

Klaus Bender, Andreas Richter

# Optimales Vertragsdesign bei moralischem Risiko in der Rückversicherung

Working Papers on Risk and Insurance  
Hamburg University

No 9  
October 2002

UH



Klaus Bender\*, Andreas Richter\*\*

**Optimales Vertragsdesign bei moralischem Risiko in der  
Rückversicherung\*\*\***

No 9  
October 2002

**ISSN 1617-8653**

\* Dr. Klaus Bender, Swiss Re Germany Holding AG, Dieselstr. 11, 85774 Unterföhring bei München.  
Tel.: +49 89 38441634, Fax: +49 89 38442279, Email: Klaus\_Bender@swissre.com.

\*\* Dr. Andreas Richter, Universität Hamburg, Institut für Versicherungsbetriebslehre, Von-Melle-Park 5,  
20146 Hamburg, Tel.: +49 40 428384016, Fax: +49 40 428385505, Email: richter@rrz.uni-hamburg.de.

\*\*\* Die Verfasser danken Martin Nell für hilfreiche Kommentare und Anregungen.

# **Optimales Vertragsdesign bei moralischem Risiko in der Rückversicherung**

## **Zusammenfassung**

Dieser Beitrag befasst sich mit der geeigneten Ausgestaltung von Risikoteilungsregeln in der Rückversicherung bei asymmetrischer Information hinsichtlich des Verhaltens des Erstversicherers. Letzterer hat üblicherweise massive unbeobachtbare Spielräume z.B. bei der Auswahl der von ihm versicherten Risiken, so dass ein typisches Problem moralischen Risikos entsteht. Es wird hier gezeigt, dass die Existenz von moralischem Risiko entscheidende Auswirkungen auf die Eigenschaften des im Rückversicherungsvertrag zu spezifizierenden Zusammenhangs zwischen Schaden und Entschädigung, der so genannten Rückversicherungsform, besitzt. Insbesondere stellt sich heraus, dass bei unbeobachtbarem Einfluss des Erstversicherers auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Umfangs möglicher Ansprüche eine Pareto-optimale Entschädigungsfunktion an jeder Stelle flacher verläuft als bei vollständiger Information. Der Erstversicherer wird also an jeder marginalen Erhöhung des Schadens stärker beteiligt. Eine betragsmäßig fixierte Selbstbeteiligung in der Form einer so genannten Abzugsfranchise, die in der Literatur häufig als Lösungsansatz vorgeschlagen wird, erweist sich hingegen in diesem Zusammenhang nicht als geeignetes Instrument.

## **Summary**

This paper addresses the optimal design of risk sharing arrangements in reinsurance contracts with asymmetric information concerning the primary insurer's behavior. The latter usually has significant unobservable discretions, for instance with respect to risk selection, implying a moral hazard problem. We show that the existence of moral hazard strongly affects the characteristics of the reinsurance indemnification rule, i.e. the connection between the level of losses and the indemnity, which is specified in the contract. For this analysis, a standard model framework from the theory of optimal reinsurance with perfect information is modified by the assumption that the primary insurer has unobservable control of the probability distribution of the extent of losses. In particular, the solution indicates that for this situation, a Pareto-optimal indemnity rule is less steep, and therefore the primary insurer's share in a marginal increase of the loss is greater, compared to the case of complete information. A deductible, however, turns out not to be a suitable approach in this context.

## A. Einleitung

Als eine der wichtigsten Funktionen der Rückversicherung wird in Literatur und Praxis allgemein die Risikoallokations- bzw. Risikoteilungsfunktion angesehen. Durch Rückversicherung besteht die Möglichkeit, lokale Risiken weltweit zu streuen und damit ein größtmögliches Diversifikationspotential auszuschöpfen. Im Rahmen eines Rückversicherungsvertrages gibt ein Erstversicherer einen klar definierten Teil der von ihm übernommenen Risiken an den Rückversicherer ab. Dies ist insbesondere im Zusammenhang mit Risiken von Bedeutung, die – wie etwa Naturkatastrophengefahren – zu einer Kumulierung von Einzelschäden führen und deshalb die Deckungskapazitäten lokaler Anbieter überfordern können.

Die typische Vertragskonstellation einer Rückversicherungsbeziehung deutet darauf hin, dass sich in diesem Bereich in besonderem Maße Prinzipal-Agenten-Probleme ergeben, da im Allgemeinen das rückversicherte Risiko entscheidend vom Verhalten des Erstversicherers abhängt und dieser außerdem gravierende nicht-beobachtbare Verhaltensspielräume besitzt.

In traditionellen Rückversicherungsverträgen besteht ein wesentliches Recht des Erstversicherers in der selbständigen Geschäftsführung. Dieses Recht gewährt ihm bei Entscheidungen, die auch direkt das Rückversicherungsverhältnis betreffen, grundsätzlich Unabhängigkeit von Weisungen des Rückversicherers.<sup>1</sup> Rückversicherer sind an die vom Erstversicherer getroffenen Maßnahmen gebunden.<sup>2</sup> Da diese Maßnahmen aber im Detail nicht beobachtbar sind, kann ein Erstversicherer im Hinblick auf die abgeschlossene Rückversicherungsdeckung seine Schadenminderungsaktivitäten, insbesondere im Bereich der Selektion von ihnen versicherter Risiken sowie der Schadenregulierung, reduzieren, ohne dass der Rückversicherer davon Kenntnis erhält. Es kommt somit zu rückversicherungsinduzierten Verhaltensänderungen des Erstversicherers nach Vertragsabschluss, d.h. es liegt ein gravierendes Problem moralischen Risikos vor.<sup>3,4</sup>

---

<sup>1</sup> So spezifizieren Klauseln in Rückversicherungsverträgen z.B., dass die gesamte vom Zedenten durchgeführte Schadenabwicklung für den Rückversicherer *bedingungslos* bindend ist, sofern sie den Vereinbarungen in den Originalpolicen und im Rückversicherungsvertrag entsprechen. Vgl. dazu die Beispielverträge in *Kiln* (1991).

<sup>2</sup> Vgl. *Gerathewohl u.a.* (1976), S. 515.

<sup>3</sup> Vgl. allgemein zum Problem des moralischen Risikos auf Versicherungsmärkten *Holmström* (1979), *Shavell* (1979) oder *Nell* (1993).

In Rückversicherungsverträgen wird versucht, dieses Problem durch verschiedene Instrumente der Vertragsgestaltung zu begrenzen. Zwar werden traditionelle Rückversicherungsverträge nur für ein Jahr geschlossen, de facto bestehen aber viele Vertragsbeziehungen über Jahrzehnte. Durch diese implizite Langfristigkeit der Geschäftsbeziehung kann der Rückversicherer auf ein Fehlverhalten des Erstversicherers entsprechend reagieren. Weitere Instrumente zur Begrenzung des moralischen Risikos sind z.B. variable – d.h. vom Schadenverlauf abhängige – Prämienbestandteile, die vertragliche Vereinbarung exogener Bezugsgrößen für die Rückversicherungszahlung, wie z.B. parametrische Trigger, die dem Einfluss des Erstversicherers entzogen sind,<sup>5</sup> und nicht zuletzt Kontrollrechte des Rückversicherers, die er z.B. in Form von Schadenreviews ausüben kann.

Als besonders wirksame Lösung erweist sich aber vor allem die geeignete Ausgestaltung der Risikoteilungsregelung, d.h. also insbesondere die gezielte Festlegung der Selbstbeteiligung des Erstversicherers. In dieser Arbeit sollen im Rahmen einer geeigneten Modellanalyse die Möglichkeiten von Selbstbeteiligungen als Instrument zur Begrenzung des moralischen Risikos genauer betrachtet werden.

In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Arbeiten zur optimalen Gestalt von Versicherungsverträgen bei unterschiedlichen Annahmekonstellationen bezüglich des Informationsstandes der Vertragsparteien. Dabei lassen sich im Wesentlichen zwei Herangehensweisen unterscheiden: Zum einen werden im Rahmen von Modellen mit zweipunktverteilter Schaden Probleme asymmetrischer Information betrachtet und damit Aussagen zur genauen Form des funktionalen Zusammenhangs zwischen Schaden und Entschädigung, also der so genannten *(Rück)Versicherungsform*, vernachlässigt.<sup>6</sup> Andere Arbeiten, die sich detailliert mit der optimalen (Rück)Versicherungsform auseinandersetzen, unterstellen vollständige Information der Vertragsparteien und schließen somit insbesondere das Moral-hazard-Problem aus.<sup>7</sup> Nur wenige Arbeiten leiten explizite Aussagen über die optimale Versicherungsform bei moralischem Risiko ab. So untersuchen *Spence/Zeckhauser* (1971) diese Fragestellung für eine Situation des so genannten “ex post moral hazard”, wie es etwa für den Bereich der

<sup>4</sup> Einen Ansatz zur Quantifizierung des Problems liefern *Doherty/Smetters* (2000). Die von ihnen betrachteten Daten aus dem amerikanischen Markt unterstreichen die Bedeutung des Problems.

<sup>5</sup> Vgl. *Doherty/Richter* (2002), die ein kombiniertes Produkt mit einem konventionellen, vom individuellen Schaden abhängigen, und einem exogenen Auslöser betrachten. Exogene Trigger werden z.B. verwendet bei der Verbriefung von Katastrophenrisiken (vgl. hierzu auch *Richter*, 2002). Denkbar sind dabei Größen, die das Ausmaß einer Katastrophe ausdrücken, wie z.B. die Erdbebenstärke in einem bestimmten Gebiet.

<sup>6</sup> Vgl. z.B. *Pauly* (1974), *Shavell* (1979), *Nell* (1993).

<sup>7</sup> Vgl. unter vielen anderen *Borch* (1962), *Arrow* (1963), *Raviv* (1979), *Gollier* (1992).

Krankenversicherung üblich ist: Hier kann ein Versicherer im Allgemeinen Umweltzustände nicht direkt beobachten und verwendet deshalb die Nachfrage des Versicherten nach Gesundheitsleistungen als entsprechendes Signal. *Spence* und *Zeckhauser* kommen zu dem Ergebnis, dass sich unter den Bedingungen ihres Modells eine im Wesentlichen konvexe Abhängigkeit zwischen den Ausgaben des Versicherten und den Versicherungsleistungen als optimal erweist.

Als vertragsgestalterische Lösung im Zusammenhang mit Problemen des moralischen Risikos werden in der Versicherungsökonomie häufig betragsmäßig fixierte Selbstbeteiligungen vorgeschlagen. Eine solche Form der Selbstbeteiligung, eine so genannte Abzugsfranchise, sieht vor, dass der Versicherungsnehmer – bzw. im Kontext dieser Arbeit der Erstversicherer – die Schäden bis zu einem bestimmten Betrag vollständig trägt und darüber hinausgehende Schadenanteile vom (Rück)Versicherer übernommen werden. Zur formalen Rechtfertigung des Einsatzes von Abzugsfranchisen lässt sich in Grenzen das angesprochene Resultat von *Spence* und *Zeckhauser* verwenden, da eine konvexe Entschädigungsfunktion unter bestimmten Voraussetzungen als eine annehmbare Approximation dieser Form der Selbstbeteiligung interpretiert werden kann.<sup>8</sup> Ansätze, die unmittelbar zu einer Abzugsfranchise als optimale Versicherungsform führen, finden sich z.B. bei *Holmström* (1976) sowie in einem recht aktuellen Aufsatz von *Winter* (2000). Die genannten Autoren nehmen, wie dies auch in der vorliegenden Arbeit der Fall sein wird, eine Ex-ante-Einflussmöglichkeit des Versicherten auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zu versichernden Schäden an. Eine betragsmäßig fixierte Selbstbeteiligung als Lösungsansatz in diesem Zusammenhang erfordert jedoch eine ganz bestimmte Form der Wirkung von Schadenverhütungsaktivitäten auf die Schadenverteilung, wie folgende Überlegung zeigt: Eine Selbstbeteiligung in der Form eines absoluten Betrages trifft den Versicherten bei jeder positiven Schadenhöhe. Ein solches Instrument des Vertragsdesigns erscheint also dann geeignet, wenn sich die Möglichkeit der Beeinflussung des Risikos darauf bezieht, ob sich ein Schaden realisiert oder nicht.

Eine derartige Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit des Schadeneintritts vom Verhalten des Versicherten ist typisch für viele Bereiche der Erstversicherung, wie etwa die Hausrat-, Haftpflicht- oder die Krankenversicherung zeigen. Im Bereich der Rückversicherung jedoch wird der Erstversicherer im Allgemeinen vor allem auf das Ausmaß der möglichen Gesamtschäden aus einem rückzuversichernden Bestand von Einzelrisiken einwirken können und kaum Einfluss darauf haben, ob überhaupt ein Schaden auftritt. Sofern es um die

---

<sup>8</sup> Vgl. *Spence/Zeckhauser* (1971), S. 387, Fußn. 9.

Rückversicherung eines (Teil)Bestandes versicherter Risiken geht, lässt sich das resultierende Gesamtrisiko zumeist sinnvoll durch eine stetige Verteilung abbilden, so dass die Schadenhöhe null keine positive Punktwahrscheinlichkeit besitzt. Andererseits weisen die relevanten Schadenverteilungen bei der reinen Rückdeckung von bestimmten Ereignissen wie etwa Naturkatastrophen oder Terroranschlägen zwar durchaus positive Wahrscheinlichkeiten für einen Schaden von null auf; diese Gefahrenbereiche sind aber dadurch gekennzeichnet, dass sich die Einflussmöglichkeiten eines Erstversicherers auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Schadenhöhen beziehen, gegeben eine Katastrophe ist eingetreten.

In dieser Arbeit werden wir anhand eines geeigneten Modellrahmens zeigen, wie sich ein optimales Rückversicherungsarrangement für eine Konstellation gestaltet, in der der Erstversicherer (ex ante) unbeobachtbare Spielräume bei der Einflussnahme auf das Ausmaß der möglichen Gesamtschäden besitzt. Dabei stellt sich u.a. heraus, dass sich das ideale Vertragsdesign unter diesen Bedingungen gravierend von der Form einer Abzugsfranchise unterscheidet.

Der Aufsatz ist wie folgt aufgebaut: Im nächsten Abschnitt wird zunächst das Grundmodell eingeführt. Abschnitt C befasst sich dann kurz mit Pareto-optimalen Rückversicherungsverträgen bei vollständiger Information. Anschließend werden Lösungen für den Fall mit asymmetrischer Information über das Verhalten des Erstversicherers abgeleitet. Zu diesem Zweck wird zunächst u.a. die Wirkung von Schadenminderungsaktivitäten auf die Schadenverteilung spezifiziert. Ferner wird ein geeigneter Bedingungskatalog für die Anwendung des formalen Instrumentariums auf das zu betrachtende Optimierungsproblem formuliert, bevor in D.4 und D.5 eine Charakterisierung der Optimallösungen und ein Vergleich mit dem Fall vollständiger Information vorgenommen werden. Der Aufsatz schließt mit einer Würdigung der zentralen Ergebnisse und einem kurzen Ausblick auf weiteren Forschungsbedarf.

## B. Das Modell

Wir betrachten ein Erstversicherungsunternehmen mit zufälligen versicherten Schäden  $X$ . Die Verteilung der (nicht-negativen) Zufallsvariablen  $X$  besitze die Dichtefunktion  $f$ .<sup>9</sup> Der Träger der Verteilung sei  $[0, T)$  mit  $T \in (0, \infty]$ . Für den Erstversicherer besteht die Möglichkeit, das individuelle Risiko durch den Abschluss eines Rückversicherungsvertrages zu hedgen. Der Rückversicherungsvertrag ist gekennzeichnet durch die Entschädigungsfunktion, die einer Realisation  $x$  der Zufallsvariablen  $X$  die Entschädigung  $I(x)$  zuordnet, sowie durch die Rückversicherungsprämie  $P$ . Es wird angenommen, dass die unternehmerischen Entscheidungen des Erst- und des Rückversicherers gemäß dem Bernoulli-Prinzip den erwarteten Nutzen maximieren und durch risikoscheues Verhalten geprägt sind.<sup>10</sup> Die entsprechenden Risikonutzenfunktion  $u_1(\cdot)$  bzw.  $u_2(\cdot)$  seien zweifach stetig differenzierbar und streng konkav ( $u'_i > 0$ ,  $u''_i < 0$ ,  $i = 1, 2$ ).

Es wird angenommen, dass die Dichtefunktion der Schadenverteilung von der Sorgfalt  $s \in [0, \bar{s}]$ , also den Schadenverhütungs- oder Schadenminderungsanstrengungen, des Erstversicherers abhängt, d.h.  $f = f(x, s)$ . Dieser Zusammenhang wird an späterer Stelle konkretisiert.

Die Schadenminderungsaktivitäten sind für den Erstversicherer mit Kosten verbunden. Durch eine Erhöhung solcher Aktivitäten erleidet er eine Nutzeneinbuße  $v_1(s)$ , wobei additive Separierbarkeit unterstellt wird,<sup>11</sup> so dass sich für gegebene  $x$  und  $s$  folgende Bewertung des Erstversicherers ergibt:

$$(1) \quad \hat{u}_1(x, s) := u_1(R_1 - P - x + I(x)) - v_1(s).$$

---

<sup>9</sup> Wir werden später das Modell dahingehend spezifizieren, dass die Dichtefunktion von einem zusätzlichen Parameter abhängt, der das Anstrengungsniveau des Erstversicherers abbildet. Strenggenommen werden also hier Verteilungsfamilien betrachtet. Ferner sei angemerkt, dass unser Modell keine positiven Punktwahrscheinlichkeiten für bestimmte Schadenhöhe, insbesondere für  $X=0$ , zulässt. Die Berücksichtigung einer positiven, aber nicht beeinflussbaren, Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{X=0\}$  würde jedoch die grundsätzliche Argumentation nicht verändern.

<sup>10</sup> Vgl. zur Relevanz der Annahme risikoscheuen Entscheidungsverhaltens im Zusammenhang mit unternehmerischen Entscheidungen z.B. *Greenwald/Stiglitz* (1990), *Dionne/Doherty* (1993) oder *Nell/Richter* (2002). Speziell zur Diskussion von Risikoaversion als Motiv für die Versicherungsnachfrage von Unternehmen und insbesondere die Nachfrage nach Rückversicherungsschutz vgl. auch die Diskussion bei *Doherty/Tinic* (1981), *Mayers/Smith* (1982) sowie *Ashby/Diacon* (1998), S.36.

<sup>11</sup> Vgl. zu dieser Separierung *Clarke/Darrough* (1980).



Dabei bezeichnet  $R_1$  das Anfangsvermögen – bzw. die Anfangs“reserve” – des Erstversicherers. Es wird angenommen, dass die Nutzeneinbuße  $v_1(s)$  progressiv mit zunehmender Schadenminderungsaktivität steigt. Der Funktionsverlauf sei also streng konvex. Der Grenzwert der marginalen Nutzeneinbuße für sehr kleine  $s$  sei null. Außerdem wird unterstellt, dass das maximal vorstellbare Schadenminderungsniveau  $\bar{s}$  die Nutzeneinbuße des Erstversicherers ins Unendliche steigern würde.

$$(2) \quad v_1' > 0, v_1'' > 0, \lim_{s \rightarrow 0} v_1'(s) = 0, \lim_{s \rightarrow \bar{s}} v_1'(s) = +\infty.$$

Der Betrachtungshorizont bleibt auf eine Periode beschränkt. Die Zeitstruktur des Modells sei wie folgt: Zunächst wird ein Vertrag  $(I(x), P)$  zwischen Erst- und Rückversicherer abgeschlossen. Anschließend wählt der Erstversicherer das Niveau seiner Schadenminderungsaktivität  $s$ . Schließlich realisiert sich eine Ausprägung der Zufallsvariablen  $X$ , und die Zahlungen erfolgen gemäß dem in den Bedingungen des Rückversicherungsvertrags spezifizierten Zusammenhang zwischen Schadenhöhe und Entschädigung.

Damit der Rückversicherer überhaupt einen Vertrag anbietet, muss der Erwartungsnutzen, der mit dem Vertragsangebot entsteht, mindestens dem Nutzen seiner sicheren Ausgangsposition entsprechen. Dies führt zu folgender Partizipationsbedingung:

$$(3) \quad E\{u_2(R_2 + P - I(x))\} \geq u_2(R_2),$$

wobei  $R_2$  das Anfangsvermögen des Rückversicherers bezeichnet.

Entsprechend ergibt sich die Partizipationsbedingung für den Erstversicherer:

$$(4) \quad E\{u_1(R_1 - P - x + I(x))\} \geq u_1(R_1 - x).$$

Wir werden nun in einem ersten Schritt als Referenzfall die Situation vollständiger Information betrachten.

### C. Die First-Best-Lösung – Der optimale Rückversicherungsvertrag bei vollständiger Information

Zur Bestimmung Pareto-optimaler Rückversicherungsverträge bei vollkommener Information wird die Summe der gewichteten Erwartungsnutzen von Erst- und Rückversicherer maximiert (wobei die Gewichtungsfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  positiv seien, damit triviale Lösungen ausgeschlossen werden können):<sup>12</sup>

$$(5) \quad \max_{I(\cdot), P, s} \alpha \left\{ \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x))f(x, s) dx - v_1(s) \right\} + \beta \int_0^T u_2(R_2 + P - I(x))f(x, s) dx.$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen (3), (4) und

$$(6) \quad I(x) \geq 0 \quad \forall x.$$

Diese Konstellation lässt sich wie der Fall unbeeinflussbarer Schadenverteilung behandeln, indem wir davon ausgehen, dass die Sorgfalt (first-best-)optimal gewählt und vertraglich festgelegt wird. Das Schadenminderungsniveau kann in einer vertraglichen Zusatzvereinbarung, einem so genannten *Forcing contract*, festgesetzt werden.

Differenzieren nach  $s$  ergibt folgende notwendige Bedingung für ein inneres Optimum:

$$(7) \quad \alpha \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x))f_s(x, s) dx - \alpha v_1'(s) + \beta \int_0^T u_2(R_2 + P - I(x))f_s(x, s) dx = 0.$$

Dabei bezeichnet  $f_s(x, s)$  die erste partielle Ableitung der Dichtefunktion nach dem zweiten Argument. Da wir uns primär für die Gestalt der Entschädigungsfunktion des Rückversicherungsvertrages interessieren, werden wir die Annahmen über die Wirkung der Schadenverhütung auf die Dichtefunktion erst im Abschnitt D konkretisieren.

Um die optimale Entschädigungsfunktion charakterisieren zu können, betrachten wir die Funktion

$$(8) \quad \alpha \{u_1(R_1 - P - x + I(x))f(x, s) - v_1(s)\} + \beta \{u_2(R_2 + P - I(x))f(x, s)\}.$$

Eine Entschädigungs- bzw. Risikoteilungsregel  $I(x)$ , die für jedes  $x$  diese Funktion maximiert, maximiert – für gegebene Werte von  $P$  und  $s$  – auch die Zielfunktion aus (5).

---

<sup>12</sup> Vgl. zu diesem Ansatz z.B. *Arrow* (1963), S. 972 f., oder *Rees* (1985), S. 21 f.

Es ergibt sich die folgende Bedingung erster Ordnung für innere Lösungen  $I(x) > 0$ :

$$(9) \quad \frac{\partial L}{\partial I} = \alpha u'_1(Y(x)) - \beta u'_2(Z(x)) = 0$$

bzw.

$$(10) \quad \frac{u'_2(Z(x))}{u'_1(Y(x))} = \frac{\alpha}{\beta}$$

mit  $Y(x) = R_1 - P - x + I(x)$  und  $Z(x) = R_2 + P - I(x)$ .

Differenzieren der durch (9) implizit definierten Funktion führt nach geeigneten Umformungen zu der aus der Theorie der optimalen Risikoteilung bekannten Eigenschaft einer Pareto-optimalen Risikoteilungsregel bei vollständiger Information:<sup>13</sup>

$$(11) \quad \frac{dI}{dx} = \frac{r_1(Y(x))}{r_1(Y(x)) + r_2(Z(x))},$$

wobei  $r_i = -u''_i/u'_i$  ( $i = 1, 2$ ) die *Arrow-Pratt-Maße* der lokalen, absoluten Risikoaversion der beiden Vertragspartner bezeichnen.

Ferner lassen sich folgende Merkmale einer Lösung des Maximierungsproblem (3)-(6) ableiten:<sup>14</sup>

$$(12) \quad \begin{aligned} I(0) &= 0, \\ 0 &< I(x) < x \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$

Insbesondere kommt es zu einer proportionalen Risikoteilung, wenn die Risikoaversionskoeffizienten der beiden Seiten konstant sind, wenn also Erst- und Rückversicherer so genannte CARA-Nutzenfunktionen besitzen.

## D. Der optimale Vertrag bei moralischem Risiko

### *D.1 Der Trade-Off zwischen Risikoteilung und Anreizsetzung*

Da im vorigen Abschnitt symmetrische Information zwischen Erst- und Rückversicherer unterstellt wurde, ließen sich Risikoteilung und Sorgfalt in idealer Weise durch eine entsprechende vertragliche Vereinbarung steuern. Wird nun die Annahme vollständiger Information

---

<sup>13</sup> Die grundlegende Arbeit über Pareto-optimale Risikoteilung (für den Fall exogen gegebener Risiken bzw. Situationen mit vollständiger Information) geht zurück auf *Borch* (1960). Vgl. außerdem u.a. *Arrow* (1963), *Wilson* (1968), *Raviv* (1979), oder *Bühlmann/Jewell* (1979).

aufgegeben, so kann das Sorgfaltsniveau des Erstversicherers nicht mehr wirkungsvoll vertraglich spezifiziert werden. Es ergibt sich dann das für eine Prinzipal-Agenten-Beziehung charakteristische Problem, dass der Rückversicherungsvertrag über die Risikoteilungsregel einen Trade-Off zwischen Anreizsetzung und Risikoallokation herbeiführen muss.

Das Problem wird deutlich, wenn man sich als Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen noch einmal die Bedingung (7) ansieht. Wenn die Schadenminderungsmaßnahmen des Erstversicherers positiv auf den Nutzen des Rückversicherers wirken, ist das zweite Integral in der Gleichung (7) positiv:  $\beta \int_0^T u_2(Z(x))f_s(x,s)dx > 0$ . Dies bedeutet aber auch, dass die Grenzkosten der Schadenminderungsaktivität des Versicherungsnehmers seinen Grenznutzen aus einer Erhöhung von  $s$  übersteigen müssen. Ist nun jedoch sein Verhalten, wie im Weiteren angenommen wird, nicht beobachtbar, so wählt der Erstversicherer bei gegebenem Rückversicherungsvertrag sein Schadenminderungsniveau gemäß  $\max_s E(u_1[Y(x)] - v_1(s))$ . Dies führt zu folgender Bedingung erster Ordnung:

$$(13) \quad \alpha \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x))f_s(x,s)dx - \alpha v_1'(s) = 0.$$

Dieser Bedingung entsprechend passt also der Erstversicherer seine Sorgfalt gerade so an den Rückversicherungsvertrag an, dass Grenzertrag und Grenzkosten der Sorgfalt übereinstimmen. Unter der üblichen Annahme, dass der Grenzertrag der Schadenverhütung abnimmt, ist somit das Grenznutzenniveau im Optimum niedriger, wenn die Präferenzen des Rückversicherers bei der Wahl des Sorgfaltsniveaus nicht berücksichtigt werden. Daraus lässt sich schließen, dass bei gleichen Vertragsbedingungen das gewählte Schadenminderungsniveau bei Beobachtbarkeit *höher* ist als bei Unbeobachtbarkeit. Die First-best-Teilungsregel impliziert bei asymmetrischer Informationsverteilung unzureichende Anreize. Die Höhe der Versicherungsleistung hat unter diesen Voraussetzungen eine direkte Auswirkung auf die Wahl des Schadenminderungsniveaus des Erstversicherers. Bei der Ausgestaltung des Vertrages muss der Rückversicherer das Verhalten des Erstversicherers antizipieren. Motivation und Risikoteilung sind in idealer Weise gegeneinander abzuwägen. In dieser Konstellation wird im Allgemeinen nur eine *Second-best-Lösung* erreicht.

---

<sup>14</sup> Vgl. Raviv (1979), Theorem 1 (S. 87) and Theorem 3 (S. 90).

## D.2 Die Wirkung von Schadenminderungsmaßnahmen

Bevor wir mit der Analyse fortfahren, muss zunächst der Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Erstversicherers und der Verteilung des Schadens präzisiert werden. Es wird angenommen, dass die Schadenminderungsaktivitäten des Erstversicherers im Sinne einer umgekehrten stochastischen Dominanz erster Ordnung wirken: Je *höher*  $s$  ist, desto *geringer* sind tendenziell die zu erwartenden Schäden  $X$ . Geringere Schadenhöhen werden mit steigendem  $s$  wahrscheinlicher. (In anderen Prinzipal-Agent-Modellen ist der Zusammenhang in der Regel umgekehrt: Je höher die Anstrengungen des Agenten, desto größer ist tendenziell der Output.) Allerdings wird auch angenommen, dass sich durch Schadenverhütung nicht bestimmte vorher mögliche Schadenhöhenbereiche ausschließen lassen. Der Träger der Verteilung bleibt unverändert; denn sonst würde sich für den Rückversicherer die Möglichkeit ergeben, in bestimmten Fällen allein aus der Beobachtung bestimmter Schadenhöhen darauf zu schließen, dass ein vorgegebenes Sorgfaltsniveau nicht eingehalten wurde.<sup>15</sup> Durch das Festlegen prohibitiv hoher Strafen könnte dann unter bestimmten Bedingungen der Erstversicherer zur Einhaltung des First-best-Schadenverhütungsniveaus veranlasst werden, so dass das Anreizproblem gelöst wäre.

Weiter wird unterstellt, dass Rückversicherer und Erstversicherer über die Wirkungsweise der Schadenminderungsaktivitäten homogene Erwartungen haben.

$f(x,s)$  sei zweifach stetig differenzierbar. Für die zu zwei unterschiedlichen Schadenverhütungsniveaus  $s$  und  $\hat{s}$  (mit  $s > \hat{s}$ ) gehörenden Verteilungen (mit den Verteilungsfunktionen  $F(\cdot, s)$  bzw.  $F(\cdot, \hat{s})$ ) gelte folgender Zusammenhang:  $F(\cdot, s)$  wird von  $F(\cdot, \hat{s})$  (echt) stochastisch dominiert ( $F(\cdot, \hat{s}) \succ F(\cdot, s)$ ) (im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung), d.h.:<sup>16</sup>

$$(14) \quad F(x, s) \geq F(x, \hat{s}) \forall x \text{ und } F(x, s) > F(x, \hat{s}) \text{ für mindestens ein } x.$$

<sup>15</sup> Im Fall einer (im Gegensatz zu den hier getroffenen Annahmen) diskreten Verteilung ließe sich diese Voraussetzung konkretisieren durch die Annahme, dass es durch Schadenverhütungsmaßnahmen nicht möglich ist, ursprünglich positive Punktwahrscheinlichkeiten auf null zu senken.

<sup>16</sup> Die Agency-Literatur unterscheidet im Wesentlichen zwei Ansätze, durch die die Wirkung der Schadenminderung formalisiert werden kann (vgl. *Eisen*, 1981, S. 23 f., und *Holmström*, 1977, S. 209-214): Der so genannte „Zustandsansatz“ unterstellt, dass der Schaden  $X$  bei gegebenem Zufallseinfluss  $\theta$  direkt von  $s$  abhängt:  $X = X(\theta, s)$  (vgl. zu diesem Ansatz *Spence/Zeckhauser*, 1971, und *Ross*, 1973). Im Gegensatz hierzu postuliert der in dieser Arbeit verwendete „Mirrlees-Ansatz“ eine Abhängigkeit der Dichtefunktion von  $s$  (vgl. *Mirrlees*, 1974, S. 246). Das Schadenergebnis ist demnach nicht direkt von dem Schadenminderungsniveau abhängig, sondern indirekt über die Wirkung von  $s$  auf die Dichtefunktion von  $X$ . Der Zustandsansatz ist prinzipiell in den Mirrlees-Ansatz überführbar. Dies gilt aber nicht umgekehrt (vgl. *Page*, 1987, S. 161, und *Holmström*, 1979, S. 77).

Man beachte, dass es im Falle von Schadenverteilungen attraktiver ist, wenn sich „eher kleine als große“ Ausprägungen der Zufallsvariablen realisieren. Der abzubildende Zusammenhang besteht – grob formuliert – darin, dass zunehmende Schadenminderungsaktivitäten tendenziell sinkende Schadenhöhen implizieren. Deshalb wird gefordert, dass eine Verteilung mit höherem Anstrengungsniveau durch eine Verteilung bei niedrigerem Niveau dominiert wird. Aus obiger Forderung ergibt sich für ein beliebiges Niveau  $s$ :

$$(15) \quad F_s(x, s) \geq 0 \forall x \text{ und } F_s(x, s) > 0 \text{ für mindestens ein } x.^{17}$$

Im Folgenden wird sogar eine „regelmäßige“ Wirkung der Schadenminderungsaktivitäten unterstellt, d.h. es soll gelten:

$$(16) \quad F_s(x, s) > 0$$

für jedes  $x$  im Inneren des Trägers der Verteilung. Bei steigendem  $s$  erhöht sich die kumulative Wahrscheinlichkeit für geringere Schäden und sinkt die Wahrscheinlichkeit größerer Schäden.<sup>18</sup>

Ferner wird unterstellt:

$$(17) \quad F_{ss}(x, s) \leq 0.$$

Der Wert der Verteilungsfunktion soll also in  $s$  mit abnehmenden Raten zunehmen. Die Verteilungsfunktion nimmt konkav in  $s$  zu, in diesem Sinne wird also ein abnehmender Grenzertrag der Sorgfalt gefordert. Wir werden weiter unten sehen, ob bzw. unter welchen Bedingungen sich diese Annahme auch in einen abnehmenden Grenzertrag der Schadenverhütung für die beiden Vertragspartner (gemessen an ihrem jeweiligen [Grenz-]Erwartungsnutzen) übersetzt.

Der Wert  $f_s(x, s)$  gibt die Veränderung der Dichtefunktion an der Stelle  $x$  bei marginaler Erhöhung von  $s$  an. Für die weiteren Überlegungen spielt der Quotient  $f_s(x, s)/f(x, s)$ , die *Likelihood Ratio*, eine zentrale Rolle.<sup>19</sup> Er misst die Wirkung der Schadenminderungsaktionen auf die Schadenverteilung für jede Schadenhöhe, gewichtet mit dem Kehrwert von  $f(x, s)$ , also sozusagen die relative Wirkung der Schadenverhütung. Verläuft die Likelihood Ratio monoton in  $x$ , so erfüllt die Verteilungsfamilie die so genannte *Monotone Likelihood*

<sup>17</sup> Vgl. Eisen (1976), S. 204.

<sup>18</sup> Vgl. Mirrlees (1999), S. 7.

<sup>19</sup> Zur beispielhaften Betrachtung der Likelihood Ratio für ausgewählte Verteilungsfamilien (und den Fall positiv zu bewertender Outputgrößen) siehe Gillenkirch (1997), S. 257 – 259.

*Ratio Property (MLRP)*.<sup>20, 21</sup> Es wird sich im nächsten Abschnitt zeigen, dass diese Voraussetzung eine wichtige technische Eigenschaft ist, die uns die Lösung der zu betrachtenden Optimierungsaufgabe erleichtert.

Im hier betrachteten Zusammenhang ist – wie erwähnt – die umgekehrte stochastische Dominanz erster Ordnung von Interesse, da der abzubildende Zusammenhang darin besteht, dass zunehmende Schadenminderungsaktivitäten sinkende Schadenhöhen implizieren. Wir nehmen deshalb für unseren Kontext an, dass die Likelihood Ratio monoton in  $x$  *abnimmt*,<sup>22</sup> während in Modellen mit positiv zu bewertender Outputgröße üblicherweise analog eine wachsende Likelihood Ratio unterstellt wird.<sup>23</sup>

### D.3 Das Optimierungsproblem und der First-Order-Ansatz

Nach diesen Vorüberlegungen können wir nun das Optimierungsproblem für eine Situation mit moralischem Risiko formulieren. Als zusätzliche Nebenbedingung wird eine *Anreizkompatibilitätsbedingung* berücksichtigt, die zum Ausdruck bringt, dass das Sorgfaltsniveau des Erstversicherers nicht vertraglich spezifiziert werden kann (vgl. Abschnitt D.1). Das Maximierungsproblem stellt sich folgendermaßen dar:

$$(18) \quad \max_{I(\cdot), s} \alpha \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x)) f(x, s) dx - \alpha v_1(s) + \beta \int_0^T u_2(R_2 + P - I(x)) f(x, s) dx$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen (3), (4), (6) und

$$(19) \quad s = \arg \max_{\hat{s} \in S} \left( \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x)) f(x, \hat{s}) dx - v_1(\hat{s}) \right).$$

Da wir uns in erster Linie für die Struktur der Risikoteilungsfunktion interessieren, halten wir die Prämie konstant.  $P$  sei also im Folgenden stets das Prämienniveau aus der Lösung bei vollständiger Information. Wir werden an späterer Stelle auf diese Annahme noch einmal zurückkommen.

<sup>20</sup> Vgl. Rogerson (1985), S. 1362.

<sup>21</sup> Zwischen dieser Eigenschaft und der Charakterisierung der Schadenverhütungswirkung über die stochastische Dominanz besteht ein Zusammenhang dergestalt, dass z.B. aus einer wachsenden Likelihood Ratio  $F_s(x, s) \leq 0$  (für beliebige  $x$  und  $s$ ) folgt (Whitt, 1980). Diese Implikation gilt aber nicht umgekehrt (vgl. Mas-Colell/Whinston/Green, 1995, S. 485).

<sup>22</sup> Vgl. Doherty/Smetters (2000), S. 9.

<sup>23</sup> Vgl. Milgrom (1981), S. 386 f.

Für die weiteren Betrachtungen soll nun die Bedingung (19) durch die zugehörige, oben bereits erwähnte Bedingung erster Ordnung (13) ersetzt werden, damit eine explizit formulierte Nebenbedingung vorliegt. Das modifizierte Optimierungsprogramm wird als *First-Order-Ansatz* bezeichnet. Die Schwierigkeit dieser Modifikation liegt nun darin, dass die beiden Bedingungen im Allgemeinen nicht äquivalent sind und somit nur unter bestimmten Voraussetzungen (19) problemlos durch (13) ersetzt werden kann. Da aber der First-Order-Ansatz die Lösung des Problems erheblich erleichtert, gilt es, einen ökonomisch überzeugenden Bedingungskatalog zu finden, dessen Verwendung dieses Vorgehen legitimiert.<sup>24</sup>

Die Bedingung (13) erfasst die *lokalen* Extrema der in (19) zu maximierenden Funktion (bei gegebener Entschädigungsfunktion). Sie ist insofern weniger restriktiv als (19), als letztere (natürlich) fordert, dass es sich um ein *globales* Maximum handelt. (19) jedoch bezieht auch eventuelle Randlösungen mit ein, während (13) eine notwendige Bedingung für ein inneres Optimum darstellt. Wenn jedoch gewährleistet ist, dass die Größe in (19) (für jede relevante Entschädigungsfunktion) eine eindeutige positive Maximalstelle besitzt, sind die beiden Bedingungen äquivalent.

Existenz und Eindeutigkeit einer positiven Maximalstelle sind unter den Bedingungen dieser Arbeit gewährleistet, wenn der Grenzertrag der Schadenverhütung für den Erstversicherer positiv ist und abnimmt, also

$$(20) \quad \partial E[u_1(Y(x))]/\partial s > 0,$$

$$(21) \quad \partial^2 E[u_1(Y(x))]/\partial s^2 \leq 0.$$

Diese Bedingungen sind somit hinreichend für die Verwendung des First-Order-Ansatzes. Unter welchen Voraussetzungen liegt also nun ein konkaver Verlauf von  $E[u_1(Y(x))]$  in  $s$  vor? Damit diese Frage beantwortet werden kann, ist es zweckmäßig, die Ableitung des Erwartungsnutzen des Erstversicherers (vgl. (20)) partiell zu integrieren:

$$(22) \quad \frac{\partial E[u_1(Y(x))]}{\partial s} = \int_0^T u_1(Y(x)) f_s(x, s) dx$$

führt zu

$$(23) \quad \frac{\partial E[u_1(Y(x))]}{\partial s} = [u_1(Y(x))F_s(x, s)]_0^T - \int_0^T u_1'(Y(x))Y'(x)F_s(x, s) dx.$$

---

<sup>24</sup> Vgl. *Arnott* (1981), S. 353.



Da annahmegemäß der Träger der Verteilung unverändert bleibt ( $F(T, s) = 1 \forall s$ ), und wegen  $F(0, s) = 0 \forall s$ , gilt:<sup>25</sup>

$$(24) \quad F_s(T, s) \equiv F_s(0, s) \equiv 0 .$$

Der erste Term auf der rechten Seite in (23) ist damit gleich null. Der zweite Term ist auf jeden Fall dann positiv, wenn – wie angenommen – eine regelmäßige Wirkung der Schadenverhütung gegeben ist, also  $F_s(x, s) > 0$ , und wenn außerdem gilt:  $dI/dx < 1$  ( $\Rightarrow dY/dx = dI/dx - 1 < 0$ ). Die zweite Ableitung des Erwartungsnutzens des Erstversicherers nach  $s$  ergibt

$$(25) \quad \frac{\partial^2 E[u_1(Y(x))]}{\partial s^2} = - \int_0^T u_1'(Y(x)) Y'(x) F_{ss}(x, s) dx .$$

Es gilt  $u_1'(Y(x)) > 0$ . Ist außerdem  $dI/dx < 1$ , so nimmt der Grenzertrag der Schadenverhütung wegen  $F_{ss}(x, s) \leq 0$  (vgl. (17)) ab.

Wir können im Folgenden die Bedingung

$$(26) \quad \frac{dI}{dx} < 1$$

formal als eine zusätzliche Nebenbedingung des zu untersuchenden Optimierungsproblems betrachten, werden sie jedoch nicht weiter berücksichtigen. Wie sich dann herausstellen wird, ist die Bedingung auch im Optimum des allgemeineren Problems (ohne die zusätzliche Restriktion (26)) erfüllt, sofern eine abnehmende Likelihood Ratio vorliegt. Letztlich bestehen also die relevanten Prämissen in der Eigenschaft (MLRP) sowie der Konkavität der Verteilungsfunktion in  $s$ .<sup>26</sup>

---

<sup>25</sup> Vgl. Lee (1998), S. 146.

<sup>26</sup> Zur Diskussion alternativer Bedingungskataloge für die Anwendbarkeit des im Folgenden verwendeten First-Order-Ansatzes vgl. Jewitt (1988), S. 1180-1183.

## D.4 Ergebnisse

Die Lagrangefunktion für das gerade vorgestellte Maximierungsproblem lautet (wobei  $\lambda$  den Lagrangemultiplikator bezeichnet)

$$(27) \quad L = \alpha \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x)) f(x, s) dx - \alpha v_1(s) + \beta \int_0^T u_2(R_2 + P - I(x)) f(x, s) dx \\ + \lambda \left( \int_0^T u_1(R_1 - P - x + I(x)) f_s(x, s) dx - v_1'(s) \right).$$

Punktweise Betrachtung der Lagrangefunktion unter Berücksichtigung von  $dY/dI = 1$  und  $dZ/dI = -1$  und partielles Ableiten nach  $s$  ergeben die folgenden notwendigen Bedingungen für ein inneres Maximum:

$$(28) \quad \alpha u_1'(Y(x)) f(x, s) - \beta u_2'(Z(x)) f(x, s) + \lambda u_1'(Y(x)) f_s(x, s) = 0$$

$$(29) \quad \frac{\partial L}{\partial s} = \alpha \int_0^T \{u_1(Y(x)) f_s(x, s) dx - v_1'(s)\} + \beta \int_0^T u_2(Z(x)) f_s(x, s) dx \\ + \lambda \left( \int_0^T u_1(Y(x)) f_{ss}(x, s) dx - v_1''(s) \right) = 0.$$

(28) kann umgeformt werden zu

$$(30) \quad \frac{u_2'(R_2 + P - I(x))}{u_1'(R_1 - P - x + I(x))} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \frac{f_s(x, s)}{f(x, s)}.$$

(29) vereinfacht sich wegen (13) zu

$$(31) \quad \frac{\partial L}{\partial s} = \beta \int_0^T u_2(Z(x)) f_s(x, s) dx + \lambda \left( \int_0^T u_1(Y(x)) f_{ss}(x, s) dx - v_1''(s) \right) = 0.$$

Der erste Term in diesem Ausdruck, der den mit  $\beta$  gewichteten Grenzertrag der Schadenverhütung für den Rückversicherer darstellt, ist nicht-negativ (vgl. den Beweis im Anhang). Daraus jedoch folgt, wiederum mit (31),  $\lambda \geq 0$  und somit sogar  $\lambda > 0$ , eine Eigenschaft, die für die weitere Charakterisierung des Second-best-Optimums von entscheidender Bedeutung ist.

Wenden wir uns nun der Gleichung (30) zu. Diese zeigt einen bedeutenden strukturellen Einfluss unvollkommener Information auf die Lösung. Der Unterschied zur entsprechenden Charakteristik für Pareto-optimale Risikoteilung bei vollständiger Information besteht in dem zweiten Term auf der rechten Seite. Zusätzlich zur reinen Risikoteilungsproblematik wird durch diesen Term die Anreizproblematik berücksichtigt.

Das Ergebnis entspricht dem Resultat bei symmetrischer Information nur im Fall  $\lambda = 0$  oder wenn die Likelihood Ratio konstant null ist. Es gilt jedoch  $\lambda > 0$ , und eine verschwindende Likelihood Ratio impliziert  $f_s(x, s) = 0$  und damit  $F_s(x, s) = 0$  im Widerspruch zu unseren Annahmen.

Als zentrales Ergebnis ist festzuhalten, dass bei asymmetrischer Information das Verhältnis der Grenznutzen nicht mehr konstant ist, sondern abhängig von der Likelihood Ratio variiert. Welche Konsequenzen dieser zusätzliche Term in der notwendigen Bedingung für den Verlauf der optimalen Rückversicherungsform hat, soll nun untersucht werden.

Differenziert man in (30) nach  $x$ , so erhält man folgenden Ausdruck (in verkürzender Schreibweise):

$$(32) \quad \frac{u_2'' u_1' (-dI/dx) - u_2' u_1'' (dI/dx - 1)}{(u_1')^2} = \frac{\lambda}{\beta} \frac{\partial(f_s/f)}{\partial x}.$$

Es folgt

$$(33) \quad \frac{u_2'}{u_1'} \left[ \frac{u_2''}{u_2'} \left( -\frac{dI}{dx} \right) - \frac{u_1''}{u_1'} \left( \frac{dI}{dx} - 1 \right) \right] = \frac{\lambda}{\beta} \frac{\partial(f_s/f)}{\partial x}.$$

Nach Einsetzen der Arrow-Pratt-Maße  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) und unter Verwendung von (30) erhält man

$$(34) \quad r_2(Z(x)) \frac{dI}{dx} + r_1(Y(x)) \frac{dI}{dx} - r_1 = \frac{\frac{\partial(f_s/f)}{\partial x}}{\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{f_s}{f}}$$

und damit

$$(35) \quad \frac{dI}{dx} = \frac{r_1}{r_1(Y(x)) + r_2(Z(x))} + \frac{1}{r_1(Y(x)) + r_2(Z(x))} \frac{\frac{\partial(f_s/f)}{\partial x}}{\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{f_s}{f}}.$$

Eine Interpretation des sich ergebenden Verlaufs der Entschädigungsfunktion erfolgt im nächsten Abschnitt.

#### D.5 Vergleich der optimalen Entschädigungsfunktion bei vollständiger und asymmetrischer Information

In diesem Abschnitt werden, ausgehend von den bisher abgeleiteten Charakteristika Pareto-optimaler Risikoteilungsregeln bei vollständiger Information einerseits und bei asymmetrischer Information, also moralischem Risiko, andererseits, die strukturellen Unterschiede

zwischen diesen Lösungen herausgearbeitet. Die folgende Tabelle stellt zunächst noch einmal die zentralen Merkmale der first-best-optimalen Rückversicherungsform den Eigenschaften der Second-best-Lösung gegenüber (dabei werden wiederum zur Verkürzung der Schreibweisen die Argumente der Funktionen teilweise nicht angegeben):

**Tabelle 1:** Eigenschaften der optimalen Rückversicherungsdeckung bei symmetrischer Information und moralischem Risiko

	<i>Informationsverteilung</i>	
	<i>Symmetrisch</i>	<i>moralisches Risiko</i>
<i>Bedingung erster Ordnung</i>	(10) $\frac{u'_2(Z(x))}{u'_1(Y(x))} = \frac{\alpha}{\beta}$	(30) $\frac{u'_2(Z(x))}{u'_1(Y(x))} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \frac{f_s(x,s)}{f(x,s)}$
<i>Steigung der Entschädigungsfunktion</i>	(11) $\frac{dI}{dx} = \frac{r_1}{r_1 + r_2}$	(35) $\frac{dI}{dx} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_1 + r_2} \frac{\frac{\partial(f_s/f)}{\partial x}}{\frac{\alpha}{\lambda} + \frac{f_s}{f}}$

Im Fall optimaler Risikoteilung bei symmetrischer bzw. vollständiger Information entspricht das Verhältnis der Grenznutzen von Erstversicherer und Rückversicherer stets einer Konstanten:  $\alpha/\beta$ . Die Steigung der optimalen Rückversicherungsdeckung hängt lediglich von der Risikoeinstellung der Vertragspartner ab.

Bei Informationsasymmetrie bedarf es einer gesonderten Beachtung der Anreizwirkung der Versicherungsdeckung hinsichtlich der Schadenminderungsmaßnahmen des Erstversicherers. In dieser Konstellation muss die Wirkung von Schadenminderungsaktivitäten auf die Schadenverteilung berücksichtigt werden. Dies spiegelt sich im zweiten Term auf der rechten Seite der Gleichung (30) wider.  $\lambda/\beta$  ist positiv. Die Likelihood Ratio gibt das Verhältnis der Reaktion der Dichtefunktion auf eine marginale Erhöhung der Schadenminderungsaktivität zum Wert der Dichtefunktion selbst an. Zwei Bereiche möglicher Schadenhöhen sind dabei zu unterscheiden:  $x^+ = \{x \mid f_s(x,s) > 0\}$  und  $x^- = \{x \mid f_s(x,s) < 0\}$  (wegen der Bedingung (MLRP) stellen diese Mengen jeweils Intervalle dar, da  $f_s(x,s)$  nur einen Vorzeichenwechsel aufweisen kann). Das Verhältnis der Grenznutzen muss also im Vergleich zur Situation mit vollständiger Information größer ausfallen, wenn  $f_s(x,s) > 0$  ist, und geringer, wenn  $f_s(x,s) < 0$  ist.

Man beachte nun, dass das Verhältnis der Grenznutzen (linke Seite in (30)) bei gegebenem  $x$  in  $I$  streng wächst. Bezeichnen wir mit  $I^*(x)$  die optimale Entschädigungsfunktion bei vollständiger Information, so folgt  $I(x) > I^*(x)$ , wenn  $x \in x^+$  und  $I(x) < I^*(x)$ , wenn  $x \in x^-$ . Die Versicherungsleistung wird tendenziell für Bereiche der Schadenverteilung, deren Wahrscheinlichkeit durch ein erhöhtes  $s$  steigt, erhöht und umgekehrt für Bereiche, deren Wahrscheinlichkeit durch ein erhöhtes  $s$  sinkt, vermindert.<sup>27</sup> Die Entschädigungsfunktionen des First- und des Second-Best-Vertrages weisen einen Schnittpunkt auf.

Die Steigung einer optimalen Entschädigungsfunktion gemäß (11) hängt lediglich von den Risikoaversionsparametern der beiden Parteien ab. Dabei gilt  $0 < dI/dx < 1$  für  $x \in [0, T]$ . Im Vergleich zu diesem Resultat ergibt sich bei Informationsasymmetrie durch den zweiten Term auf der rechten Seite in (35) eine Änderung. Dieser ist aufgrund der Annahme einer monoton in  $x$  fallenden Likelihood Ratio mit  $\lambda > 0$  (und wegen der Bedingung (30)) negativ. Damit ist die Steigung der Versicherungsdeckung stets geringer als in der First-Best-Lösung.

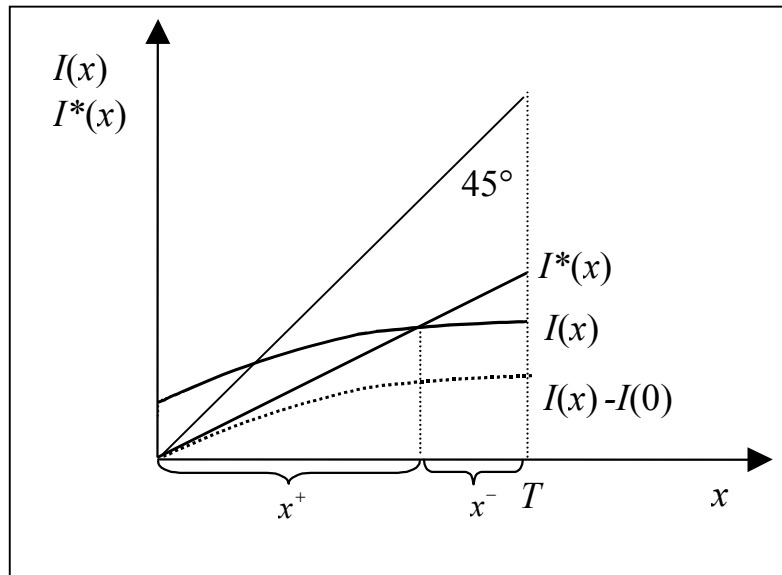
Man beachte, dass aufgrund dieser Merkmale auch eine Lösung ausgeschlossen ist, die eine Kombination der idealen Entschädigungsfunktion bei vollständiger Information mit einer Abzugsfranchise durch eine in bestimmten Schadenbereichen konvexe Funktion approximiert. Ferner ist nun insbesondere auch bewiesen, dass im betrachteten Optimum  $dI/dx < 1$  gilt und deshalb die entsprechende Nebenbedingung (26) bei der Ermittlung der Lösung ignoriert werden konnte.

Abbildung 1 skizziert einen möglichen Verlauf der Versicherungsleistung für den Fall konstanter absoluter Risikoaversion.

---

<sup>27</sup> Vgl. auch das Ergebnis bei Rees (1985), S. 22.

**Abbildung 1:** Vergleichende Skizze der Versicherungsdeckung bei symmetrischer und bei asymmetrischer Information (und CARA)



Genauere Aussagen über die optimale Rückversicherungsform sind ohne konkretisierende Annahmen über die Risikoaversionsparameter, die Gewichte, die Likelihood Ratio sowie eventuelle Beschränkungen der Versicherungsdeckung nicht zu treffen. Prinzipiell existiert die Möglichkeit, dass die Steigung der Entschädigungsfunktion negativ wird, wenn der zweite Term auf der rechten Seite in (35) sehr groß wird. Die Vereinbarung einer solchen Lösung, die also z.B. ab einer gewissen Schadenhöhe abnehmende Kompensationszahlungen des Rückversicherers vorsieht, ist jedoch aufgrund der damit offensichtlich verbundenen Gefahr von Anreizverzerrungen im Zusammenhang mit der Offenlegung der Schäden tatsächlich kaum denkbar und wäre sinnvollerweise durch eine entsprechende zusätzliche Nebenbedingung auszuschließen.

Wenn man aber einmal den Fall betrachtet, dass eine negative Steigung der optimalen Entschädigungsfunktion im Bereich des Trägers der Schadenverteilung nicht vorkommt, so lassen sich weitere Aussagen über die Wirkung asymmetrischer Information ableiten: Es wurde in dieser Arbeit unterstellt, dass das Rückversicherungsbudget konstant gehalten wird. Ist nun gewährleistet, dass im Fall mit moralischem Risiko die Steigung in (35) nicht negativ wird, so ergibt sich eine naheliegende Interpretation der Tatsache, dass für  $x \in x^+$  die optimale Rückversicherungsleistung höher ausfällt als bei vollständiger Information. In diesem Fall stellt nämlich  $I(0) > 0$  eine deterministische Transferzahlung des Rückversicherers an den Erstversicherer dar. Es ist dann sinnvoll, den normierten Vertrag  $(I(x) - I(0), P - I(0))$  zu betrachten. Die tatsächliche Rückversicherungsprämie ist unter

diesen Voraussetzungen im Fall asymmetrischer Information also geringer. Ferner wäre  $I(x) - I(0) < I^*(x)$  für positive Schadenhöhen (vgl. Abbildung 1).

Die Second-Best-Lösung stellt den bestmöglichen Kompromiss zwischen den beiden zueinander im Konflikt stehenden Zielen der Risikoteilung und Anreizsetzung dar.<sup>28</sup> Die Effizienzverluste bzw. „*Agency Costs*“<sup>29</sup> kommen dabei u.a. in der suboptimalen Risikoallokation zum Ausdruck, da von der Selbstbeteiligung des Erstversicherers auch die Motivation zur Wahrnehmung von Schadenminderungsmöglichkeiten ausgehen muss, so dass ceteris paribus bei asymmetrischer Information der Erstversicherer stärker an einer marginalen Erhöhung des Schadens beteiligt wird. Betragsmäßig nimmt also mit dem Schaden auch der Selbstbehalt des Erstversicherers zu.

### E. Schlussbemerkungen

Gegenstand unserer Überlegungen war die Gestalt Pareto-optimaler Rückversicherungsarrangements bei moralischem Risiko. Es hat sich gezeigt, dass unter den Voraussetzungen des betrachteten Modellrahmens die ideale Rückversicherungsform flacher verläuft als bei vollständiger Information. Sie führt zu einer stärkeren Selbstbeteiligung des Erstversicherers in der Form, dass – ausgehend von einer beliebigen Schadenhöhe – eine Erhöhung des Schadens in geringerem Maße vom Rückversicherer übernommen wird als bei optimaler Risikoallokation.

Eine solche Lösung bedeutet also, dass in jedem Bereich der Schadenverteilung zusätzliche Sorgfaltsanreize gesetzt werden. Dies erscheint im Zusammenhang mit der in dieser Arbeit verwendeten Modellierung einer stetigen Verteilung der Schadenhöhe, die durch Schadenminderung beeinflusst werden kann, sehr plausibel. Betragsmäßig fixierte Selbstbeteiligungen in der Form von Abzugsfranchisen (in der Rückversicherung spricht man auch von nicht-proportionaler Rückversicherung), die in der Literatur häufig als Instrument gegen moralisches Risiko vorgeschlagen werden, wären hingegen in diesem Kontext kein geeignetes Instrument; denn sie treffen den Erstversicherer in jedem Fall, da sie ihn auch bzw. gerade an den kleinen Schäden beteiligen. Kleine Schäden sind jedoch in unserem Modellkontext ein Signal für sorgfältiges Handeln und sollten somit nicht besonders stark negativ sanktioniert werden. Vielmehr zeigt unsere Analyse, dass der Betrag der Selbstbeteiligung mit der Scha-

---

<sup>28</sup> Vgl. *Spence/Zeckhauser* (1971), S. 385.

<sup>29</sup> Vgl. *Jensen/Meckling* (1976), S. 308.

denhöhe wächst. Ferner kann auch eine Lösung ausgeschlossen werden, die eine Abzugsfranchise approximiert.

Die ökonomische Begründung für dieses Resultat besteht darin, dass eine Selbstbeteiligung in der Form eines festen Betrages nur dann als Bestandteil einer Second-best-Lösung als angemessen ist, wenn die Tatsache, dass überhaupt ein Schaden eingetreten ist, sanktioniert werden soll. Dies ist dann sinnvoll, wenn die Verteilung des Schadens positive Wahrscheinlichkeitsmasse für den Wert null besitzt und die entsprechende Punktwahrscheinlichkeit sorgfaltsabhängig ist.<sup>30</sup> Für die Fragestellung dieser Arbeit jedoch, bei der es um die Abbildung des zufälligen Schadens aus einem versicherten (Teil-)Bestand geht, erscheint die Modellierung mit Hilfe einer (reinen) stetigen Verteilung angemessen.

Die vorgestellte Analyse bietet in vielen Fragen Ansatzpunkte für weitere Forschung. So ist beispielsweise von Interesse, inwiefern sich vor allem durch das Zugrundelegen alternativer Bedingungskataloge für die Verwendung des First-Order-Ansatzes eventuell die Ergebnisse verallgemeinern lassen. Ferner könnte eine detaillierte Untersuchung der Wirkung asymmetrischer Information auf den Umfang der Rückversicherungsnachfrage, die hier nur angedeutet werden konnte, zusätzliche Erkenntnisse liefern. Schließlich ist von Interesse, wie sich die Berücksichtigung schadenhöhenabhängiger Transaktionskosten auf die optimale Lösung auswirken würde.

---

<sup>30</sup> Für einen entsprechenden Modellansatz mit beeinflussbarer Schadeneintrittswahrscheinlichkeit vgl. *Winter*, 2000, und *Bender*, 2002, S. 130 ff.



## Literatur

- Arnott, Richard J. (1981): Moral Hazard and Competitive Insurance Markets, in: Georges Dionne (Hrsg.): Contributions to Insurance Economics, Boston u.a., 325-358.
- Arrow, Kenneth J. (1963): Uncertainty and the Welfare Economics of Medical Care, in: American Economic Review 53, S. 941-973.
- Ashby, Simon G./Diacon, Stephen R. (1998): The Corporate Demand for Insurance: A Strategic Perspective, in: The Geneva Papers on Risk and Insurance 23, S. 34-51.
- Bender, Klaus (2002), Die optimale Rückversicherungsform von Katastrophenrisiken bei Moral Hazard – Eine agencythoretische Untersuchung des Katastrophenschadenexzedenten, Karlsruhe.
- Borch, Karl (1960): The Safety Loading of Reinsurance Premiums, Skandinavisk Aktuarietidsskrift 43, S. 163-184.
- Borch, Karl (1962): Equilibrium in a Reinsurance Market, in: Econometrica 30, S. 424-444.
- Bühlmann, Hans/Jewell, William S. (1979): Optimal Risk Exchanges, in: Astin Bulletin 10, S. 243-262.
- Clarke, Frank H./Darrough, Masako N. (1980): Optimal Incentives Schemes – Existence and Characterization, in: Economics Letters 5, S. 305-310.
- Dionne, Georges/Doherty, Neil A. (1993): Insurance with Undiversifiable Risk: Contract Structure and Organizational Form of Insurance Firms, in: Journal of Risk and Uncertainty 6, S. 187-203.
- Doherty, Neil A./Tinic, Seha M. (1981): Reinsurance under Conditions of Capital Market Equilibrium: A Note, in: Journal of Finance 36, S. 949-953.
- Doherty, Neil A./Smetters, Kent (2000): Moral Hazard in Reinsurance Markets, Working Paper, Department of Insurance and Risk Management, The Wharton School, University of Pennsylvania.
- Doherty, Neil A./Richter, Andreas (2002): Moral Hazard, Basis Risk, and Gap Insurance, in: Journal of Risk and Insurance 69, S. 9-24.
- Eisen, Roland (1976): Unsicherheit und Information - Unkontrollierbares Verhalten und das Problem des moralischen Risikos, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik 191, S. 193-211.
- Eisen, Roland (1981): Information and Observability - Some Notes on the Economics of Moral Hazard and Insurance, in: The Geneva Papers on Risk and Insurance 6, S. 22-33.
- Gerathewohl, Klaus u.a. (1976): Rückversicherung, Grundlagen und Praxis, Band I, Karlsruhe.

- Gillenkich, Robert (1997): Gestaltung optimaler Anreizverträge: Motivation, Risikoverhalten und beschränkte Haftung, Wiesbaden.
- Gollier, Christian (1992): Economic Theory of Risk Exchanges: A Review, in: Georges Dionne (Hrsg.): Contributions to Insurance Economics, Boston u.a., S. 3-23.
- Greenwald, Bruce C./Stiglitz, Joseph E. (1990): Asymmetric Information and the New Theory of the Firm: Financial Constraints and Risk Behavior, in: American Economic Review (Papers and Proceedings) 80, S. 160-165.
- Holmström, Bengt (1977): On Incentives and Control in Organizations, Dissertation Stanford University.
- Holmström, Bengt (1979): Moral hazard and observability, in: Bell Journal of Economics 10, S. 74-91.
- Jensen, Michael C./Meckling, William H. (1976): Theory of the Firm: Managerial Behaviour, Agency Costs, and Ownership Structure, in: Journal of Financial Economics 3, S. 305-360.
- Jewitt, Ian (1988): Justifying the First-Order Approach to Principal-Agent Problems, in: Econometrica 56, S. 1177-1190.
- Kiln, Robert (1991): Reinsurance in Practice, 3. Auflage, London.
- Lee, Kangoh (1998): Risk Aversion and Self-Insurance-cum-Protection, in: Journal of Risk and Uncertainty 17, S. 139-150.
- Mas-Colell, Andreu/Whinston, Michael D./Green, Jerry R. (1995): Microeconomic Theory, Oxford.
- Mayers, David/Smith, Clifford W. (1982): On the Corporate Demand for Insurance, in: Journal of Business 55, S. 281-296.
- Milgrom, Paul R. (1981): Good News and Bad News: Representation Theorems and Applications, in: Bell Journal of Economics 12, S. 380-391.
- Mirrlees, James A. (1974): Notes on Welfare Economics, Information and Uncertainty, in: Balch, Michael S./McFadden, Daniel L. /Wu, Shih-yen (Hrsg.): Essays on Economic Behaviour under Uncertainty, Amsterdam u.a., S. 243-258.
- Mirrlees, James A. (1999): The Theory of Moral Hazard and Unobservable Behaviour: Part I, in: Review of Economic Studies 66, S. 3-21.
- Nell, Martin (1993): Versicherungsinduzierte Verhaltensänderungen von Versicherungsnehmern: Eine Analyse der Substitutions-, Moral Hazard- und Markteffekte unter besonderer Berücksichtigung der Krankenversicherung, Karlsruhe.
- Nell, Martin/Richter, Andreas (2002): The Design of Liability Rules for Highly Risky Activities – Is Strict Liability Superior When Risk Allocation Matters?, erscheint im International Review of Law and Economics.
- Page, Frank H. (1987): The Existence of Optimal Contracts in the Principal-Agent Model, in: Journal of Mathematical Economics 16, S. 157-167.

- Pauly, Mark V. (1974): Overinsurance and Public Provision of Insurance: The Role of Moral Hazard and Adverse Selection, in: *Quarterly Journal of Economics* 88, S. 44-62.
- Raviv, Artur (1979): The Design of an Optimal Insurance Policy, in: *American Economic Review* 69, S. 84-96.
- Rees, Ray (1985): The Theory of Principal and Agent, Part 1 and 2, in: *Bulletin of Economic Research* 37, S. 2-26 und S. 75-95.
- Richter, Andreas (2002): Moderne Finanzinstrumente im Rahmen des Katastrophen-Risk-Managements – Basisrisiko versus Ausfallrisiko, erscheint in der Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung.
- Rogerson, William P. (1985): The First-Order Approach to Principal-Agent Problems, in: *Econometrica* 53, S. 1357-1367.
- Ross, Stephen A. (1973): The Economic Theory of Agency: The Principal's Problem, in: *American Economic Review* 63, S. 134-139.
- Shavell, Steven (1979): On Moral Hazard and Insurance, in: *Quarterly Journal of Economics* 93, S. 541-562.
- Spence, A. Michael/Zeckhauser, Richard J. (1971): Insurance, Information and Individual Action, in: *American Economic Review (Papers and Proceedings)* 61, S. 380-387.
- Whitt, Ward (1980): Uniform Conditional Stochastic Order, in: *Journal of Applied Probability* 1, S. 112-123.
- Wilson, Robert (1968): The Theory of Syndicates, in: *Econometrica* 36, S. 119-132.
- Winter, Ralph A. (2000): Optimal Insurance under Moral Hazard, in: Georges Dionne (Hrsg.): *Handbook of Insurance*, Boston u.a., S. 155-183.

**Anhang**

Es gilt (vgl. (31)):

$$(36) \quad \int_0^T u_2(Z(x)) f_s(x, s) dx \geq 0 :$$

*Beweis:*

Partielle Integration liefert wie bei (22):

$$(37) \quad \int_0^T u_2(Z(x)) f_s(x, s) dx = [u_2(Z(x)) F_s(x, s)]_0^T - \int_0^T u_2'(Z(x)) Z'(x) F_s(x, s) dx$$

Zum Beweis des Gegenteils wird angenommen, der Ausdruck sei negativ. Gemäß (37) ist dies nur möglich, wenn es Schadenhöhen gibt, für die im Optimum gilt:  $dZ/dx > 0$  bzw.  $dI/dx < 0$ . Nun betrachte man die Konsequenzen einer Erhöhung von  $x$  in (30). Da die linke Seite wegen  $dI/dx < 1$  in  $x$  fällt und wegen (MLRP) folgt  $\lambda > 0$ . Andererseits ist jedoch (31) nur erfüllt, wenn  $\lambda < 0$ . Damit ergibt sich ein Widerspruch!

QED

## Working Papers on Risk and Insurance

- No 9: **Klaus Bender, Andreas Richter**, Optimales Vertragsdesign bei moralischem Risiko in der Rückversicherung, October 2002.
- No 8: **Jörg Schiller**, The Impact of Insurance Fraud Detection Systems, October 2002.
- No 7: **Martin Nell, Jörg Schiller**, Erklärungsansätze für vertragswidriges Verhalten von Versicherungsnehmern aus Sicht der ökonomischen Theorie, May 2002, erscheint in der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft.
- No 6: **Walter Karten**, Ökonomische Aspekte einer EU-Richtlinie zur Versicherungsvermittlung, January 2002, erschienen in: Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, 91. Jg. (2002), S. 43 – 60.
- No 5: **Andreas Richter, Jochen Ruß**, Tax Arbitrage in the German Insurance Market, December 2001, erschienen in: Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, 25. Jg. (2002), S. 659 – 672.
- No 4: **Martin Nell**, Staatshaftung für Terrorrisiken?, Dezember 2001, erschienen in: ifo Schnelldienst, 54. Jg. (2001), Heft 24, S. 6 – 9.
- No 3: **Andreas Richter**, Moderne Finanzinstrumente im Rahmen des Katastrophen-Risk-Managements – Basisrisiko versus Ausfallrisiko, September 2001, erscheint in der Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung.
- No 2: **Martin Nell**, Managed Claims: Zur Notwendigkeit einer vertikalen Integration von Versicherungs- und Reparaturleistungen, August 2001, erschienen in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 53. Jg. (2001), 47. Sonderheft, S. 207-231.
- No 1: **Martin Nell, Andreas Richter**, The Design of Liability Rules for Highly Risky Activities – Is Strict Liability the Better Solution?, June 2001, forthcoming: International Review of Law and Economics.

**For orders please contact / Kontaktadresse für Bestellungen:**

Prof. Dr. Martin Nell  
Geschäftsführender Direktor des  
Instituts für Versicherungsbetriebslehre  
Von-Melle-Park 5  
D-20146 Hamburg

Tel.: +49-(0)40-42838-4014

Fax: +49-(0)40-42838-5505

E-mail: [martin.nell@rrz.uni-hamburg.de](mailto:martin.nell@rrz.uni-hamburg.de)

<http://www.rrz.uni-hamburg.de/IfVBL/wp.htm>

Mit freundlicher Unterstützung des  
Vereins zur Förderung der Versicherungswissenschaft in Hamburg e.V.