

Pierdzioch, Christian; Stadtmann, Georg

**Working Paper — Digitized Version**

## Komplexe Aktien- und Wechselkursdynamik in einem makroökonomischen Modell mit heterogener Erwartungsbildung

Kiel Working Paper, No. 911

**Provided in Cooperation with:**

Kiel Institute for the World Economy – Leibniz Center for Research on Global Economic Challenges

*Suggested Citation:* Pierdzioch, Christian; Stadtmann, Georg (1999) : Komplexe Aktien- und Wechselkursdynamik in einem makroökonomischen Modell mit heterogener Erwartungsbildung, Kiel Working Paper, No. 911, Kiel Institute of World Economics (IfW), Kiel

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/46926>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

# Kieler Arbeitspapiere

# Kiel Working Papers

Kieler Arbeitspapier Nr. 911

**Komplexe Aktien- und Wechselkursdynamik  
in einem makroökonomischen Modell  
mit heterogener Erwartungsbildung**

von

Christian Pierdzioch und Georg Stadtmann



Institut für Weltwirtschaft an der Universität Kiel  
The Kiel Institute of World Economics

ISSN 0342 - 0787

Institut für Weltwirtschaft  
Düsternbrooker Weg 120, D - 24105 Kiel

Kieler Arbeitspapier Nr. 911

**Komplexe Aktien- und Wechselkursdynamik  
in einem makroökonomischen Modell  
mit heterogener Erwartungsbildung**

von

Christian Pierdzioch und Georg Stadmann

883 982

Februar 1999

Für Inhalt und Verteilung der Kieler Arbeitspapiere sind die jeweiligen Autoren allein verantwortlich, nicht das Institut.

Da es sich um Manuskripte in einer vorläufigen Fassung handelt, wird gebeten, sich mit Anregung und Kritik direkt an die Autoren zu wenden und etwaige Zitate vorher mit ihnen abzustimmen.

## Abstract

In the present paper a non-linear dynamic macroeconomic model featuring temporary commodity market disequilibria und heterogeneous expectations on asset markets is utilized to simulate complex stock price and foreign exchange rate trajectories. The model is employed to highlight the implications of chartist and fundamentalist trading strategies for the volatility of asset prices. Analyses of the results of numerical simulations are carried out using techniques capable of detecting chaotic dynamics. The analytical framework is also used to study the implications of integrating asset prices into a money supply rule for the variability of asset prices and output. The results of the analyses lead us to conclude that depending upon the structural parameters of the model such a monetary policy might amplify the volatility of financial market prices and the output path.

Komplexe Aktien- und Wechselkurstrajektorien werden im Rahmen eines nichtlinearen dynamischen makroökonomischen Modells mit träger Outputanpassung am Gütermarkt und heterogener Erwartungsbildung auf den Assetmärkten abgeleitet. Die Implikationen des Aufeinandertreffens von Chartisten und Fundamentalisten für die Assetpreisvolatilität werden beleuchtet. Dabei gelangen Analyseverfahren der Chaostheorie zur Anwendung. In einem weiteren Analyseschritt werden die Auswirkungen einer an Assetpreisen orientierten Geldpolitik auf die Variabilität der Finanzmarktvariablen und des Outputs betrachtet. Die modelltheoretische Analyse zeigt, daß in Abhängigkeit von den Modellparametern eine zunehmende Assetpreissensitivität der Geldpolitik die Volatilität der Assetpreise und des Outputs erhöhen kann.

*Key words:* Aktien- und Wechselkursdynamik, deterministisches Chaos, heterogene Erwartungsbildung, technische Kursanalyse, monetary conditions index

*JEL Classification:* F41, F47, G14

Christian Pierdzioch  
Institut für Weltwirtschaft  
– Abteilung V –  
Düsternbrooker Weg 120  
D-24105 Kiel  
Tel.: (0)49-431-8814-269  
Fax: (0)49-431-8814-525  
Email: c.pierdzioch@ifw.uni-kiel.de

Georg Stadtmann  
WHU-Koblenz  
– Lehrstuhl VWL II –  
Burgplatz 2  
56179 Vallendar  
Tel: 0261/6509/283  
Fax: 0261/6509/289  
Email: stadtmann@whu-koblenz.de

## Inhaltsverzeichnis

<b>I. EINLEITUNG .....</b>	<b>1</b>
<b>II. DAS MODELL .....</b>	<b>4</b>
A) DIE STRUKTURELLEN GLEICHUNGEN .....	4
B) ANALYSE DER MODELLDYNAMIK .....	10
<b>IV. ANALYSE DER MODELLDYNAMIK MITTELS NUMERISCHER SIMULATIONEN .....</b>	<b>11</b>
<b>III. EFFEKTE EINER AN ASSETPREISEN ORIENTIERTEN GELDANGEBOTSPOLITIK.....</b>	<b>18</b>
<b>IV. FAZIT.....</b>	<b>21</b>
<b>V. ANHANG: ANMERKUNGEN ZU DEN ANALYSEVERFAHREN .....</b>	<b>23</b>
A) SELTSAME ATTRAKTOREN UND SENSITIVITÄT BEZÜGLICH DER ANFANGSBEDINGUNGEN .....	23
B) KORRELATIONSINTEGRAL, KORRELATIONSDIMENSION UND FRAKTALE DIMENSION .....	25
C) KOLMOGOROV-ENTROPIE UND LYAPUNOV EXPONENTEN.....	27
D) HURST EXPONENT .....	28
E) TESTSTATISTIKEN ZUR IDENTIFIKATION VON DETERMINISTISCHEM CHAOS .....	30
LITERATUR .....	31
TABELLEN .....	36
ABBILDUNGEN.....	37

## I. Einleitung<sup>1</sup>

Lange Zeit wurden in der theoretisch orientierten makroökonomischen Forschung Versuche unternommen, unter Zuhilfenahme linearer dynamischer Modelle mit rationaler Erwartungsbildung (Muth 1961) zu einem besseren Verständnis der Fluktuationen von Aktien- und Wechselkursen zu gelangen (vgl. Blanchard 1981, Gavin 1989, Reither 1990, Nelles 1996). Charakteristisch für diese Modellansätze ist, daß das beobachtete Niveau der Assetpreise von einem Kranz makroökonomischer Fundamentaldaten abhängt. An Finanzmärkten beobachtbare Preisveränderungen werden auf das Eintreffen neuer bewertungsrelevanter Informationen zurückgeführt, welche gemäß dem Konzept effizienter Märkte (Fama 1968) von den Wirtschaftssubjekten unmittelbar bei der Preisbildung berücksichtigt werden.

Ergebnisse der jüngeren empirischen Forschung lassen erkennen, daß diese linearen makroökonomischen Modelle das Geschehen auf den Finanzmärkten unvollständig reflektieren und damit die Interaktion von Finanzmarktgeschehen und volkswirtschaftlichen Variablen nicht zufriedenstellend erfassen. So zeigen Flood und Rose (1995), daß die Volatilität von Wechselkursen weitgehend losgelöst ist von der Schwankungsintensität wichtiger makroökonomischer Größen wie etwa Geldmenge und Sozialprodukt. Die Ergebnisse einer von Schwert (1989) durchgeführten empirischen Studie zeigen, daß zwischen realwirtschaftlichen Veränderungen und Schwankungen von Aktienkursen allenfalls ein schwacher Zusammenhang besteht. Eine ähnliche Schlußfolgerung ergibt sich aus den Arbeiten von Shiller (1981) und West (1988), die nachweisen, daß die Variabilität von Aktienkursen die Schwankungsintensität der Dividenden übertrifft. Geht man wie Blanchard (1981) in seiner theoretischen Analyse davon aus, daß die Dividendenzahlungen von der Einkommensentwicklung abhängen, so lassen die angeführten empirischen Arbeiten darauf schließen, daß die Preisbildung an den Finanzmärkten nicht allein von der Entwicklung makroökonomischer Fundamentaldaten getrieben wird. Bestätigt wird diese Hypothese durch die Arbeiten Allen und Taylor (1990) oder Frankel und Froot (1983) für den Devisenmarkt

---

<sup>1</sup> Die Autoren sind Claudia Buch, Jörg Döpke, Michael Frenkel, Joachim Scheide und Günther Schmitt für zahlreiche hilfreiche Anmerkungen zu Dank verpflichtet. C.P. bedankt sich zudem für die von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Projekts "Implikationen der Verwendung von Derivaten für Geldpolitik und Bankensektor" gewährte Unterstützung. Die Autoren tragen selbstredend die Verantwortung für verbliebene Fehler und Obskuritäten.

sowie von Haugen et al. (1991) für den Aktienmarkt. Die Autoren dieser empirischen Studien kommen zu dem Ergebnis, daß Kursbewegungen an Finanzmärkten nicht zuletzt auf "noise" und auf Herdenverhalten der Händler und auf die Anwendung von Instrumenten der technischen Kursanalyse (Chartisten) zurückgeführt werden können.

In der von diesen empirischen Befunden angestoßenen theoretischen Literatur hat sich insbesondere jener Ansatz als fruchtbar erwiesen, der bei der formalen Abbildung des Finanzmarktgeschehens heterogene Erwartungen der Marktteilnehmer berücksichtigt. So haben De Long et al. (1990) und Froot et al. (1992) gezeigt, wie die Interaktion von Wirtschaftssubjekten, welche an Fundamentaldaten orientierte Bewertungsverfahren anwenden, und sogenannten *noise traders* zu multiplen Gleichgewichtslösungen an Assetmärkten führen kann. Unter Zuhilfenahme eines zeitkontinuierlichen dynamischen Modells zeigen Frankel und Froot (1990, 1998), wie der Einfluß von Chartisten die Bildung spekulativer Preisblasen an Assetmärkten hervorrufen kann. Obgleich mit diesen Modellansätzen das Abweichen von Finanzmarktpreisen von dem inneren Wert der entsprechenden Assets theoretisch zufriedenstellend erklärt werden kann, bleiben die Implikationen des Zusammenspiels von Chartisten und Fundamentalisten für die dynamischen Eigenschaften von Assetpreisen sowie für deren Volatilität weitgehend aus der Analyse ausgeklammert.

In Arbeiten von De Grauwe und Vasanten (1990), De Grauwe und Dewachter (1992, 1993) sowie De Grauwe, Dewachter und Embrechts (1993) ist verdeutlicht worden, daß die Abbildung komplexer, nachhaltiger und nicht ausschließlich von volkswirtschaftlichen Fundamentaldaten getriebener Wechselkursdynamik durch den Rückgriff auf nichtlineare Modellierungsansätze erreicht werden kann. Die Dynamik des Wechselkurses wird auch in diesen makroökonomischen Modellen offener Volkswirtschaften auf entscheidende Weise durch das Zusammenspiel von Fundamentalisten und Chartisten bestimmt. Während die Fundamentalisten bei der Erwartungsbildung von der Rückkehr des Wechselkurses zu einem langfristigen, von der Kaufkraftparitätentheorie bestimmten Gleichgewichtswert ausgehen, bilden Chartisten extrapolative und damit trendverstärkende Erwartungen. Durch Zusammenwirken dieser stabilisierenden und destabilisierenden Momente können in diesen Modellen asymptotisch stabile, zyklische, quasi-zyklische, explosive oder chaotische Assetpreistrajektorien auftreten. Die Möglichkeit, unter Rückgriff auf diese Modellansätze

sogenannte fremdartige Attraktoren und damit chaotische Wechselkurspfade generieren zu können, ist von besonderem theoretischen Interesse, da auf diese Weise dauerhafte Wechselkursfluktuationen simuliert werden können.

Die Grundidee des vorliegenden Beitrags ist es, die in diesen Ansätzen formulierte Modellstruktur aufzugreifen und bei der Integration von Finanzmarktvariablen in ein makroökonomisches Modell einer offenen Volkswirtschaft heterogene Erwartungen als entscheidenden Faktor hinter der marktinhärenten Spekulationsdynamik auf Finanzmärkten und damit der Schwankungsintensität von Assetpreisen zu berücksichtigen. Im Unterschied zu den genannten Modellen wird jedoch in der vorliegenden Arbeit die modelltheoretische Betrachtung nicht auf die Spekulationsdynamik am Devisenmarkt beschränkt. Bei der Bestimmung der Dynamik eines Assetpreises soll nicht allein der Einfluß von Fundamentalisten und Chartisten auf dem zugehörigen Finanzmarkt berücksichtigt, sondern auch die Verbindung verschiedener Finanzmärkte in die Analyse einbezogen werden. In der Tradition der Beiträge von Gavin (1989), Reither (1990) und Nelles (1996) wird eine solche Verbindung hergestellt, indem die von Blanchard (1981) entwickelte Modellwelt einer geschlossenen Volkswirtschaft mit träger Outputanpassung am Gütermarkt und einem Markt für Realkapitalanteile um arbitrageorientierte Gleichgewichtsbedingungen für den Devisen- und den Aktienmarkt erweitert wird. Die gewählte Modellierungsstrategie erlaubt es, unterschiedliche dynamische Eigenschaften von Aktien- und Wechselkursen abzubilden und gleichzeitig die Implikationen einer auf einem Markt beobachteten chaotischen Assetpreisentwicklung für die übrigen Finanzmärkte der Volkswirtschaft zu erfassen.

In dem nachfolgenden Abschnitt II werden zunächst die strukturellen Gleichungen des Modells erläutert. Dazu werden die einzelnen Bausteine des Modells zusammengefügt und nichtlineare Differenzgleichungen zur Beschreibung der Aktien- und Wechselkursdynamik sowie der Outputentwicklung hergeleitet. In Abschnitt III wird eine Analyse der dynamischen Eigenschaften der Assetpreispfade mittels numerischer Simulationen vorgenommen. In Abschnitt IV wird eine Erweiterung des Modells eingeführt, welche die Analyse der Implikationen einer an den Assetpreisen orientierten Geldpolitik auf die Volatilität dieser Finanzmarktvariablen und des Outputs ermöglicht. Letztlich zeigt dieses Beispiel, daß die Auswirkungen der Orientierung an einem "Monetary Conditions Index" von der in einer Volkswirtschaft angetroffenen spezifischen Parameterkonstellation und von den numerischen



Werten der Reaktionsparametern der Zentralbank abhängen. Die Ergebnisse von numerischen Simulationen lassen erkennen, daß eine solche geldpolitische Strategie eine Erhöhung der Volatilität der Assetpreise und damit des Outputs zur Folge haben kann. Eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse sowie ein Ausblick auf Erweiterungen und mögliche Anwendungen des Modellansatzes werden im letzten Abschnitt präsentiert. In einem Anhang werden die in den Untersuchungen zum Einsatz gelangenden formalen Konzepte aus dem Bereich der Chaostheorie erläutert.

## II. Das Modell

### *a) Die strukturellen Gleichungen*

Das Modell einer auf dem Weltkapitalmarkt kleinen offenen Volkswirtschaft besteht aus einer Gleichung für die Anpassungsdynamik am Gütermarkt, einer Gleichgewichtsbedingung für den Geldmarkt und jeweils einer Arbitragegleichgewichtsbedingung für den Aktien- und den Devisenmarkt.

Ebenso wie das Ausland sei die heimische Ökonomie auf die Produktion eines homogenen Gutes spezialisiert. Die Preise dieser Güter werden auf den Wert Eins normiert. Es wird eine durch temporäre Ungleichgewichte am Gütermarkt ausgelöste träge Entwicklung des preiselastischen Güterangebots unterstellt, welche durch eine nichtlineare Differenzgleichung erster Ordnung beschrieben werden kann:

$$(2.1) \quad Y_{t+1} / Y_t = (X_t / Y_t)^\phi$$

wobei mit  $Y_t$  der Output und mit  $X_t$  die aggregierte Güternachfrage bezeichnet werden. Gleichung (2.1) bringt zum Ausdruck, daß Veränderungen der Güternachfrage eine Anpassung des Güterangebots auslösen. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich dieser dynamische Anpassungsprozeß vollzieht, wird durch den Reaktionskoeffizienten  $\phi$  bestimmt. Für die aggregierte Güternachfrage wird folgende funktionale Form unterstellt:

$$(2.2) \quad X_t = S_t^\delta Q_t^\gamma Y_t^\alpha$$

Gemäß Gleichung (2.2) wird die Güternachfrage durch das Niveau des preisnotierten Wechselkurses  $S_t$ , des Aktienkurses  $Q_t$  und des Einkommens  $Y_t$  der gegenwärtigen Periode bestimmt. Die im Exponenten auftretenden nicht-negativen griechischen Buchstaben bezeichnen die Elastizität der aggregierten Güternachfrage bezüglich der jeweiligen Einflußfaktoren. Da von einem J-Kurveneffekt abstrahiert wird, kann eine Abwertung der heimischen Währung aufgrund der als erfüllt betrachteten Marshall-Lerner-Bedingung uneingeschränkt einen positiven Effekt auf die Güternachfrage entfalten. Zu beachten ist, daß in dem gegenwärtigen Modellkontext eine nominelle Abwertung des Wechselkurses gleichbedeutend ist mit einem realen Wertverlust der heimischen Währung. Die Berücksichtigung des Aktienkurses in Gleichung (2.2) wird motiviert durch den aus einer Veränderung der Bewertung der Realkapitalanteile folgenden Vermögens- und Bewertungseffekt. Einerseits stimuliert ein Anstieg des Aktienkurses über den Vermögenseffekt die private Konsumnachfrage. Andererseits impliziert eine Erhöhung des Aktienkursniveaus eine günstigere Bewertung des existierenden Realkapitals im Vergleich zu seinen Reproduktionskosten und stimuliert auf diese Weise die Nachfrage nach Investitionsgütern (Tobin 1969).

Das Geldmarktgleichgewicht wird durch Gleichung (2.3) beschrieben:

$$(2.3) \quad M_t = Y_t (1 + r_t)^{-\beta}$$

Das exogen von der heimische Zentralbank vorgegebene Angebot an Aussengeld  $M_t$  trifft gemäß der Gleichgewichtsbedingung (2.3) auf eine vom Einkommen und dem Zinsniveau  $r_t$  abhängige heimische Geldnachfrage. Während die Abhängigkeit der Geldnachfrage vom Einkommen die Geldhaltung aus dem Transaktionsmotiv einfängt, verdichten sich im heimischen Zinssatz die Opportunitätskosten der Kassenhaltung.

Zur Beschreibung des Devisenmarktgleichgewichts wird von risikoneutralen Wirtschaftssubjekten und perfekter Kapitalmobilität ausgegangen. Diese Annahmen haben zur

Folge, daß in- und ausländische Wertpapiere perfekte Substitute sind. Arbitragefreiheit impliziert dann für den Devisenmarkt die Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität:

$$(2.4) \quad E_t(S_{t+1}) / S_t = (1 + r_t) / (1 + r^*) \quad ,$$

wobei der ausländische Zinssatz  $r^*$  aus der Perspektive der auf dem internationalen Kapitalmarkt kleinen inländischen Volkswirtschaft als exogen gegebene Konstante behandelt werden kann. Gleichung (2.4) fordert, daß jedes internationale Zinsdifferential durch entsprechende Wechselkursänderungserwartungen kompensiert wird. Der Erwartungsoperator  $E_t$  bezeichnet die durch die Informationsmenge, die den Wirtschaftssubjekten in der Periode  $t$  zur Verfügung steht, bedingten Erwartungen.

Das Arbitragegleichgewicht am Aktienmarkt wird durch die nachfolgende Gleichung beschrieben:

$$(2.5) \quad E_t(Q_{t+1}) / Q_t = (1 + r_t)Q_{t-1} - \pi$$

wobei  $\pi$  die als eine Konstante behandelten Dividendenzahlungen darstellt. Bei der Formulierung der Arbitragegleichgewichtsbedingung für den Aktienmarkt wurde implizit von risikoneutralen Wirtschaftssubjekten und damit einer perfekten Substitutionalität risikoloser heimischer Bonds und Realkapitalanteile ausgegangen. Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.5) fängt die Opportunitätskosten einer Investition in Realkapitalanteile ein. Zu beachten ist, daß die Wirtschaftssubjekte bereits in der Periode  $t-1$  über ein Engagement am Aktienmarkt in der Periode  $t$  entscheiden müssen. Die zur Bestimmung der relativen Vorteilhaftigkeit einer Investition in Aktien heranzuziehende Alternativanlage muß mithin mit dem in der Entscheidungsperiode relevanten Aktienkurs  $Q_{t-1}$  multipliziert werden. Im Arbitragegleichgewicht muß die Rendite der Opportunität mit der Gesamrendite einer Aktienanlage, welche sich aus Kursgewinnen und Dividendenzahlungen speist, übereinstimmen.

Es verbleibt, das Modell durch Annahmen über die Aktienkurs- und Wechselkursänderungserwartungen der Wirtschaftssubjekte zu schließen. Dabei soll die in den empirischen Arbeiten von zum Beispiel Cutler et al. (1989) und Schwert (1989) für

Aktienmärkte und Flood und Rose (1995) für den Devisenmarkt herausgestellte Bedeutung der technischen Kursanalyse für die Preisbildung auf Finanzmärkten in die Modellbildung einfließen. De Grauwe, Dewachter und Embrechts (1993) folgend wird davon ausgegangen, daß auf den Assetmärkten der Volkswirtschaft sowohl Fundamentalisten als auch Chartisten angetroffen werden können. Auf aggregierter Ebene setzen sich die Markterwartungen aus den heterogenen Assetpreisänderungserwartungen dieser beiden Händlergruppen zusammen. Für die am Devisenmarkt vorherrschenden Wechselkursänderungserwartung gilt:

$$(2.6) \quad E_t(S_{t+1})/S_{t-1} = \left(E_t^c(S_{t+1})/S_{t-1}\right)^k \left(E_t^f(S_{t+1})/S_{t-1}\right)^{(1-k)}$$

dabei werden durch  $E_t^c$  und  $E_t^f$  die bedingten Wechselkursänderungserwartungen der Chartisten beziehungsweise der Fundamentalisten gekennzeichnet. Genau wie bei der für den Aktienmarkt spezifizierten Arbitragegleichgewichtsbedingung ist auch bei der funktionalen Konkretisierung der Wechselkursänderungserwartungen zu beachten, daß die Wirtschaftssubjekte sich bereits in der Periode  $t-1$  in- beziehungsweise ausländischen Wertpapieren positionieren müssen. Daher ist in Gleichung (2.6) die Erwartungsbildung auf die Periode  $t-1$  zu beziehen (vgl. ebenso De Grauwe et al. 1993).

Bezüglich der Fundamentalisten liegt es nahe, von einer regressiven Erwartungsbildung auszugehen. Es gilt:

$$(2.7) \quad E_t^f(S_{t+1})/S_{t-1} = (\bar{S}/S_{t-1})^\lambda$$

Wenn der Wechselkurs oberhalb seines langfristigen Gleichgewichtswertes liegt, werden die Fundamentalisten für die nächste Periode eine Aufwertung der heimischen Währung erwarten. Die Geschwindigkeit, mit der diese Händlergruppe eine Rückkehr des Wechselkurses zum Wert  $\bar{S}$  erwartet, wird durch den positiven Parameter  $\lambda$  modelltheoretisch abgebildet.

Im Gegensatz zu den Fundamentalisten gehen die Chartisten davon aus, daß sich ein in den letzten Perioden gebildeter Wechselkurstrend in der Zukunft fortsetzen wird. Diese Annahme kann durch die Modellierung der Erwartungsbildung als gleitendem Durchschnitt operationalisiert werden: Wenn der kurzfristige gleitende Durchschnitt (KGD) den

langfristigen gleitenden Durchschnitt (LGD) von unten durchstößt, so erwarten die Chartisten, daß sich der Aufwärtstrend weiter fortsetzt. Schneidet hingegen der kurzfristige gleitende Durchschnitt den langfristigen Durchschnitt von oben, so wird eine Reduktion des Wechselkurses erwartet. Es gilt:

$$(2.8) \quad E_t^c(S_{t+1})/S_{t-1} = \left( \frac{\text{KGD}(S_{t-1})}{\text{LGD}(S_{t-1})} \right)^{2\rho}$$

Es wird die Annahme getroffen, daß die Chartisten den kurz- und den langfristigen Durchschnittswchselkurs gemäß folgender Berechnungsformeln ermitteln:<sup>2</sup>

$$(2.9) \quad \text{KGD}(S_{t-1}) = S_{t-1} / S_{t-2}$$

$$(2.10) \quad \text{LGD}(S_{t-1}) = (S_{t-1} / S_{t-2})^{0,5} (S_{t-2} / S_{t-3})^{0,5}$$

Setzt man Gleichungen (2.9) und (2.10) in (2.8), so erhält man nach Umformung folgenden Ausdruck für die Erwartungsbildung der Gruppe der Chartisten:

$$(2.11) \quad E_t^c(S_{t+1})/S_{t-1} = (S_{t-1}/S_{t-2})^\rho (S_{t-3}/S_{t-2})^\rho$$

wobei  $\rho$  im Exponenten des Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Gleichung ein Gewichtungsfaktor ist.

Abschließend muß noch auf die Bedeutung des in Gleichung (2.7) eingeführten Exponenten  $k_t$  eingegangen werden. Mit diesem Parameter wird das Gewicht, welches den Chartisten bei der Bestimmung der aggregierten Markterwartungen zukommt, abgebildet. Zu beachten ist, daß dieser Parameter den Index  $t$  trägt und daher im Zeitverlauf nicht konstant sein muß. Es wird angenommen, daß das Gewicht der Chartisten negativ mit der Entfernung des Wechselkurses von einem langfristigen, allein von volkswirtschaftlichen Fundamentaldaten bestimmten Wechselkurs im stationären Gleichgewicht korreliert ist. Konkret wird folgende funktionale Form unterstellt (vgl. De Grauwe et al. 1993):

<sup>2</sup> Es ist leicht möglich, die spezielle funktionale Form in Gleichung (2.8) durch andere Instrumente der technischen Kursanalyse zu modifizieren oder zu ersetzen. Vgl. De Grauwe et al. (1993), S. 79 ff. für eine Diskussion verschiedener Entscheidungsregeln der Chartanalyse.

$$(2.12) \quad k_t = v / [1 + b(S_{t-1} - \bar{S})^2]$$

Wenn sich der Wechselkurs von seinem gleichgewichtigen Wert  $\bar{S}$  entfernt, nimmt der Anteil der Chartisten ab. Damit fängt Gleichung (2.12) die Annahme ein, daß mit wachsender Differenz  $S_t - \bar{S}$  das Abweichen des Wechselkurses von seinem inneren Wert immer deutlicher hervortritt und aus diesem Grunde eine immer größere Anzahl von Händlern davon ausgeht, daß eine Rückkehr des Wechselkurses zu seinem stationären Gleichgewichtswert immer wahrscheinlicher wird. Die Gewichtung bei der Aggregation der Wechselkursänderungserwartungen verschiebt sich daher in dieser Situation zu Gunsten der Fundamentalisten. Da dieser Zusammenhang sowohl für positive als auch für negative Abweichungen gelten soll, muß der entsprechende Ausdruck in Gleichung (2.12) quadriert werden. Der Parameter  $v$  repräsentiert die im langfristigen stationären Gleichgewicht realisierte maximale Gewichtung der Chartisten. Wird dieser Parameter gleich eins gesetzt, so bedeutet dies, daß die Erwartungsbildung im stationären Gleichgewicht komplett von den Chartisten bestimmt wird. Andererseits führt ein Wert  $v=0$  dazu, daß in jedem Zeitpunkt die Erwartung der Fundamentalisten die Wechselkursänderungserwartungen determinieren und Chartisten überhaupt nicht am Markt vertreten sind.

Für den Aktienmarkt können analoge Überlegungen angestellt werden. Für die sich aus den Erwartungen der Fundamentalisten und Chartisten zusammensetzenden aggregierten Aktienkursänderungserwartungen ergibt sich:

$$(2.13) \quad E_t(Q_{t+1}) / Q_{t-1} = (E_t^c(Q_{t+1}) / Q_{t-1})^{n_t} (E_t^f(Q_{t+1}) / Q_{t-1})^{1-n_t}$$

Für den Gewichtungsfaktor  $n_t$  wird unterstellt:

$$(2.14) \quad n_t = w / [1 + d(Q_{t+1} - \bar{Q})^2]$$

Bezüglich der funktionalen Ausgestaltung der Erwartungen der Chartisten gilt:

$$(2.15) \quad E_t^c(Q_{t+1}) / Q_{t-1} = (Q_{t-1} / Q_{t-2})^\theta (Q_{t-3} / Q_{t-2})^\theta$$

Das Modell wird geschlossen durch die Annahme, daß die Fundamentalisten am Aktienmarkt regressive Kursänderungserwartungen bilden:

$$(2.16) \quad E_t^f(Q_{t+1}) / Q_{t-1} = (\bar{Q} / Q_{t-1})^\xi$$

### **b) Analyse der Modelldynamik**

Da die in den Arbitrage- und Gleichgewichtsbedingungen auftretenden Elemente nunmehr vollständig spezifiziert sind, kann eine detaillierte Analyse der Modelldynamik vorgenommen werden.

Die den Zeitpfad des Wechselkurses beschreibende nichtlineare Differenzgleichung erhält man, indem die in Gleichung (2.4) formulierte ungedeckte Zinsparität nach dem Wechselkurs aufgelöst wird. Unter Berücksichtigung der in den Gleichungen (2.8) und (2.12) behandelten Erwartungsbildung erhält man:

$$(2.17) \quad S_t = \frac{(1 + r^*) \left[ \left( \frac{S_{t-1}}{S_{t-2}} \right)^p \left( \frac{S_{t-3}}{S_{t-2}} \right)^p \right]^{k_t} \left( \frac{\bar{S}}{S_{t-1}} \right)^{\lambda(1-k_t)} S_{t-1}}{\sqrt[k_t]{\frac{Y_t}{M_t}}}$$

wobei bereits die für den heimischen Geldmarkt formulierte Gleichgewichtsbedingung genutzt wurde, um für den heimischen Zinssatz zu substituieren.

Entsprechende Umformungen der Arbitragebedingung für den Markt für Realkapitalanteile ergeben:

$$(2.18) \quad Q_t = \frac{\left[ \left( \frac{Q_{t-1}}{Q_{t-2}} \right)^\theta \left( \frac{Q_{t-3}}{Q_{t-2}} \right)^\theta \right]^n Q_{t-1}}{\sqrt[\xi]{\frac{Y_t}{M_t} - \pi}}$$

Die zeitliche Entwicklung des Einkommens folgt unmittelbar aus Gleichung (2.1). Substituiert man in dieser Gleichung die aggregierte Güternachfrage durch Gleichung (2.2) und verzögert den Zeitindex um eine Periode, so folgt:

$$(2.19) \quad Y_t = S_{t-1}^{\delta\varphi} Q_{t-1}^{\gamma\varphi} Y_{t-1}^{1+\varphi(\alpha-1)}$$

Damit ist die Dynamik der drei Zustandsvariablen des Systems vollständig beschrieben.

Angesichts der nichtlinearen Struktur der die Modelldynamik bestimmenden Differenzgleichungen verwundert es nicht, daß sich als Ergebnisse der in Abschnitt IV näher zu besprechenden numerischen Simulationen unter anderen auch chaotische Lösungskurven für das Modell ergeben. Das vorliegende Modell kann daher nicht nur zur Erzeugung asymptotisch stabiler, zyklischer oder quasi-zyklischer Trajektorien dienen, sondern auch die auf Finanzmärkten immer wieder beobachteten unregelmäßigen und erratischen Kursschwankungen auf theoretischer Ebene reproduzieren. Von besonderem Interesse ist dabei, daß diese Fluktuationen der Assetpreise nicht durch einem stochastischen Prozeß unterworfenen "News" erzeugt werden. Wie die numerischen Simulationen zeigen werden, können derlei Kursbewegungen aufgrund der modellinhärenten, von dem Zusammenspiel von Chartisten und Fundamentalisten angetriebenen Spekulationsdynamik auch im Rahmen eines rein deterministischen Modells generiert werden.

#### IV. Analyse der Modelldynamik mittels numerischer Simulationen

Um die Reaktion der Modelldynamik und der Assetpreispfade auf eine Variation der Parameterkonstellation zu überprüfen, wurden umfangreiche Sensitivitätsanalysen durchgeführt. Da das entwickelte Modell aufgrund der simultanen Berücksichtigung von



Aktien-, Wechselkurs- und Outputdynamik eine Vielzahl von Parametern aufweist, ist es sinnvoll, sich bei der numerischen Analyse der dynamischen Eigenschaften des Modells auf einige besonders interessante Parameterkonstellationen zu beschränken. Insbesondere soll die Aufmerksamkeit auf die Implikationen des Einflusses der Chartisten und Fundamentalisten für die Assetpreisdynamik focussiert werden. Als Bezugspunkt beziehungsweise "Benchmark" der Analyse wird die in Tabelle 1 näher beschriebene Parameterkonstellation, gewählt.<sup>3</sup>

Tabelle 1 hier

Die Implikationen dieser Parameterspezifikation für die Assetpreisfade werden in Abbildung 1 dargestellt. Transitorische Effekte ausklammernd zeigt Abbildung 1a beginnend bei der Observation 1000 die nachfolgenden 500 Realisationen des Aktienkurses. Abbildung 1b visualisiert entsprechend den Zeitpfad des Wechselkurses. In den Abbildungen ist deutlich das erratische und bei naiver Betrachtung stochastische Verhalten der Assetpreise zu erkennen. Ferner zeigen die Zeitpfade der Assetpreise in unregelmäßigen Abständen auftretende Ausschläge mit besonders hoher Amplitude.<sup>4</sup> Es verwundert daher nicht, daß das Histogramm der in Abbildung 1 stellvertretend für die unter der Annahme zahlreicher anderer Parameterkonstellationen erzeugten Assetpreisfade auf eine leptokurtische Verteilung sowohl der Assetpreis als auch der entsprechenden Returns hinweist. Eine solche Leptokurtosis steht im Einklang mit den Ergebnissen zahlreicher empirischer Arbeiten (vgl. zum Beispiel den Übersichtsartikel von Pagan 1996).

Abbildung 1 hier

Obgleich die in Abbildung 1 dargestellten Assetpreisfade allein für die in Tabelle 1 präsentierten Parameterwerte *und* Anfangsbedingungen gelten, konnte aufgrund der durchgeführten umfangreichen numerischen Simulationen festgestellt werden, daß ein derartiges Verhalten der Assetpreise für eine Vielzahl denkbarer Parameterspezifikationen beobachtet werden kann. Es ist daher hervorzuheben, daß das unregelmäßige Verhalten des

<sup>3</sup> Um die Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, wurden teilweise bei der Auswahl einer "Benchmark"- Parameterkonstellation die von De Grauwe et al. (1993) gewählten numerischen Werte berücksichtigt.

<sup>4</sup> Derartige *volatility cluster* wurden ebenfalls von Lux und Marchesi (1998) und Youssefmir und Huberman (1997) in Modellen mit heterogener Erwartungsbildung beobachtet.

Aktien- und Wechselkurses in Abbildung 1 keineswegs ein allenfalls bei "exotischen" Parameterwerten auftretender Spezialfall ist. Aufgrund ihres repräsentativen Charakters ist es daher sinnvoll, die in Abbildung 1 dargestellten Assetpreistrajektorien einer genaueren Analyse zu unterziehen. Von besonderem Interesse ist, ob das dargestellte Verhalten von Aktien- und Wechselkursen als chaotisch bezeichnet werden kann.<sup>5</sup>

Einen ersten Eindruck des dynamischen Verhaltens der Assetpreise vermitteln die in Abbildung 2 dargestellten Phasendiagramme. Während die Abbildungen 2a und 2b  $Q_t$  ( $S_t$ ) als eine Funktion der verzögerten Variablen  $Q_{t-1}$  ( $S_{t-1}$ ) darstellt, werden in Abbildung 2c die Realisationen des Aktienkurses  $Q_t$  gegen den Wechselkurspfad  $S_t$  abgetragen.

Abbildung 2 hier

In den Abbildungen sind zwei für chaotische Systeme charakteristische Merkmale zu erkennen. Zum einen wird deutlich, daß die Realisationen der Assetpreise stark streuen und zum Teil deutlich erkennbare Ausreißer auftreten können. Auffällig ist dabei, daß die einzelnen Elemente der in Abbildung 2 dargestellten Punktwolken niemals vollständig deckungsgleich sind. Die Assetpreistrajektorien kehren mithin nicht auf einmal beschrittene Pfade zurück. Andererseits gruppieren sich die Datenpunkte um einen Schwerpunkt, welcher durch das stationäre Gleichgewicht des Systems definiert ist. Obzwar die auf den Assetmärkten der betrachteten Volkswirtschaft herrschende Spekulationsdynamik aufgrund des in der Nähe des stationären Gleichgewichts maximalen Anteils der Chartisten die Assetpreise immer wieder von diesem Schwerpunkt wegtreibt, sorgt das Auftreten der Fundamentalisten letztlich dafür, daß die Ökonomie das "Gravitationsfeld" des steady state nicht verläßt. Dieses Zusammenspiel von abstoßenden und anziehenden Kräften ist charakteristisch für seltsame Attraktoren.

Mittels des im Anhang beschriebenen Konzepts des Korrelationsintegrals kann die Dimension des Attraktors bestimmt werden. Abbildung 3 zeigt numerische Werte des natürlichen Logarithmus des Korrelationsintegrals für 9 umhüllende Dimensionen als eine Funktion des

---

<sup>5</sup> Die in diesem Abschnitt zum Einsatz gelangenden Verfahren zur Analyse möglicherweise chaotischer Zeitreihen werden in einem dem Beitrag angefügten Anhang näher erläutert. Dort findet der interessierte Leser neben einer Erläuterung der in diesem Abschnitt benutzten technischen Ausdrücke auch Hinweise auf weiterführende Literatur.

logarithmierten Radius. Die Berechnungen wurden für einen Radius  $r \in (0,1]$  durchgeführt, da zuvor der Datensatz mittels der einfachen Transformation  $\left( S_t - \max_t S_t \right) / \left( \max_t S_t - \min_t S_t \right)$  skaliert wurde (eine entsprechende Formel wurde auch auf die Aktienkursrealisationen angewendet).<sup>6</sup> Weiterhin ist in der Abbildung die Regressionskurve einer nichtparametrischen Kernschätzung eingezeichnet, welche die wesentlichen Merkmale des dargestellten Datensatzes in komprimierter Form visualisiert. Abbildung 4 präsentiert für eine steigende umhüllende Dimension die Veränderung der Korrelationsdimension als eine Funktion des Radius. Es ist deutlich zu erkennen, daß mit sinkendem Radius die Korrelationsdimension der Systeme gegen einen endlichen Wert von ungefähr 2,3–2,5 konvergiert. Dieser Wert ist ein Schätzwert für die fraktale Dimension des Systems. Die mit steigender umhüllender Dimension gegen einen endlichen Wert konvergierende Korrelationsdimension des Systems ist ein deutlicher Hinweis darauf, daß die Zeitreihen von einem deterministisch-chaotischen datengenerierenden Prozeß erzeugt worden sind.

Abbildung 3 hier

Abbildung 4 hier

Die Ergebnisse der Analyse der fraktalen Dimension des Systems werden bekräftigt durch die Signifikanz des Tests von Brock, Dechert und Scheinkman (1987) (fortan BDS). Mittels des BDS Tests kann überprüft werden, ob die Realisationen einer Zeitreihe unabhängig und identisch (i.i.d.) verteilt sind. Somit kann dieser Test zum Nachweis einer Existenz von Nicht-Linearitäten eingesetzt werden. In Tabelle 2 sind die Teststatistiken für verschiedene Embeddings dargestellt. Der Radius wurde gleich der Standardabweichung gesetzt. Die Signifikanz der Testergebnisse erwies sich auch robust, als —empirischen Arbeiten folgend (vgl. z. B. Hsieh 1989)— für den Radius verschiedene Vielfache der Standardabweichung gewählt wurden. Insgesamt kann festgehalten werden, daß auch unter Berücksichtigung des BDS-Tests eine unabhängige identische Verteilung der Daten abgelehnt werden muß.

Weitere Aufschlüsse über die dynamischen Eigenschaften der betrachteten Zeitreihen sind von einer Berechnung des dominierenden Lyapunov-Exponent zu erwarten. Lyapunov-

---

<sup>6</sup> Eine solche Skalierung der Daten wird ebenfalls von Lui et al. (1992) vorgenommen.

Exponenten beschreiben die durchschnittliche Divergenz zweier räumlich eng benachbarter Punkte eines betrachteten Vektorraums im Zeitverlauf und sind folglich ein Maß für die Sensitivität des Systems bezüglich der Anfangsbedingungen. Ein positiver Lyapunov-Koeffizient besagt, daß zwei eng benachbarte Trajektorien sich im Zeitverlauf mit einer bestimmten Rate und damit exponentiell voneinander entfernen. Es ist daher unmittelbar einsichtig, daß chaotische Systeme einen positiven Lyapunov-Exponent aufweisen. Dies bedeutet, daß zumindest in eine Richtung des betrachteten Vektorraumes das System sensitiv auf marginale Veränderungen der Anfangsbedingungen reagiert (vgl. Medio1992: 121).

Für den vorliegenden, experimentell generierten Datensatz konnte in allen durchgeführten Berechnungen ein positiver Lyapunov-Exponent ermittelt werden.<sup>7</sup> Je nach Spezifikation des Testdesigns wurde für Werte zwischen ungefähr 0.3 und 0.8 festgestellt. Ein positiver Lyapunov-Exponent ist charakteristisch für chaotische Zeitreihen. Das Ergebnis der Analyse läßt erkennen, daß das in Abschnitt II entwickelte Modell für die hier analysierte Parameterkonstellation sensitiv selbst auf kleine Veränderungen der Anfangsbedingungen reagiert und damit ein wesentliches Merkmal einer deterministisch-chaotischen Zeitreihe aufweist.

Abbildung 5 faßt die Ergebnisse einer "rescaled range" Analyse zusammen. Neben den Werten des logarithmierten "rescaled range"  $\log(\tilde{R}_n)$  ist in die Abbildungen auch das Ergebnis einer Regression  $\log(\tilde{R}_n) = c + \Delta \log n$  eingezeichnet. Der sogenannte Hurst-Koeffizient ist der Steigungskoeffizient dieser Regression. Der Hurst Exponent ist ein statistisches Verfahren, welches zur Untersuchung der Unabhängigkeit der Realisationen einer Zeitreihe eingesetzt werden kann. Dieser Ansatz eignet sich daher insbesondere zur Abgrenzung mittels eines nichtlinearen strukturellen Modells erzeugter deterministisch-chaotischer Zeitreihen von rein stochastischen unabhängigen Signalen.

Abbildung 5 hier

---

<sup>7</sup> Für die Berechnungen wurde das Programm FET von Wolf (1992) benutzt. Eine Darstellung der theoretischen Grundlagen der Berechnung von Lyapunov-Koeffizienten für experimentelle Daten, siehe z.B. Wolf et al. (1985).

Für den dargestellten Datensatz erhält man einen Hurst-Koeffizienten von ungefähr 0,4. Dieser Wert enthält zwei wichtige Informationen. Wenn die Realisationen einer Zeitreihe nicht unabhängig sind, dann wird der Hurst-Exponent einen von 0,5 verschiedenen Wert annehmen. In dem vorliegenden Fall weicht die beobachtete Realisation von  $\Delta$  von 0,5 ab. Dies signalisiert, daß die experimentell erzeugten Daten nicht unabhängig sind. Ferner gilt  $0 \leq \Delta < 0,5$ . Aufgrund der im Anhang näher erläuterten Eigenschaften der Hurst-Statistik kann weist dieses Ergebnis darauf hin, daß die durch temporäre Gütermarktungleichgewichte hervorgerufene mittelwertzurückkehrende Eigenschaft des Modells von der Hurst-Statistik erkannt wird.

Ähnliche numerische Simulationen wurden auch für eine Vielzahl anderer Parameterkonstellationen durchgeführt. Obgleich es nicht möglich ist, an dieser Stelle die Ergebnisse im einzelnen zu erörtern, soll dennoch eine qualitative Charakterisierung des Verhaltens von Aktien- und Wechselkurs bei alternativen Parameterspezifikationen diskutiert werden.

Von besonderem Interesse sind die Implikationen für die Assetpreisdynamik, welche sich aus der Variation des maximalen Anteils der Chartisten auf dem Devisen- bzw. Aktienmarkt ergeben. Eine extreme Situation ergibt sich, wenn man beispielsweise  $\nu=0$  vorgibt. Eine solche Wahl bedeutet, daß auf dem Devisenmarkt nur Fundamentalisten operieren, während am Aktienmarkt sowohl Chartisten als auch Fundamentalisten aktiv sind. Es hat sich in numerischen Simulationen gezeigt, daß bereits ein geringer maximaler Anteil von Chartisten auf dem Aktienmarkt ausreicht, um diesen aus dem stationären Gleichgewicht zu bringen. Abbildung 6 zeigt die Ergebnisse einer numerischen Simulation. Der Gewichtungsfaktor für die Chartisten am Devisenmarkt wurde auf den Wert Null fixiert. Für den entsprechende Parameter am Aktienmarkt wurde der Wert 0,5 gewählt. Die numerischen Werte der übrigen Parameter stimmen mit den Angaben der Tabelle 1 überein.

Abbildung 6 hier

Das Auftreten von Chartisten am Aktienmarkt bleibt aufgrund der Interdependenz der Märkte nicht ohne Folgen für den Devisenmarkt, der ebenfalls in Schwingungen gerät. Obzwar somit

am Devisenmarkt keine Chartisten auftreten, kann der Wechselkurs aufgrund der *spillover effects* vom Aktienmarkt die dynamischen Eigenschaften des Aktienkurses aufweisen. Selbst wenn die Wirtschaftspolitik somit in der Lage wäre —etwa durch die Einführung einer Transaktionssteuer— auf einem Markt (kurzfristige) spekulative Aktivitäten zu eliminieren, so ist damit keinesfalls gewährleistet, daß sich dieser Markt — selbst in Abwesenheit von "News" — in seinem stationären Gleichgewicht einpendelt. Wenn Chartisten auf einem anderen Markt auftreten, so entfalten diese "Störungen" Rückwirkungen auf die Preisentwicklung der anderen Assetmärkte.

In einem weiteren Analyseschritt wurde der Einfluß der Geschwindigkeit, mit der die Fundamentalisten eine Rückkehr zum fundamentalen Kurswert erwarten (Parameter  $b$  und  $d$ ) untersucht. Wie zu vermuten war, steigt die Stabilität des Modells, je regressiver die Fundamentalisten ihrer Erwartungen bilden. Insofern ergaben sich bei der Sensitivitätsanalyse im Hinblick auf eine Variation dieser Parameter keine überraschenden Ergebnisse.

Die Volatilität der Assetpreise nimmt mit abnehmender Semizinselastizität zu. Die Ursache dieses Effektes muß auf dem Geldmarkt gesucht werden. Da der Zins jene Variable ist, die den Geldmarkt in der kurzen Frist in das Gleichgewicht bringt, führt jede Einkommensvariation über die Reaktion der einkommensabhängigen Geldnachfrage auch zu einer Zinsveränderung. Diese muß um so stärker ausfallen, je geringer die Semizinselastizität ausgeprägt ist. In einer solchen Situation führt dann bereits eine kleine Einkommenserhöhung zu einer starken Zinssteigerung, die aufgrund der Gültigkeit der ungedeckten Zinsparität mit einer Abwertungserwartung für die Inlandswährung einhergeht. Da sich jedoch der langfristige gleichgewichtige Wechselkurs nicht verändert, kann nur eine sofortige Aufwertung der Inlandswährung den erforderlichen Abwertungsdruck auf die heimische Währung herbeiführen.

Ebenso übertragen sich Zinsveränderungen auf die Aktienkursentwicklung. In dem gegenwärtigen Modellkontext impliziert eine Zinssteigerung Kurssteigerungserwartungen auf dem Aktienmarkt. Gemäß der für den Aktienmarkt spezifizierten Arbitragegleichgewichtsbedingung müssen in jeder Periode die erwarteten Erträge aus einer Aktienanlage der Verzinsung der risikolosen Opportunität entsprechen. Die Aktienerträge setzen sich aus den Dividendenauszahlungen der gegenwärtigen Periode und den erwarteten

Kursveränderungen aller zukünftigen Perioden zusammen. Da der Dividenstrom als eine autonome Komponente modelliert wurde, geht jedwede Zinsveränderung mit einer gleichgerichteten Veränderung der Kursänderungserwartungen einher. Eine Erhöhung des heimischen Zinssatzes erfordert somit Kurssteigerungserwartungen. Derlei erwartete Kurssteigerungen können allein durch eine unmittelbare Absenkung des Aktienkursniveaus hervorgerufen werden. Zinsen und Aktienkurse bewegen sich somit immer in entgegengesetzte Richtungen. Dies entspricht dem bereits von Blanchard (1981) thematisierten "bad news" Szenario.

Wird die Anpassungsgeschwindigkeit des Güterangebotes variiert, so zeigt sich, daß eine Erhöhung der Anpassungsgeschwindigkeit die Variabilität der Assetpreispfade erheblich ansteigen läßt. Dieses Ergebnis mag zunächst überraschen, da eine gesteigerte Flexibilität des Güterangebots, auf Veränderungen der aggregierten Güternachfrage zu reagieren, zu einer Glättung der Assetpreispfade führen sollte. Eine hohe Anpassungsgeschwindigkeit impliziert in diesem Modell jedoch, daß eine temporäre Abwertungen der Inlandswährung oder Aktienkurssteigerungen über eine Steigerung der Güternachfrage auch zu einem Einkommensanstieg führen. Dieser Einkommensanstieg löst auf dem Geldmarkt Zinssteigerungen aus, die wiederum die Assetpreisentwicklung beeinflussen. Im Gegensatz dazu löst eine geringe Anpassungsgeschwindigkeit am Gütermarkt nur moderate Zinseffekte aus, welches letztlich von einer geringeren Variabilität der Assetpreise reflektiert wird.

### **III. Effekte einer an Assetpreisen orientierten Geldangebotspolitik**

Unter Zuhilfenahme des in Abschnitt II entwickelten Modellrahmens sollen nunmehr die Implikationen einer an dem Niveau der Assetpreise orientierten Geldangebotspolitik für die Volatilität von Aktien- und Wechselkurs sowie für die Variabilität des aggregierten Outputs beleuchtet werden.<sup>8</sup> Der nachfolgenden Analyse liegt die Annahme zugrunde, daß sich die Geldpolitik an den die inländische Volkswirtschaft kennzeichnenden momentanen "monetary

<sup>8</sup> Natürlich kann im Rahmen des vorliegenden Beitrags nicht auf alle Aspekte, die in der Diskussion um die Auswirkungen einer Orientierung der Geldpolitik an einem "monetary conditions index" vorgebracht wurden, eingegangen werden. Der Leser sei daher auf Fuhrer und Moore (1992), Smets (1997) und Woodford (1994) sowie die dort angegebenen Literatur verwiesen. Ferner sei auf Dornbusch, Favero und Giavazzi (1998) verwiesen, die das Konzept eines MCI im Zusammenhang mit möglichen geldpolitischen Strategien für die Europäische Zentralbank erörtern.

conditions" orientiert. Diese "monetary conditions" seien im folgenden durch die in den vorangehenden zwei Perioden beobachtete durchschnittliche Abweichung der Assetpreise von ihren stationären Gleichgewichtswerten beschrieben. Es wird für die *Veränderungsrate* des Angebots an Außengeld die folgende einfache lineare funktionale Form spezifiziert:

$$(4.1) \quad \hat{m}_t = \Gamma(\bar{S} - S_{t-1}^{0,5} S_{t-2}^{0,5}) + \Phi(\bar{Q} - Q_{t-1}^{0,5} Q_{t-2}^{0,5})$$

Abweichungen der Assetpreise von ihrem stationären Gleichgewicht werden mithin von der Zentralbank mit einer gegenläufigen Anpassung des Geldangebots beantwortet. Da die Assetpreise über die aggregierte Güternachfrage auf die Outputentwicklung einwirken, kann das eine solche Geldangebotsregel motivierende Finalziel der Geldpolitik in einer möglichst niedrigen Variabilität des Outputs gesehen werden. Zu betonen ist somit, daß mit einer solchen Politik letztlich über den Effekt von Aktien- und Wechselkurs auf die aggregierte Güternachfrage indirekt auch die Outputentwicklung beeinflußt wird. Das Niveau des Geldangebots folgt dann der nachfolgenden Gleichung:

$$(4.2) \quad M_{t+1} = (1 + \hat{m}_t) M_t$$

Die Auswirkungen der Implementierung der in Gleichung (4.1) eingeführten Geldangebotsregel auf die Dynamik des Modells wurden mittels numerischer Simulationen analysiert. Es wurde unterstellt, daß der maximale Anteil der am Devisenmarkt anzutreffenden Chartisten  $\nu = 0,8$  beträgt. Der korrespondierende Parameter für den Aktienmarkt nehme den Wert  $\omega = 0,4$  an. Aufgrund der stärkeren Verbreitung der technischen Kursanalyse unter den Devisenhändlern gelte für die Parameter der Reaktionsfunktion gelte  $\Gamma = 0,1$  und  $\Phi = 0,05$ . Bei der Festlegung numerischer Werte für die übrigen Modellparameter wurde auf die in Tabelle 1 dargestellte "Benchmark"-Parameterkonstellation zurückgegriffen.

Abbildungen 7 und 8 zeigen Phasendiagramme für die drei Zustandsvariablen des Systems bei schwacher und starker Ausrichtung der Geldpolitik an dem Niveau der Assetpreise. Der Fall einer niedrigen Assetpreissensitivität der Geldpolitik beruht auf der Paramterkombination  $\Gamma = 0,1$  und  $\Phi = 0,05$ . Demgegenüber wurden für die Simulation der Zeitpfade der



Zustandsvariablen des Systems im Falle einer starken Orientierung der Geldpolitik an dem Geschehen auf den Finanzmärkten die Parameterwerte  $\Gamma = 0,2$  und  $\Phi = 0,1$  vorgegeben. Ein Vergleich der abgebildeten Phasendiagramme läßt deutlich erkennen, daß die stärkere Ausrichtung der Geldpolitik an dem Niveau der Assetpreise tendenziell zu einer Destabilisierung des Systems führt. Man beachte in diesem Zusammenhang insbesondere, daß an den Achsen der Abbildungen abgetragene Skalenniveau. Zu erkennen ist ferner, daß die zunehmende Finanzmarktvolatilität letztlich auch eine Destabilisierung des Einkommens impliziert. Neben der abnehmenden Konzentration der Punktwolke um das steady state Niveau des Outputs deutet insbesondere die größere Anzahl deutlich zu erkennender Ausreißer auf die abnehmende Stabilität des Einkommenspfades hin. Dieses Ergebnis verdeutlicht, daß eine Erhöhung der Reaktionsparameter nicht zwangsläufig eine stärkere Stabilisierung der Assetpreise und des Outputs impliziert. Ruft man sich zudem die Sensitivität deterministisch-chaotischer Systeme bezüglich der Anfangsbedingungen in Erinnerung, so kann daraus die Schlußfolgerung gezogen werden, daß Zurückhaltung in Bezug auf Vorschläge, eine an Assetpreisen orientierte Geldangebotsregel zu implementieren, geboten erscheint.

Abbildung 7 hier

Abbildung 8 hier

Für eine umfassende Analyse der Auswirkungen einer Ausrichtung der Geldpolitik an den in einer Volkswirtschaft angetroffenen "monetary conditions" ist es ferner erforderlich, die Auswirkungen der Implementierung der Geldangebotsregel unter Zugrundelegung alternativer Strukturparameter des Modells zu analysieren. Für die Generierung der in Abbildung 9 dargestellten Phasendiagramme wurde daher die Anpassungsgeschwindigkeit des Güterangebots auf temporäre Gütermarktungleichgewichte von  $\varphi = 0,5$  auf  $\varphi = 0,8$  erhöht. Es wird deutlich, daß der noch in Abbildung 7 zu erkennende fremdartige Attraktor einer zyklischen Entwicklung der Systemvariablen gewichen ist (Zyklus mit Periode 6). Die Auswirkungen einer an Finanzmarktvariablen ausgerichteten Geldpolitik auf die Modelldynamik werden somit nicht allein durch die Assetpreissensitivität der Zentralbank bestimmt, sondern auch maßgeblich von den in der Volkswirtschaft angetroffenen Strukturparametern beeinflusst. Dieses Ergebnis unterstreicht die Validität des bereits bei der

Erörterung der Auswirkungen der Größenordnung der in die Geldangebotsregel eingehenden Sensitivitätsparameter erzielten Resultats, daß von einer Implementierung einer an Assetpreisen orientierten Geldpolitik abzuraten ist.

Abbildung 9 hier

#### **IV. Fazit**

Auf der Grundlage eines nichtlinearen makroökonomischen Modells wurden die Implikationen heterogener Erwartungsbildung auf Aktien- und Devisenmärkten analysiert und die dynamischen Eigenschaften der Assetpreistrajektorien untersucht. Mittels numerischer Simulationen konnte festgestellt werden, daß das Aufeinandertreffen von Chartisten mit extrapolativen und Fundamentalisten mit regressiven Erwartungen bei gleichzeitiger träger Outputdynamik am Gütermarkt für zahlreiche Parameterkonstellationen deterministisch-chaotisches Aktien- und Wechselkursverhalten impliziert.

Die Amplitude der Assetpreisschwankungen nimmt mit steigendem maximalen Anteil der Chartisten zu. Das Verhalten der Assetpreise wird dabei jedoch nicht allein von dem Anteil der Chartisten auf dem zugehörigen Finanzmarkt bestimmt. Vielmehr hat die Analyse gezeigt, daß die Anwendung der Instrumente der technischen Kursanalyse und Herdenverhalten auf dem jeweils anderen Assetmarkt einen Einfluß auf die übrigen Assetpreise der Volkswirtschaft ausüben.

Die Analyse der Implikationen einer an der Abweichung der Assetpreise von ihren stationären Gleichgewichtswerten orientierten Geldpolitik hat ergeben, daß die Effekte einer solchen Geldangebotspolitik sowohl von den strukturellen Parametern der Ökonomie als auch von den numerischen Werten der Parameter in der Reaktionsfunktion der Zentralbank abhängen. Geringfügige Parametervariationen können zu einer grundlegenden Veränderung der Modelldynamik führen. Vor dem Hintergrund der in dem vorliegenden Beitrag vorgenommenen modelltheoretischen und numerischen Analyse muß den wirtschaftspolitischen Entscheidungsträgern von der Implementierung einer solchen geldpolitischen Strategie abgeraten werden.

Während in dem vorliegenden Beitrag besonders die Implikationen der Interdependenz von Aktien- und Devisenmarktgeschehen beleuchtet wurden, wäre es im Rahmen zukünftiger Forschungsprojekte möglich, die von der chaostheoretischen Literatur entwickelten methodologischen Innovationen auch zur Analyse des Zusammenspiels anderer Märkte zu nutzen. So bietet es sich an, die in diesem Beitrag beschriebenen Analyseverfahren zur Untersuchung möglicher von den Märkten für derivative Finanzprodukte ausgehenden *spillover effects* auf die Märkte für die jeweiligen Basisinstrumente heranzuziehen. So wäre es zum Beispiel möglich, das von Detemple und Selden (1991) zu dieser Fragestellung vorgelegte Zwei-Perioden-Modell zu erweitern und somit die dynamischen Aspekte des Derivatehandels für die Dynamik der Kurse der Basisinstrumente stärker herauszuarbeiten.

Ferner wäre es sinnvoll, das in dem vorliegenden Beitrag entwickelte reduzierte makroökonomische Modell mikroökonomisch zu fundieren. Insbesondere erscheint es vielversprechend, die Interaktion der Chartisten und Fundamentalisten detaillierter zu modellieren. So wird von Lux (1997) vorgeschlagen, die Entscheidung eines Händlers für eine technische Kursanalyse oder eine an Fundamentaldaten orientierte Anlagestrategie von zwei wesentlichen Determinanten abhängig zu machen. Einerseits sollte die relative Profitabilität dieser Strategien das Verhalten der Händler auf entscheidende Weise beeinflussen, andererseits hängt die Entscheidung für eine bestimmte Anlagestrategie aber auch von dem angetroffenen Marktumfeld und insbesondere von dem Anteil der bereits vorhandenen Chartisten ab.

Die Ergebnisse des vorliegenden Beitrags deuten darauf hin, daß sich solche Erweiterungen der Analyse als ausgesprochenen fruchtbar erweisen sollten. Insbesondere verspricht die modelltheoretische Berücksichtigung von Nichtlinearitäten sowie der Interdependenz von Finanzmärkten Antworten auf die sich aus der voranschreitenden Integration der internationalen Kapitalmärkte für die wirtschaftswissenschaftliche Forschung ergebenden Herausforderungen.

## V. Anhang: Anmerkungen zu den Analyseverfahren

Die im Vergleich zu linearen Modellen höhere Komplexität nichtlinearer dynamischer Systeme erfordert die Einführung spezieller formaler Analysemethoden. Im Folgenden sollen die in dem vorliegenden Beitrag zur Anwendung gelangenden spezifischen mathematisch-statistischen Methoden kurz erläutert werden. Gemeinsame Zielsetzung der Analysemethoden ist es, deterministische chaotische Trajektorien der Zustandsvariablen eines dynamischen Systems zu identifizieren und etwa von zyklischen oder quasi-zyklischen Lösungskurven zu unterscheiden. Zunächst sollen jedoch unter Punkt *a* einige Begriffe der Chaostheorie erörtert werden.

### ***a) Seltsame Attraktoren und Sensitivität bezüglich der Anfangsbedingungen***

Ein Attraktor ist ein spezielles invariantes Set in  $\mathcal{R}^n$ . Ein Set  $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^n$  ist invariant, wenn für jedes  $x(0) \in \mathcal{S}$  für die Zustandsvektoren des Systems  $\tau_t(x): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  gilt, daß  $\tau_t(x) \in \mathcal{S} \forall x \in \mathcal{S} \forall t \in \mathcal{R}$ . Ein anziehendes Set  $A \subset \mathcal{S}$  zeichnet sich zusätzlich dadurch aus, daß  $\tau_{t \rightarrow \infty}(x) \rightarrow A \forall x \in A$  gilt. Ein anziehendes Set ist somit ein spezielles invariantes Set, welchem sich mit voranschreitendem Zeitindex die Orbitale des Systems nähern. Für die im Rahmen der Analyse der dynamischen Eigenschaften des in dem vorliegenden Beitrag entwickelten Modells durchzuführenden Studien ist es hinreichend, Attraktoren durch ein zugehöriges anziehendes Set zu definieren.<sup>9</sup>

Für chaotische Systeme sind sogenannte seltsame Attraktoren charakteristisch. Von einem seltsamen Attraktor  $A \subset \mathcal{R}^n$  spricht man, wenn es ein anziehendes Set ist, das System auf marginale Variationen der im "Gravitationsfeld" des Attraktors  $A$  angesiedelte Vektor der Anfangsbedingungen  $x(0)$  empfindlich reagiert und der Attraktor topographisch transitiv (siehe Medio 1992) ist (Ruelle 1979). Ein seltsamer Attraktor ist ein anziehendes invariantes Set. Der Zustandsvektor des Systems verläßt das Anziehungsfeld des Attraktors ("basin of attraction") nicht. Gleichzeitig reagieren die Orbitale des korrespondierenden dynamischen

<sup>9</sup> Für eine differenziertere Definition, welche Attraktoren und attrahierende Sets unterscheidet, siehe Lorenz 1993: 29 und Medio 1992: 40 ff.

Systems extrem empfindlich auf eine Veränderung der Anfangsbedingungen. Obzwar sich folglich die einzelnen Lösungskurven des chaotischen Systems aufgrund ihrer gemeinsamen Zugehörigkeit zum Attraktor ähneln müssen, werden sie sich doch immer auch voneinander unterscheiden (Prinzip der Selbstähnlichkeit). Die Bewegungen des Zustandsvektors in einem bestimmten Zeitintervall werden somit den Bewegungen in vorangegangenen Zeitperioden niemals vollständig gleichen. Trajektorien chaotischer Systeme weisen damit einen sehr unregelmäßigen Verlauf auf. Diese Eigenschaft macht sie für die theoretische Abbildung von Assetpreisdynamiken zu einem besonders geeigneten Instrument.

Chaotische Trajektorien können unter Rückgriff auf nichtlineare dynamische Systeme erzeugt werden. Es ist mithin möglich, daß auch das unter Abschnitt II entwickelte nichtlineare makroökonomische Modell zur Abbildung chaotischer Aktienkurs- und Wechselkurspfade geeignet ist. Die Nichtlinearität des zugrundeliegenden dynamischen Modells ist jedoch keine hinreichende Bedingung für die Existenz chaotischer Lösungskurven. Nichtlineare Systeme können durchaus auch stabile oder zyklische Trajektorien implizieren. Die Eigenschaften der Lösungskurven eines nichtlinearen dynamischen Systems hängen damit auf entscheidende Weise von der unterstellten spezifischen Parameterkonstellation ab. Da geschlossene formale Lösungen für nichtlineare Modelle der Komplexität des in Abschnitt II entwickelten Modells nicht abgeleitet werden können, eignen sich zur Analyse der dynamischen Eigenschaften solcher Systeme insbesondere numerische Simulationen.

Um bei der Charakterisierung eines dynamischen Systems nicht allein auf den durch Computerexperimente erzeugten Zeitreihen vermittelten visuellen Eindruck vertrauen zu müssen, sind Verfahren entwickelt worden, welche zur Unterscheidung chaotischer Trajektorien von beispielsweise quasi-zyklischen Lösungskurven herangezogen werden können. Sind in Anwendungen chaotische Abläufe möglich, so empfiehlt Lorenz (1993: 211–213) folgende zweistufige Vorgehensweise:

1. Zunächst sollte die Korrelationsdimension berechnet werden. Nimmt diese einen sehr großen Wert an, so kann davon ausgegangen werden, daß das System durch zufällige Einflüsse getrieben wird. Die Hypothese eines existierenden chaotischen Systems sollte dann verworfen werden.

2. Kann die Hypothese nicht verworfen werden, sollte in einem zweiten Schritt der Lyapunov-Exponent bzw. die  $K_2$ -Approximation der Kolmogorov Entropie berechnet werden. Wenn ein positiver Lyapunov-Exponent ermittelt werden kann und wenn  $K_2$  gegen einen endlichen positiven Wert konvergiert, dann kann aus dieser Konstellation geschlossen werden, dass eine chaotische Zeitreihe vorliegt.

### ***b) Korrelationsintegral, Korrelationsdimension und fraktale Dimension***

Unter den speziell für Fragestellungen der Chaostheorie entwickelten analytischen Verfahren zählt die von Grassberger und Procaccia (1983) entwickelte Methode zur Bestimmung der sogenannten fraktalen Dimension eines Attraktors zu den am häufigsten zur Anwendung gelangenden Analysetechniken.

Die fraktale Dimension eines seltsamen Attraktors ist ein Maß für die Ausdehnung des Einzugsbereichs des Attraktors im euklidischen Raum. Die fraktale Dimension ist stets ein Bruchteil der maximal zur Verfügung gestellten, durch die Menge der natürlichen Zahlen beschreibbaren sogenannten umhüllenden Dimension (embedding).

Ein Embedding ist ein künstlicher  $m$ -dimensionaler Raum, welches aus der eindimensionalen Zeitreihe durch Bildung sogenannter  $m$ -Historien gewonnen werden kann (Takens 1980). Diese Historien sind Vektoren der Länge  $m$ , welche durch Zusammenfassung von jeweils  $m$  Elementen der ursprünglichen Zeitreihe gewonnen werden können. Bei der in dieser Weise vorgenommenen Gruppierung der Daten ist darauf zu achten, daß keinerlei serielle Korrelation mehr in den Daten vorhanden ist. Dies ist ein entscheidender Aspekt, da das Aufspüren und Rekonstruieren seltsamer Attraktoren letztlich allein die in dem zur Verfügung stehenden Datensatz vorhandene geometrische Korrelation relevant ist (Grassberger 1990). Gegebenenfalls können aus diesem Grunde Datenpunkte bei der Konstruktion der  $m$ -Historien nicht berücksichtigt werden. Die Auswahl des nutzbaren Datensatzes kann sich auf die Autokorrelationsfunktion stützen. Ein alternatives Auswahlverfahren wird in Mizrach (1995) beschrieben. Zu beachten ist ferner, daß aus einer Zeitreihe mit der Länge  $T$  nur  $T-(m-1)$  Vektoren gewonnen werden können. Die Anzahl der Vektoren ist somit kleiner als die Länge der Zeitreihe.

Die  $m$ -dimensionalen Vektoren können sodann in einen  $m$ -dimensionalen Raum eingezeichnet werden. Es sei nun unterstellt, daß die Vektoren im Gravitationsfeld eines chaotischen Attraktors liegen. Für alle möglichen Vektorpaare, die auf einem Attraktor liegen, besteht die Möglichkeit, daß sie nahe beieinander liegen, da sie räumlich korreliert sind. Zwei Vektoren sind räumlich korreliert, wenn ihre euklidische Distanz geringer ist als ein gegebener Radius  $r$  einer  $m$ -dimensionalen Kugel, die man an einem der beiden Vektoren fixiert. Die räumliche Korrelation zwischen allen möglichen Vektorpaaren wird bestimmt, indem man die Anzahl aller Punkte quantifiziert, deren Abstand geringer ist als der vorgebene Radius. Das Korrelationsintegral als Maß für die räumliche Korrelation der Daten erhält man, indem der auf diese Weise berechnete Skalar durch das Quadrat der Anzahl der Observationen dividiert wird. Die Korrelationsdimension kann somit etwas ungenau als die "Wahrscheinlichkeit" interpretiert werden, innerhalb eines von einem bestimmten Vektor aus gemessenen Radius einen weiteren Vektor zu finden. Die formale Umsetzung dieser verbalen Ausführungen führt auf die nachfolgende Berechnungsformel (vgl. zum Beispiel Lorenz 1993: 211):

$$(A.1) \quad C(r, m) = \lim_{r_m \rightarrow \infty} \frac{1}{T_m^2} \sum_{i, j=1}^{T_m} H\left[r - |x_i^m - x_j^m|\right]$$

wobei die Variable  $T_m$  die Anzahl der Vektoren  $x$  kennzeichnet, der Betrag die euklidische Distanz zwischen zwei Punkten mißt und  $H$  die Heaviside Funktion darstellt:

$$(A.2) \quad H(x) = \begin{cases} 1 & , \text{wenn } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Vom Korrelationsintegral gelangt man durch eine einfache Grenzwertberechnung zur Korrelationsdimension (vgl. Lorenz 1993: 212):

$$(A.3) \quad D^C(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r, m)}{\ln r}$$

Aus Gleichung (A.3) folgt, daß approximativ  $\ln C(r, m) \approx D^C(m) \ln r$  gilt. Für einen gegebene umhüllende Dimension kann somit das Verhältnis von  $C(r, m)$  und  $\ln(r)$  graphisch veranschaulicht werden, wobei die Korrelations-Dimension als Steigung der entstehenden Linie interpretiert werden kann.

In einem deterministisch-chaotischen System wird die Steigung der Kurven mit steigender Dimension des Vektorraums gegen einen endlichen Wert konvergieren: dieser ist dann die Korrelations-Dimension. Im Gegensatz dazu wird der Wert des Skalars  $D^C(m)$  in einem stochastischen System ständig steigen. Für eine  $m$ -dimensionale Brownsche Bewegung etwa wird die "fraktale" Dimension stets der umhüllenden Dimension entsprechen, da mit steigender Anzahl der Beobachtungen der Zustandsvektor der Bewegung letztlich den gesamten zur Verfügung stehenden Raum durchlaufen wird. Wenn daher  $D^C$  unabhängig von  $m$  ist, so ist das System deterministisch. Somit ist die Korrelations-Dimension ein wirksames Instrument um ein deterministisches von einem stochastischen System zu unterscheiden (vgl. Grassberger und Procaccia 1983; ebs. Lorenz 1993: 211 – 213).

### **c) Kolmogorov-Entropie und Lyapunov Exponenten**

Die Kolmogorov-Entropie ist ein Maß für die Vorhersagbarkeit der zukünftigen Entwicklung einer Zeitreihe (vgl. Lorenz 1993: 219). Grassberger und Procaccia (1983) entwickelten eine analytisch handhabbare Approximation der Kolmogorov-Entropie. Sie zeigten, daß die Kolmogorov-Entropie in einem engen Verhältnis zum Korrelations-Integral steht und durch folgenden Ausdruck approximiert werden kann:

$$(A.4) \quad K_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \log \frac{C(\epsilon, m)}{C(\epsilon, m+1)}$$

Im Fall eines regulären Attraktors gilt  $C(\epsilon, m) = C(\epsilon, m+1)$ , so daß sich das Korrelationsintegral mit steigendem  $m$  nicht verändert. Somit ist  $K_2$  zum Beispiel im Falle eines Grenzyklus gleich null. Wird das dynamische System hingegen durch einen zufälligen Prozeß erzeugt, so konvergiert die Entropie gegen unendlich. Ein chaotisches System zeichnet sich durch eine



endliche Entropie aus  $0 < K_2 < \infty$ , wobei mit steigendem Embedding  $m$  die Kolmogorov-Entropie einen positiven endlichen Wert annimmt (Lorenz 1993: 218f.).

Lorenz (1993) folgend werden für ein diskretes  $m$ -dimensionales System  $x_{t+1} = f(x_t)$  die Differenz zweier Vektoren  $x_1, x_0 \in \mathfrak{R}^m$  in einer Ausgangsperiode zu  $\|x_1 - x_0\|$  bestimmt. Nach  $n$  Iterationen gilt  $\|x_1^n - x_0^n\| = \|f^n(x_1) - f^n(x_0)\| \approx J^n \|x_1 - x_0\|$ , wobei  $J^n$  das Produkt der  $n$  Iterationsschritte entlang des analysierten Orbits evaluierten Jacobimatrix des Systems ist. Mittels der Eigenwerte der Jacobimatrix können die dynamischen Eigenschaften des Systems beschrieben werden. Seien die geordneten  $m$  Eigenwerte der Jacobimatrix mit  $\chi_i$  (mit  $\chi_i > \chi_{i-1}$ ) bezeichnet. Die  $m$  Lyapunov-Exponenten des Systems werden dann berechnet als (vgl. Lorenz 1993: 215):

$$(A.5) \quad \lambda_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log_2 |\chi_i|$$

#### d) Hurst Exponent

Grundlegend für die Berechnung des Hurst Exponenten ist die "rescaled range" Analyse.<sup>10</sup> Dabei wird die Zeitreihe in einem ersten Analyseschritt in  $N \equiv T/n$  nichtüberlappende Subperioden unterteilt, wobei  $n$  die Anzahl der Observationen pro Teilintervall angibt. Sodann wird für jede Subperiode das arithmetische Mittel der Observationen berechnet. Anschließend wird für jede Zeiteinheit der Subperioden die kumulierte Abweichung von diesem Mittelwert berechnet:

$$(A.6) \quad K(t, n) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_N)$$

Das "range" ergibt sich indem pro Teilintervall die Spannweite der so berechneten Werte ermittelt wird:

<sup>10</sup> Eine umfassende Darstellung dieser statistischen Analyseverfahren sowie ihrer Anwendung in der Ökonomie findet sich in Peters (1991;1994). Siehe auch Feder (1988: 149–162). Für eine empirische Anwendung und eine Erläuterung der zugehörigen Verteilungstheorie, vgl. Jacobsen (1996).

$$(A.7) \quad R_n = \max K(t, n) - \min K(t, n)$$

Schließlich wird der Koeffizient  $R_n$  noch standardisiert, indem durch die Standardabweichung des Datensatzes der jeweiligen Subperiode dividiert wird. Es wird mithin ein "rescaled range"  $\hat{R}_n$  berechnet. Bildet man nun das arithmetische Mittel dieser standardisierten Spannweite über alle Teilperioden erhält man einen Wert des "rescaled range" für die gesamte Zeitreihe:

$$(A.8) \quad \tilde{R}_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{R}_{n,i}$$

Man beachte, daß  $\tilde{R}_n$  eine Funktion der Observationen pro Subperiode ist. Die standardisierte Spannweite kann daher für eine ständig kleiner werdende Anzahl von Subperioden mit entsprechend wachsender Anzahl von Beobachtungen pro Teilintervall berechnet werden. Die Hurst Statistik erhält man, indem mittels des Kleinst-Quadrate Verfahrens die Parameter der nachfolgende Gleichung bestimmt werden.

$$(A.9) \quad \log(\tilde{R}_n) = \log \mu + \Delta \log n$$

Wenn die analysierte Zeitreihe einem random walk folgt, dann sollte mit steigendem  $n$  der Schätzer  $\tilde{R}_n$  mit der Quadratwurzel von  $n$  wachsen. Es sollte also der Zusammenhang  $\tilde{R}_n = \mu \sqrt{n}$  gelten, wobei  $\mu$  eine Konstante ist. In diesem Falle würde der Hurst Exponent den Wert  $\Delta = 0,5$  annehmen. Wenn hingegen die Realisationen der analysierten Zeitreihe nicht unabhängig sind, dann wird der Hurst Exponent einen von 0,5 verschiedenen Wert  $\Delta \in [0,1]$  annehmen (vgl. Peters 1991). Konkret kann für  $0 \leq \Delta < 0,5$  von einer mittelwertzurückkehrenden datengenerierenden Prozeß und für  $0,5 < \Delta \leq 1$  von einer persistenten Zeitreihe ausgegangen werden (vgl. Peters 1991: 64). Ein Wert  $\Delta \neq 0,5$  deutet somit darauf hin, daß der Einfluß einer Realisation der Zeitreihe in der Periode  $t$  auch in einer nachfolgenden Periode  $t + i, i > 0$  noch feststellbar sein wird. Die Daten sind daher in diesem Fall nicht unabhängig identisch verteilt.

### **e) Teststatistiken zur Identifikation von deterministischem Chaos**

Insbesondere für empirische Anwendungen ist die Entwicklung von Testverfahren bedeutsam, mittels derer deterministisch-chaotische Zeitreihen von höher dimensionierten stochastischen datengenerierenden Prozessen getrennt werden können. Von den zahlreichen Tests auf nichtlineare Abhängigkeiten in Zeitreihen (siehe z. B. Tsay 1986) soll an dieser Stelle nur die von Brock, Dechert und Schreinkmann (1987) (kurz BDS) entwickelte Teststatistik erörtert werden. Mittels des BDS Tests kann überprüft werden, ob die Realisationen einer Zeitreihe unabhängig und identisch (i.i.d.) verteilt sind. Somit kann dieser Test auch zum Nachweis einer Existenz von Nicht-Linearitäten eingesetzt werden. Dabei wird auf das bereits beschriebene, von Grassberger und Procaccia entwickelte Konzept des Korrelationsintegrals zurückgegriffen, welches die Wahrscheinlichkeit angibt, daß zwei m-dimensionale Vektoren innerhalb eines bestimmten Radius liegen. Die Grundidee des BDS Tests besteht darin, daß Korrelationsintegral, welches für eine Dimension m berechnet wurde mit einem Korrelationsintegral einer i.i.d. Zeitreihe zu vergleichen. Dabei wird ausgenutzt, daß für eine i.i.d. Zeitreihe  $C_m(r) = \{C_1(r)\}^m$  gilt. BDS zeigen bezüglich der Nullhypothese unabhängig identisch verteilter Realisationen, daß die Teststatistik

$$(A.10) \quad \text{BDS}(m;r) = \left\{ C_m(r) - [C_1(r)]^m \right\} / \left( \sqrt{T} \right) \sigma_m(r)$$

asymptotisch standardnormalverteilt ist.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup> Das Testverfahren kann sowohl auf Rohdaten als auch auf die Residuen einer Regression angewendet werden. Vgl. insbesondere Brock, Hsieh und LeBaron (1991).

## **Literatur**

- Allen, H. und M.P. Taylor (1990). Charts, Noise, and Fundamentals in the London Foreign Exchange Market. *Economic Journal*: 49–59.
- Blanchard, O.J. (1981). Output, the Stock Market, and Interest Rates. *American Economic Review* (71): 132–143.
- Brock, W.A., D.W. Dechert und J.A. Scheinkman (1987). A Test of Independence Based on the Correlation Dimension. SSSRi Working Paper no. 8702, Department of Economics. University of Wisconsin–Madison.
- Brock, W. A., D.A. Hsieh und B. LeBaron(1991). *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*; MIT Press; Cambridge Mass.
- Cutler, D., J.M. Poterba und L.H. Summers (1989). What moves stock prices? *Journal of Portfolio Management* (15): 4–12.
- Dechert, D.W. (1988) BDS–STATS Version 8.21.
- De Grauwe, P., H. Dewachter und M. Embrechts (1993). *Exchange Rate Theory – Chaotic Models of Foreign Exchange Markets*; Blackwell Publishers; Oxford.
- De Grauwe, P. und H. Dewachter (1992). Chaos in the Dornbusch Model of the exchange Rate. *Kredit und Kapital* (25): 26 – 54.
- De Grauwe, P. und K. Vasanten (1990). Deterministic Chaos in the Foreign Exchange Rate. Working Paper no. 47. Centre for European Policy Studies, Bruxelles.
- De Grauwe, P. und H. Embrechts (1993). A Chaotic Model of the Exchange Rate: The Role of Fundamentalists and Chartists. *Open Economies Review* (4): 351–379.

- De Long, J., B. Bradford, A. Schleiffer, L. Summers und R. Waldman (1990). Noise Trader Risk in Financial Markets. *Journal of Political Economy* (98): 703–738.
- Detemple, J. und L. Selden (1991) A General Equilibrium Analysis of Option and Stock Market Interaction. *International Economic Review* (32): 279–303.
- Dornbusch, R., C. Favero und F. Giavazzi (1998). Immediate Challenges for the European Central Bank. *Economic Policy* (26): 17–52.
- Fama, E.F. (1968). Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance* (25): 338–417.
- Feder, J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, New York – London.
- Flood, R.P. und A.K. Rose (1995). Fixing Exchange Rates – A Virtual Quest for Fundamentals. *Journal of Monetary Economics* (36): 3–37.
- Frankel, J.A. und K. A. Froot (1990). Chartists, Fundamentalists, and the Demand for Dollars. In A.S. Courakis und M.P. Taylor (Hrsg.): *Private Behaviour and Government Policy in Interdependent Economies*. Clarendon Press, Oxford.
- Frankel, J.A.; K.A. Froot (1998). Chartists, Fundamentalists and the Demand for Dollars. *Greek Economic Review* (10): S. 49 – 102.
- Froot, K.A., D.S. Scharfstein und J.C. Stein (1992). Herd on the Street: Informational Inefficiencies in a Market with Short-Term Speculation. *Journal of Finance* (XLVII): 1461–1484.
- Fuhrer, J. und G. Moore (1992). Monetary Policy Rules and the Indicator Properties of Asset Prices. *Journal of Monetary Economics* (29): 303–336.
- Gavin, M. (1989) The Stock Market and Exchange Rate Dynamics. *Journal of International Money and Finance* (8): 181–200.

- Grassberger, P. (1990). An optimized box-assisted algorithm for fractal dimensions; *Physics Letters A* (148): 63 – 68.
- Haugen, R.A., E. Talmor und W.N. Torous (1991). The Effect of Volatility Changes on the Level of Stock Prices and Subsequent Expected Returns. *Journal of Finance* (46): 985–1007.
- Hsieh, D.A. (1989). Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates. *Journal of Business* (62): 339–368.
- Jacobsen, B. (1996). Long Term Dependence in Stock Returns. *Journal of Empirical Finance* (3): 393–417.
- Lorenz, H.W. (1993). *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. 2. Auflage; Springer Verlag, Berlin – Heidelberg - New York.
- Lui, T., C.W.J. Granger und W.P. Heller (1992). Using the Correlation Exponent to Decide whether an Economic Series is Chaotic. *Journal of Applied Econometrics* (7): S25–S39.
- Lux, T. (1997). Time Variation of Second Moments from a Noise Trader/Infection Model. *Journal of Economic Dynamics and Control* (22):11–38.
- Lux, T. und M. Marchesi (1998). Volatility Clustering in Financial Markets: A Micro-Simulation of Interacting Agents. Paper presented at the Konstanz Seminar on Monetary Theory and Monetary Policy, June 1998.
- Medio, A. und G. Gallo (1992). *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Mizrach, B. (1995). Determining Delay Times for Phase Space Reconstruction with Application to the FF/DM Exchange Rate. *Journal of Economic Behavior and Organization* (30): 369–381.

- Muth, J. (1961). Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica* (29): 315–335.
- Pagan, A. (1996) The Econometrics of financial markets. *Journal of Empirical Finance* (3): 15–102.
- Peters, E.E. (1991). *Chaos and Order in the Capital Market: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. John Wiley & Sons, New York.
- Peters, E.E. (1994). *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. John Wiley & Sons, New York.
- Nelles, M. (1996). Aktien- und Wechselkursdynamik im Keynesianischen Modell. *Kredit und Kapital* (29):32–53.
- Reither, F. (1990). Aktienkursdynamik und monetäre Wechselkursstheorie. *Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften* (110): 37–53.
- Ruelle, D. (1979). *Chaotic Evolution and Strange Attractors*. Cambridge University Press; Cambridge.
- Schuster, H.G. (1994): *Deterministisches Chaos*. VCH Verlagsgemeinschaft mbH; Weinheim – New York.
- Schwert, G.W. (1989). Why does Stock Market Volatility Change over Time?. *The Journal of Finance* (XLIV): 1115–1153.
- Shiller, R.J. (1981). Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends? *American Economic Review* (71): 421–436.
- Smets, F. (1997). Financial Asset Prices and Monetary Policy: Theory and Evidence. Working Paper no. 47, Bank for International Settlements, Basle.

- Takens (1981). Detecting Strange Attractors in Fluid Turbulence. In D.A. Rand und L.S. Young (Hrsg.): *Dynamical Systems and Turbulence*. Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag; Berlin.
- Tobin, J. (1969). A General Equilibrium Approach to Monetary Theory. *Journal of Money, Credit, and Banking* (1): 15–29.
- Tsay, R. (1986). Nonlinearity Tests for Time Series. *Biometrika* (73): 461—466.
- West, K. (1988). Dividend Innovation and Stock Price Volatility. *Econometrica* (56): 37–61.
- Wolf, A.; Swift, J.; Swinney, H. und J. Vastano (1985). Determining Lyapunov Exponents from a Time Series. *Physica 16 D*: S. 285 – 317.
- Wolf, A. (1992). FET Version 2.04c.
- Woodford, M. (1994). Nonstandard Indicators for Monetary Policy: Can their Usefulness be judged from Forecasting Regressions?. In N.G. Mankiw (Hrsg.): *Monetary Policy*. The University of Chicago Press; London.
- Youssefmir, M. und B.A. Huberman (1997), Clustered Volatility in Multiagent Dynamics. *Journal of Economic Behaviour and Organization* (32): 101–118.



**Tabellen**

$\varphi$	$g$	$r^*$	$\pi$	$v$	$b$	$\rho$	$w$	$d$	$\theta$
0,5	0,5	0	0	0,5	1000	1	0,5	1000	1
$\lambda$	$\xi$	$\delta$	$\alpha$	$\gamma$	$\bar{S} = \bar{Q} = \bar{Y}$				
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1				

Tabelle 1 — Parameterwerte in der Basissituation

*Anmerkung:* Startwerte für Einkommen, Wechselkurs und Aktienkurs jeweils 0,9.

Embedding	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aktienkurs	-11,6	5,0	8,5	13,6	16,5	18,2	19,1	22,6	25,9
Wechselkurs	-12,5	3,6	7,0	13,0	16,5	18,7	20,2	23,8	27,3

Tabelle 2 — BDS-Test auf i.i.d. Daten

*Anmerkungen:* Radius = Standardabweichung = 0,09228 Aktienkurs; Radius = Standardabweichung = 0,08722 Wechselkurs; Signifikanzniveau: 95 % kritischer Wert: 1,96

## Abbildungen

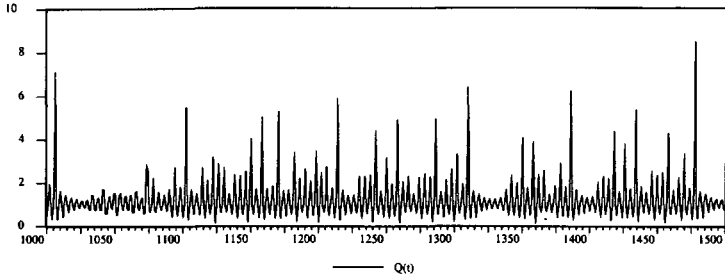


Abbildung 1a — Zeitpfad des Aktienkurses (500 Beobachtungen)

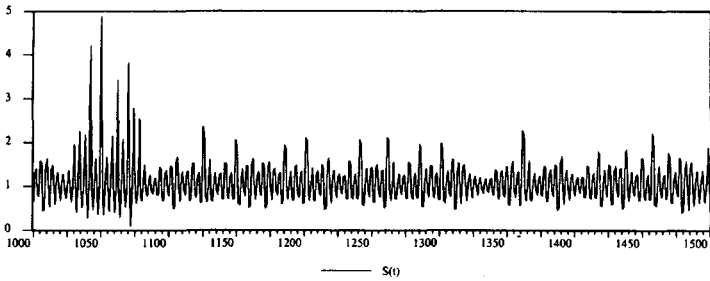


Abbildung 1b — Zeitpfade des Wechselkurses (500 Beobachtungen)

Abbildung 1 — Zeitpfade der Assetpreise

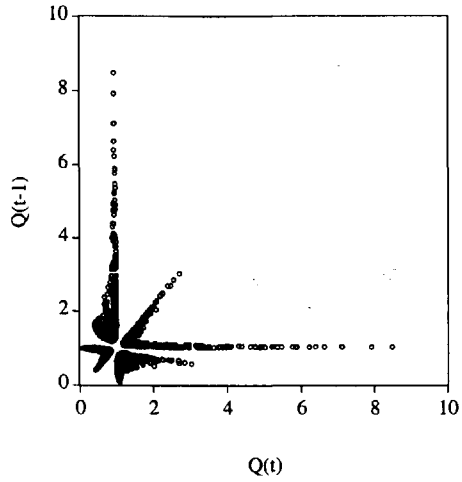


Abbildung 2a — Phasendiagramm für den Aktienkurs (2000 Beobachtungen)

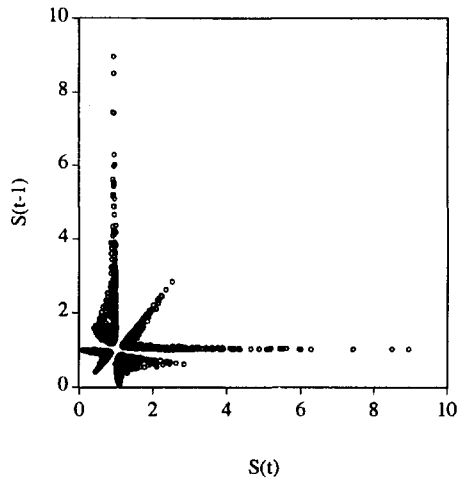


Abbildung 2b — Phasendiagramm für den Wechselkurs (2000 Beobachtungen)

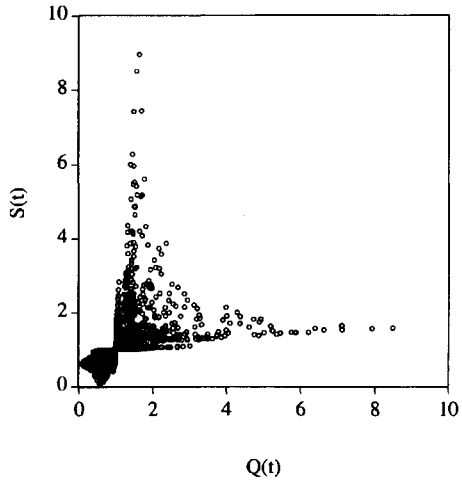


Abbildung 2c — Aktien- und Wechselkursdiagramm

Abbildung 2 — Phasendiagramme der Assetpreise

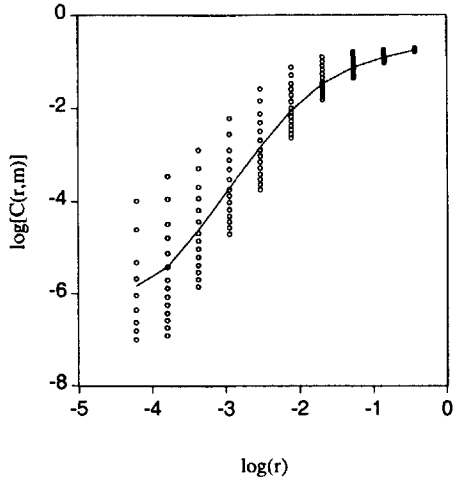


Abbildung 3a — Korrelationsintegral als Funktion des Radius für den Aktienkurs

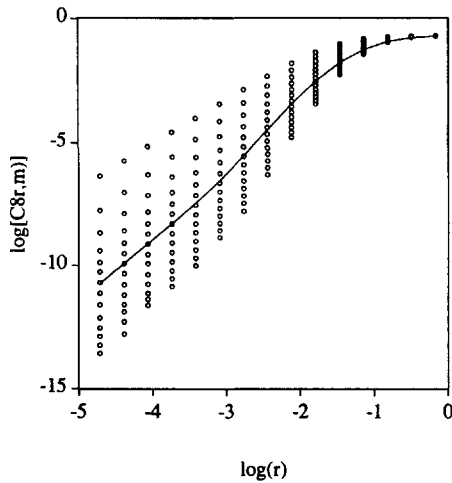


Abbildung 3b — Korrelationsintegral als Funktion des Radius für den Wechselkurs

Abbildung 3 — Korrelationsintegrale als Funktion des Radius für verschiedenen Embeddings

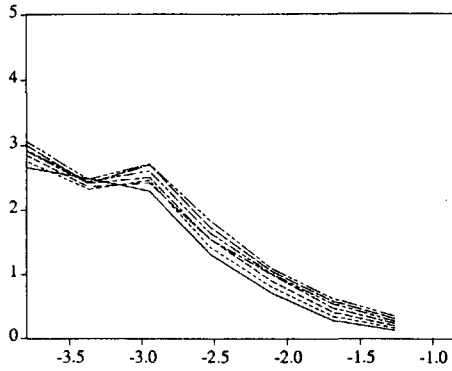


Abbildung 4a — Bestimmung der fraktalen Dimension im Aktienkursraum

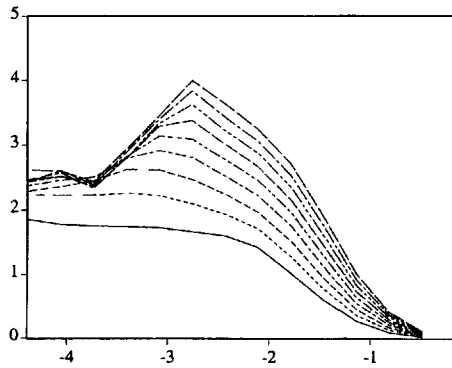


Abbildung 4b — Bestimmung der fraktalen Dimension im Wechselkursraum

Abbildung 4 — Bestimmung der fraktalen Dimension

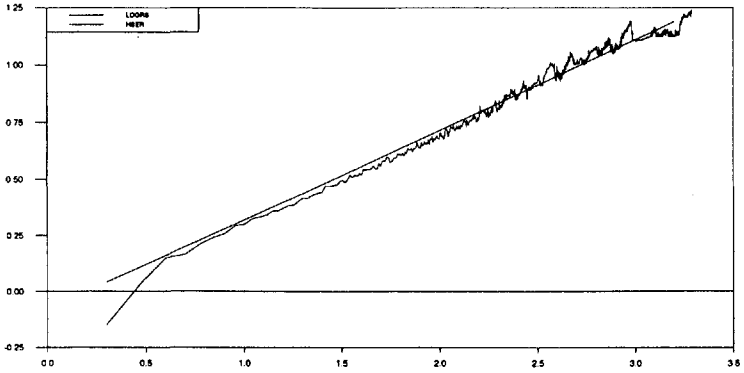


Abbildung 5a — Rescaled Range-Analyse für den Aktienkurs (Hurst-Koeffizient  $\approx 0.4$ )

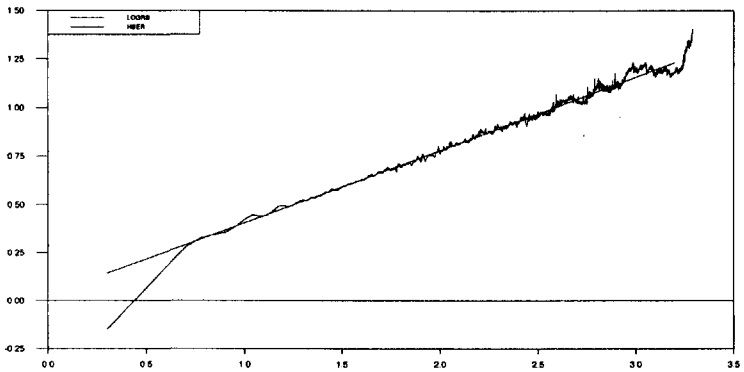


Abbildung 5b — Rescaled Range-Analyse für den Wechselkurs (Hurst-Koeffizient  $\approx 0.4$ )

Abbildung 5 — Rescaled Range-Analyse

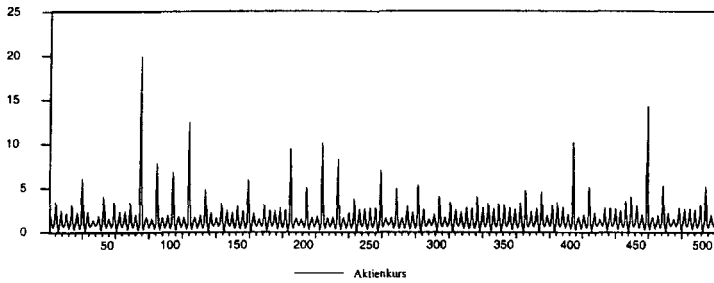


Abbildung 6a — Aktienkurs nach Beseitigung der Chartisten am Devisenmarkt (500 Beobachtungen)

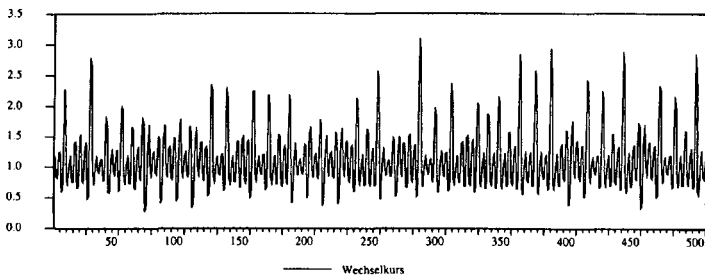


Abbildung 6b — Wechselkurs nach Beseitigung der Chartisten am Devisenmarkt (500 Beobachtungen)

Abbildung 6 — Assetpreisdynamik bei rein regressiver Erwartungsbildung am Devisenmarkt (Beobachtungen 2000 – 2500)



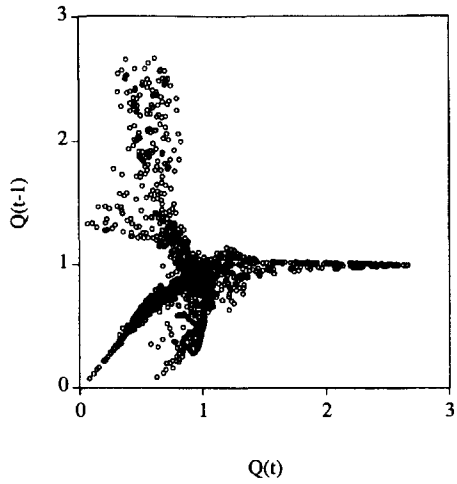


Abbildung 7a — Phasendiagramm für den Aktienkurs bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik

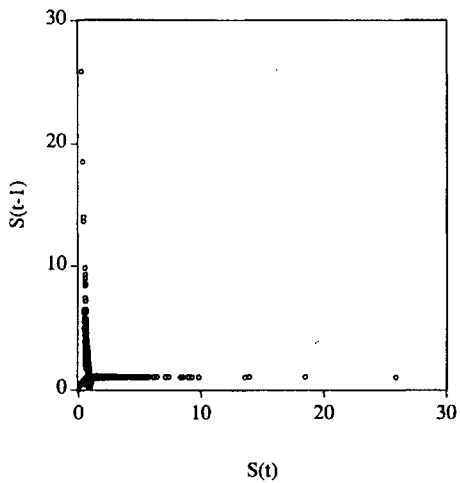


Abbildung 7b — Phasendiagramm für den Wechselkurs bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik

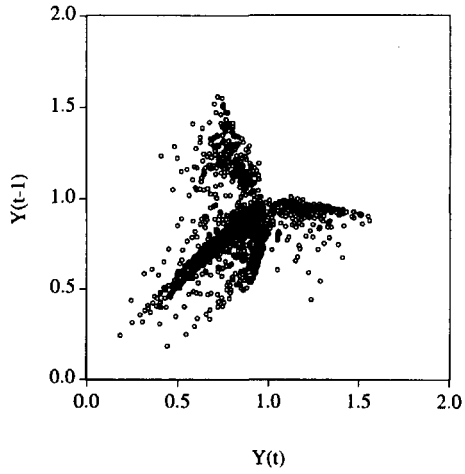


Abbildung 7c — Phasendiagramm für den Output bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik

Abbildung 7 — Modelldynamik bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik

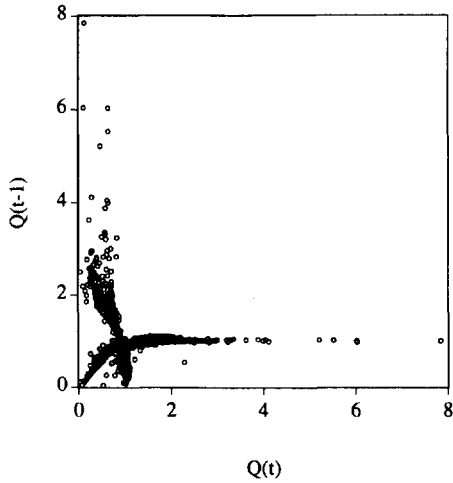


Abbildung 8a — Phasendiagramm für den Aktienkurs bei hoher Assetpreissensitivität der Geldpolitik

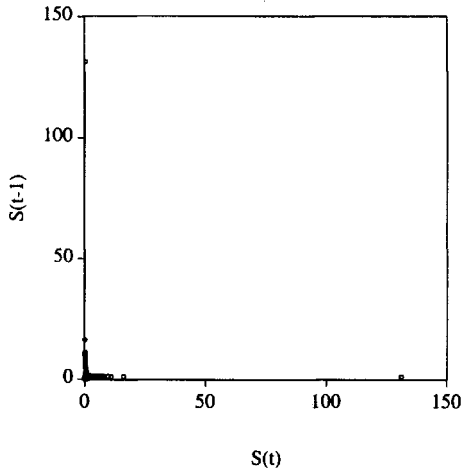


Abbildung 8b — Phasendiagramm für den Wechselkurs bei hoher Assetpreissensitivität der Geldpolitik

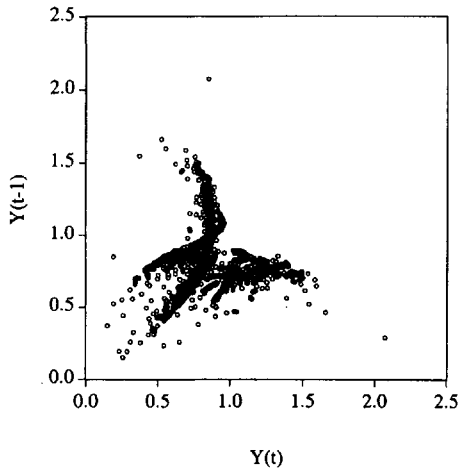


Abbildung 8c — Phasendiagramm für den Output bei hoher Assetpreissensitivität der Geldpolitik

Abbildung 8 — Zyklische Modelldynamik bei hoher Assetpreissensitivität der Geldpolitik

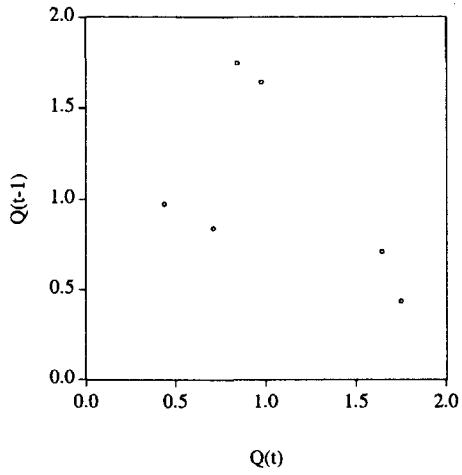


Abbildung 9a — Aktienkurs bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik und hoher Anpassungsdynamik am Gütermarkt

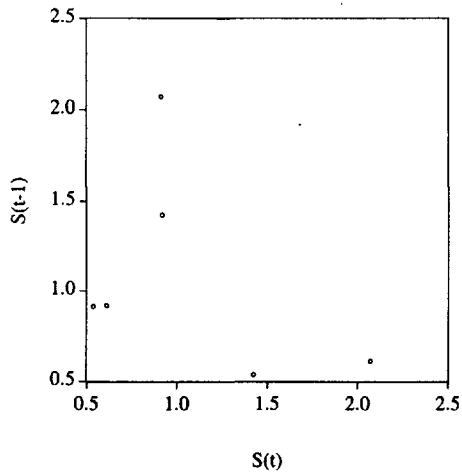


Abbildung 9b — Wechselkurs bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik und niedriger Anpassungsdynamik am Gütermarkt

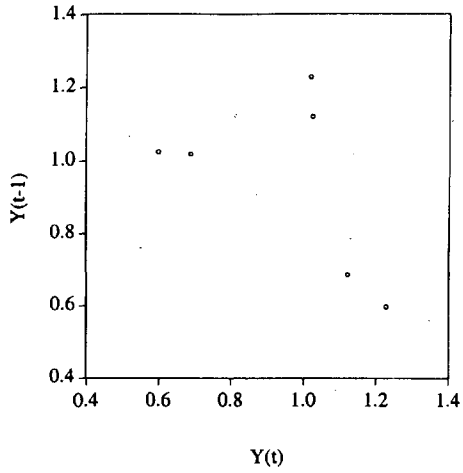


Abbildung 9c — Outputpfad bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik und niedriger Anpassungsdynamik am Gütermarkt

Abbildung 9 — Modelldynamik bei niedriger Assetpreissensitivität der Geldpolitik und niedriger Anpassungsdynamik am Gütermarkt