{EL})_{\text{BC}} &= \text{VaR}_{\text{BC}} = \text{EAD} \cdot \text{LDG} \cdot \text{PD}_{\text{VaR}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Insofern stimmt die in Basel II vorgesehene Unterlegungspflicht genau dann mit der theoretisch ermittelten überein, wenn

$$\text{LGD} = \text{LGD}_{\text{VaR}} \quad \text{mit} \quad \text{LGD}_{\text{VaR}} = E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A, X = N^{-1}(\alpha_{\text{BC}})) \quad (34)$$

vorliegt.<sup>63</sup> Auf diese Weise ergibt sich unmittelbar eine Vorgabe für die sachgerechte, modellkonsistente LGD-Bestimmung in Basel II, in deren Rahmen sowohl Sicherheiten als auch positive Bedienungsquoten bei Ausfall berücksichtigt sind.

Inwieweit ein solcher Ansatz zur LGD-Bestimmung in den IRB-Ansätzen von Basel II integriert werden kann, wird im folgenden Abschnitt erörtert.

## 6 LGD-Berücksichtigung in den IRB-Ansätzen

### 6.1 LGD-Berücksichtigung im fortgeschrittenen IRB-Ansatz

Wie schon im Rahmen der Einleitung angesprochen, bietet der fortgeschrittene IRB-Ansatz von Basel II für Kreditinstitute die Möglichkeit, anhand eigener Methoden eine LGD-Bestimmung vorzunehmen.<sup>64</sup> Leider erfolgen durch den *Baseler Ausschuss* hier keine konkreten Vorschläge für eine Schätzung der bedingten erwarteten Verlustquote bei Ausfall. Basel II gibt hier ausschließlich Rahmenbedingungen in Form von Auflagen vor, die vor dem Hintergrund der oben erhaltenen Ergebnisse genauer untersucht

<sup>62</sup> Die vom *Baseler Ausschuss* vorgenommene Änderung, demnach im Vergleich zu den Vorschlägen für die Eigenkapitalunterlegung aus den vorherigen Konsultationspapieren nur noch der „unerwartete Verlust“ unterlegungspflichtig ist, ist demnach als „konzeptionell“ zu bezeichnen. Vgl. *Wilkens/Baule/Entrop* (2004) und ferner die Ausführungen zum EL und UL von *Rau-Bredow* (2001). Insbesondere besitzt die Berechnung des EL nach Basel II aufgrund der Berücksichtigung von Rückstellungen nur geringe Relevanz.

<sup>63</sup> Insofern zeigt sich, dass anders als bei der Schätzung der  $\text{PD}_A$  für die LGD-Schätzung nicht die unbedingte, sondern die auf Faktorrealisation bedingte erwartete Verlustquote zu ermitteln ist. Da – wie angesprochen – der Faktor  $\tilde{x}$  nicht explizit beobachtbar ist, ist die LGD-Schätzung weitaus schwieriger zu realisieren als die PD-Schätzung.

<sup>64</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 468 ff.

werden sollen. Insbesondere soll in diesem Abschnitt geklärt werden, ob das oben entwickelte Modell den vom *Baseler Ausschuss* formulierten Auflagen genügt.

Gemäß den neuen Kapitalstandards<sup>65</sup> sind (1.) „zyklische“ Eigenschaften des LGD zu berücksichtigen, vor allem wenn in Perioden hoher Kreditausfallraten für den LGD ebenfalls hohe Werte zu beobachten sind. Ferner sollen (2.) Abhängigkeiten zwischen dem Kreditrisiko des Kreditnehmers und der Sicherheit in die Bewertung einbezogen werden. Als einziges quantitatives Merkmal wird (3.) festgesetzt, dass der LGD nicht geringer als die ausfallgewichtete, durchschnittliche Verlustquote bei Ausfall geschätzt werden darf. Die Relevanz der ersten beiden Kriterien ergibt sich unmittelbar aus den im Modell getroffenen Annahmen der Ein-Faktor-Modellierung nach Gleichung (18). Insbesondere ist die bedingte Verlustquote bei Ausfall

$$\text{LGD}(\tilde{x}) = E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A, \tilde{x}) = E(\tilde{\ell} | \tilde{x}) / p_A(\tilde{x}) \quad (35)$$

im Normalfall ( $\rho_{C_j, x} \geq 0$ ) streng monoton fallend in  $\tilde{x}$  und somit demselben „Zyklus“ unterworfen wie die bedingte erwartete Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_A(\tilde{x})$ .<sup>66</sup> Die Ausfallquote des unbesicherten Anteils eines Kredits und die Wertentwicklung einer Sicherheit beziehen sich demzufolge auf denselben systematischen Faktor und liegen somit nicht unabhängig von der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit vor.<sup>67</sup>

Für eine Untersuchung der Auflage (3.) soll zunächst der schon in der Einleitung verwendete Begriff der „ausfallgewichteten, durchschnittlichen Verlustquote“ erörtert werden. Zu diesem Zweck werden  $m$  „Verlustszenarien“ eines unendlich granularen Kreditportfolios mit identischen Kreditnehmern betrachtet, wobei die Szenarien jeweils durch die Realisierung des systematischen Faktors  $\tilde{x} = x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , gekennzeichnet sind.<sup>68</sup> Der ausfallgewichtete Durchschnitt konvergiert dann gemäß

<sup>65</sup> Vgl. zu den folgenden drei Aussagen insbesondere *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 468 und 469.

<sup>66</sup> Der Nachweis dieses Sachverhalts ist bei den Autoren dieses Beitrags erhältlich.

<sup>67</sup> Insbesondere ist die Vorgehensweise des *Baseler Ausschusses* an dieser Stelle unplausibel, da bei der Berechnung des UL, vgl. Gleichung (32), zunächst offensichtlich die Unabhängigkeitsannahme getroffen wird, diese aber bei den Auflagen zur LGD-Schätzung widerrufen wird.

<sup>68</sup> Solche Daten sind allerdings kaum empirisch erhebbbar, da von einer Homogenität der Kreditnehmer ausgegangen wird, die in der Realität so nicht vorzufinden sein wird. Allerdings kann in Teilsegmenten von einer annähernden Identität ausgegangen werden. Vgl. dazu beispielsweise die empirische Umsetzung bei *Rösch* (2004). Zudem beeinflussen die damit angesprochenen Datenprobleme nur die unsystematischen Fehler und nicht die hier diskutierten (durch fehlerhafte LGD-Modellierung resultierenden) systematischen Fehler.

$$\text{LGD}_{\emptyset} = \sum_{i=1}^m \text{LGD}(x_i) \cdot \frac{p(x_i)}{\sum_{i=1}^m p(x_i)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{E(\tilde{\ell})}{\text{PD}_A} = E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A) \quad (36)$$

gegen die unbedingte erwartete Verlustquote bei Ausfall nach Gleichung (29). Da diese erwartete Verlustquote gemäß Auflage (3.) nicht größer als der LGD sein darf, ergibt sich die Bedingung

$$\text{LGD} \geq E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A). \quad (37)$$

Diese Vorgabe durch den *Baseler Ausschuss* impliziert, dass der UL eines Einzelkredits stets nicht-negativ sein darf. Damit dieser Sachverhalt auch durch das in den vorangegangenen Abschnitten entwickelte Modell erfüllt wird, muss das Konfidenzniveau  $1-\alpha$  so festgesetzt werden, dass für alle Einzelkredite  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , die Ungleichung

$$\Delta \text{VaR}_{1-\alpha}(\tilde{\ell}_i) \geq E(\tilde{\ell}_i) \quad (38)$$

erfüllt ist.

An dieser Stelle wird deutlich, dass der *Baseler Ausschuss* gemäß der Vorgabe (37) eine ausschließlich positive Eigenkapitalunterlegung des UL für jeden Kredit auf Basis des vorgegebenen Konfidenzniveaus  $1 - \alpha_{BC}$  fordert. Natürlich ließe sich dieses Vorgehen abschwächen, wenn man die Betrachtung auf Portfolio-Ebene wählt, da in diesem Fall schon die weniger strikte Forderung

$$\text{VaR}_{1-\alpha_{BC}}(\tilde{L}_n) \geq E(\tilde{L}_n) \quad (39)$$

für einen nicht-negativen UL des Kreditportfolios ausgereicht hätte.<sup>69</sup>

Grundsätzlich lässt sich allerdings feststellen, dass der hier entwickelte Modellansatz durchaus im Rahmen von Basel II zu implementieren ist. Die eher vagen Ausführungen des *Baseler Ausschusses* zur LGD-Ermittlung werden auf diese Weise – wie es der *Ausschuss* wünscht – konkretisiert.<sup>70</sup> Der in dem vorliegenden Beitrag dargelegte Ansatz kann demnach als Grundlage für eine modelltheoretisch fundierte LGD-Ermittlung zur Eigenkapitalunterlegung dienen, da dieser einen geschlossenen Ansatz für besicherte

<sup>69</sup> Dieser Sachverhalt ist insofern bemerkenswert, da Erfüllung der Bedingung (37) zwar unmittelbar die Gültigkeit von (39) impliziert, bei Vorliegen der Bedingung (39) allerdings Kredite denkbar sind, die zu einem negativen UL (und damit der Verletzung von (37)) führen. Da für das jeweilige Kreditinstitut grundsätzlich die Portfoliosicht Relevanz besitzen sollte, könnte durch Bedingung (39) gegenüber den Regelungen (37) des Baseler Ausschusses eine sachgerechte Eigenkapitalenkung erreicht werden.

<sup>70</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 468, Satz 6. Zudem werden Kreditinstitute auch generell zur Entwicklung eigener Modelle ermutigt; vgl. Tz. 417.

und sonstige Kredite liefert.<sup>71</sup> Insbesondere konnte der LGD durch die Gleichungen (22) bis (24) und (34) als  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  endogen aus den vorliegenden Modellprämissen berechnet werden. Zudem entwickelt sich die Modellierung des  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  unmittelbar aus dem Basel II zugrunde liegenden Ein-Faktor-Ansatz von *Vasicek* und beinhaltet im Wesentlichen die Effekte, die der *Baseler Ausschuss* bezüglich des LGD vorgibt. Der LGD kann somit „Basel II“-konsistent bestimmt werden.

Der *Baseler Ausschuss* macht im Gegensatz zu den in diesem Teilabschnitt behandelten recht vagen Ermittlungsmethoden des fortgeschrittenen IRB-Ansatzes im IRB-Basisansatz konkrete Vorgaben für die Bestimmung des LGD, die im Folgenden noch einer kurzen modelltheoretischen Analyse unterzogen werden sollen.

## 6.2 LGD-Berücksichtigung im IRB-Basisansatz

Im Rahmen des IRB-Basisansatzes sieht Basel II für unbesicherte Forderungen einen pauschalen LGD-Wert von 0,45 bzw. 0,75 vor, wobei der letztere Wert auf Forderungen an Kreditnehmer angewendet werden soll, deren Aktiva zum überwiegenden Teil an andere Kreditnehmer zur Sicherung abgestellt sind.<sup>72</sup> Insofern ist vor dem Hintergrund des hier diskutierten Modellumfelds zu prüfen, ob diese Pauschalvorgaben sachgerechte Schätzer für den LGD sind. Auch im IRB-Basisansatz ist zunächst zu prüfen, welche genaue Bedeutung der dort verwendete Begriff LGD besitzt. So ist es auch in diesem Fall denkbar, dass LGD für die erwartete Verlustquote bei Ausfall  $E(\tilde{\ell} | \tilde{a} < b_A)$  steht. Allerdings liegen in der empirischen Literatur<sup>73</sup> vorgenommene Schätzungen der erwarteten Verlustquote bei Ausfall weitaus niedriger vor als die im IRB-Basisansatz angegebenen Werte, so dass ein solches Begriffsverständnis eher unplausibel erscheint. Aufgrund der in Ungleichung (37) angegebenen Abschätzung ist daher auch hier eher davon auszugehen, dass die pauschalen LGD-Werte als Schätzer für den  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  fungieren. Allerdings ist dann die Vorgabe zweier *pauschaler*, von  $\text{PD}_A$  unabhängiger, LGD-Werte fraglich, die der Abhängigkeit des  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  von der erwarteten, unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeit  $\text{PD}_A$  gemäß (22) (in Verbindung mit (20) und (30)) zu widersprechen scheint.<sup>74</sup>

<sup>71</sup> Hier unterscheidet sich der vorliegende Ansatz fundamental von dem Vorschlag von *Frye* (2000a).

<sup>72</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 287 f.

<sup>73</sup> Vgl. dazu die im Abschnitt 1 aufgeführten Literaturangaben.

<sup>74</sup> Diese Unabhängigkeit wurde auch empirisch widerlegt. Vgl. dazu die Ausführungen im Abschnitt 1.

Zur Analyse dieses Sachverhalts wird die Entwicklung des  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  eines unbesicherten Einzelkredits im Rahmen eines unendlich granularen Portfolios bei Variation der Parameter  $\text{PD}_A$ ,  $\sigma_A$  und  $\rho_A$  anhand der Gleichungen (22) bis (24) getestet. Beispielhaft sei das auf  $\text{PD}_A$  und  $\sigma_A$  bezogene Monotonieverhalten des  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  in Abbildung 2 für den Fall  $\rho_A = 0,2$  dargestellt.<sup>75</sup>

*Abbildung 2: Bedingte erwartete Verlustrate bei Ausfall für einen unbesicherten Kredit mit  $\rho_A = 0,2$  und  $\tilde{x} = N^{-1}(0,001)$*

Konkret zeigt sich, dass der  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  sowohl in  $\text{PD}_A$  als auch in  $\sigma_A$  streng monoton steigend ist. Hingegen muss konstatiert werden, dass die  $\text{PD}_A$  des Kreditnehmers den  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$  in eher geringem Maße beeinflusst. Oberflächlich betrachtet, erscheint daher die durch den *Baseler Ausschuss* vorgenommene Unabhängigkeitsannahme zwischen  $\text{LGD}$  und  $\text{PD}_A$  zunächst nachvollziehbar zu sein.

Allerdings dürfen die Komponenten  $\text{PD}_A$  und  $\sigma_A$  nicht isoliert betrachtet werden, da eine steigende Ausfallwahrscheinlichkeit  $\text{PD}_A$  meist mit einer erhöhten Volatilität der Vermögenswerte einhergeht. In einem solchen Fall führt eine höhere (erwartete) Ausfallwahrscheinlichkeit  $\text{PD}_A$  (und damit einhergehend eine höhere Volatilität) unmittelbar zu einem erheblich höheren  $\text{LGD}_{\text{VaR}}$ . Insofern ist ein vom  $\text{PD}_A$  unabhängiger  $\text{LGD}$ , wie dieser im Basisansatz angenommen wird, nicht unproblematisch.

Nachdem nun der unbesicherte Fall erörtert wurde, soll schließlich auf die Berücksichtigung von Sicherheiten im IRB-Basisansatz eingegangen werden. Man spricht in diesem Zusammenhang vom umfassenden Ansatz zur Berücksichtigung anrechnungsfähiger, finanzieller Sicherheiten.<sup>76</sup> Zu beachten ist, dass hier der *Baseler Ausschuss* für (finanzielle) Sicherheiten aufgrund der täglich am Markt beobachtbaren Wertentwicklung und der täglichen Veräußerungsmöglichkeiten eine Mindesthalteperiode von nur  $t_M = 20$  Tagen ansetzt.<sup>77</sup> Die Unsicherheit bezüglich der Wertentwicklung finanzieller Sicherheiten bezieht sich also nur auf einen sehr kurzen Zeitraum. Unter diesen Umständen kann offensichtlich approximativ von einer reduzierten Driftrate in Höhe von

<sup>75</sup> Die Variation der Korrelation  $\rho_A$  zwischen 0,1 und 0,4 ergab qualitativ keine Änderung in den Ergebnissen.

<sup>76</sup> Neben diesem umfassenden Ansatz existiert ferner noch ein „einfacher Ansatz“ zur Berücksichtigung von Sicherheiten, der allerdings nur im Rahmen des Standard-Ansatzes von Basel II Verwendung findet. Vgl. hierzu *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 182 ff. Auf diesen wird hier nicht näher eingegangen.

<sup>77</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 167.

$\mu_{C,t_M} := \mu_C \cdot t_M \approx 0$  bei einer recht geringen Volatilität von  $\sigma_{C,t_M} := \sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{t_M} \ll 1$  ausgegangen werden.<sup>78</sup> Nimmt man ferner an, dass eine anfängliche Übersicherung ausgeschlossen ist, womit  $EAD \geq C := C_0$  gilt, so vereinfacht sich der gemäß Gleichung (22) vorliegende VaR-Beitrag unter Verwendung der Identität  $LGD_{VaR,unsec} := E(\tilde{\ell}_{unsec} | \tilde{a} < b_A, x)$  sowie  $x = N^{-1}(\alpha_{BC})$  zu

$$E(\tilde{\ell}_{sec} | x) = \frac{1}{EAD} \cdot [EAD - C \cdot (1 - H_C)] \cdot LGD_{VaR,unsec} \cdot PD_{A,VaR} \quad (40)$$

mit

$$H_C := -\sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{\rho_C} \cdot N^{-1}(\alpha_{BC}) = \sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{\rho_C} \cdot N^{-1}(1 - \alpha_{BC}). \quad (41)$$

Im Extremfall einer vom systematischen Faktor  $\tilde{x}$  unabhängigen Sicherheit ( $\rho_C = 0$ ) kann gemäß Gleichung (40) der Gesamtwert  $C$  der Sicherheit vollständig für die Reduzierung des Exposures angerechnet werden. Dies überrascht zunächst, da man denken könnte, dass bei Betrachtung des „ungünstigen Szenarios“  $x = N^{-1}(\alpha_{BC})$  auch für die Sicherheit ungünstige Konsequenzen zu berücksichtigen sind. Da die Sicherheit in diesem Spezialfall allerdings unabhängig vom Eintritt eines solchen Szenarios vorliegt, muss hier kein „Risikoabschlag“ für die Sicherheit vorgenommen werden.<sup>79</sup> Im Fall  $\rho_C > 0$  (und damit auch  $\sigma_{C,t_M} > 0$ ) zeigt sich, dass nicht der gesamte Wert einer Sicherheit zur Reduzierung des LGD beiträgt. Aufgrund der Abhängigkeit der Sicherheitenentwicklung (bezüglich des systematischen Faktors) muss noch ein Risiko-Abschlag in Höhe von  $H_C$  vorgenommen werden, der im Folgenden (wie auch im Rahmen von Basel II) als Haircut bezeichnet wird.

Stellt man dieser Darstellung die Vorgabe für die Eigenkapitalunterlegung des IRB-Standardansatzes in Verbindung mit dem umfassenden Ansatz<sup>80</sup> für finanzielle Sicherheiten

$$E(\tilde{\ell}_{sec} | x) = \frac{1}{EAD} \cdot [EAD - C \cdot (1 - H_C)] \cdot LGD \cdot PD_{A,VaR} \quad (42)$$

gegenüber, so entspricht diese gerade der Gleichung (40), wobei im IRB-Standardansatz die Größe  $LGD_{VaR,unsec}$  als aufsichtsrechtlich bestimmter LGD festgesetzt wird. Das bei

<sup>78</sup> Vgl. dazu z.B. die Vorgehensweise zur VaR-Berechnung im Marktrisikobereich bei *Huschens* (2000). Nähere Ausführungen zu Gleichung (40) befinden sich im Anhang A.3.

<sup>79</sup> Natürlich unterliegt die Wertentwicklung der Sicherheit (im Fall  $\sigma_{C,t_M} > 0$ ) zusätzlich dem unsystematischen Risiko, welches aufgrund vorliegender unendlicher Granularität allerdings nicht bewertungsrelevant ist.

<sup>80</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 147, 272 und 291.

Basel II angewendete Bewertungsmodell finanzieller Sicherheiten lässt sich somit formal aus dem hier präsentierten Modell entwickeln und ist aufgrund der vorgenommenen Näherungen als Sonderfall des hier behandelten Ansatzes für besicherte Kredite zu verstehen. Wendet man allerdings die konkreten Vorschriften des *Baseler Ausschusses* zur eigenen Schätzung der Haircuts an,<sup>81</sup> so quantifiziert sich der Haircut zu  $H_C = \sigma_{C,t_M} \cdot N^{-1}(0,99)$ . Diese Bestimmung des Haircuts weicht offensichtlich von der hier modelltheoretisch entwickelten formalen Berechnung nach Gleichung (41) in zweifacher Hinsicht ab. Zum einen wird das VaR-Quantil gemäß  $1-\alpha = 0,99$  (statt 0,999) festgelegt und zum anderen wird offensichtlich von einer Korrelation  $\rho_C = 1$  ausgegangen. Diese beiden Abweichungen von Gleichung (40) sind jedoch grundsätzlich erklärbar (wenngleich wenig plausibel), ohne dass der grundsätzliche Ansatz des vorgestellten Modells in Frage gestellt werden muss.

Erstens unterscheidet der *Baseler Ausschuss* für die Zuordnung von VaR-Quantilen zwischen unterschiedlichen Risikotypen: im Bereich der Marktrisiken gilt  $1 - \alpha = 0,99$  und im Bereich der Kreditrisiken  $1 - \alpha = 0,999$ . Anscheinend werden vor diesem Hintergrund finanzielle Sicherheiten den Marktrisiken zugeordnet, während für sonstige Vermögensgegenstände Kreditrisiken Relevanz besitzen. Allerdings kann diese Vorgehensweise kaum als stringent bezeichnet werden, da die Unsicherheit der Wertentwicklung von finanziellen Sicherheiten (wie Aktien) eher das Kreditrisiko und weniger das Marktrisiko eines Kreditinstituts beeinflusst.<sup>82</sup>

Zweitens führt die Vorgabe einer Korrelation  $\rho_C = 1$  zur Abstraktion von Diversifikationseffekten zwischen Sicherheiten und sonstigen Vermögensgegenständen. Da – wie oben angesprochen – der *Baseler Ausschuss* Sicherheiten mit Marktrisiken und sonstige Vermögensgegenstände mit Kreditrisiken identifiziert, entspricht damit die Annahme  $\rho_C = 1$  einer recht konservativen Schätzung, da Diversifikationseffekte zwar innerhalb<sup>83</sup> der einzelnen Risikobereiche „Kreditrisiko“ und „Marktrisiko“, aber nicht zwischen

---

<sup>81</sup> Vgl. *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 156 ff. Dabei kann die hier angegebene Formel für den Haircut von Aktien Anwendung finden; vgl. *Huschens* (2000).

<sup>82</sup> Erst im Falle des Kreditausfalls gehen Sicherheiten ins Eigentum der Bank über und unterliegen dann einem Marktrisiko. Allerdings ist die simultane Berücksichtigung zweier Quantile ohnehin fraglich, da auf diese Weise in Gleichung (22) zur Bestimmung des VaR zwei unterschiedliche Realisationen von  $\tilde{x}$  verwendet werden.

<sup>83</sup> Beispielsweise wurde schon bei Herleitung der in Basel II verwendeten Größe  $PD_{A,VaR}$  (gemäß (30)) von einem stark diversifizierten Portfolio (unendlicher Granularität) ausgegangen.

diesen<sup>84</sup> berücksichtigt werden. Insbesondere wird auf diese Weise die mindernde Wirkung von Sicherheiten auf das Kreditrisiko unter Umständen unterschätzt bzw. das Kreditrisiko überschätzt.<sup>85</sup>

Dennoch bleibt festzuhalten, dass der umfassende Ansatz im Rahmen des IRB-Standardansatzes durchaus modelltheoretisch fundierbar ist, wenn man die oben angesprochenen Näherungen anwendet. In dem nun folgenden, abschließenden Abschnitt sollen nun nochmals die wichtigsten Aussagen des Beitrags dargelegt werden.

## 7 Zusammenfassung

Zentrales Ziel des Beitrags war es, die im fortgeschrittenen IRB-Ansatz von Basel II recht offenen Vorgaben zur Ermittlung des LGD im Rahmen der vorgeschriebenen Eigenkapitalunterlegung modelltheoretisch zu konkretisieren und zudem die vom *Baseler Ausschuss* formulierten oftmals ungenauen Begrifflichkeiten zu klären. Dabei sollten insbesondere Sicherheiten berücksichtigt werden, um die wenigen, aktuell diskutierten Literaturansätze zur LGD-Modellierung zu erweitern und vor allem auch die Notwendigkeit zu erfüllen, teilbesicherte Kredite darzustellen. Zu diesem Zweck wurde ein einfaches, Basel II konformes Kreditportfoliomodell unter Verwendung eines Ein-Faktor-Ansatzes und unter der Prämisse unendlicher Granularität vorgestellt, mit dem die „Basel II“-relevanten Größen des unerwarteten Verlusts und des erwarteten Verlusts sowie des Value at Risk eines Portfolios auf Basis von Einzelkrediten analytisch berechnet werden können.

Dabei stellt die modelltheoretisch entwickelte Schätzvorschrift zur LGD-Ermittlung eine natürliche (auf dem Modell von Vasicek (1987/1991) basierende) Fortentwicklung der schon in Basel II vorgesehenen Schätzung des PD dar. Dieser Sachverhalt besitzt insofern besondere Relevanz, da für eine adäquate LGD-Bestimmung in den Baseler IRB-Berechnungsvorschriften speziell modelltheoretische Ansätze gewünscht und gefördert werden.<sup>86</sup>

---

<sup>84</sup> Vgl. hierzu auch die additive Verknüpfung des Kreditrisikos, Marktrisikos und des operationellen Risikos gemäß *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 44.

<sup>85</sup> Natürlich kann dies auch aus dem Ziel des *Baseler Ausschusses* resultieren, Kreditinstitute für den Einsatz des fortgeschrittenen IRB-Ansatz zu motivieren, indem der IRB-Standardansatz mit einer höheren Eigenkapitalunterlegung einhergeht.

<sup>86</sup> Vgl. hierzu *Baseler Ausschuss* (2005), Tz. 468 in Verbindung mit Tz. 417.

---

Ein weiterer Vorteil des dargelegten Ansatzes ist es, dass Sicherheiten für die LGD-Ermittlung separat betrachtet werden.

Darüber hinaus konnte anhand des Modells gezeigt werden, dass die Verlustquote bei Ausfall dieselbe in der Literatur oft mit „zyklisch“ beschriebene Eigenschaft besitzt wie die Ausfallwahrscheinlichkeit. Hier steht das Modell im Einklang mit empirischen Studien und den Anforderungen von Basel II an die LGD-Bestimmung. Aus diesem Grund ist für die bei Basel II mit LGD bezeichnete Größe ein faktorabhängiger, bedingter erwarteter Wert zu schätzen. Hier unterscheiden sich die Anforderungen an die Schätzung erheblich von der ebenfalls durch das Kreditinstitut vorzunehmenden PD-Ermittlung, die lediglich die Bestimmung eines unbedingten (faktorunabhängigen) Erwartungswerts erfordert.

Schließlich konnte nachgewiesen werden, dass der UL bei Basel II grundsätzlich unplausibel vorliegt, da hier die genannten zyklischen Eigenschaften nicht berücksichtigt werden. In Bezug auf den IRB-Standardansatz ergaben sich zudem Inkonsistenzen hinsichtlich der dort pauschal vorgenommenen LGD-Berücksichtigung, wobei dieser Ansatz dennoch (unter der Voraussetzung geeigneter Parameterapproximationen) als Näherung des vorliegenden Modells interpretiert werden kann.

## A Anhang

### A.1 Herleitung der Gleichung (9):

Die Verlustvariable  $\tilde{\ell}_{\text{unsec}}$  nimmt im Überlebensfall den Wert 0 und im Fall des Ausfalls den Wert

$$\left(\tilde{\ell}_{\text{unsec}} \mid \tilde{a} < b_A\right) = \max\left(1 - \left(\delta_I \cdot \tilde{A}_T \mid \tilde{a} < b_A\right) / \text{EAD}; 0\right) \quad (\text{A1})$$

an. Berücksichtigt man den Sachverhalt  $\text{EAD}/\delta_I = B$ , so ist der rechte Teil der Gleichung für  $\tilde{a} \geq b_A$  ohnehin stets 0, d.h. auf die Betrachtung einer bedingten Verlustvariablen kann verzichtet werden. Somit ergibt sich als funktionaler Zusammenhang für die unbedingte Verlustvariable

$$\tilde{\ell}_{\text{unsec}} = \max\left(1 - \tilde{A}_T / B; 0\right) = 1/B \cdot \max\left(B - \tilde{A}_T; 0\right). \quad (\text{A2})$$

Die zweite Maximumfunktion beschreibt gerade den Wert einer europäischen Verkaufsoption (long) auf den Wert  $\tilde{A}_T$  zum Basispreis  $B$  zum Zeitpunkt  $t = T$ . Somit ergibt sich durch den gewählten Ansatz der gleichrangigen Gläubigerbefriedigung ein ähnlicher Sachverhalt wie beim Unternehmenswertansatz von *Merton* zur arbitragefreien Bewertung von Fremdkapital,<sup>87</sup> obwohl die grundsätzliche Intention der Modelle – bei *Merton* handelt es sich um ein Bewertungsmodell, hier um ein Kreditportfoliomodell – unterschiedlich ist. Insbesondere ist darauf hinzuweisen, dass sich diese direkte Verbindung nur durch die spezielle Annahme  $\delta_I = \text{EAD}/B$  ergibt, und deshalb diese Annahme auch als „auf *Merton* basierend“ bezeichnet werden kann.

Der Erwartungswert  $E\left(\tilde{\ell}_{\text{unsec}}\right)$  berechnet sich zu:<sup>88</sup>

$$\begin{aligned} E\left(\tilde{\ell}_{\text{unsec}}\right) &= \text{PD}_A - \frac{\delta_I \cdot A_0}{\text{EAD}} \cdot \exp\left(\mu_A \cdot T + \frac{\sigma_A^2 \cdot T}{2}\right) \cdot N\left(N^{-1}(\text{PD}_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right) \\ &= \text{PD}_A - \frac{\delta_I \cdot E\left(\tilde{A}_T\right)}{\text{EAD}} \cdot N\left(N^{-1}(\text{PD}_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right). \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

<sup>87</sup> Vgl. *Merton* (1974), S. 453. Der Wert des gesamten Fremdkapitals beläuft sich demnach in  $t = T$  auf  $\min(\tilde{A}_T; B) = B - \max(B - \tilde{A}_T; 0)$ .

<sup>88</sup> Die genaue Herleitung ist bei den Autoren dieses Beitrags verfügbar. Der Nachweis im verallgemeinerten um Sicherheiten erweiterten Szenario wird im Anhang A.2 (Herleitung der Formel (A12)) vorgenommen. Rechenvorschrift (A3) ergibt sich aus (A12) für  $C_0 = 0$ .

Diese Darstellung kann wiederum wegen  $EAD/\delta_1 = B$  und  $B/A_0 = \exp(\sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(PD_A) + \mu_A \cdot T)$  (Gleichung (8)) in die Darstellung

$$E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}}) = PD_A - \exp\left(-\sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(PD_A) + \frac{\sigma_A^2 \cdot T}{2}\right) \cdot N\left(N^{-1}(PD_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right) \quad (\text{A4})$$

gebracht werden.

### A.2 Herleitung der Gleichung (12):

Zunächst nimmt die Verlustvariable  $\tilde{\ell}_{\text{sec}}$  im Überlebensfall den Wert 0 und im Falle des Ausfalls den Wert

$$\tilde{\ell}_{\text{sec}} | \tilde{a} < b_A = \max\left(1 - (\tilde{C}_T + \tilde{\delta}_{1,C} \cdot \tilde{A}_T) / EAD; 0\right) \quad (\text{A5})$$

an. Setzt man für die Bedienungsquote den Sachverhalt aus Gleichung (10) ohne Näherung an, d.h.

$$\tilde{\delta}_{1,C} = I(\tilde{C}_T \leq EAD) \cdot \left(\frac{EAD - \tilde{C}_T}{B - \tilde{C}_T}\right), \quad (\text{A6})$$

so nimmt der rechte Teil der Gleichung (A5) gerade den Wert 0 an, wenn  $\tilde{C}_T \geq EAD$  oder  $\tilde{A}_T \geq B - \tilde{C}_T$  ist. Demnach kann man für die Verlustvariable bei Ausfall auch

$$\tilde{\ell}_{\text{sec}} | \tilde{a} < b_A = I(\tilde{C}_T \leq EAD) \cdot I(\tilde{A}_T \leq B - \tilde{C}_T) \cdot \left(1 - (\tilde{C}_T + \tilde{\delta}_{1,C} \cdot \tilde{A}_T) / EAD\right) \quad (\text{A7})$$

schreiben. Wegen  $\tilde{C}_T \geq 0$  nimmt die zweite Indikatorvariable für  $\tilde{a} > b_A \Leftrightarrow \tilde{A}_T > B$  stets den Wert 0 an, d.h. diese Gleichung gilt auch im Überlebensfall und kann somit auch für die Verlustvariable im Überlebensfall übernommen werden. Der (dann unbedingte) erwartete Ausfall berechnet sich zu

$$E(\tilde{\ell}_{\text{sec}}) = E\left[I(\tilde{C}_T \leq EAD) \cdot I(\tilde{A}_T \leq B - \tilde{C}_T) \cdot \left(1 - (\tilde{C}_T + \tilde{\delta}_{1,C} \cdot \tilde{A}_T) / EAD\right)\right]. \quad (\text{A8})$$

Als zu ermittelndes Integral erhält man<sup>89</sup>

$$E(\tilde{\ell}_{\text{sec}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(C_T(c) \leq EAD) \cdot I(A_T(a) \leq B - C_T(c)) \cdot \left(1 - \frac{C_T(c)}{EAD} - \left(\frac{EAD - C_T(c)}{B - C_T(c)}\right) \cdot \frac{A_T(a)}{EAD}\right) \cdot n_2(a, c; \rho_{AC}) dc da \quad (\text{A9})$$

<sup>89</sup> Es bezeichnet  $n_2(a, c; \rho_{AC})$  die Dichtefunktion der bivariaten Standardnormalverteilung an der Stelle  $(a, c)$  bei einem Korrelationsparameter  $\rho_{AC}$ .

mit  $A_T(a) = A_0 \cdot \exp(\mu_A \cdot T + \sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot a)$  und  $C_T(c) = C_0 \cdot \exp(\mu_C \cdot T + \sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot c)$ .

Mit der Prämisse, dass im Fall des Ausfalls die Näherung  $B - C_T(c) \approx B$  gilt, vereinfacht sich der Sachverhalt zu

$$E(\tilde{\ell}_{\text{sec}}) = \int_{-\infty}^{b_A} \int_{-\infty}^{b_C} \left( 1 - \frac{1}{\text{EAD}} \cdot C_T(c) - \frac{1}{B} \cdot A_T(a) + \frac{1}{\text{EAD} \cdot B} \cdot A_T(a) \cdot C_T(c) \right) \cdot n_2(a, c; \rho_{AC}) \, dc da. \quad (\text{A10})$$

Für eine übersichtliche Darstellung der Lösung dieses Integral ist es zudem zweckmäßig, neben der Ausfallwahrscheinlichkeit des Unternehmens (vgl. Gleichung (8)) auch eine Ausfallwahrscheinlichkeit der Sicherheit einzuführen. Diese fällt gerade dann aus, wenn der Wert der Sicherheit  $\tilde{C}_T$  zum Zeitpunkt  $t = T$  unter den Wert des Kreditexposures EAD fällt, d.h.

$$\text{PD}_C = P(\tilde{C}_T < \text{EAD}) = P(\tilde{c} < b_C) = N(b_C) \quad \text{mit} \quad b_C = \frac{\ln(\text{EAD}) - \ln(C_0) - \mu_C \cdot T}{\sigma_C \cdot \sqrt{T}}. \quad (\text{A11})$$

Die erwartete Verlustquote berechnet sich durch das oben bestimmte Integral zu<sup>90</sup>

$$\begin{aligned} E(\tilde{\ell}_{\text{sec}}) &= N_2(N^{-1}(\text{PD}_A), N^{-1}(\text{PD}_C); \rho_{AC}) \\ &\quad - \frac{\delta_I \cdot E(\tilde{A}_T)}{\text{EAD}} \cdot N_2(N^{-1}(\text{PD}_A) - \sigma_A \cdot \sqrt{T}, N^{-1}(\text{PD}_C) - \sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot \rho_{AC}; \rho_{AC}) \\ &\quad - \frac{E(\tilde{C}_T)}{\text{EAD}} \cdot N_2(N^{-1}(\text{PD}_A) - \rho_{AC} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T}, N^{-1}(\text{PD}_C) - \sigma_C \cdot \sqrt{T}; \rho_{AC}) \\ &\quad + \frac{\delta_I \cdot E(\tilde{A}_T \cdot \tilde{C}_T)}{\text{EAD}^2} \\ &\quad \cdot N_2(N^{-1}(\text{PD}_A) - (\sigma_A + \rho_{AC} \cdot \sigma_C) \cdot \sqrt{T}, N^{-1}(\text{PD}_C) - (\sigma_A \cdot \rho_{AC} + \sigma_C) \cdot \sqrt{T}; \rho_{AC}) \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$\text{mit } E(\tilde{C}_T) = C_0 \cdot \exp\left(\mu_C \cdot T + \frac{\sigma_C^2 \cdot T}{2}\right), \quad E(\tilde{A}_T) = A_0 \cdot \exp\left(\mu_A \cdot T + \frac{\sigma_A^2 \cdot T}{2}\right) \quad (\text{A13})$$

$$\text{und } E(\tilde{C}_T \cdot \tilde{A}_T) = C_0 \cdot A_0 \cdot \exp\left((\mu_A + \mu_C) \cdot T + \frac{(\sigma_A^2 + 2 \cdot \rho_{AC} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_C + \sigma_C^2) \cdot T}{2}\right). \quad (\text{A14})$$

Mit den bekannten Vereinfachungen  $B/A_0 = \exp(\sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(\text{PD}_A) + \mu_A \cdot T)$  und

$\text{EAD}/C_0 = \exp(\sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(\text{PD}_C) + \mu_C \cdot T)$  sowie  $\text{EAD}/\delta_I = B$  erhält man (12).

<sup>90</sup> Nähere Erläuterungen sind bei den Autoren erhältlich.

### A.3 Hinweise zu Gleichung (40):

Zunächst besteht der bedingte erwartete Verlust des Kreditnehmers im Zeitpunkt  $t = 0$  in der Höhe

$$\begin{aligned} \text{EAD} \cdot E(\tilde{\ell}_{\text{sec}} | \tilde{x}) &= \text{EAD} \cdot E(\tilde{\ell}_C | \tilde{x}) \cdot E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}} | \tilde{x}) \\ &= \left[ p_C(\tilde{x}) - C_{\tilde{x}} \cdot N\left(N^{-1}(p_C(\tilde{x})) - \sqrt{1 - \rho_C} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T}\right) \right] \\ &\quad \cdot \left[ p_A(\tilde{x}) - \mathcal{A}_{\tilde{x}} \cdot N\left(N^{-1}(p_A(\tilde{x})) - \sqrt{1 - \rho_A} \cdot \sigma_A \cdot \sqrt{T}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

$$\text{mit } \mathcal{A}_{\tilde{x}} = \exp\left(-\sqrt{1 - \rho_A} \cdot \sigma_A \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(p_A(\tilde{x})) + (1 - \rho_A) \cdot \sigma_A^2 \cdot T/2\right) \quad (\text{A16})$$

$$\text{und } C_{\tilde{x}} = \exp\left(-\sqrt{1 - \rho_C} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T} \cdot N^{-1}(p_C(\tilde{x})) + (1 - \rho_C) \cdot \sigma_C^2 \cdot T/2\right), \quad (\text{A17})$$

wobei die bedingte Verlustquote des unbesicherten Teils des Kredits im Folgenden auf die vereinfachte Form

$$E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}} | \tilde{x}) = \text{LGD}_{\text{unsec}}(\tilde{x}) \cdot p_A(\tilde{x}) \quad \text{mit } \text{LGD}_{\text{unsec}}(\tilde{x}) := E(\tilde{\ell}_{\text{unsec}} | \tilde{a} < b_A, \tilde{x}) \quad (\text{A18})$$

reduziert werden soll. Insbesondere ist nun von Interesse, die Höhe des Exposureäquivalents (oder des effektiven Exposures)  $\text{EAD}_{\text{eff}} = \text{EAD} \cdot E(\tilde{\ell}_C | \tilde{x})$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  zu bestimmen. Dabei wird festgesetzt, dass die Unsicherheit hinsichtlich der Wertentwicklung der Sicherheit nur über einen kurzen Zeitraum  $t_M$  besteht. Somit ergeben sich für die Drift und Volatilität aufgrund des kurzen Bewertungszeitraums folgende als sachgerecht zu beurteilende Näherungen:<sup>91</sup>

$$\mu_{C,t_M} := \mu_C \cdot t_M \approx 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{C,t_M} := \sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{t_M} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{C,t_M}^2 \approx 0. \quad (\text{A19})$$

Ferner wird die Größe  $E(\tilde{\ell}_C | \tilde{x})$  bedingt auf eine konkrete Realisation von  $\tilde{x}$  für das so genannte VaR-Szenario betrachtet und angenommen, dass

$$x = N^{-1}(\alpha) < 0 \quad \text{und} \quad \ln(\text{EAD}) - \ln(C_0) - \mu_{C,t_M} - \sqrt{\rho_C} \cdot \sigma_{C,t_M} \cdot x > 0 \quad (\text{A20})$$

gilt.<sup>92</sup> Wendet man diese und die Näherung  $\exp(y) \xrightarrow{y \ll 1} 1 + y$  auf die einzelnen Terme von  $E(\tilde{\ell}_C | \tilde{x})$  an, so ergibt sich

<sup>91</sup> Dabei handelt es sich um Approximationen, die allgemein bei Marktrisiken angesetzt werden; vgl. *Huschens* (2000), S. 189.

<sup>92</sup> Die erste Annahme ist unkritisch, da für die Ausfallwahrscheinlichkeit  $\alpha$  bei Anwendung des VaR allgemein  $\alpha \ll 0,5 \Leftrightarrow N^{-1}(\alpha) < 0$  gilt. Die zweite Annahme ist ebenfalls durchaus als sachgerecht zu beurteilen, da eine Übersicherung von Krediten rechtliche Risiken für das Kreditinstitut darstellt. Beispielsweise führt laut Urteil des Bundesgerichtshofes (BGH IX ZR 74/95) eine anfängliche Übersicherung zur Sittenwidrigkeit des gesamten Sicherungsgeschäfts.

$$p_C(\tilde{x}) = N\left(\frac{\ln(\text{EAD}) - \ln(C_0) - \mu_{C,t_M} - \sqrt{\rho_C} \cdot \sigma_{C,t_M} \cdot \tilde{x}}{\sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{1 - \rho_C}}\right) \xrightarrow{(A19), (A20)} N(\infty) = 1, \quad (\text{A21})$$

$$C_{\tilde{x}} = \exp\left(-\sqrt{1 - \rho_C} \cdot \sigma_{C,t_M} \cdot N^{-1}(p_C(\tilde{x})) + (1 - \rho_C) \cdot \sigma_C^2 \cdot T/2\right) \xrightarrow{(A19), (A20)} \frac{C_0}{\text{EAD}} \cdot \left(1 - \sqrt{\rho_C} \cdot \sigma_{C,t_M} \cdot \tilde{x}\right), \quad (\text{A22})$$

$$N\left(N^{-1}(p_C(\tilde{x})) - \sqrt{1 - \rho_C} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T}\right) = N\left(\frac{b_C - \sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x}}{\sqrt{1 - \rho_C}} - \sqrt{1 - \rho_C} \cdot \sigma_C \cdot \sqrt{T}\right) \xrightarrow{(A19), (A20)} N(\infty) = 1. \quad (\text{A23})$$

Zusammenfassend erhält man

$$E_{\text{eff}} = \text{EAD} \cdot E(\tilde{\ell}_C | \tilde{x}) = \text{EAD} \cdot \left[1 - \frac{C}{\text{EAD}} \cdot \left(1 + \sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x}\right)\right]. \quad (\text{A24})$$

Für die bedingte erwartete Verlustquote ergibt sich dann:

$$E(\tilde{\ell}_{\text{sec}} | \tilde{x}) = \left[1 - \frac{C}{\text{EAD}} \cdot \left(1 + \sigma_{C,t_M} \cdot \sqrt{\rho_C} \cdot \tilde{x}\right)\right] \cdot \text{LGD}_{\text{unsec}}(\tilde{x}) \cdot p_A(\tilde{x}). \quad (\text{A25})$$

## Literaturverzeichnis

- Acharya, Viral V./Bharath, Sreedhar T./Srinivasan, Anand* (2004), Understanding the Recovery Rates on Defaulted Securities, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Altman, Edward I./Brady, Brooks/Resti, Andrea/Sironi, Andrea* (2003), The Link Between Default and Recovery Rates: Theory, Empirical Evidence and Implications, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Altmann, Edward I./Kishore, Vellore M.* (1996), Almost Everything You Wanted to Know About Recoveries on Defaulted Bonds, in: *Financial Analysts Journal*, Vol. 12, S. 57-64.
- Bank, Matthias/Lawrenz, Jochen* (2004), Why Simple, When it Can be Difficult?, in: *Kredit und Kapital*, 36. Jg., S. 534-556.
- Baseler Ausschuss* (2004), Modification to the Capital Treatment for Expected and Unexpected Losses in the New Basel Accord, Bank for International Settlements.
- Baseler Ausschuss* (2005), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, Bank for International Settlements.
- Bauer, Heinz* (2001): *Wahrscheinlichkeitstheorie*.
- Black, Fisher/Cox, John C.* (1976), Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Intendure Provisions, in: *Journal of Finance*, Vol. 31, No. 2, S. 351-367.
- Bluhm, Christian/Overbeck, Ludger/Wagner, Christoph* (2003), An Introduction to Credit Risk Modelling.
- Briys, Eric/Varenne, Francois de* (1997), Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 32, No. 2, S. 239-248.
- Crosbie, Peter/Bohn, Jeff* (2003), Modeling Default Risk, Moody's KMV Company.
- Crouhy, Michel/Galai, Dan/Mark, Robert* (2000), *Risk Management*.
- Deutsche Bundesbank* (2003), Baseler Ausfalldefinition, in: *Monatsbericht*, o. Jg., Heft 1, S. 52.
- Düllmann, Klaus/Scheule, Harald* (2003), Asset Correlation of German Corporate Obligors: Its Estimation, Its Drivers and Implications for Regulatory Capital, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Düllmann, Klaus/Trapp, Monika* (2004), Systematic Risk in Recovery Rates – An Empirical Analysis of U.S. Corporate Credit Exposures, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Finger, Christopher C.* (1999), Conditional Approaches for CreditMetrics Portfolio Distributions, in: *CreditMetrics Monitor*, o. Vol., Heft 4, S. 14–33.
- Finger, Christopher C.* (2001), The One-Factor CreditMetrics Model In The New Basel Capital Accord, in: *RiskMetrics Journal*, Vol. 2, Heft 1, S. 8-18.
- Finger, Christopher C.* (2002), *CreditGrades™ – Technical Dokument*, RiskMetrics Group.
- Frye, Jon* (2000a), Collateral Damage, in: *Risk*, Vol. 13, Heft 4, S. 91-94.
- Frye, Jon* (2000b), Depressing Recoveries, in: *Risk*, Vol. 13, Heft 11, S. 108-111.
- Frye, Jon* (2003), A False Sense of Security, in: *Risk*, Vol. 16, Heft 11, S. 63-68.
- Gordy, Michael B.* (2000), A Comparative Anatomy of Credit Risk Models, in: *Journal of Banking and Finance*, Vol. 24, S. 119-149.
- Gordy, Michael B.* (2003), A Risk-Faktor Model Foundation for Ratings-Based Bank Capital Rules, in: *Journal of Financial Intermediation*, Vol. 12, S. 199-232.

- Gordy, Michael B./Heitfield, Erik* (2002), Estimating Default Correlations from Short Panels of Credit Rating Performance Data, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Grundke, Peter* (2003): Modellierung und Bewertung von Kreditrisiken.
- Gupton, Greg M./Gates, Daniel/Carty, Lea V.* (2000), Bank Loan Loss Given Default, Moody's Investor Service.
- Gupton, Greg M./Finger, Christopher C./Bhatia, Mickey* (1997), CreditMetrics – Technical Document, Morgan Guarantee Trust Co.
- Gürtler, M.* (2002), Der IRB-Ansatz im Rahmen von Basel II, in: Die Betriebswirtschaft, 62. Jg, S. 450-452.
- Hamerle, Alfred/Liebig, Thilo/Rösch, Daniel* (2003a), Benchmarking Asset Correlations, in: Risk, Vol. 16, Heft 11, S. 77-81.
- Hamerle, Alfred/Liebig, Thilo/Rösch, Daniel* (2003b), Credit Risk Factor Modeling and the Basel II IRB Approach, Discussion Paper Series 2, Deutsche Bundesbank.
- Hamerle, Alfred/Rösch, Daniel* (2003), Parameterizing Credit Risk Models, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Hamilton, David T./Cantor, Richard/Ou, Sharon* (2002), Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers, Moody's Investor Service.
- Hamilton, David T./Cantor, Richard/West, Michael/Fowle, Kerry* (2002), Default and Recovery Rates of European Corporate Bond Issuers, 1985-2001, Moody's Investor Service.
- Hu, Yen-Ting/Perraudin, William* (2002), The Dependence of Recovery Rates and Defaults, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Hull, John C.* (2003), Options, Futures, and Other Derivatives, 5. Auflage.
- Huschens, Stefan* (2000), Verfahren zur Value-at-Risk-Berechnung im Marktrisikobereich, in: *Johanning, Lutz/Rudolph, Bernd*, Handbuch Risikomanagement – Risikomanagement für Markt-, Kredit- und operative Risiken, S. 181-218.
- Jokivuolle, Esa/Peura, Samu* (2000), A Model for Estimating Recovery Rates and Collateral Haircuts for Bank Loans, Bank of Finland Discussion Papers, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Kaiser, Ulrich/Szczesny, Andrea* (2003), Ökonometrische Verfahren zur Modellierung von Kreditausfallwahrscheinlichkeiten: Logit- und Probit-Modelle, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 55. Jg., S. 790-822.
- Keenan, Sean C./Hamilton, David T./Berthault, Alexandra* (2000), Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-1999, Moody's Investor Service.
- Koyluoglu, H. Ugur /Hickmann, Andrew* (1998a), A Generalized Framework for Credit Portfolio Models, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Koyluoglu, H. Ugur /Hickman, Andrew* (1998b), Reconcilable Differences, in: Risk, Vol. 11, Heft 10, S. 56-62.
- Merton, Robert C.* (1974), On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates, in: Journal of Finance, Vol. 29, S. 449-470.
- Ong, Michael K.* (1999), Internal Credit Risk Models – Capital Allocation and Performance Measurement.
- Pykthin, Michael* (2003), Unexpected Recovery Risk, in: Risk, Vol. 16, Heft 8, S. 74-78.
- Pykthin, Michael/Dev, Ashish* (2002), Analytical Approach to Credit Risk Modelling, in: Risk, Vol. 15, Heft 3, S. S26-S32.

- Rau-Bredow, Hans* (2001), Kreditrisikomodellierung und Risikogewichte im neuen Basler Accord, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 54. Jg., S. 1004-1005.
- Rösch, Daniel* (2004), Correlations and Business Cycles of Credit Risk: Evidence from Bankruptcies in Germany, in: Financial Markets and Portfolio Management, Vol. 17, S. 309-331.
- Schmitz, Norbert* (1996), Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitstheorie.
- Schönbucher, Phillip J.* (2000), Factor Models for Portfolio Credit Risk, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Schönbucher, Phillip J.* (2003), Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing, and Implementation.
- Schuermann, Till* (2003), What Do We Know About Loss-Given-Default?, Working Paper, [www.defaultrisk.com](http://www.defaultrisk.com).
- Schulte-Mattler, Hermann/Tysiak, Wolfgang* (2002), Basel II: Neue IRB-Formel für den Mittelstand, in: Die Bank, o. Jg., S. 836-841.
- Statistisches Bundesamt* (2003), Insolvenzen.
- Szegö, Giorgio* (2002), Measures of Risk, in: Journal of Banking and Finance, Vol. 26, S. 1253-1272.
- Vasicek, Oldrich A.* (1987), Probability of Loss on Loan Portfolio, KMV Corporation.
- Vasicek, Oldrich A.* (1991), Limiting Loan Loss Probability Distribution, KMV Corporation.
- Vasicek, Oldrich A.* (2002), Loan Portfolio Value, in: Risk, Vol. 15, Heft 12, S. 160-162.
- Wilde, Tom* (2001), IRB Approach Explained, in: Risk, Vol. 14, Heft 5, S. 87-90.
- Wilkins, Marco/Baule, Rainer/Entrop, Oliver* (2002), Erfassung des Kreditrisikos nach Basel II – Eine Reflexion aus wissenschaftlicher Sicht, in: Hofmann (Hrsg.), Basel II und MaK, S. 47-76.
- Wilkins, Marco/Entrop, Oliver* (2004), IRB-Ansatz in Basel II – die Behandlung erwarteter Verluste, in: Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 57. Jg., S. 734-736.

## Abbildungen

Abbildung 1: Verteilungsdichte der bedingten erwarteten Verlustquote für

$$\rho_C = \rho_A = 0,1; \sigma_C = \sigma_A = 10; PD_A = 0,02; PD_C = 0,7$$

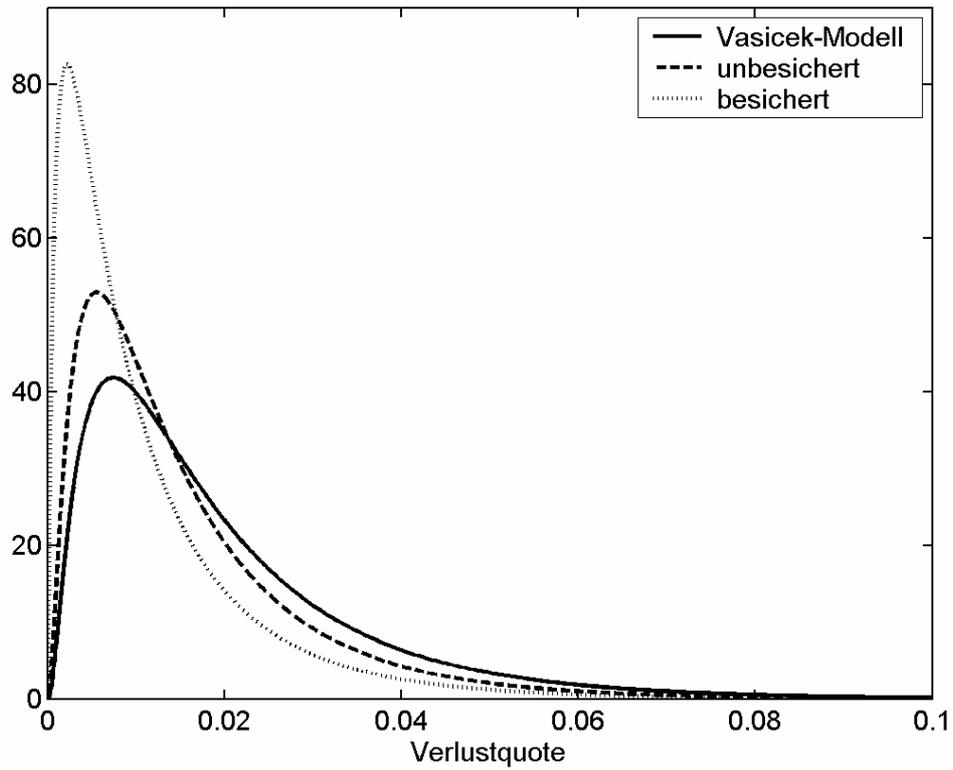


Abbildung 2: Bedingte erwartete Verlustrate bei Ausfall für einen unbesicherten Kredit  
mit  $\rho_A = 0,2$  und  $\tilde{x} = N^{-1}(0,001)$

