

Stengel, Daniel

Master Thesis

Hedging bei Ungewissheit

Suggested Citation: Stengel, Daniel (2010) : Hedging bei Ungewissheit, ZBW - Deutsche Zentralbibliothek für Wirtschaftswissenschaften, Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft, Kiel, Hamburg

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/39431>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

HEDGING BEI UNGEWISSHEIT

Diplomarbeit
vorgelegt bei Prof. Dr. Dr. h. c. W. Bühler
Universität Mannheim

von cand. rer. oec. Daniel Stengel
aus Mannheim
Sommersemester 2006

HEDGING BEI UNGEWISSHEIT

Diplomarbeit

vorgelegt bei Prof. Dr. Dr. h. c. W. Bühler

Universität Mannheim

von cand. rer. oec. Daniel Stengel

aus Mannheim

Sommersemester 2006

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	V
Abbildungsverzeichnis	VII
Abkürzungsverzeichnis	VIII
1 Problemstellung	1
1.1 Hedging	1
1.2 Ungewissheit	2
2 Grundlagen und Methoden	5
2.1 Black-Scholes-Modell	5
2.2 Diskussion der Zielkriterien und deren Messung	8
2.2.1 Hedgequalität	8
2.2.2 Risikomessung	8
2.3 Hedgestrategien	10
2.3.1 Dynamische Hedgestrategien	10
2.3.2 Statische Hedgestrategien	14
2.4 Einführung in die Simulation	16
2.4.1 Monte-Carlo-Simulation	16
2.4.2 Historische Simulation	17
2.5 Implementierung der Simulation	18
3 Hedgequalität bei diskreten Handlungszeitpunkten	21
3.1 Bestimmung der Hedgeparameter	21
3.2 Ergebnisse	22
3.2.1 Naive Strategie	22
3.2.2 Delta-Hedging Strategie	24

3.2.3	Delta-Hedging Strategie mit Schätzrisiko	27
3.2.4	Portfolio-Hedging Strategie	30
3.2.5	Gamma-Hedging Strategie	31
4	Hedgequalität bei Sprüngen im Basiswert	34
4.1	Diffusions-Sprung-Prozess	34
4.2	Bewertungsformel	36
4.3	Bestimmung der Hedgeparameter	36
4.4	Ergebnisse	37
4.4.1	Naive Strategie	38
4.4.2	Delta-Hedging Strategie	39
4.4.3	Delta-Hedging Strategie mit Schätzrisiko	40
4.4.4	Portfolio-Hedging Strategie	41
4.4.5	Gamma-Hedging Strategie	41
5	Empirische Überprüfung der Hedgequalität	42
5.1	Ausgangslage	42
5.2	Bestimmung der Hedgeparameter	42
5.3	Ergebnisse	44
5.3.1	Einfluss von Δt	45
5.3.2	Einfluss der Moneyness-Ratio	46
5.3.3	Einfluss von Sigma	47
5.3.4	Einfluss der Laufzeit	47
5.3.5	Einfluss des Schätzfehlers	48
6	Komparative Analyse	49
6.1	Vergleich Diskretisierung – Sprünge	49
6.2	Vergleich Diskretisierung, Sprünge – Empirie	50

7 Resümee	52
Anhang	54
Literaturverzeichnis	69
Ehrenwörtliche Erklärung	73

Tabellenverzeichnis

1	Werte der F-Verteilung	19
2	Diskret: Hedgestrategien/ Δt	33
3	Sprung: Hedgestrategien/ λ	38
4	Empirie: Δt („tatsächliche“ Volatilität)	45
5	Empirie: Moneyness $\frac{S_i}{K}$ („tatsächliche“ Volatilität)	46
6	Empirie: σ („tatsächliche“ Volatilität)	47
7	Empirie: Laufzeit („tatsächliche“ Volatilität)	47
8	Programmierungsumgebung	54
9	Verwendete Programme und Zweck	54
10	Diskret: Hedgestrategien/ Δt	55
11	Diskret: Hedgestrategien/ S_0	56
12	Diskret: Hedgestrategien/ μ	57
13	Diskret: Hedgestrategien/ σ	58
14	Diskret: Hedgestrategien/ $iVola$	59
15	Sprung: Hedgestrategien/ Δt	60
16	Sprung: Hedgestrategien/ LFZ	61
17	Sprung: Hedgestrategien/ S_0	62
18	Sprung: Hedgestrategien/ μ	63
19	Sprung: Hedgestrategien/ σ	64
20	Sprung: Hedgestrategien/ $iVola$	65
21	Sprung: Hedgestrategien/ σ_{Sprung}	66
22	Empirie: Moneyness $\frac{S_i}{K}$ (geschätzte Volatilität)	67
23	Empirie: Laufzeit (geschätzte Volatilität)	67
24	Empirie: σ (geschätzte Volatilität)	67
25	Empirie: Δt (geschätzte Volatilität)	67
26	Empirie: Moneyness $\frac{S_i}{K}$ (implizite Volatilität)	68

27	Empirie: Laufzeit (implizite Volatilität)	68
28	Empirie: σ (implizite Volatilität)	68
29	Empirie: Δt (implizite Volatilität)	68

Abbildungsverzeichnis

1	Verteilung der Hedgefehler (Diskretisierung)	22
2	Analyse der Entstehung von Hedgefehlern (Delta-Hedging)	24
3	Analyse der Entstehung von Hedgefehlern (Gamma-Hedging)	32
4	Verteilung der Hedgefehler (Sprünge)	37

Abkürzungsverzeichnis

Akt	Aktienkursprozess
BS	Black-Scholes
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
DAX	Deutscher Aktien Index
E	Einzelne Aktie (im Gegensatz zu einem Portfolio)
EURIBOR	European Interbank Offered Rate
f.	folgende Seite
ff.	folgende Seiten
HF	Hedgefehler
i.d.R.	in der Regel
i.H.v.	in Höhe von
KI	Konfidenzintervall
OTC	Over the counter/Freier Markt
PF	Portfolio
Trans.	Transaktionen
vgl.	vergleiche
$\hat{\mu}$	Schätzer für μ
$\hat{\sigma}$	Schätzer für σ
$\hat{\sigma}_{65}^2$	Auf 65 Tage normierter Schätzer der Varianz
μ_{Diff}	Erwarteter Zuwachs des Diffusionsprozesses
μ_{Sprung}	Erwartete Sprunghöhe des Sprungprozesses
σ_{Diff}	Standardabweichung des Diffusionsprozesses
σ_{Sprung}	Standardabweichung des Sprungprozesses
$N^{-1}(x)$	Inverse kummulierte Normalverteilungsfunktion
S_t	Aktienkurs zum Zeitpunkt t
T	Gesamtlaufzeit einer Option
$VaR_{1-\alpha}$	Value at Risk zum Konfidenzniveau von $1 - \alpha$
t	Zeitindex
i	Wertpapierindex
$C_{i,t}$	Call-Preis für Wertpapier i zum Zeitpunkt t
HF_j^s	Hedgefehler Stichprobe Nummer j , Strategie s
$\sigma_{\Delta t}^2$	Unterjährliche Varianz bezogen auf den Zeitraum Δt
σ_a^2	Jahresvarianz
a	Jahr(e)
d	Tag(e)

1 Problemstellung

Optionen und andere Derivate erfreuen sich wachsender Beliebtheit bei einer Vielzahl von Unternehmen, welche mit deren Hilfe Absicherungsgeschäfte vornehmen, spekulieren oder an deren Handel verdienen.¹ Für all diese Motive bilden Bewertungsmodelle die Grundlage, um damit den fairen Wert solcher Wertpapiere zu bestimmen. Jedoch wird häufig blind darauf vertraut, dass diese Modelle korrekte Ergebnisse liefern. Da jedoch davon nicht immer ausgegangen werden kann entsteht durch diese Ungewissheit Risiko. In der vorliegenden Arbeit werden die Fragen beantwortet, wie hoch dieses Risiko tatsächlich ist und welche Maßnahmen zur Beschränkung ergriffen werden können. Für die folgende Analyse wird von einem Optionsemittenten ausgegangen, welcher das eingegangene Risiko eliminieren möchte. Dies gelingt nur dann, wenn das jeweils verwendete Modell die Realität korrekt abbildet. Wie hoch das verbleibende Risiko tatsächlich ist, ob und wie es unter Umständen vermindert werden könnte soll Mittelpunkt dieser Arbeit sein.

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen für die folgenden Kapitel erläutert. Dazu gehört das Black-Scholes-Modell und vor allem die verwendeten Hedgestrategien. Außerdem wird kurz auf die Simulation, als Methode der Erkenntnisgewinnung, eingegangen. Kapitel 3, 4 und 5 stellen den Hauptteil der Arbeit dar, hier werden die Strategien an unterschiedlich simulierten und empirischen Aktienkursen getestet. Die Ergebnisse werden zunächst getrennt analysiert und dann in Kapitel 6 verglichen. In Kapitel 7 werden schließlich die Forschungsfragen auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse beantwortet.

1.1 Hedging

Unter Hedging versteht man die zielgerichtete Absicherung von unsicheren, zukünftigen Zahlungsströmen.² Hedgeziele beziehen sich dabei auf unterschiedliche Risikofaktoren, die die Zahlungen beeinflussen. Als Risikofaktoren kommen das Marktpreisrisiko, das Bonitätsrisiko, operationale und rechtliche Risiken in Frage. In der vorliegenden Arbeit wird nur ersteres betrachtet.³ Es ist dabei möglich, gewählte Risiken vollständig zu eliminieren, man spricht dann von einem „perfekten Hedge“ oder nur zu reduzieren.

¹ Vgl. Merton (1998), S. 342 und Brown/Toft (2002).

² Vgl. Branger/Schlag (2004).

³ Für eine ausführlichere Aufstellung vgl. bspw. Figlewski (1997).

Zur Erreichung dieser Ziele können unterschiedliche Instrumente zum Einsatz kommen, wobei viele dieser Instrumente auf spezielle Risiken zugeschnitten sind. Swaps werden bspw. für die Absicherung von Zinsänderungs- oder Währungsrisiken verwendet. Forwards und Futures dienen der unbedingten Absicherung von Marktpreisrisiken und Optionen der Marktpreisabsicherung in eine bestimmte Richtung.

Da sich die vorliegende Arbeit auf Aktienkursrisiken beschränkt kommen Forwards, Futures und Optionen als Hedginginstrumente in Betracht. Vorgreifend auf die Kombination des Hedgings mit der Ungewissheit werden jedoch auch Forwards und Futures nicht miteinbezogen, da diese im Allgemeinen keine Ungewissheit beinhalten.

Grundsätzlich lassen sich Kauf/Call- und Verkauf/Put-Optionen unterscheiden. Optionen besitzen immer einen Basiswert, einen dazugehörigen Ausübungskurs und eine Laufzeit.⁴ Als Basiswert kann prinzipiell jedes Gut dienen. Es müssen jedoch einige Voraussetzungen erfüllt sein, um die folgenden Modelle darauf anwenden zu können.⁵ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden daher im Folgenden nur europäische Call-Optionen auf eine Aktie betrachtet. Oft wird diese Einschränkung damit begründet, dass sich die Preise von Put-Optionen aus denen der Call-Optionen ergeben (Put-Call-Parität) und man daher auf eine Analyse von Verkaufsoptionen verzichten könne. Jedoch gilt dies nicht für amerikanische Put-Optionen. Daher kann nicht generell davon ausgegangen werden, dass hier gewonnene Ergebnisse auch auf andere Optionstypen übertragbar sind.⁶

1.2 Ungewissheit

Modelle bilden die Grundlage und das Ergebnis wissenschaftlichen Arbeitens. Jedoch werden einschränkende Annahmen in Modellen getroffen, um zum einen eine Abbildung der komplexen Realität überhaupt zu ermöglichen und zum anderen um den Umgang mit dem Modell zu erleichtern.⁷ Jedoch können beide Annahmentypen dazu führen, dass das endgültige Modell nicht mehr, ohne Abstriche in der Qualität der Ergebnisse machen zu müssen, in der Realität anwendbar ist.⁸

⁴ Optionen lassen sich noch weiter in amerikanische/europäische Optionen und Optionen/Optionscheine untergliedern. Eine Definition hierfür ist in Merton (1973), S. 142 f. zu finden.

⁵ Diese Voraussetzungen sind modellabhängig. Für das Black-Scholes-Modell muss es sich um ein handelbares Gut handeln.

⁶ Vgl. Merton (1973), S. 156 ff.

⁷ Bspw. um eine analytische Lösungsmöglichkeit zu ermöglichen.

⁸ Am Beispiel des Black-Scholes-Modells kann man dies leicht erkennen (vgl. Kapitel 2.1).

Aus der der Ungewissheit, ob ein Modell die Realität korrekt abbildet, entsteht Modellrisiko.⁹

Insbesondere in der Derivatebewertung müssen solche Risiken zumindest analysiert werden, um ein gewünschtes Sicherheitsniveau, bspw. ausgedrückt als „Value at Risk“, tatsächlich gewährleisten zu können. Dies ist besonders in der Optionsbewertung und deren Hedging wichtig, da hier zum einen besonders viele Annahmen in den Modellen getroffen werden und zum anderen die Abhängigkeit von Modellen besonders hoch ist.¹⁰ Forwards und Futures beinhalten keine Ungewissheit, da hier mittels einer einfachen statischen Strategie eine perfekte Duplikation möglich ist. Nur unter sehr extremen Annahmen, wie bspw. einer vorübergehenden Nicht-Handelbarkeit des Basiswertes, wäre eine risikolose Duplikation nicht mehr gegeben. Da diese Auflockerung nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, wird dieser Derivatetyp vollständig aus der Analyse ausgeschlossen.

Modellrisiko lässt sich wie folgt untergliedern:¹¹ Schätzrisiko ist Teil des Modellrisikos und bezeichnet das Risiko, dass es unmöglich ist freie Parameter des Modells, insbesondere aus vergangenen Daten, korrekt zu schätzen. Dieses Risiko ist ein Grundrisiko, das allen parametrischen Modellen zu eigen ist, sofern die Parameter nicht in der Realität fixiert sind.¹² Die benötigten Parameter könnten folgendermaßen erlangt werden:

Für die Simulation liegt die Verwendung der vorgegeben, prozessgenerierenden Parameter als Hedgeparameter nahe.

Des Weiteren könnten die Parameter auf Basis von Kursreihen geschätzt werden. Wichtig ist hierfür vor allem der gewählte Zeitraum und die Periodizität der Zeitreihen. In der Theorie könnten ebenso Zeitreihen mit realisierten Kursen verwendet werden.

Als dritte Methode könnten die Parameter auch implizit aus den Marktpreisen gehandelter Optionen berechnet werden.

Für alle Methoden, bis auf die letzte, ist zusätzlich eine wichtige Unterscheidung, ob die am Markt verwendeten Parameter zur Festlegung der Preise mit den vom Hedger verwendeten Parametern übereinstimmen. Hier wird Identität der Parameter

⁹ Dies setzt eine weite Definition der Ungewissheit dar. Für andere, engere Definitionen vgl. Epstein/Wang (1994) oder Eisenführ/Weber (2003).

¹⁰ Vgl. Figlewski (1997), S. 20.

¹¹ Vgl. hier und im Folgenden Figlewski (1997), S. 19 ff. bzw. darauf aufbauend Branger/Schlag (2004) oder Crouhy/Galai/Mark (1999).

¹² Beispiele hierzu siehe in Kapitel 2.1.

vorausgesetzt und soweit nicht anders angegeben, die dem Prozess zugrundeliegenden Parameter verwendet.

Es ist ebenso möglich, dass das verwendete Modell grundsätzlich falsch ist. Dies wird dadurch verursacht, dass einzelne Annahmen oder das gesamte Modell so wenig mit der Realität im Einklang stehen, dass korrekte Schlussfolgerungen aus dem Modell kaum mehr möglich sind und unweigerlich zu von der Realität abweichenden Ergebnissen führen.¹³ Weitere Untergliederungen werden im Folgenden außer Acht gelassen. Ungewissheit führt dazu, dass theoretisch perfekte Hedgestrategien nicht mehr dazu geeignet sind eine vollständige Elimination des Risikos herbeizuführen.

Optionen stellen somit keine redundanten Wertpapiere mehr dar, wie es in der Theorie angenommen wird.¹⁴ Dementsprechend könnte so das hohe beobachtete Handelsvolumen von Optionen erklärt werden.¹⁵ Da diese nun Wertpapiere mit distinkten Auszahlungen darstellen.

¹³ Vgl. Figlewski (1997) oder Branger/Schlag (2004).

¹⁴ Vgl. Kapitel 2.1, S. 5.

¹⁵ Vgl. Buraschi/Jiltsov (2005).

2 Grundlagen und Methoden

2.1 Black-Scholes-Modell

In diesem Kapitel werden das Black-Scholes-Modell¹⁶ und dessen zu Grunde liegenden Annahmen kurz vorgestellt. Für die eigene Analyse werden diese dann modifiziert, um eine verbesserte Abbildung der Realität zu erreichen. Das dabei möglicherweise entstehende Modellrisiko wird im Weiteren analysiert.

Grundsätzlich können zwei verschiedene Modelltypen zur Optionsbewertung unterschieden werden. Totalmodelle versuchen die individuellen oder aggregierten Entscheidungen der Marktteilnehmer direkt abzubilden und hieraus Rückschlüsse auf den Wert von Optionen zu schließen. Exogen vorgegeben werden dabei nur Nutzenfunktionen und das Modell selbst.¹⁷ Partialmodelle, wie die hier vorgestellten, beziehen den Marktpreis des Risikos und Zinssätze dagegen exogen.¹⁸

Das Black-Scholes-Modell gehört zu der zweiten Gruppe. Es dient dazu Optionen zu bewerten und kann in dieser Funktion auch zur Berechnung von notwendigen Hedgeparametern verwendet werden. Vergleichbar mit einem Binomial-Modell¹⁹ wird davon ausgegangen, dass es möglich ist, eine Option perfekt alleine mit dem dazugehörigen Basiswert zu duplizieren.

Ein risikoloses Portfolio kann gebildet werden, da die Kurse zumindest kurze Zeit perfekt korreliert sind.²⁰ Dieses Portfolio besteht dann aus einer Option und einem Anteil der zugrundeliegenden Aktie. Demnach muss dessen Wert dem einer risikolosen Nullkupon-Anleihe entsprechen. Andernfalls würden sich Arbitragemöglichkeiten ergeben, wenn ein solches Portfolio eine höhere oder niedrigere Verzinsung erzielen würde.

Eine der Annahmen des Black-Scholes-Modells lautet jedoch, dass es nicht möglich sein darf risikolose Gewinne²¹ zu erzielen. So ist die Möglichkeit der Bewertung über einen Arbitragevergleich gewährleistet. Jedes rationale Individuum müsste eine Arbitragemöglichkeit ausnutzen²² und würde dadurch dazu beitragen diese zu

¹⁶ Vgl. hier und im Folgenden Black/Scholes (1973).

¹⁷ Vgl. Branger/Schlag/Schneider (2005a) zur Entwicklung eines Totalmodells.

¹⁸ Bspw. hier aus einem Arbitragevergleich.

¹⁹ Vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979).

²⁰ Auf das Vorgehen bei der Duplikation wird in Kapitel 2.3.1 genauer eingegangen.

²¹ Bspw. in Form einer free-lottery oder free-lunch.

²² Voraussetzung dafür ist lediglich eine monoton steigende Nutzenfunktion.

eliminieren.²³ Daher ist diese Annahme zumindest auf Wertpapiermärkten i. d. R. nicht als kritisch zu sehen.

Weitere Annahmen des Modells werden nun kurz angesprochen.

Leerverkäufe müssen unbeschränkt und friktionslos möglich sein, da es je nach Duplikationsportfolio nötig ist Aktien leer zu verkaufen.²⁴ Annahmegemäß muss für diese Art von Verkäufen keine Leihgebühr bezahlt oder eine Marge hinterlegt werden, sondern die Erträge können voll verwendet werden.²⁵

Des Weiteren ist es nötig, dass der Basiswert beliebig teilbar ist, um eine perfekte Übereinstimmung der Zahlungen aus Option und Basiswert zu erhalten.²⁶

Im Standardmodell nach Black-Scholes dürfen die Basiswerte außerdem keine Auszahlungen während der Laufzeit der Option aufweisen.²⁷

Außer dem Basiswert und der Option ist noch eine risikolose Anlage- und Kreditaufnahmemöglichkeit nötig, um den Markt zu vervollständigen.²⁸ Außerdem muss der Zinssatz dieser Anlage zusätzlich bekannt, zeitlich konstant und identisch für alle Laufzeiten und Beträge sein. Kreditbeschränkungen könnten dazu führen, dass Hedgetransaktionen nicht mehr durchgeführt werden können. Dies könnte steigende Hedgefehler zur Folge haben.²⁹

Transaktionskosten werden ebensowenig berücksichtigt wie Steuern. Bewertete Optionen müssen grundsätzlich „europäisch“ sein.³⁰

Die bis jetzt erwähnten Annahmen stellen alle potentielle Modellrisiken und damit Ungewissheit dar, da nicht absehbar ist, inwieweit sich deren Nichteinhaltung auf die Verlässlichkeit der Ergebnisse auswirkt.

Diese Annahmen wurden in der Literatur jedoch bereits ausführlich behandelt. Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehen daher die im Folgende dargestellten Annahmen.

²³ Beispiel: Wenn das Portfolio eine höhere Verzinsung erwirtschaftet als den risikolosen Zinssatz könnte man das Portfolio kaufen und per Kredit finanzieren, um so einen risikolosen Gewinn über den risikolosen Zinssatz hinaus zu erzielen. Da die Nachfrage nach dem Portfolio und dem Kredit steigt, würden deren Preise zunehmen, dadurch würde die Arbitragemöglichkeit eliminiert werden.

²⁴ Um einen Call long oder einen Put short zu hedgen ist es nötig, Leerverkäufe zu tätigen.

²⁵ Diese Annahme wurde von Ofek/Richardson/Whitelaw (2004) analysiert.

²⁶ Vgl. Figlewski (1989), für Modellrisiko, das entsteht, wenn keine perfekte Teilbarkeit herrscht.

²⁷ Diese Annahme wurde bereits von Merton (1973), S. 151 ff. und Cox/Ross/Rubinstein (1979) analysiert und gelockert.

²⁸ Vgl. Black/Scholes (1973), S. 640.

²⁹ Vgl. Bondarenko u. a. (2002).

³⁰ Auflockerung durch Merton (1973).

Da die Risikofreiheit nur für einen infinitesimalen Zeitraum gewährleistet ist, muss nach Black-Scholes kontinuierlich eine Anpassung des Anteils des Basiswertes vorgenommen werden. Diese Annahme muss jedoch spätestens dann in Frage gestellt werden, wenn kein kontinuierlicher Kursverlauf vorliegt oder andere praktische Probleme wie Transaktionskosten oder Steuern in Betracht gezogen werden müssen. Eine Diskretisierung der Handlungsintervalle ist zwangsläufig die Folge und führt dazu, dass die Option und der Basiswert nicht mehr zu jedem Zeitpunkt perfekt korreliert sind. So wäre eine perfekte Replikation nicht mehr möglich. Eine Anwendung des Black-Scholes-Modells unter diesen Umständen führt zu Modellrisiko, da ein korrektes Ergebnis nicht mehr gewährleistet ist.³¹ Die Überprüfung der Auswirkungen einer solchen Auflockerung stellt daher einen Hauptteil dieser Diplomarbeit dar.

Des Weiteren gilt die Annahme, dass der Kurs des Basiswertes logarithmisch normalverteilt ist, also:³²

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma \sqrt{T}\right] \quad (1)$$

Mit der zugrundeliegenden Stochastischen Differenzialgleichung³³ wird sichergestellt, dass der zukünftige Kurs S_T nur von dem letzten verfügbaren Kurs S_0 abhängt. Alle verfügbaren Informationen werden also in diesem Kurs aggregiert.³⁴ Die prozentualen Erträge des Basiswertes, die mit dieser Verteilung beschrieben werden sind normalverteilt mit:³⁵

$$\text{Rendite}[\%] \sim \Phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \frac{\sigma}{\sqrt{T}}\right] \quad (2)$$

Das Resultat ist eine Formel für die Optionsbewertung.³⁶ Diese wird benötigt, um Aussagen über die Sensitivität des Optionspreises auf den zu hedgenden Einfluss treffen zu können. Sie werden durch Ableitung des Optionspreises errechnet.

Mehrere empirische Studien³⁷ kommen jedoch zu dem Schluss, dass extreme Ereignisse häufiger vorkommen, als mit der Normalverteilungsannahme vereinbar wären.³⁸ Dies führt zu der Frage, welche Verteilungsannahme für Aktienkurse besser

³¹ Dies entspricht einem Basisrisiko nach Culp (2004), S. 355 ff.

³² Vgl. Hull (2003), S. 235.

³³ Vgl. Gleichung 13, S. 16.

³⁴ Dies entspricht der Markov-Bedingung.

³⁵ Vgl. Hull (2003), S. 236.

³⁶ Vgl. Black/Scholes (1973), S. 644.

³⁷ Vgl. Ball/Torous (1985), Beckers (1981) und Merton (1976).

³⁸ Die Enden der Verteilungsdichte müssten also eine größere Fläche unter sich einschließen.

geeignet wäre und wie groß die Ungewissheit ist, die aus einer inkorrekten Annahme entsteht. Dieser Frage wird in dem zweiten Hauptteil nachgegangen.

Für die folgenden Ausführungen gelten, die in diesem Kapitel genannten Annahmen, bis auf die letzten beiden, fort.

2.2 Diskussion der Zielkriterien und deren Messung

2.2.1 Hedgequalität

Es werden nun mehrere Zielkriterien vorgestellt, um die Hedgequalität von Optionen bestimmen zu können. Die beste Hedgequalität wird dann erreicht, wenn die Summe der Hedgefehler stets bei Null liegt – also ein perfekter Hedge vorliegt. Mit steigendem Hedgefehler sinkt die Qualität. Dieser ist definiert als der Betrag in €, um den der Gewinn aus dem Hedgeportfolio von dem aus dem Ausgangsportfolio abweicht.

Das Modellrisiko lässt sich auf zwei unterschiedliche Arten darstellen, einmal als Gesamtrisiko einer Position inklusive dem Modellrisiko und zum anderen individuell gemessen.³⁹ Eine Unterscheidung ist besonders relevant, da ex ante nicht bekannt ist, ob zwischen dem Modellrisiko und anderen Risiken eine Korrelation besteht. So könnte eine negative Korrelation zu einer Verminderung des Gesamtrisikos führen. Um Ergebnisse besser analysieren zu können wird in dieser Arbeit das vom Modell implizierte Marktrisiko durch Hedging eliminiert und nur das Rest-/Modellrisiko gemessen. Die Verteilung der Hedgefehler kann mit Hilfe folgender Kennzahlen analysiert werden.

2.2.2 Risikomessung

μ/σ Kriterium

Dies entspricht dem Erwartungswert und der Standardabweichung der Verteilung. Die Standardabweichung kann auch „standardisiert“ als Variationskoeffizient verwendet werden. Es wird ebenfalls häufig die Semivarianz, die nur negative Hedge-

³⁹ Vgl. Branger/Schlag (2004), S. 6.

fehler beinhaltet, verwendet. Aus einer Stichprobe mit dem Umfang N bzw. hier einer Simulation berechnen sich die Schätzer für μ und σ wie folgt:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N HF_j^s \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^N (HF_j^s - \hat{\mu})^2 \quad (4)$$

Dabei ist zu beachten, dass Gleichung 4, aufgrund der Nichtlinearität der Transformation in die Standardabweichung, nur für die Varianz einen unverzerrten Schätzer liefert.⁴⁰

Nachteil einer Risikomessung durch μ und σ ist eine sehr starke Aggregation, die dazu führt, dass wichtige Informationen über die Verteilung verloren gehen. Um dies zu umgehen könnten noch zusätzliche Momente in die Analyse miteinbezogen werden. Dazu gehören das dritte und vierte zentrale Moment, die zum einen die Schiefe und die Wölbung der Verteilung angeben.

Value at Risk

Dieses Risikomaß ist definiert als derjenige Verlust, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1 - \alpha)$ innerhalb eines vorgegebenen Zeitraums nicht unterschritten wird. Dieser wird dort verwendet, wo Ziel ist, einen hohen Verlust möglichst sicher auszuschließen. Formal:⁴¹

$$VaR_{1-\alpha} = F^{-1}(\alpha) \quad (5)$$

F ist dabei die kumulierte Dichtefunktion einer beliebigen Verteilung.

Dieses Risikomaß ist in der Bankenregulierung sehr verbreitet, hier müssen Eigenmittel in Höhe des $VaR_{0,99}$ vorgehalten werden.⁴²

Mit diesem Maß wird nur eine verlustseitige Risikomessung vorgenommen. Nachteilig wirkt sich aus, dass wiederum nur mit Hilfe eines einzigen Wertes die Verteilungseigenschaften beschrieben werden sollen. Bspw. sind keine Aussagen über die

⁴⁰ Vgl. Green/Figlewski (1999), S. 1487.

⁴¹ Vgl. Vocke (2005), S. 11.

⁴² Vgl. zur Definition Hartmann-Wendels/Pfingsten/Weber (2004), S. 337 und zur Verwendung S. 368.

Höhe des gesamten erwarteten Verlustes, der mit der Wahrscheinlichkeit α maximal eintritt, enthalten. In der tabellierten Darstellung werden Verluste als negative Zahlen aufgeführt. Verbale Ausführungen beziehen sich stets auf den Absolutwert.

2.3 Hedgestrategien

In diesem Abschnitt werden ausgewählte Hedgestrategien vorgestellt, die in den Kapiteln 3 und 4 getestet und verglichen werden.

Diese Arbeit beschränkt sich auf das Modellrisiko von Marktrisikomodellen. Daher werden im Folgenden nur Hedgestrategien mit dem Ziel der Reduktion bzw. der Elimination des Marktrisikos betrachtet.

Ausgangspunkt der Hedgestrategien ist im Folgenden immer eine verkaufte europäische Kauf-Option⁴³ auf eine Aktie. Zur Absicherung dieser Option wird ein Hedgeportfolio, also ein Portfolio, das dazu dient diese Option zu replizieren, errichtet.

Als Grundlage dient dabei die nicht weiter bestimmte Funktion des Call-Preises und dessen analytisch oder numerisch berechneten partiellen Ableitungen.

$$C_t := C_t(S_t, K, T, r, \sigma) \quad (6)$$

K und T sind, zumindest bei Standardoptionen, vertraglich bestimmt und somit nicht variabel.

Grundsätzlich lassen sich zwei Arten von Hedgestrategien unterscheiden, zum einen dynamische Strategien, die in regelmäßigen Abständen überprüft und gegebenenfalls angepasst werden müssen. Zum anderen statische Strategien, die einmal aufgesetzt dazu führen, dass das Ausgangsportfolio bis zu einem bestimmten Zeitpunkt abgesichert ist.

2.3.1 Dynamische Hedgestrategien

Naive Strategie

Eine verkaufte Option kann in einem Modell ohne Transaktionskosten und mit kontinuierlichen Aktienkursen perfekt gehedgt werden, wenn man den dazugehörigen Basiswert genau dann zum Kurs K kauft, wenn dessen Kurs den Ausübungskurs überschreitet bzw. genau dann verkauft, wenn er den Ausübungskurs unterschreitet.

⁴³ Ein Call short soll keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellen und wird gewählt, um einen Optionemittenten korrekt zu modellieren (vgl. Kapitel 1).

Durch diese Strategie ist sichergestellt, dass der Optionsemittent/Hedger im Fälligkeitszeitpunkt genau dann im Besitz einer Aktie ist, wenn die Option rationalerweise ausgeübt wird.

Diese Strategie ist einfach strukturiert und ist daher leicht anwendbar. Jedoch zeigen sich schnell theoretische Schwächen. Zusätzlich zu der Annahme, dass der Aktienkurs einem kontinuierlichen Prozess folgt, muss man bei dieser Hedgestrategie annehmen, dass die Aktie immer exakt zum Ausübungskurs K ge- oder verkauft wird. Diese Annahme ist jedoch zweifelhaft, da es unmöglich ist vorherzusehen in welche Richtung der Kurs sich von K aus weiterentwickeln wird. Die Aktie muss daher stets bei einem Kurs von $K \pm \epsilon$ ge- bzw. verkauft werden. Damit vergrößert jede Transaktion, egal ob Kauf oder Verkauf, den Hedgefehler der Strategie um ϵ .

Diskrete Handlungsintervalle könnten den Hedgefehler erhöhen, müssen dies jedoch nicht. Bspw. bei einem Kursverlauf, der sich, zumindest für die diskreten Handlungszeitpunkte, immer über oder unter dem Ausübungskurs befindet.

Sprünge im Kurs des Basiswertes erhöhen den Hedgefehler zusätzlich immer dann, wenn der Sprung dazu führt, dass der Aktienkurs den Ausübungskurs überschreitet.

Transaktionskosten würden sich ebenfalls negativ auf die Leistungsfähigkeit dieser Strategie auswirken, da unter Umständen eine große Zahl Transaktionen nötig sein könnte.

Die Naive Hedgestrategie kann als eine Form des Delta-Hedgings interpretiert werden.⁴⁴ Hier wird von der Auszahlungsfunktion der Option am Ende der Laufzeit T in Abhängigkeit des Aktienkurses ausgegangen und von dieser dann die Steigung (0 oder 1) als Delta verwendet.⁴⁵ Mit dieser Strategie wird also implizit die Chance vernachlässigt, dass der Ausübungskurs bis zum Ende der Laufzeit noch über-/unterschritten werden könnte.

Diese Strategie kann auch als Stop-Loss Strategie gesehen werden. Der kritische Kurs ist dabei der Ausübungskurs. In diesem Sinne würde diese Strategie wohl immer dann angewandt werden, wenn die subjektive Wahrscheinlichkeit einer, für den Entscheider, positiven Kursentwicklung hoch ist.

⁴⁴ Vgl. nächster Abschnitt.

⁴⁵ Dies könnte eine Unteilbarkeit des Basiswertes bei einem Hedge einer einzigen Option als Ursache haben.

Delta-Hedging

Die Delta-Hedging-Strategie wurde oben bereits kurz erläutert, sie liegt dem Black-Scholes-Modell zugrunde. Sie dient dazu mit einer Option und dem dazugehörigen Basiswert eine risikolose Position zu erzeugen – um diese dann bewerten zu können.

Dies ist möglich, da sowohl der Option als auch dem Basiswert dasselbe Risiko, nämlich das einer Kursänderung, anhaften. Dadurch ist in jedem infinitesimalen Zeitintervall eine perfekte Korrelation zwischen der Kursentwicklung des Basiswertes und der Entwicklung der Option gegeben.⁴⁶

Als Delta (Δ) wird der Anteil des Basiswertes bezeichnet, der in das Portfolio eingeht. Das Delta entspricht der partiellen Steigung der Funktion $C(S_t, \cdot)$ des Optionswertes. Also:

$$\Delta_C = \frac{\delta C(\cdot)}{\delta S_t} \quad (7)$$

Das bedeutet, eine infinitesimale Kursänderung um ϵ führt zu einer Steigerung des Aktienwertes im Portfolio i. H. v. $\Delta_C \epsilon$, der Optionswert steigt gleichzeitig um $\frac{\delta C}{\delta S_t} \epsilon$.

Das Delta wird verwendet, da Änderungen des Aktienkurses einen sehr großen Einfluss auf den Wert einer Option haben.

Es handelt sich hierbei um eine dynamische Strategie, da der Anteil des Basiswertes kontinuierlich an das aktuelle Delta angepasst werden muss, um die Risikofreiheit zu bewahren.

Manche Autoren verwenden eine modifizierte Delta-Hedging-Methode, bei der die Hedgeintervalle nicht mehr nach dem Kalender bestimmt sind.⁴⁷ Bei dieser wird immer dann gehedgt, wenn der kumulierte Hedgefehler eine festgelegte Schranke überschreitet.

Vorteil dieser Methode ist, dass immer und nur dann gehedgt wird, wenn der Hedgefehler droht zu groß zu werden. Daher werden die Hedgefehler tendenziell geringer sein als die einer „Kalender“-Methode mit der gleichen Anzahl an Hedgezeitpunkten. Im Umkehrschluss ist es möglich bei gleichbleibendem Risiko die Zahl der Transaktionen zu senken. Diese Methode wird dann eingesetzt, wenn die Zahl der Transaktionen auch ein Zielkriterium darstellt, bspw. im Fall von Transaktionskosten.

⁴⁶ Für infinitesimale Kursänderungen entspricht die Steigung des Basiswertanteils im Portfolio genau der Steigung der Funktion des Optionswertes. Es wird unterstellt, dass ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Optionspreis und dem Aktienkurs besteht (vgl. Merton (1973), S. 160).

⁴⁷ Vgl. Figlewski (1989) und Branger/Breuer/Schlag (2006).

Bei Erfüllung aller Annahmen des Black-Scholes-Modells ist eine, über die eben angesprochene Hedgestrategie hinausgehende Absicherung nicht nötig. Da die Voraussetzung des Delta-Hedgings jedoch in der Praxis nicht realisierbar ist, werden zusätzliche Möglichkeiten gesucht, um auch in einem solchen Fall einen möglichst perfekten Hedge zu erreichen.

Gamma-Hedging

Das Gamma ist definiert als Steigung des Δ_C oder die Krümmung der Funktion des Call-Preises, also:

$$\Gamma_C = \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} \quad (8)$$

Ein Gamma-neutrales Portfolio ($\Gamma_{PF} = 0$) kann ohne dynamische Anpassung perfekt durch eine statische Strategie gehedgt werden.⁴⁸ Änderungen im Aktienkurs führen dann nur noch zu linearen Änderungen im Preis der Option.

Ein Gamma-neutrales Portfolio kann durch Hinzunahme einer zweiten Option erzeugt werden.⁴⁹ Diese Option muss nicht notwendigerweise denselben Ausübungskurs oder dieselbe Laufzeit haben, einzig der Basiswert muss identisch sein. Das Gamma des Gesamtportfolios berechnet sich dann aus den Gammas der beiden Optionen.⁵⁰ Da diese zweite Option jedoch auch ein $\Delta_C \neq 0$ hat kann erst danach ein Delta-neutrales Portfolio mit Hilfe des Basiswertes generiert werden.

$$\Gamma_{CPF} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

$$\Delta_{CPF} = \sum_{i=1}^N \Delta_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (10)$$

Wobei N die Zahl der Gamma-Positionen im Gesamtportfolio darstellt.

⁴⁸ Strategie: Call short, Δ_C Aktien long: da $\Gamma_{PF} = 0$ ändert sich Δ_C nicht \rightarrow statisch.

⁴⁹ Vgl. hier und im Folgenden Hull (2003), S. 312 ff. Es ist jedoch auch möglich jedes andere Wertpapier mit einem Gamma ungleich Null zu verwenden.

⁵⁰ Das Gamma der Aktie und der risikolosen Anleihe ist Null.

Der Wert des Portfolios (V) setzt sich dann zusammen aus:

$$V_t = \underbrace{-C_{1,t}}_{\text{Call short}} + \underbrace{w|_{\Gamma_{PF}=0}C_{2,t}}_{\text{Gamma Neutralität}} + \underbrace{\Delta_{C_{PF}}|_{\Delta_{PF}=0}S_t}_{\text{Delta Neutralität}} + \underbrace{bB_t}_{\text{Zerobond}} \quad (11)$$

w wird so gewählt, dass das Gamma der Gesamtposition Null ist.

Diese Gamma-Neutralität kann jedoch, ebenso wie die Delta-Neutralität oben nur für einen infinitesimalen Zeitraum gelten, da sich die Kurse und damit auch die Ableitungen ständig ändern. Daher ist auch hier eine regelmäßige Anpassung des Gesamtportfolios unabdingbar.

Vega-Hedging

Vega-Hedging stellt ebenfalls eine in der Praxis⁵¹ verbreitete Art der zusätzlichen Absicherung (zum Delta-Hedging) dar. Vega-Hedging wäre insbesondere dann sinnvoll, wenn die Volatilität des Aktienkurses nicht wie angenommen, eine Konstante wäre.

„Vega“/ ν ist definiert als:

$$\nu = \frac{\delta C}{\delta \sigma} \quad (12)$$

Vega-Neutralität führt dazu, dass das Portfolio gegen Änderungen in der Volatilität geschützt ist. Die Vorgehensweise bei der Errichtung eines Vega-neutralen Portfolios geschieht analog zur Gamma-Methode.

Natürlich können auch noch andere Ableitungen der Funktion des Call-Preises als die eben genannten berechnet werden somit ist es auch möglich Preisänderungen durch Änderungen in r und T abzusichern.

2.3.2 Statische Hedgestrategien

Statische Hedgestrategien werden im Zeitpunkt $t = 0$ aufgesetzt und müssen danach bis zum Ende der Laufzeit des Hedges (T')⁵² nicht mehr adjustiert werden. Vorteil einer solchen Strategie könnte bspw. die geringere Zahl an Transaktionen sein, da keine Anpassungen während der Laufzeit nötig sind und eine damit einhergehende Reduktion der Komplexität.

⁵¹ Vgl. Hull (2003), S. 319.

⁵² Wobei $T' \leq T$.

Naive Hedgestrategien

Das Glattstellen der Optionsposition mit Hilfe einer Gegenposition mit identischen Auszahlungen stellt wohl den einfachstmöglichen Hedge dar. Sofern die Daten der Optionen exakt übereinstimmen ist die Position beliebig lange und zu jedem Zeitpunkt perfekt gehedgt. Es wäre ebenfalls möglich mit nicht exakt übereinstimmenden Optionen zu hedgen, dann könnte es jedoch zu einem Hedgefehler kommen. Ein Optionsemittent könnte sich also bspw. an der Börse oder OTC mit einer Gegenposition eindecken, sofern die Liquidität gegeben ist. Er würde also mehr als Makler denn als Emittent fungieren. Voraussetzung dafür ist wiederum, dass es keine Transaktionskosten, insbesondere in Form einer Geld/Brief-Spanne zu Lasten des Hedgers, gibt.

Eine weitere Strategie stellt die Absicherung über die Put-Call-Parität⁵³ dar. Es wird hierfür ein Portfolio aus bspw. einem Call short, und einem Put long und einer Aktie long gebildet.⁵⁴ Dabei wird der Umstand ausgenutzt, dass die Auszahlung eines solchen Portfolios am Ende der Laufzeit genau dem risikolosen Zinssatz entsprechen, sofern keine Arbitrage möglich ist.

Diversifikation

Mit Hilfe der Diversifikation ist es möglich unsystematische Risiken aus einem Gesamtportfolio zu eliminieren. Diese sind unkorreliert mit den Risiken anderer Wertpapiere. Eine Mischung dieser Werte in einem Portfolio führt dazu, dass sich das Gesamtrisiko verringert. Insbesondere kann man durch Aufbau eines Optionsportfolios das Modellrisiko diversifizieren, unter der Annahme, dass dieses Risiko nicht systematisch ist.⁵⁵

Um diese Strategie umzusetzen würde ein Optionsscheinemittent also nicht nur eine, sondern sehr viele (unendlich) Optionen auf unterschiedliche Basiswerte emittieren. Trotz der Diversifikation muss für das verbleibende Restrisiko noch Delta-Hedging betrieben werden. Für jeden Basiswert wird dabei das Delta berechnet und dann entsprechend viele Basiswerte ge- oder verkauft. Bei Kauf aller am Markt verfügbaren Aktien wird eine maximale Absicherung erreicht.

⁵³ Vgl. Merton (1973), S. 156, Hull (2003), S. 174 f.

⁵⁴ Die Parameter des Puts und des Calls müssen sich dabei entsprechen.

⁵⁵ Vgl. Black/Scholes (1973) über die Diversifizierbarkeit des Risikos durch diskrete Handlungszeitpunkte und Merton (1976) für das Sprungrisiko.

Hedging mit einem Optionskontinuum

Es ist möglich eine Option mit einem Kontinuum an kürzer laufenden Optionen perfekt zu hedgen.⁵⁶ Die Errichtung eines Portfolios mit einer unendlichen Zahl an kürzer laufenden Optionen stellt dabei eine Hürde in der Praxis dar. Diese ist jedoch durch Inkaufnahme von Hedgefehlern umgehbar, indem systematisch nur vereinzelte Optionen gekauft werden. Bereits ein Hedgeportfolio mit nur drei Optionen führt zu besseren Ergebnissen als die Delta-Hedging-Methode.

2.4 Einführung in die Simulation

2.4.1 Monte-Carlo-Simulation

Als Untersuchungsmethode wird in dieser Arbeit die Simulation angewandt. In den Kapiteln 3 und 4 findet dabei eine Monte-Carlo-Simulation Anwendung, um Aussagen über Verteilungen von Hedgefehlern zu erreichen, die sonst analytisch nicht oder nur schwer zu errechnen sind.

Alle Schritte werden am Computer simuliert und durchgeführt, es werden keine empirischen Daten verwendet. Um die Vergleichbarkeit mit empirischen Daten zu gewährleisten wird auf realistische Parameter Wert gelegt. Vorteil eines solchen Vorgehens ist, dass die Simulationsbedingungen beliebig angepasst und so ceteris-paribus Versuche unternommen werden können.

Ziel ist es, Ausprägungen eines stochastischen Prozesses, der die Bewegungen einer Aktie modelliert, zu simulieren. Der Prozess, der von Black-Scholes angenommen wird und hier als Grundlage dient, ist eine geometrisch Brownsche Bewegung. Sie wird durch folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben:⁵⁷

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma dz \quad (13)$$

dz entspricht dabei einer einzelnen Stichprobe aus einer Standardnormalverteilung.⁵⁸ Es wird $\Delta \ln S$ simuliert, da dies für diskrete Δt bessere Ergebnisse liefert.⁵⁹ Die Simulation wird stets im physischen und nicht im risikoneutralen Maß durchgeführt.

⁵⁶ Vgl. Carr/Wu (2004).

⁵⁷ Verteilung von $\frac{\Delta S}{S}$ siehe Gleichung 2, dabei wird der Driftterm nach Itos-Lemma angepasst.

⁵⁸ Demnach beschreibt diese Differenzialgleichung einen Wiener-Prozess.

⁵⁹ Vgl. Hull (2003), S. 411.

Die Markovbedingung ist erfüllt. Ein zukünftiger Kurs $S_{t+\epsilon}$ hängt nur von dem Kurs der Vorperiode ab. Diese Eigenschaft ist bspw. nötig um eine schwache Markteffizienz sicherzustellen.⁶⁰

Zur Erzeugung der standardnormalverteilten Zufallszahlen werden im ersten Schritt gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt. Dazu stehen eine Reihe von Methoden zur Verfügung, die sich in drei Kategorien einteilen lassen. Echte Zufallszahlen können zum Beispiel aus physikalischen Phänomenen stammen. Jedoch ist die Erzeugung meist langsam und aufwendig. Pseudo-Zufallszahlen werden mit einem mathematischen Algorithmus erzeugt und sind daher deterministisch und nicht zufällig. Die Güte eines solchen Algorithmus ist jedoch ex ante bestimmbar und daher werden diese Zufallszahlen auch häufig verwendet. Quasi-Zufallszahlen werden ebenfalls anhand einer Rechenvorschrift erzeugt. Vorteile ergeben sich, da die Verteilung von Quasi-Zufallszahlen sehr homogen ist und diese sich daher speziell für die Monte-Carlo-Simulation eignen.⁶¹ Aufgrund der weiteren Verbreitung und der einfacheren Erzeugbarkeit von Pseudo-Zufallszahlen werden jedoch im Folgenden diese verwendet.

Aus dieser Zahlenreihe werden dann mit Hilfe der Inversions-Methode Zufallszahlen, die der gesuchten Verteilung folgen, erzeugt.⁶²

Ergebnis ist, ausgehend von dem heutigen Kurs S_t , eine Kursänderung ΔS , die bis zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ stattfindet wird. Um einen Kursverlauf zu erhalten werden so viele Kurse wie nötig erzeugt.

Im letzten Schritt wird der Kursverlauf dazu verwendet die oben erläuterten Hedgestrategien daran zu testen und Hedgefehler zu bestimmen. Bei einer dynamischen Strategie wird zu jedem Handlungszeitpunkt eine Anpassung des Hedgeportfolios vorgenommen. Bei beiden Strategie-Typen werden zu jedem Handlungszeitpunkt die Hedgefehler berechnet und kumuliert.

Durch mehrfache Wiederholung ist das Ergebnis dieser Simulation eine Verteilung von kumulierten Hedgefehlern. Diese wird nachfolgend weiter analysiert.

2.4.2 Historische Simulation

Die historische Simulation stellt die zweite verwendete Simulationstechnik dar. Hier dienen historische, statt simulierte Kurse als Grundlage und wie bei obiger

⁶⁰ Schwache Markteffizienz bedeutet, dass alle Informationen, die in den vergangenen Kursen enthalten sind, bereits im heutigen Kurs eingepreist wurden.

⁶¹ Vgl. Hull (2003), S. 416 f.

⁶² Vgl. Hull (2003), S. 412 f. für eine alternative Methode.

Methode können die Hedgestrategien daran getestet werden. So ist es möglich die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation nochmals zu überprüfen. Abweichungen in den Ergebnissen könnten auf weiteres, nicht betrachtetes Modellrisiko durch verletzte Annahmen hindeuten. Nachteil dieser Methode ist, dass die Daten von Optionen und Kursverläufen oftmals nicht bekannt sind und geschätzt werden müssen. Des Weiteren stehen zumeist deutlich weniger Kursreihen zur Verfügung, dies wirkt sich negativ auf die statistische Auswertbarkeit der Ergebnisse aus.

2.5 Implementierung der Simulation

In diesem Abschnitt wird dargestellt, welche Parameter für die Simulationen verwendet werden und wie und mit welchen Mitteln diese am Computer implementiert werden.

Grundsätzlich stellt sich die Frage wieviele Kursreihen erzeugt werden sollen. Für die Güte der Ergebnisse ist eine möglichst große Anzahl von Stichproben nötig; der Standard-(Schätz-)Fehler ist wie folgt definiert:

$$Fehler = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \quad (14)$$

$\hat{\sigma}$ stellt den Schätzer der Standardabweichung dar, N die Zahl der Wiederholungen.

Demnach sinkt der Fehler je größer die Zahl der Stichproben ist, jedoch nur proportional zur Wurzel aus N . Eine große Anzahl von Wiederholungen ist daher wünschenswert. Um einen Ausgleich zwischen benötigter Rechenzeit und Güte der Ergebnisse zu finden werden 10000 Replikationen gewählt.

Hieraus kann dann ein Konfidenzintervall zum Sicherheitsniveau α für den Erwartungswert festgelegt werden.

$$\hat{\mu} - \frac{N^{-1}(\alpha)\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} < \mu < \hat{\mu} + \frac{N^{-1}(\alpha)\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \quad (15)$$

$N^{-1}(x)$ entspricht dabei der inversen Funktion der kumulierten Normalverteilung.

Des Weiteren kann getestet werden, ob zwei Erwartungswerte gleich sind (T-Test):

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (16)$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (17)$$

Prüfgröße:

$$T = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_1^2/N_1 + \hat{\sigma}_2^2/N_2}} \quad (18)$$

Für das Signifikanzniveau α wird die Nullhypothese verworfen, wenn

$$T > |t_{(\alpha/2, \nu)}| \quad (19)$$

$t_{(\alpha/2, \nu)}$ ist der kritische Wert der t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden, wobei:

$$\nu = \frac{(\hat{\sigma}_1^2/N_1 + \hat{\sigma}_2^2/N_2)^2}{(\hat{\sigma}_1^2/N_1)^2/(N_1-1) + (\hat{\sigma}_2^2/N_2)^2/(N_2-1)} \quad (20)$$

Der F-Test dient der Überprüfung, ob sich zwei Varianzen zweier Stichproben signifikant unterscheiden.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad (21)$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad (22)$$

Die Prüfgröße ist definiert als:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \quad (23)$$

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn

$$F > F_{(\alpha, N_1-1, N_2-1)} \quad (24)$$

$F_{(\alpha, N_1-1, N_2-1)}$ ist der kritische Wert der F-Verteilung mit $N_1 - 1$ bzw. $N_2 - 1$ Freiheitsgraden und einem Signifikanzniveau von α .

Die notwendigen kritischen Werte werden im Folgenden tabelliert.

α	verbal	$N_1 = N_2$	$F(\alpha, N_1 - 1, N_2 - 1)$	$\sqrt{F(\alpha, N_1 - 1, N_2 - 1)}$
0,05	signifikantes Ergebnis	10000	1,0335	1,0166
0,01	sehr signifikantes Ergebnis	10000	1,0476	1,0235
0,001	höchst signifikantes Ergebnis	10000	1,0638	1,0314

Tabelle 1: Kritische Werte der F-Verteilung, für Varianz und Standardabweichung. Quelle Excel Funktion: FINV(·).

Wenn $\hat{\sigma}_1^2$ mindestens 6,38% über $\hat{\sigma}_2^2$ liegt ist $\hat{\sigma}_1^2$ höchst signifikant größer als $\hat{\sigma}_2^2$.

Es wird angenommen, dass es in einem Jahr 260 Handelstage gibt.⁶³ Wochenenden, Feiertage und andere Zeiten ohne Handel bleiben ohne Berücksichtigung. Die Hypothese, dass zu handelsfreien Zeiten die Varianz geringer sein könnte wird somit nicht weiter beachtet.

⁶³ Analog zu Green/Figlewski (1999).

Es wird grundsätzlich ein vollständiges (Gesamt-)Portfolio aufgestellt, das eine Call-Option short und das Hedgeportfolio enthält. Bei einem perfekten Hedge ist der Erwartungswert und das Risiko dieses Portfolios Null.

Es ist nicht möglich kontinuierliche Funktionen in einer Monte-Carlo-Simulation perfekt abzubilden. Eine Diskretisierung ist nötig. Jedoch könnten die Ergebnisse einer kontinuierlichen Verteilung approximiert werden, indem die diskreten Schritte sehr klein gewählt werden. Dies ist jedoch im nächsten Kapitel gerade nicht erwünscht, da die Auswirkungen der Diskretisierung untersucht werden sollen.

Die Analyse wird ausgehend von einer Kombination von Standardparametern durchgeführt und jeweils einer der Parameter wird verändert. Im Ausgangsfall gelten folgende Parameter: $S_0 = 100$; $\mu_{Aktie} = 0,1$; $\sigma_{Aktie} = 0,2$; $r = 0$; $K = 100$; $T = 65d$; $\Delta t = 1d$ und für Aktienkursprozesse mit Sprüngen zusätzlich: $\lambda = 120[\frac{Sprünge}{a}]$; $\mu_{Sprung} = 0$; $\sigma_{Sprung} = 0,2$.

Die Implementierung am Computer erfolgt in der Programmiersprache Python, die sich durch einen einfachen und übersichtlichen Syntax aus. Sie ist daher insbesondere zum Entwurf von Programmen geeignet.⁶⁴ Python-Programme werden des Weiteren schneller ausgeführt als bspw. Programme in Visual Basic for Applications in Microsoft Excel.⁶⁵ So ist eine höhere Replikationszahl in der selben Zeit möglich. Die Simulation findet auf dem Parallelrechner der Universität Mannheim unter Linux statt. Das Programm selbst ist jedoch aufgrund der Plattformabhängigkeit von Python auch in vielen anderen Betriebssystemen lauffähig. Die graphische Auswertung der Daten erfolgt mit Hilfe von Gnuplot.

⁶⁴ Vgl. Anhang 7, S. 54.

⁶⁵ Eine Implementierung in C/C++ wäre jedoch nochmals schneller.

3 Hedgequalität bei diskreten Handlungszeitpunkten

In diesem Kapitel wird die Hedgequalität von Optionen beschrieben, verglichen und Auffälligkeiten aufgezeigt, gegeben den Fall, dass diskrete Handlungszeitpunkte vorliegen. Es wird damit auch das Grundrisiko bestimmt, das dem nächsten Kapitel zu Sprüngen im Basiswert und jeder empirischen Untersuchung zugrundeliegt. Ein perfekter Hedge wird nur dann erreicht, wenn kontinuierlich gehedgt wird. Jede Abweichung davon müsste also ceteris paribus zu einer Erhöhung des Risikos führen. Die Simulation wird mit fünf unterschiedlichen Hedgeintervallen durchgeführt: Zweimal und einmal am Tag sowie alle fünf, zehn und fünfzehn Tage.

3.1 Bestimmung der Hedgeparameter

In der Simulation wird zunächst davon ausgegangen, dass die Marktteilnehmer alle zur Berechnung benötigten Parameter⁶⁶ kennt und auch so verwendet. Es besteht daher zunächst kein Schätzrisiko.

Die Optionsreplikation kann unter den hier vorausgesetzten Annahmen keine Risikofreiheit gewährleisten. Es kann daher nicht davon ausgegangen werden, dass die zu replizierende Option mit Hilfe der Black-Scholes-Formel korrekt bewertet wird.

Zum einen können die Hedgestrategien zu Hedgefehlern führen, deren Erwartungswert nicht Null ist ($\mu_{HF} \neq 0$). Bei einem negativen erwarteten Hedgefehler müsste dementsprechend die Funktion des Optionspreises nach oben verschoben werden, da die Replikation höhere Kosten verursacht. Zum anderen kann die Verteilung der Hedgefehler eine Standardabweichung größer Null ($\sigma_{HF} > 0$) aufweisen. Dadurch entsteht zusätzlich ein risikoaversionsabhängiger Aufschlag auf den Optionswert (s.u.)

Dies führt zu der Notwendigkeit von Anpassungen in der Bewertung dieser Option mit der Black-Scholes-Formel,⁶⁷ die durch Änderungen an den Parametern, die zur Erzeugung eines Hedgeportfolios benötigt werden durchgeführt werden. Als Approximation wird der Risikoparameter σ verändert. Diese Anpassungen müssen jedoch exogen vorgegeben werden, da sie aus den gegebenen Daten nicht ersichtlich und für die risikoneutrale Bewertung nach Black-Scholes auch nicht notwendig wären. Hierauf wird in Kapitel 3.2.3 eingegangen.

⁶⁶ Also für den Aktienkursprozess: S_0, μ und σ und für die Option: r, K, T .

⁶⁷ Von der Möglichkeit, dass das gesamte Black-Scholes-Modell unpassend sein könnte wird hierbei abstrahiert.

3.2 Ergebnisse

Nach Simulation der Kursreihen können folgende Ergebnisse festgehalten werden:

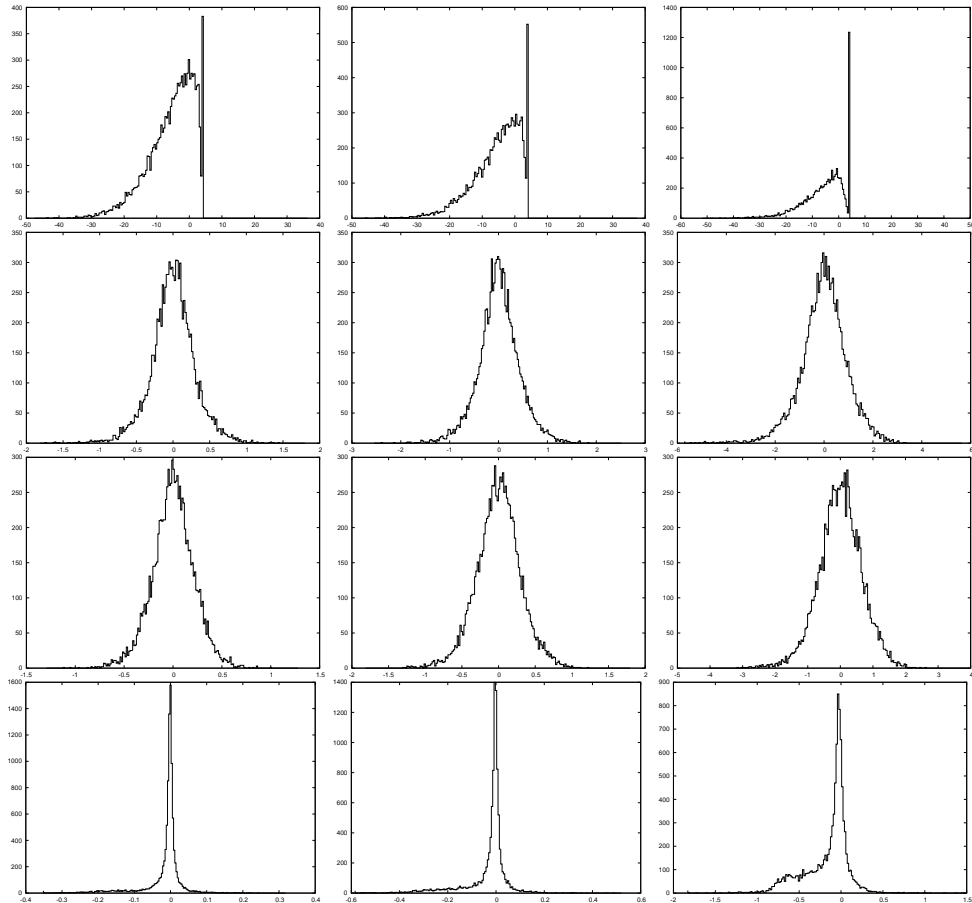


Abbildung 1: Verteilung der Hedgefehler (Diskretisierung). Zeilen: Naiv-, Delta-, Portfolio-, Gamma-Hedging; Spalten: $\Delta t = 0, 0,5; 1; 5$ (Eigene Darstellung).

In Abbildung 1 werden die simulierten Verteilungen der Hedgefehler dargestellt. Dabei werden die unterschiedlichen Hedgestrategien im Hinblick auf die Auswirkungen einer Diskretisierung der Handlungszeitpunkte ceteris paribus beleuchtet.

Eine erste Analyse der Verteilungsgraphen der Hedgefehler zeigt bereits grundlegende Eigenschaften der Hedgestrategien und macht einen rudimentären Riskovergleich möglich.

3.2.1 Naive Strategie

Bei der naiven Hedgestrategie sind zwei Effekte für zunehmende Länge der diskreten Hedgeintervalle zu beobachten.

Die Zahl der „Null-Hedgefehler“, also der Simulationsläufe, die zu Hedgekosten von Null geführt haben, nimmt zu, da kleine Schwankungen um den Ausübungs-

kurs nicht mehr zu ständigen Transaktionen führen. Dies führt vermehrt zu Simulationsläufen, bei denen überhaupt keine Transaktionen getätigt werden müssen.

Gleichzeitig führt jedoch die Verlängerung der Hedgeintervalle, durch eine Erhöhung der individuellen Hedgefehler, zu mehr Simulationsläufen mit extrem negativen Hedgefehlern. Ein Beispiel für einen solchen Fall wäre ein Kursverlauf, bei dem der Kurs zum ersten Hedgezeitpunkt knapp unter dem Ausübungskurs liegt, dann jedoch kontinuierlich ansteigt. Kurze Hedgeintervalle führen dazu, dass der Hedgefehler minimal bleibt, da die Aktie bereits kurz nach Überschreiten des kritischen Kurses gekauft wird und damit ein Ansteigen des Hedgefehlers unterbunden wird. Bei einem langen Hedgeintervall ist dies jedoch nicht möglich und der Hedgefehler steigt bis zum nächsten Hedgezeitpunkt ungehindert an.

Entgegen dem subjektiven Eindruck, der aus der Zunahme der Null-Hedgefehler entsteht, dass das Risiko einer solchen Strategie mit der Zunahme der Länge der Hedgeintervalle abnimmt, führt die Zunahme der Extremwerte zumindest zu einem Ausgleich.⁶⁸

Diese Strategie hat, gemessen am Black-Scholes-Optionswert, einen sehr negativen Erwartungswert.⁶⁹ Wenn nur diese Hedgestrategie anwendbar wäre müsste sich der Optionspreis aufgrund dieses tatsächlich zu erwartenden Verlustes in etwa verdoppeln. Des Weiteren ist das Risikoniveau, verglichen mit anderen Strategien und dem Optionswert, sehr hoch. Die Standardabweichung und der *VaR* liegen stets höher als die jeder anderen Strategie. Unter der Voraussetzung, dass die Nutzenfunktion die Präferenzen des Entscheiders mit einem dieser Risikomaße als Grundlage⁷⁰ abbildet, würde diese Strategie dominiert werden.

Die Zahl der Transaktionen sinkt mit der Verringerung der Hedgeintervalle von durchschnittlich 7,6514 bei $\delta t = 0,5$ auf 1,8044 bei $\delta t = 15$, jedoch nicht im gleichen Maße, wie die Zahl der möglichen Transaktionen (von 130 auf 5). Des Weiteren bleiben der Erwartungswert und das Risiko über den betrachteten Parameterraum relativ konstant. Nur wenn man über einen Paarvergleich direkter Nachbarn hinausgeht kann die Nullhypothese

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (25)$$

verworfen werden. Das heißt, es ist ein Absinken des Erwartungswertes feststellbar, jedoch werden die Unterschiede erst für größere Parameterunterschiede stati-

⁶⁸ Vgl. Tabelle 2, S. 33.

⁶⁹ Vgl. Tabelle 2.

⁷⁰ Bspw. bei einer Nutzenfunktion: $U = \mu - \lambda\sigma$ für $\lambda \geq 0$.

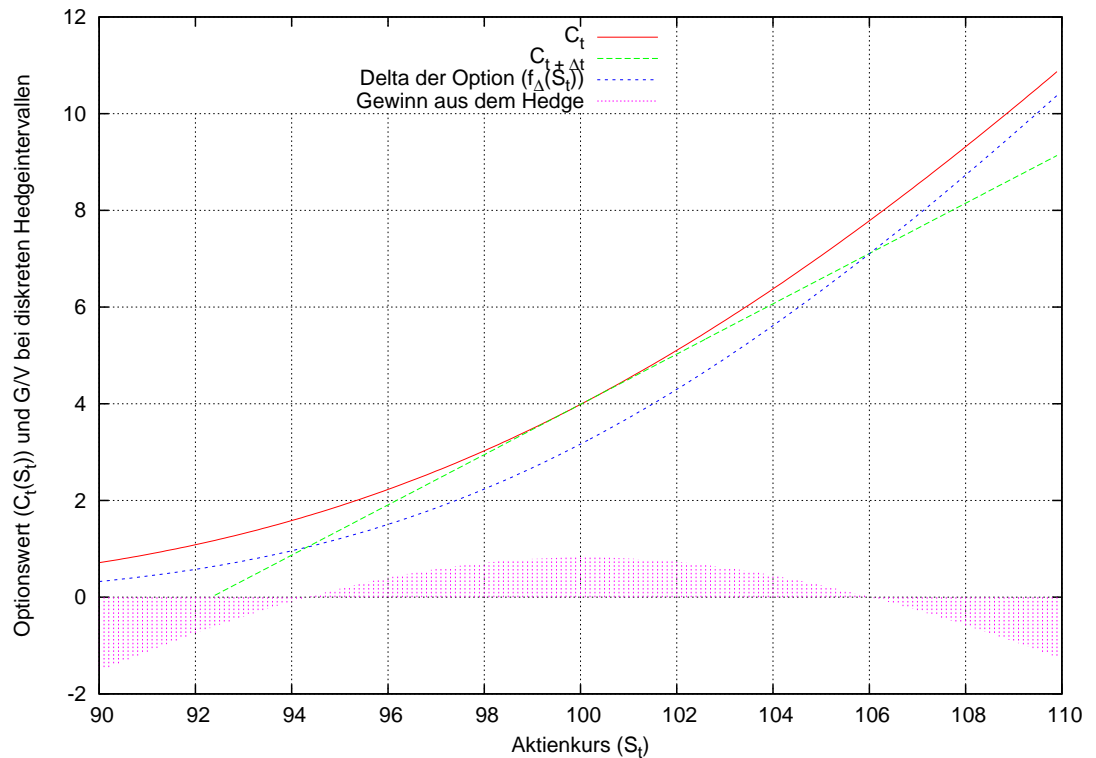


Abbildung 2: Analyse der Entstehung von Hedgefehlern (Delta-Hedging). Aufbauend auf Boyle/Emanuel (1980), S. 264.

stisch signifikant. Wie oben⁷¹ erläutert gilt für die Stichprobenvarianzen, dass ab einer Steigerung von mindestens 6,38% ein höchst signifikanter Unterschied vorliegt. Dies ist stets gegeben. Das bedeutet, dass das Risiko gemessen mit Hilfe der Varianz, mit zunehmendem Δt ansteigt.

Die weitere Analyse ergibt, dass diese Strategie das höchste Risiko beinhaltet, wenn die Option folgende Eigenschaften hat: lange Laufzeit und Emission „am Geld“. Eine hohe Standardabweichung der Aktienrendite führt ebenfalls zu höchst signifikanten Risikoerhöhungen.⁷²

Trotz dieser Entwicklungen und dem hohen Grundrisiko wird diese Strategie in der Praxis wohl häufig, zumindest unbewusst, verwendet.

3.2.2 Delta-Hedging Strategie

Eine typische Verteilung der Hedgefehler bei Durchführung einer Delta-Strategie gleicht einer Gausschen Glockenkurve.⁷³

⁷¹ Vgl. Tabelle 2.5.

⁷² Vgl. Tabelle 13.

⁷³ Vgl. Abbildung 1.

Zur Analyse der Entstehung dieser Verteilung wird im Folgenden zunächst ein einziger Hedge bei diskreten Handlungszeitpunkten betrachtet. Abbildung 2 zeigt eine Option zum Zeitpunkt t und $t + \Delta t$.⁷⁴ Bei der Deltahedging Strategie werden zum Zeitpunkt t Δ Aktien⁷⁵ ($S_t = 100$) gekauft. Die Veränderungen des Aktienwertes ergeben sich in Abhängigkeit des Aktienkurses in Form der Geraden.

Der Wert der abzusichernden Option entwickelt sich nach C_t in Abhängigkeit des Aktienkurses. Jedoch ist der Einfluss der Zeit auf den Optionswert nur im Grenzwert, also bei infinitesimalen Handlungsintervallen, gleich Null. Daher muss dieser Einfluss in einer diskreten Welt beachtet werden und der zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ relevante Preis der Option entwickelt sich entsprechend $C_{t+\Delta t}$.

Annahmegemäß wird die Option im Gesamtportfolio leerverkauft, dementsprechend ist $C_{t+\Delta t} - C_t(S_t)$ als Verlust zu verbuchen. Demgegenüber steht ein Gewinn aus der Aktie $f_\Delta(S_t) - f_\Delta(S_{t+\Delta t})$.

Hieraus ergibt sich das Gewinnprofil des Gesamtportfolios in Abhängigkeit der Kursänderung des Basiswertes. Für kleine Kurssprünge sind die Gewinne aus der Aktienposition größer als die zeitgleichen Verluste aus der Option.⁷⁶ Bei größeren Kursänderungen überwiegt der Verlust aus der Option.

Diese Überlegungen sind nützlich, um die Verteilungsfunktion der Hedgefehler zu analysieren.

Zum einen zeigt sich, dass bei dieser Strategie auch positive Hedgefehler möglich sind. Zum anderen können auch Veränderung der Flanken der Verteilung in Abhängigkeit von Δt interpretiert werden.

Zwei Einflüsse sind bestimmend für die Art der Verteilung. Der positive Teil ist nach oben beschränkt. Die Höhe der Schranke wird von der maximalen Höhe des Hedgefehlers eines einzelnen Hedges und von der Zahl der durchgeführten Transaktionen beeinflusst. Ersteres ist positiv, letzteres negativ mit Δt korreliert. Insgesamt könnte die Schranke mit steigendem Δt absinken. Dies würde die augenscheinliche linksschiefe der Verteilung erklären.

Im negativen Bereich gibt es keine Beschränkung. Mit steigendem Δt erhöht sich die Varianz des Aktienkursprozesses zwischen den Handlungszeitpunkten, die als

$$\sigma_{\Delta t}^2 = \sigma_a^2 \Delta t \quad (26)$$

⁷⁴ Die Darstellung entspricht zwar tatsächlichen Optionspreisverläufen nach Black-Scholes, jedoch liegt die hier betrachtete Änderung von Δt zur besseren Veranschaulichung bei vergleichsweise hohen 24 Tagen.

⁷⁵ Die Steigung der Geraden entspricht dem Delta.

⁷⁶ In der Abbildung etwa von 94-106.

definiert ist.⁷⁷

Damit erhöht sich auch die Wahrscheinlichkeit eines großen „Sprunges“ des Aktienkurses, der nötig ist, um in den Bereich mit negativen Hedgefehlern zu gelangen.⁷⁸ Gleichzeitig wird mit steigendem Δt die Fläche der positiven Hedgefehler breiter. Daher steigt auch die Wahrscheinlichkeitsmasse im positiven Bereich. Dieser Effekt wird jedoch durch die steigende Standardabweichung überkompensiert und der minimale realisierte Hedgefehler sinkt streng monoton.

Für $\Delta t \leq 1$ ist die Verteilung sehr symmetrisch. Für größere Werte dagegen wird die Verteilung bei gleichbleibendem Erwartungswert linksschief.

Das Risiko wird durch Deltahedging im Vergleich zum Naiven Hedge deutlich reduziert. Der erwartete Hedgefehler liegt nun stets um Null. Die Nullhypothese $H_0 : \mu_{\Delta t} = 0$ kann für $\alpha = 0.001$ für kein Hedgeintervall verworfen werden. Für alle Δt wird demnach die Nullhypothese akzeptiert.⁷⁹ Des Weiteren sind die Standardabweichung und der *VaR* niedrig.⁸⁰

Dennoch bleibt der *VaR* für das 1% Konfidenzniveau mit 1,1141 für das realistische Hedgeintervall „1 mal pro Tag“,⁸¹ verglichen mit dem Optionswert, sehr hoch. Um als Optionsemittent gegen einen solchen Verlust abgesichert zu sein müsste eine Rücklage von knapp 30% der Optionsprämie erfolgen.

Das Risiko, gemessen durch die Varianz, steigt höchst signifikant für jedes beliebige zunehmende Hedgeintervall.

Die Varianz ist maximal für Optionen auf Aktien, die „am Geld“ notieren.⁸² Hier ist das Gamma der Option am größten. Sprünge des Aktienkurses führen von hier aus zu besonders großen Verlusten für den Optionsemittenten. Für Hedges mit Aktien, die „aus dem Geld“ notieren ist das Risiko höchst signifikant höher als für Aktien, die „im Geld“ notieren.

Für die hier betrachteten erwarteten Aktienrenditen (μ) ergibt sich kein signifikanter Einfluss auf das Risiko.⁸³ Jedoch ist eine leichte Risikominderung mit steigendem μ zu verzeichnen. Ein schnell steigender Aktienkurs führt, durch eine höhere erwartete Rendite, für eine „am Geld“ notierende Option, tendenziell früher zu Options-

⁷⁷ Δt hat die Einheit [$\frac{d}{a}$].

⁷⁸ Vgl. Abbildung 2.

⁷⁹ Der Fehler, der dieser Entscheidung anhaftet, ist ein Typ 2- bzw. β -Fehler.

⁸⁰ Vgl. Tabelle 2, S. 33.

⁸¹ Vgl. Green/Figlewski (1999).

⁸² Vgl. Tabelle 11.

⁸³ Vgl. Tabelle 12. Die Nullhypothesen $H_0 : \hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2$ kann auf dem 0,1% Niveau i. d. R. nicht verworfen werden.

werten, die geringere Gamma-Werte implizieren. Kursänderungen führen so nicht mehr zu der Notwendigkeit großer Anpassungen im Hedgeportfolio, auftretende Hedgefehler werden somit verringert.

Der Einfluss der Standardabweichung der Aktienrendite auf das Risiko des Delta-hedgings ist sehr hoch. Bei den betrachteten Intervallen steigt die Varianz streng monoton und höchst signifikant an. Durch eine höhere Varianz nimmt die Wahrscheinlichkeit großer Aktienkursbewegungen innerhalb des Hedgeintervalls zu. Diese führen zu größeren Hedgefehlern im negativen Bereich (siehe Abbildung 2). Die Höhe der positiven Hedgefehler steigt ebenfalls, hierdurch wird der Erwartungswert der Hedgefehler jedoch nicht beeinflusst. Gleichzeitig steigt auch der Black-Scholes-Optionswert an, sodass das Verhältnis aus Standardabweichung und dem Optionswert konstant für alle Parameter bleibt. Das Risiko, dass mit dem höheren Optionswert ausgeglichen wird, ist jedoch ein anderes als das Modellrisiko, das durch die diskreten Hedgezeitpunkte entsteht. Daher ist eine Verrechnung nicht zulässig.

Um den Einfluss der Laufzeit vergleichen zu können ist eine Normierung der Risikomaße nötig. Um Vergleichbarkeit mit den übrigen Tabellen zu gewährleisten erfolgt diese auf eine Laufzeit von 65 Tagen mit Hilfe der folgenden Formel:

$$\sigma_{normiert}^2 = \sigma_{unnormiert}^2 \frac{65}{T} \quad (27)$$

Voraussetzung hierfür ist eine beliebige Wiederholbarkeit unter denselben Voraussetzungen, also eine identische, unabhängige Verteilung.

Der Einfluss der normierten Laufzeit ist für die betrachteten Parameter höchst signifikant. Durch die größere Zahl an möglichen Hedgefehlern gleichen sich diese zum Teil aus und führen zu sinkendem Risiko.

3.2.3 Delta-Hedging Strategie mit Schätzrisiko

In diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Marktteilnehmer und der Optionsemitter die benötigte Volatilität aus einer unabhängig von der betrachteten, identisch verteilten, generierten Kursreihe schätzen.⁸⁴ Dies entspricht der Schätzung der Volatilität anhand einer historischen Zeitreihe.

⁸⁴ Es wird keine Unterscheidung zwischen der vom Markt und vom Entscheider implizierten Volatilität vorgenommen.

Allgemeine Analyse

Zunächst wird analysiert wie das Risiko, bei exogener Modifikation der impliziten Volatilität, verändert. In der Simulation wird intern zwischen der tatsächlichen Volatilität die dem Aktienkursprozess zugrundeliegt und der vom Markt implizierten Volatilität, die zur Bewertung der Option und zur Bestimmung von Hedgeparametern verwendet wird, unterschieden. Dieser Einfluss wurde bis jetzt noch nicht näher betrachtet und die beiden Werte wurden in der Analyse stets gleichgesetzt.

Es stehen zwei Ansätze zur Erklärung der Unterschiede zur Verfügung. Wie die obige Analyse ergab kann bei diskreten Hedgezeitpunkten kein risikoloses Gesamtportfolio erstellt werden. Somit ist es möglich, dass die Risikoeinstellung der Marktteilnehmer den Optionspreis beeinflusst. Risikoaversion würde demnach zu einem Risikoaufschlag und damit zu einem höheren Optionspreis führen. Dieser wiederum führt bei Zugrundelegung des Black-Scholes-Modells zu einer höheren impliziten Volatilität. Das heißt, eine höhere implizite Volatilität ist ein Maß für die Risikoaversion des Marktes.⁸⁵ Wenn $\hat{\sigma}$ größer als das tatsächliche σ ist, ist der Entscheider tendenziell risikoavers, wenn $\hat{\sigma}$ kleiner als σ ist, dann ist der Entscheider risikofreudig.

Bei genauerer Analyse zeigt sich jedoch ein weiteres, grundlegendes Problem, das Ursache für Unterschiede in diesen Werten sein könnte. Für den Fall, dass man die tatsächliche Volatilität nicht kennt ist es unmöglich diese aus diskreten Kursreihen zu berechnen, da sich die realisierte Volatilität für endliche Zeithorizonte stets von der tatsächlichen unterscheidet. Die Unterschiede können mithin beträchtlich sein.⁸⁶ Das heißt, es steht, selbst bei zeitkonstanter Volatilität, ex ante noch nicht fest, welche Volatilität sich realisieren wird.

Dies hat auch auf den Volatilitätsfindungsprozess Einfluss. Diese wird i. d. R. aus historischen Datenreihen gewonnen.⁸⁷ Da jedoch auch für diese gilt, dass die realisierte Volatilität einer endlichen, diskreten Kursreihe nicht der prozessgenerierenden entspricht, führt eine solche Prognose zur Verwendung einer anderen Volatilität als der tatsächlichen. Die Genauigkeit einer solchen Prognose steigt mit der Zahl der verwendeten Kurse an. Voraussetzung hierfür ist jedoch, dass die tatsächliche Volatilität stets konstant bleibt. Eine geschätzte Volatilität kann sowohl über als auch unter der tatsächlichen Volatilität liegen.

⁸⁵ Vgl. Bollerslev/Gibson/Zhou (2004).

⁸⁶ Vgl. Figlewski (2003), S. 2.

⁸⁷ Eine Berechnung der zu verwendenden Volatilität aus der impliziten Volatilität anderer, gehandelter Optionen ist ebenfalls möglich. Jedoch nur sinnvoll, wenn diese einen besseren Schätzer darstellt. Vgl. Christensen/Prabhala (1998).

Tabelle 14 (S. 59) ist zu entnehmen wie sich die Verteilung der Hedgefehler entwickelt, wenn unterschiedliche Standardabweichungen zur Generierung des Aktienkursprozesses und zur Berechnung des Optionswertes und Deltas verwendet werden.

Für das Delta-Hedging ist zu beobachten, dass der Erwartungswert für zunehmendes Verhältnis zwischen impliziter Volatilität und tatsächlicher Volatilität stark ansteigt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei konstanter Standardabweichung des Basiswertes der gezahlte Preis für die Option (C_0^{BS}) für steigende implizite Volatilität zunimmt. Die Varianz der Hedgefehler ist minimal, wenn die implizite Volatilität der tatsächlichen entspricht. Die Ursache könnte darin liegen, dass durch die veränderte Optionspreisfunktion⁸⁸ bei Anstieg der impliziten Volatilität der positive Bereich der Gewinnfunktion in Abbildung 2 zwar schmaler jedoch gleichzeitig höher wird. Hierdurch würden, bei gleichbleibender tatsächlicher Standardabweichung, extreme Werte zunehmen. Trotz dieser Entwicklung sinkt der *VaR* insgesamt für die dargestellten Veränderungen streng monoton bei steigender impliziter Volatilität.

Schätzrisiko führt also grundsätzlich zu einem höheren Risiko durch steigende Varianz der Hedgefehler; durch einen überhöhten Optionswert wird dieses Risiko überkompensiert. Es kann jedoch nicht grundsätzlich davon ausgegangen werden, dass die geschätzte Volatilität überschätzt wird.

Spezielle Analyse

Daher wird in diesem Abschnitt darauf eingegangen wie sich eine geschätzte Standardabweichung der (logarithmischen) Zuwächse des Aktienkursprozesses ($\hat{\sigma}_{Akt}$) auf das Modellrisiko auswirkt.⁸⁹

In diesem Fall ergibt sich kein einheitlicher theoretischer Optionswert, da die zur Bestimmung notwendige, erwähnte Standardabweichung für jeden Kursverlauf neu geschätzt wird. Daher ist der durchschnittliche Optionspreis angegeben, welcher streng monoton für jedes größere Hedgeintervall steigt.

Durch den zunehmenden Optionspreis wird die Verteilung der Hedgefehler nach rechts verschoben (s.o.). Gleichzeitig erhöht sich jedoch die Varianz der Verteilung sehr stark. Insgesamt sinkt der *VaR* für längere Hedgeintervalle.

⁸⁸ Bspw. höhere Krümmung/Gamma, durch eine steigende implizite Volatilität.

⁸⁹ Vgl. hierzu Tabelle 2, S. 33 ab Deltahedging-Schätzfehler.

Dieses Phänomen könnte damit begründet werden, dass $\hat{\sigma}_{Akt}$ für eine sinkende Zahl von Kursen tendenziell größer wird.

3.2.4 Portfolio-Hedging Strategie

Die Verteilungsgraphen der Hedgefehler der Deltahedging-Methode mit Diversifikation haben dieselben Eigenschaften wie die ohne Diversifikation, die Streuung ist jedoch stets deutlich geringer.

Eine Ausgabe mehrerer Optionen auf jeweils unterschiedliche Basiswerte, die sonst identische Merkmale besitzen, kann interpretiert werden als die Ausgabe einer einzigen Option auf ein Portfolio aus Aktien. Die Standardabweichung dieses Portfolios errechnet sich nach folgender Formel:⁹⁰

$$\sigma_{PF} = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2\rho \sigma_1 \sigma_2} \quad (28)$$

$x_{1,2}$ entspricht dabei den Anteilen der jeweiligen Aktien im Portfolio. ρ ist der Korrelationskoeffizient. Dieser ist annahmegemäß Null, kann aber, um einen Diversifikationseffekt zu erreichen, jeden beliebigen Wert im Intervall $[-1, 1)$ annehmen. Bei einem Korrelationskoeffizienten i.H.v. Eins wäre dieser Effekt Null.

Im Folgenden soll nun geprüft werden, ob sich der Erwartungswert und die Standardabweichung der Hedgefehler einer solchen Option auf ein Portfolio (PF) von den Eigenschaften der kombinierten Hedgefehler zweier einzelner Optionen (E) signifikant unterscheidet.

Für den Standardfall gilt: $\sigma_1 = 0,2$; $\sigma_2 = 0,2$; $x_1, x_2 = 0,5$. Demnach ist

$$\sigma_{PF} = \sqrt{0,5^2 \cdot 0,2^2 + 0,5^2 \cdot 0,2^2} = 0,1414 \quad (29)$$

Die Nullhypothesen

$$H_0 : \mu_E = \mu_{PF} \quad (30)$$

$$H_0 : \sigma_E = \sigma_{PF} (= 0,1414) \quad (31)$$

⁹⁰ Sofern die Optionen identisch bestimmt sind.

können auf dem 0,1% Niveau nicht verworfen werden und werden damit akzeptiert.⁹¹ Der Diversifikationseffekt ist daher bei dieser Strategie auf die Diversifizierbarkeit der Aktien zurückzuführen.⁹²

Der Unterschied zwischen Portfolio-Hedge und der Deltahedging-Methode ist leicht ersichtlich. Die Varianz beträgt in etwa nur die Hälfte im Vergleich zu dem jeweiligen Pendant der Delta-Methode.

Alle anderen Parameteränderungen haben identische Auswirkungen auf die Risiko-maße, wie bei Verwendung der Delta-Hedging-Methode, das heißt, die prozentuale Entwicklung der Hedgefehler ist jeweils annähernd identisch, die Absolutwerte dagegen in etwa nur halb so hoch.

3.2.5 Gamma-Hedging Strategie

Gamma-Hedging stellt die vierte hier betrachtete Hedgestrategie dar. Auffällig ist eine deutlich schmalere Streuung der Hedgefehler um den Nullpunkt.

Die Verteilung der Hedgefehler ergibt sich aus ähnlichen Überlegungen wie bei der Deltahedging-Methode. Mit Hilfe von Abbildung 3 kann, ausgehend von dem Startkurs ($S_t = 100$), die Entstehung der Hedgefehler analysiert werden. $C_{1,t}$ wird wieder leerverkauft. Als Instrument, um Gamma-Neutralität herzustellen dient $C_{2,t}$. Um das so erzeugte Portfolio Delta-neutral zu gestalten muss der Basiswert mit $+f_{\Delta,1}(S_t) - f_{\Delta,2}(S_t)$ Teilen in das Portfolio eingehen. In der Graphik muss also eine Anzahl des Basiswertes, die der Steigung der Tangente $f_{\Delta,1}(S_t)$ entspricht, gekauft und die Steigung der Tangente $f_{\Delta,2}(S_t)$ verkauft werden. Nach Δt Zeiteinheiten ergibt sich die schraffierte Kurve als Gesamtgewinn der Strategie. Schon hier ist erkennbar, dass der Hedgefehler offensichtlich, trotz identischer Parameter für $C_{1,t}$, moderater ausfällt als bei einer Deltahedging-Strategie.

Für kleine Kursänderungen ist der Gewinn noch positiv, da der Zeitwertverlust der verkauften Option zu einem Gewinn führt und die gekaufte, längerlaufende Option nicht im selben Maße an Wert verliert. Durch die geringere Krümmung der Funktion der gekauften Option ($C_{2,t+\Delta t}$) kann der bereits oben beobachtete Effekt der Verminderung der absoluten Höhe des Hedgefehlers mit der Höhe der Kursänderung, nicht vollständig eliminiert werden. Daher bleibt ein „Resthedgefehler“ in Höhe der schraffierten Kurve bestehen.

⁹¹ Vgl. Tabelle 13: Deltahedging mit $\sigma = 0,1414$ für eine einzelne Option auf ein Portfolio von Aktien und Portfolio-Hedging mit $\sigma = 0,2$ für ein Portfolio zweier Optionen auf zwei Aktien.

⁹² Dieser Effekt wurde bereits in Black/Scholes (1973), S. 642 geschildert.

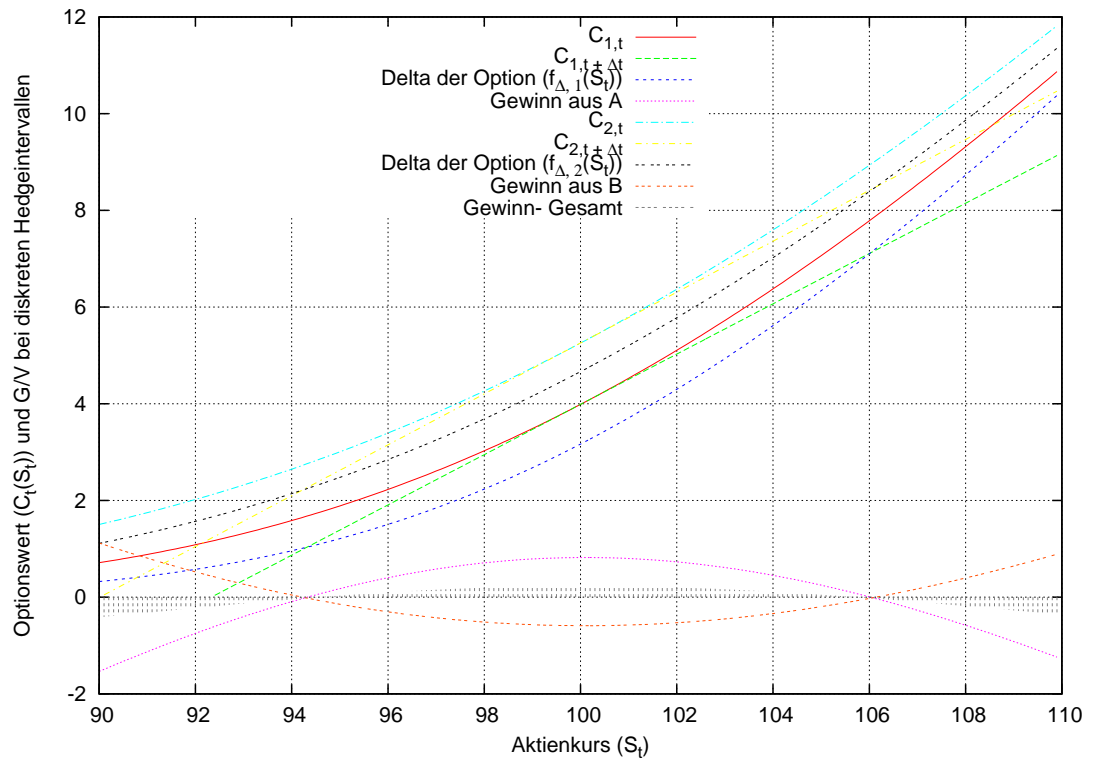


Abbildung 3: Analyse der Entstehung von Hedgefehlern (Gamma-Hedging, Eigene Darstellung)

Die Hedgefehler der Gamma-Strategie weisen Eigenschaften auf, die mit denen der Deltahedging-Strategie vergleichbar sind (s.o.). Die Graphen für große Δt haben dagegen eine sehr charakteristische Form und sind stark linksschief.⁹³

Die Hypothese, dass die Erwartungswerte gleich Null sind kann nicht verworfen werden. Die Standardabweichung nimmt für jedes längere Hedgeintervall zu. Das Risiko bei dieser Methode ist aufgrund der Parameterwahl deutlich geringer als bei jeder anderen hier getesteten Methode. Um sich als Optionsemittent gegen einen Verlust in Höhe des *VaR* abzusichern, ist eine vergleichsweise geringe Rücklage i. H. v. 4,6% des Optionswertes von Nöten. Dies würde die Kosten einer solchen zusätzlichen Absicherung um knapp 85% im Vergleich zum Delta-Hedging senken. Auffällig ist des Weiteren, dass das Risiko zwischen $\Delta t = 5$ und $\Delta t = 10$ leicht zurückgeht, dann jedoch wieder zunimmt.

Ein Unterschied in den Risiko-Eigenschaften im Vergleich zur Delta-Strategie ist, dass der Einfluss einer längeren Laufzeit der Option tendenziell zu höheren Risikominderungen führt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass fixe Zeitabstände zwischen den verwendeten Optionen zum Einsatz kommen. Dies führt für steigende Laufzeiten zu sinkenden relativen Zeitabständen zwischen den Optionen und einer damit einhergehenden Angleichung der Optionen. Da eine der Optionen gekauft

⁹³ Vgl. Abbildung 1.

und die andere verkauft wird, werden Unterschiede in der Preisentwicklung und damit der Hedgefehler geringer.

Δt /Hedge- strategie	0,5	1	5	10	15
Naiv					
μ	-5,3771	-5,4443	-5,4947	-5,5629	-5,7077
$\hat{\sigma}^2$	49,2375	52,4035	59,5193	69,9091	80,2813
[%]	-	6.43 %	13.58 %	17.46 %	14.84 %
$VaR_{0,99}$	-26,4903	-27,6447	-29,6895	-31,4599	-33,421
[%]	-	4.36 %	7.4 %	5.96 %	6.23 %
C_0^{BS}			3,9878		
Zahl Trans.	7,6514	5,5236	2,7192	2,0948	1,8044
Delta					
μ	-0,0009	0,0039	-0,0055	-0,0018	-0,0348
$\hat{\sigma}^2$	0,0916	0,1779	0,901	1,566	2,2806
[%]	-	94.13 %	406.45 %	73.79 %	45.64 %
$VaR_{0,99}$	-0,8032	-1,1141	-2,5804	-3,5094	-4,1801
[%]	-	38.7 %	131.61 %	36.0 %	19.11 %
C_0^{BS}			3,9878		
Delta Schätz- fehler					
μ	-1,1884	-0,0357	4,4071	7,6294	9,4689
$\hat{\sigma}^2$	0,4108	0,3105	4,8214	14,8569	29,0857
[%]	-	-24.44 %	1453.01 %	208.14 %	95.77 %
$VaR_{0,99}$	-3,0248	-1,5319	-0,0016	-0,132	-0,8129
[%]	-	-49.36 %	-99.89 %	8102.29 %	515.95 %
$\varnothing C_0^{BS}$	2,8028	3,9475	8,398	11,592	13,4731
PF					
μ	0,0004	-0,0011	-0,005	-0,0147	-0,0464
$\hat{\sigma}^2$	0,0464	0,0911	0,4456	0,7989	1,1653
[%]	-	96.64 %	388.86 %	79.3 %	45.86 %
$VaR_{0,99}$	-0,5617	-0,7903	-1,7699	-2,3699	-2,9747
[%]	-	40.71 %	123.94 %	33.9 %	25.52 %
C_0^{BS}			3,9878		
Gamma					
μ	-0,015	-0,0304	-0,1595	-0,16	-0,327
$\hat{\sigma}^2$	0,0031	0,0085	0,0774	0,0683	0,1711
[%]	-	171.45 %	806.72 %	-11.75 %	150.63 %
$VaR_{0,99}$	-0,2444	-0,377	-0,9144	-0,8716	-1,3529
[%]	-	54.24 %	142.53 %	-4.68 %	55.22 %
C_0^{BS}			3,9878		

Tabelle 2: Hedgestrategien/ Δt (Eigene Darstellung, siehe auch: Anhang)

4 Hedgequalität bei Sprüngen im Basiswert

Mehrere Studien analysieren, ob es zu Verbesserungen durch Anwendung alternativer Modelle kommt. Dabei kann es sich um verbesserte Ergebnisse in der Bewertung oder dem Hedging handeln.⁹⁴ Die Resultate deuten darauf hin, dass die Hinzunahme von Sprüngen im Aktienkursprozess oder die Verwendung stochastischer Volatilitäten zu einer realistischeren Darstellung führt. Auch eine Kombination der Modelle scheint Potential zu beinhalten.⁹⁵ So könnte gefolgert werden, dass auch der wahre Prozess tatsächlich Sprünge enthält. Es ist daher zu überprüfen, wie sich Sprünge auf die Hedgequalität auswirken würden.

Die im letzten Kapitel gewonnenen Erkenntnisse dienen als Grundlage für dieses Kapitel. Ergebnisse der Simulationen in diesem Kapitel beinhalten ebenso das Risiko, welches durch die Diskretisierung der Handlungszeitpunkte entsteht. Eine Analyse der hier entwickelten Verteilungsdaten ist dementsprechend immer im Vergleich zu sehen.

4.1 Diffusions-Sprung-Prozess

Bereits vor der Entwicklung des Black-Scholes-Modell wurden andere stochastische Prozesse zur Modellierung von Aktienkursbewegungen verwendet.⁹⁶ Jedoch wurde erst mit dessen Einführung ein Modell gefunden, dass aufgrund seiner vorteilhaften Eigenschaften eine derart weite Verbreitung fand. Der hier betrachtete Prozess enthält zusätzlich zum kontinuierlichen Teil eine Sprungkomponente. Das hat zur Folge, dass der Kursverlauf, je nach Intensität des Sprungprozesses, auch bei kontinuierlicher Stichprobennahme stärkere oder schwächere Sprünge aufweist.

Eine der Inkonsistenzen im Black-Scholes-Modell, der damit entgegengewirkt werden soll besteht darin, dass unterschiedlich parametrisierte Optionen auf denselben Basiswert verschiedene Ergebnisse für die implizite Volatilität liefern. Dieser Effekt kann durch Hinzunahme von Sprüngen im Aktienkursprozess vermindert werden.⁹⁷ Andere Modelle bestehen nur aus Sprüngen,⁹⁸ enthalten stochastische

⁹⁴ Vgl. Bakshi/Cao/Chen (1997), für Hedging und Bewertung und Branger (2004), für einen abschließlichen Vergleich der Bewertung.

⁹⁵ Vgl. Andersen/Benzoni/Lund (1999), S. 17 f.

⁹⁶ Die erste stochastische Differenzialgleichung wurde von Bachelier entwickelt. Diese dient auch als Grundlage des Black-Scholes-Prozesses. Vgl. Cont/Tankov (2004), S. 205.

⁹⁷ Vgl. Andersen/Andreasen (2000), S. 255 f.

⁹⁸ Vgl. Cox/Ross (1976).

Volatilitäten⁹⁹. Erkenntnisse über die Verbesserungen, die sich durch Veränderungen ergeben sind wichtig, um das Modellrisiko zu minimieren.¹⁰⁰ Es werden auch Kombinationen von mehr als zwei Prozessen betrachtet.¹⁰¹ Jedoch scheinen diese nicht unbedingt bessere Ergebnisse zu generieren.¹⁰² Daher wird im Folgenden ein Diffusions-Sprung-Prozess näher betrachtet werden.¹⁰³

Die Simulation erfolgt auf Basis der folgenden Gleichung:

$$S_{t+\Delta t}/S_t = e^{[(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \mu_{sprung})\Delta t + \sigma \delta Z]Y(n)} \quad (32)$$

Dabei ist μ die erwartete Rendite des gesamten Diffusions-Sprung-Prozesses, λ ist die durchschnittliche Sprungzahl pro Zeiteinheit, μ_{sprung} ist die erwartete Sprunghöhe [%], σ ist die Standardabweichung des Diffusions-Prozesses und δZ ist ein Standard Gauss-Wiener Prozess. $Y(n)$ ist definiert als:

$$Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ \prod_{j=1}^n Y_j & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \quad (33)$$

n ist ein Poisson-Zählprozess mit Parameter $\lambda \Delta t$ und Y_j ist unabhängig, identisch log-normalverteilt¹⁰⁴.

Die Sprünge erhöhen das unsystematische Risiko einer Option, das heißt, es ist möglich dieses durch Diversifikation vollständig zu eliminieren. Trotzdem verändert sich der Gleichgewichtspreis der Option gegenüber dem Black-Scholes-Preis.¹⁰⁵ Eine Option, die eine Aktie mit einem solchen Prozess als Basiswert hat kann also grundsätzlich nicht perfekt mit Hilfe der Delta-Hedging-Methode abgesichert werden. Theoretisch ist die Herstellung eines risikolosen Portfolio und damit der Möglichkeit einer risikoneutralen Bewertung nur möglich, wenn jeder mögliche Sprung „versichert“ werden könnte, der Markt also vollständig ist. Da jedoch die Sprunghöhe nicht bekannt/fix ist,¹⁰⁶ ist es nicht möglich einen vollständigen Markt zu erzeugen.¹⁰⁷

⁹⁹ Vgl. Heston (1993) für ein Grundmodell, Branger/Schlag/Schneider (2005a) für einen Überblick über vorhandene Modelle.

¹⁰⁰ Vergleich von Modellen Branger (2004), Belledin/Schlag (1999).

¹⁰¹ Bereits in Rubinstein (1985) angeregt, vgl. Branger/Schlag/Schneider (2005b) für Sprünge in der Volatilität oder Andersen/Benzoni/Lund (1999) für kombinierte Prozesse mit stochastischer Volatilität und gleichzeitig stochastischen Sprüngen.

¹⁰² Vgl. Bates (1996).

¹⁰³ Vgl. hier und im Folgenden Merton (1976).

¹⁰⁴ Parameter: μ_{sprung} und σ_{sprung} .

¹⁰⁵ Vgl. Merton (1976), S. 134.

¹⁰⁶ Vgl. für fixe Sprunghöhe Cox/Ross/Rubinstein (1979).

¹⁰⁷ Vgl. Definition nach Arrow/Debreu zusammengefasst in Briys u. a. (1998), S. 51 f.

4.2 Bewertungsformel

Es ist jedoch möglich trotz der Unvollständigkeit des Wertpapiermarktes Berechnungen anzustellen, wenn man annimmt, dass die Sprünge im Aktienkursprozess unkorreliert zur Marktentwicklung sind.¹⁰⁸ Mit dieser zusätzlichen Annahme lässt sich für logarithmisch-normalverteilte Sprunghöhen folgende Formel für den Wert einer Option aufstellen:¹⁰⁹

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\lambda'}(n) C_{t,n,BS} \quad (34)$$

$P_{\lambda'}(n)$ ist dabei die Dichtefunktion einer Poissonverteilung mit den Parametern λ' und k . C_0^{BS} ist der „normale“ Black-Scholes-Optionswert, jedoch sind Anpassungen bei σ und r nötig.

Die Formel lässt sich interpretieren als der Erwartungswert der Optionswerte, mit n Sprüngen innerhalb der Laufzeit der Option, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit (P), dass in diesem Zeitraum genau n Sprünge auftreten.

Die Bewertungsformel könnte in die Monte-Carlo-Simulation integriert werden. Als Approximation würde die Summation so lange durchgeführt, bis Abweichungen des Optionswertes unter eine ex ante bestimmte Schwelle fallen. Da sich jedoch das ursprüngliche Black-Scholes-Modell einer weit größeren Beliebtheit erfreut wird ausschließlich dieses zur Bewertung und dem Hedging verwendet.

4.3 Bestimmung der Hedgeparameter

Ausgangspunkt der Analyse ist der Standardfall mit folgenden Parametern: Sprunghäufigkeit: $\lambda = 65 \left[\frac{\text{Sprünge}}{a} \right]$, Erwartungswert des Sprungprozesses: $\mu_{Sprung} = 0$, Standardabweichung des Sprungprozesses: $\sigma_{Sprung} = 0,2$.¹¹⁰ Die Varianz des Diffusionsprozesses wird definiert als der Restwert zwischen der Gesamtvarianz und der Varianz des Sprungprozesses. Die Gesamtvarianz bleibt für die Analyse, wenn nicht anders angegeben, konstant. Es wird somit nur das Verhältnis zwischen Diffusions- und Sprungvarianz verändert. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass die Ergebnisse besser vergleichbar bleiben, da jeder Prozess insgesamt dieselbe Varianz hat. So

¹⁰⁸ Vgl. Merton (1976), S. 133.

¹⁰⁹ Vgl. Merton (1976), S. 135.

¹¹⁰ Die anderen Parameter entsprechen den Standardwerten (vgl. Kapitel 2.5).

soll ausgeschlossen werden, dass Veränderungen der Ergebnisse aufgrund von Variationen des Gesamttrisikos entstehen. Die Formel für die Varianzen lautet:

$$\sigma_{Gesamt}^2 = \sigma_{Diff}^2 + \lambda \sigma_{Sprung}^2 \quad (35)$$

Es könnte sein, dass sich das Schätzrisiko durch die Einführung eines Sprungprozesses erhöht. Daher werden auch hier die Fälle mit und ohne Schätzrisiko unterschieden.

4.4 Ergebnisse

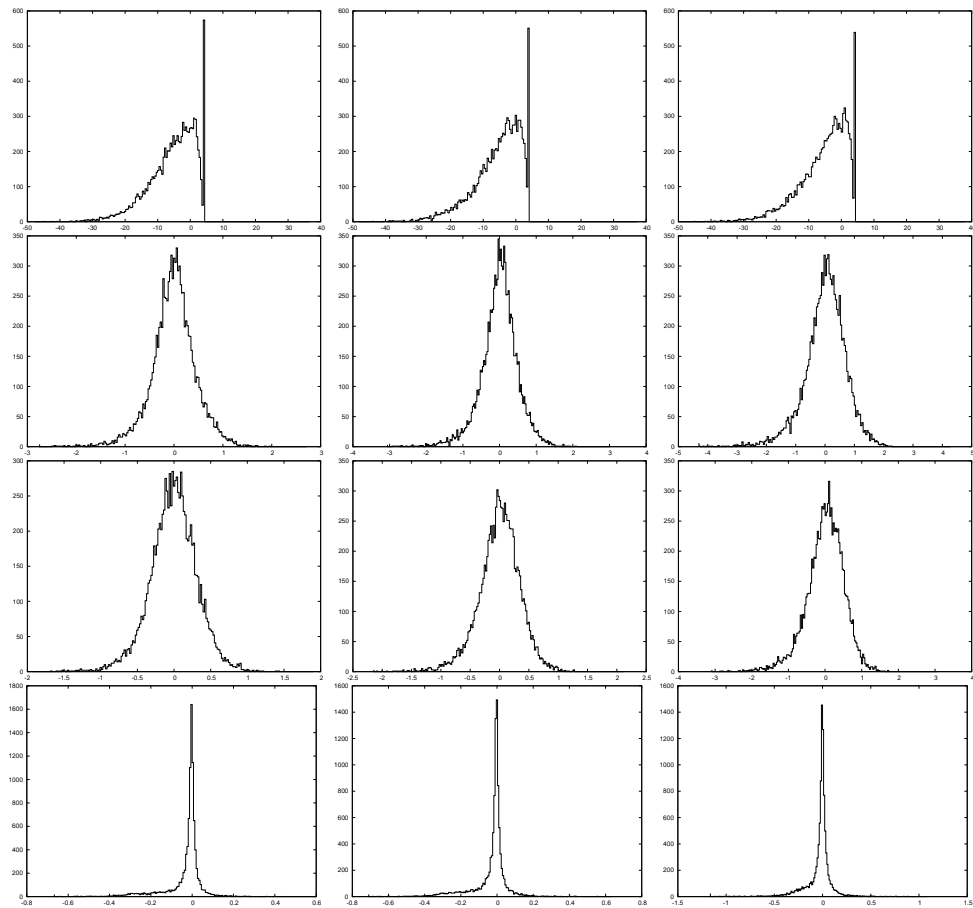


Abbildung 4: Verteilung der Hedgingfehler (Sprünge). Zeilen: Naiv-, Delta-, Portfolio-, Gamma-Hedging; Spalten: $\lambda = 2; 10; 50$ (Eigene Darstellung).

Als Haupteinflussgröße wird hier die Sprunghäufigkeit λ betrachtet. Die Analyse wird für vier Häufigkeiten durchgeführt: 2, 10, 50 und 100 [$\frac{\text{Sprünge}}{a}$]. Der Schätzer für σ wird wie in Kapitel 3 berechnet.

Das steigende Lambda hat nicht nur den Effekt, dass die Zahl der erwarteten Sprünge ansteigt, sondern auch, dass aufgrund der Fixierung der Gesamtstandardabweichung

λ /Hedgestrategie	2	10	50	100
Naiv				
μ	-5,365	-5,362	-5,2706	-4,885
$\hat{\sigma}^2$	50,1887	51,4617	52,9985	49,3466
[%]	–	2.54 %	2.99 %	-6.89 %
$VaR_{0,99}$	-26,9039	-27,3395	-27,7639	-27,5394
[%]	–	1.62 %	1.55 %	-0.81 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878	3,9878
Zahl Trans.	5,4916	5,4812	5,182	3,987
Delta				
μ	-0,0094	-0,0092	0,0073	0,0244
$\hat{\sigma}^2$	0,2087	0,2581	0,5155	0,8439
[%]	–	23.67 %	99.75 %	63.68 %
$VaR_{0,99}$	-1,279	-1,5217	-2,1287	-2,7257
[%]	–	18.98 %	39.89 %	28.04 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878	3,9878
Delta Schätzfehler				
μ	-0,0527	-0,0659	-0,0616	-0,0825
$\hat{\sigma}^2$	0,3515	0,4516	0,8991	1,4891
[%]	–	28.5 %	99.08 %	65.62 %
$VaR_{0,99}$	-1,7729	-1,9253	-2,7434	-3,5882
[%]	–	8.59 %	42.49 %	30.79 %
$\varnothing C_0^{BS}$	3,9454	3,9327	3,9202	3,8804
PF				
μ	-0,0082	-0,0037	0,0043	0,018
$\hat{\sigma}^2$	0,1031	0,127	0,2654	0,4205
[%]	–	23.17 %	108.94 %	58.43 %
$VaR_{0,99}$	-0,8608	-1,0039	-1,491	-1,7635
[%]	–	16.62 %	48.52 %	18.28 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878	3,9878
Gamma				
μ	-0,0317	-0,031	-0,0341	-0,0288
$\hat{\sigma}^2$	0,0112	0,0128	0,0354	0,0616
[%]	–	13.9 %	177.26 %	73.87 %
$VaR_{0,99}$	-0,3826	-0,3925	-0,6307	-0,7483
[%]	–	2.6 %	60.68 %	18.65 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878	3,9878

Tabelle 3: Hedgestrategien/ λ (siehe auch: Anhang)

chung, die Standardabweichung des Diffusionsprozesses sinkt. Bei $\lambda = 100$ ist sie, für die Standardparameterkombination, auf Null abgesunken.

Grundsätzlich erhöht der Sprungprozess das Risiko des Portfolios höchst signifikant für alle betrachteten Fälle.

4.4.1 Naive Strategie

Die Naive Hedgestrategie schneidet auch hier vergleichsweise schlecht ab und wird daher nur kurz betrachtet. Da außer dem aktuellen Kurs des Basiswertes keine weiteren Parameter benötigt werden, begründet die Verwendung dieser Strategie kein Schätzrisiko.

Die Varianz der Hedgefehler steigt durch Einführung des Sprungprozesses nicht an.¹¹¹ Die Zunahme durch eine größere Zahl an Sprüngen ist auch nur sehr gering

¹¹¹ Vgl. Tabelle 3.

und statistisch nicht signifikant. Wie oben dargestellt sind Sprünge bereits bei stetigem Handel nur mittels Diversifikation versicherbar. Im vorliegenden Fall ist es zudem möglich, dass sich bedingt durch die Diskretisierung, nicht nur die Kursbewegung durch den Diffusionsprozess, sondern auch die Sprünge über das Handlungsintervall kumulieren. Im schlechtesten Fall sind große Kursbewegungen in beide Richtungen möglich, die wie gezeigt wurde, zu hohen Hedgefehlern führen.

4.4.2 Delta-Hedging Strategie

Als Grundlage der Überlegungen dient wiederum Abbildung 2. Denkbar sind hier die Fälle mit und ohne Schätzrisiko. Zunächst wird das Schätzrisiko vernachlässigt.

Folgende Effekte des steigenden λ sind beobachtbar:¹¹² Der Erwartungswert steigt leicht an.¹¹³ Wie oben erläutert wird die Gesamtvarianz des stochastischen Prozesses konstant gehalten. Für steigendes λ bzw. σ_{Sprung} führt Gleichung 35 dazu, dass die Varianz des Diffusionsprozesses abnimmt.

Zur Erläuterung dieser Beobachtungen müssen der Sprung- und der Diffusionsprozesse separat betrachtet werden. Die Sprünge des Diffusionsprozesses werden bei sinkender Diffusions-Varianz kleiner.¹¹⁴ Im Grenzwert ($\sigma_{Diff} = 0$) führt dies dazu, dass die einzige Ursache der Sprünge im Basiswert in der erwarteten Rendite begründet liegen. Kurssprünge, die sich dadurch ergeben sind jedoch, zumindest für die hier betrachteten Parameterkombinationen, sehr gering und würden zu positiven Hedgefehlern führen. Jedoch wäre es vorschnell argumentiert dies als Ursache positiver Verschiebungen der Hedgefehler zu interpretieren. Die Breite des Intervalls der positiven Hedgefehler könnte ebenfalls von der sinkenden Varianz beeinflusst werden. Jedoch ist diese nicht von der Varianz des Diffusionsprozesses, sondern von der Gesamtvarianz abhängig.¹¹⁵ Erst dies begründet die Verschiebung des Erwartungswertes der Hedgefehler entsprechend Abbildung 2.

Die Varianz steigt höchst signifikant für jede Erhöhung der Sprunganzahl. Der *VaR* steigt ebenfalls streng monoton an.

¹¹² Vgl. hier und im Folgenden 3.

¹¹³ Jedoch kann die $H_0 : \mu = 0$ nicht verworfen werden.

¹¹⁴ Der Widerspruch, dass bei einem Diffusionsprozess Sprünge zu beobachten sind, erklärt sich durch die Diskretisierung.

¹¹⁵ Genauer gesagt wird die Breite des Intervalls von dem zeitlichen Abstand zwischen den Handlungszeitpunkten bestimmt. Der Einfluss der Zeitdifferenz nimmt jedoch für steigende Volatilität zu, wenn diese zunimmt wird der Abstand der Funktionen und damit die Breite des Intervalls größer.

Obwohl die Gesamtvarianz nicht verändert wird, erhöht sich das Risiko durch Substitution des Diffusions- durch den Sprungprozess. Die negative Flanke der Verteilung wird deutlich breiter. Diese Beobachtung ist darauf zurückzuführen, dass die Sprünge, die durch den Sprungprozess verursacht werden normalerweise deutlich größer sind als diejenigen, die durch die Diskretisierung des Diffusionsprozesses entstehen. Sprünge in den „negativen Bereich“ werden daher wahrscheinlicher.¹¹⁶ Die Ursache ist die Konzentration der Sprünge, die durch die Parameter λ und σ_{Sprung} gesteuert wird. λT Sprünge werden während der Laufzeit der Option erwartet. Für große λ und fallende σ_{Sprung} konvergiert der Sprungprozess zu einem Diffusionsprozess. Die entgegengesetzte Parameterkombination führt jedoch zu einer Konzentration der Kursbewegung auf vereinzelte, große Sprünge. Dies führen dementsprechend tendenziell zu negativen Hedgefehlern, wiederum unter der Voraussetzung, dass die Intervallbreite erhalten bleibt.

Es ist jedoch anhand diskreter Kurse kaum unterscheidbar welcher Prozess Grund für einen Sprung darstellt. Da die Sprünge des Weiteren auch nicht über das Delta-Hedging hinaus abgesichert werden entstehen unweigerlich diese Hedgefehler.

4.4.3 Delta-Hedging Strategie mit Schätzrisiko

Allgemein

Zunächst wird analysiert welche Auswirkungen generell durch das Über- bzw. Unterschätzen der impliziten Volatilität zu erwarten sind. Für unterschiedliche Werte der impliziten Volatilität können bei Verwendung der Delta-Hedging-Strategie folgende Ergebnisse festgehalten werden.¹¹⁷

Der Erwartungswert steigt streng monoton für steigende Differenz zwischen impliziter und tatsächlicher Volatilität. Dies ist auf den steigenden Wert der Option, der als Optionsprämie vom Emittenten vereinnahmt wird, zurückzuführen.

Die Varianz der Hedgefehler erreicht wiederum dann ihr Minimum, wenn die implizite Volatilität des Aktienkursprozesses mit der tatsächlichen übereinstimmt. Für steigende Differenz sinkt der $VaR_{0,99}$ stark ab. Es ist möglich, dass bedingt durch das zunehmende Risiko dieser Trend des VaR nicht monoton ist und diese Schlussfolgerung für extreme Werte nicht mehr zutreffend ist. Für die betrachteten Parameterkombinationen ist dies jedoch nicht der Fall.

Eine hohe implizite Volatilität ist also für den Optionsemittenten vorteilhaft.

¹¹⁶ Vgl. Abbildung 2.

¹¹⁷ Vgl. Tabelle 20.

Anwendung

Bei Verwendung eines Schätzers auf Basis historischer Daten ist die Entwicklung nicht mehr so eindeutig, da nun die Volatilität sowohl zu hoch als auch zu gering geschätzt werden kann. Der erwartete Hedgefehler sinkt, wenn auch nur leicht, für steigende Sprungzahl streng monoton.¹¹⁸

Die Varianz wird stets größer. Die Steigerungsraten entsprechen dabei fast denen der Delta-Hedging-Methode ohne Schätzrisiko. Das Risikoniveau gemessen mit Hilfe der Varianz liegt generell um etwa 80% höher.

Der *VaR* steigt kontinuierlich. Auffällig ist ebenso, dass der Optionswert mit der Zahl der Sprünge positiv korreliert ist. Dies deutet darauf hin, dass mit steigender Sprungzahl die geschätzte Volatilität höher liegt, obwohl das Gesamtrisiko konstant bleibt. Der Effekt könnte somit auf die Schätzmethode zurückzuführen sein. Wenn der Optionswert konstant bleiben würde müsste dementsprechend der *VaR* noch deutlicher ansteigen.

4.4.4 Portfolio-Hedging Strategie

Diese Methode führt zu Ergebnissen mit deutlich geringerem Risiko als die der Delta-Hedging-Methode.¹¹⁹ Das Risiko, gemessen anhand der Varianz, sinkt um etwa 50% für jede Sprungzahl. Auch hier steigt der $VaR_{0,99}$, von niedrigem Niveau ausgehend, mit steigender Sprungzahl stark an.

Diversifikation führt auch hier, durch Verrechnung entgegengesetzter Sprünge aus dem Diffusions- sowie Sprungprozess, zu einer deutlichen Risikoreduktion.

4.4.5 Gamma-Hedging Strategie

Die Risikoreduktion durch Gamma-Hedging ist leicht zu erkennen.¹²⁰ Ein sehr hoher Anteil der Hedgefehler liegt nahe um den Nullpunkt. Dies spiegelt sich insbesondere in der Varianz und dem *VaR* wider, die beide zwar ansteigen, jedoch auf sehr niedrigem Niveau.

Die Ergebnisse zeigen auch hier das geringste Risiko von allen betrachteten Hedgestrategien auf. Dies liegt darin begründet, dass nur noch das „Differenzrisiko“ zwischen zwei Optionen gehedgt werden muss.

¹¹⁸ Vgl. Tabelle 3, ab „Delta Schätzrisiko“.

¹¹⁹ Vgl. Tabelle 3, ab „PF“.

¹²⁰ Vgl. Tabelle 3, ab „Gamma“.

5 Empirische Überprüfung der Hedgequalität

5.1 Ausgangslage

Dieses Kapitel soll Antwort auf die Fragen geben, wie hoch das Modellrisiko einer Diskretisierung der Handlungszeitpunkte mit realen Kursen ausfällt, ob Sprünge im Basiswert vorhanden sein könnten und eventuell einen Einfluss auf die Hedgequalität haben. Des Weiteren wird untersucht, ob ein Einfluss dieses Risikos die Bewertung am Markt erkennbar ist.

Zur Verfügung stehen die täglichen Kursdaten von 607 EUREX-Call-Optionen auf den DAX mit unterschiedlichen Laufzeiten zwischen dem 24.2.03 und dem 19.5.06 und die entsprechenden Kurse des Basiswertes für diesen Zeitraum.¹²¹ Ein Optionsemittent ist diese Optionen ein Netto-Leerverkäufer.

Die historische Simulation wird angewandt, um die Delta-Hedging-Strategie an den vorhandenen empirischen Daten zu testen.¹²² Zur Absicherung der Option findet das Black-Scholes-Modell Anwendung. Zumindest für die Optionsbewertung ergeben sich die Unterschiede zwischen diesem und dem Merton-Modell gering.¹²³ Diese These ist jedoch in der Literatur nicht unumstritten.¹²⁴ Dennoch stellt sie eine in der Praxis sehr weit verbreitete Methode dar.

5.2 Bestimmung der Hedgeparameter

Im Gegensatz zum bisherigen Vorgehen wird die historische Simulation von Anfang an mit vollständiger Ungewissheit, also mit Schätzrisiko, durchgeführt.

Neben der Verwendung eines Schätzers stehen unterschiedliche Methoden zur Verfügung, um benötigte Parameter möglichst gut annähern zu können. Diese Methoden haben den Vorteil, dass sie auch anwendbar sind, wenn mehr als ein Parameter geschätzt werden muss.

Die Maximum-Likelihood-Methode kann zu diesem Zweck verwendet werden.¹²⁵ Hierfür wird diejenige Parameterkombination ermittelt, bei der der empirische Kursverlauf mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auftritt.

¹²¹ Datenquelle: Thomson Datastream; Kürzel: „LOPTDAXDC“.

¹²² Vgl. Green/Figlewski (1999), S. 1468 f.

¹²³ Vgl. Ball/Torous (1985).

¹²⁴ Vgl. Kremer/Roenfeldt (1993): Modelle mit stochastischen Sprüngen liefern hier bessere Ergebnisse.

¹²⁵ Vgl. Ball/Torous (1985).

Als Alternative wird auch die Momente-Methode vorgeschlagen. Es werden hierfür empirisch bestimmte Momente der Verteilung gleich den theoretischen Formeln für diese Momente gesetzt. Diese wiederum enthalten die gesuchten Parameter. Das so erzeugte Gleichungssystem wird nach den gesuchten Parametern aufgelöst. Diese Methode führt jedoch schon in einfachen Fällen nicht zu unverzerrten Schätzern.

Es könnte ebenso ein lokaler Suchalgorithmus mit der Kleinste-Quadrate-Methode kombiniert werden. So würde eine theoretisch einfache Möglichkeit geschaffen, um Näherungslösungen für die gesuchten Parameter zu finden. Vorteil einer solchen Methode ist die leichte Implementierbarkeit; Nachteil, dass die Ergebnisse nur Näherungen darstellen und die Güte von der eingesetzten Rechenzeit abhängt. Ausgehend von einer Startparameterkombination werden Kursreihen, die einem Diffusions-Sprung-Prozess folgen simuliert, diese werden einzeln mit der empirischen Kursreihe verglichen. Abweichungen werden mit ihrem Quadrat bewertet und kumuliert. Der Durchschnitt der Abweichungen aller simulierter Kursreihen entspricht der Bewertung der erzeugenden Parameterkombination. Für den Fall, dass die Parameterkombination eine geringere durchschnittliche Abweichung als die vorhergehende aufweist werden die Parameter einzeln verändert. Wenn die Kombination ein schlechteres Ergebnis liefert wird die Suchrichtung umgekehrt. Diejenige Parameterkombination, die eine Kursreihe mit der geringsten durchschnittlichen Abweichung aufweist wird dann verwendet.

Für die Suche nach dem σ_{Akt} des Black-Scholes-Modells ist jedoch die Verwendung des Schätzers ausreichend. Als Datengrundlage kommen die folgenden Zeitreihen zur Anwendung. Da die „tatsächlichen“ Parameter nicht mehr wie in der Simulation vorgegeben sind, wird der Schätzer auf Basis der realisierten Kurse im Beobachtungszeitraum zur Berechnung verwendet.

Zum anderen werden „realistische“ Parameter berechnet, indem Kurse genutzt werden, die exakt vor dem zu beobachtenden Intervall enden, also auch vor der jeweiligen Transaktion verfügbar wären.

Dabei wird die Zahl der einbezogenen Kurse gleich der Zahl der Kurse im Beobachtungszeitraum gesetzt. Hier könnte das Problem entstehen, dass das Modell zwar für den Schätzzeitraum sehr gute Ergebnisse liefert, diese jedoch nicht repräsentativ für die folgenden Perioden sind.¹²⁶ Eine so berechnete Standardabweichung wird jedoch nie der des generierenden Prozesses entsprechen.¹²⁷ Es ist daher zu prüfen, ob durch Verwendung alternativer Methoden und Datensätzen eine Verbesserung der Ergebnisse erzielt werden könnten.

¹²⁶ Vgl. Jacquier/Jarrow (2000) zu in-sample/out-of-sample Problematik.

¹²⁷ Vgl. Stichprobenproblematik Figlewski (2003), S. 2.

Aus diesem Grund wird die Volatilität auch implizit aus den Optionskursen berechnet. Dies könnte einen besseren Schätzer darstellen.¹²⁸

Um die Ergebnisse untereinander und mit jenen der Simulation vergleichen zu können werden die Kurse des Aktienindex auf 100€, bezogen auf den Optionsemissionszeitpunkt, normiert. Die Kurse der Optionen werden um denselben Faktor angepasst.

5.3 Ergebnisse

Jeder Hedgefehler wird nach den Eigenschaften der zugrundeliegenden Option(en) bzw. Kursreihe(n) in mehrere Kategorien eingeteilt. Es wird versucht eine große Zahl an Werten in einer Kategorie zu vereinen, um aussagekräftige und statistisch robuste Ergebnisse zu erhalten. Gleichzeitig sollen, zur besseren Vergleichbarkeit, ähnliche Kategorien erzeugt werden, wie auch in den Monte-Carlo-Simulationen. Die Kategorien sind hier jedoch deutlich breiter und nehmen bedingt durch den Stichprobenumfang nur jeweils einen Bruchteil der Stichprobe auf.

Bei einer Simulation wird diese Kategorisierung künstlich erzeugt, dabei werden andere Eigenschaften konstant gehalten, um den Einfluss genau einer Eigenschaft herauszuarbeiten. Eine solche Fixierung der nicht betrachteten Einflussfaktoren ist mit empirischen Daten nicht möglich und für eine Approximation stehen zu wenige Datensätze zur Verfügung. Eine Kategorienbildung, die sich nur an jeweils einer Eigenschaft orientiert führt jedoch dazu, dass sich die Werte einer Kategorie in anderen Eigenschaften unterscheiden können. Dementsprechend können Ergebnisse der zusammengefassten Hedgefehler enger oder breiter streuen und einen anderen Mittelwert aufweisen als entsprechende simulierte Hedgefehler. Eine mehrdimensionale Analyse, also eine Miteinbeziehung aller Einflussmerkmale, könnte diesen Nachteil mindern, ist jedoch aufgrund des geringen Stichprobenumfangs nur beschränkt möglich.

Kategorien mit weniger als 20 Stichproben werden vernachlässigt. Das Signifikanzniveau für statistische Tests wird auf 5% festgesetzt, um trotz einer eventuell größeren Schwankungsbreite der empirischen Ergebnisse signifikante Änderungen ausweisen zu können.

Die dargestellten Ergebnisse wurden mit den jeweils tagesaktuellen EURIBOR Zinssätzen für eine Woche berechnet.¹²⁹ Für den Fall, dass das Black-Scholes-Modell

¹²⁸ Vgl. Christensen/Prabhala (1998).

¹²⁹ Quelle: Thomson Datastream, Zinssätze für eine Woche als Approximation.

den Einfluss des Zinssatzes korrekt abbildet führt dessen Vernachlässigung dazu, dass sich Zinsschwankungen auf die Hedgeparameter und den Wert der Option auswirken. Es ist daher nötig den korrekten Zinssatz einzubeziehen. Eine Fixierung wie in der Simulation ist daher nicht möglich und würde für die vorliegenden Daten zu höheren Hedgefehlern, für hohe Zinssätze, und fallende Hedgefehler für niedrige Zinssätze führen.

Keine der oben genannten Datengrundlagen ist für die gegebenen Daten dominant. Es wird daher nur auf die Ergebnisse unter Verwendung der „tatsächlichen“ Volatilität eingegangen.

Die Kategorien in den Tabellen der empirischen Ergebnisse, ausgedrückt durch die Spaltenüberschriften, verstehen sich jeweils als höchster, noch in die jeweilige Kategorie fallender Wert. Zur besseren Beurteilbarkeit der Güte der Werte in einer Kategorie werden zusätzlich die durchschnittlichen täglichen Zuwächse und die Varianz dieser Zuwächse als Durchschnittswerte angegeben.

5.3.1 Einfluss von Δt

Wert/Kategorie	1	2	5
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2579	0.2579	0.2579
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.1324	0.1324	0.1324
T	143.5997	143.5997	143.5997
S_0/K	1.0276	1.0276	1.0276
C_0^{BS}	8.1359	8.1359	8.1359
μ_{HF}	0.7817	1.1811	1.4386
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	3.3094	4.883	6.0956
$VaR_{0,95}$	-0.3684	-0.4155	-0.5299
Zahl der HF	607	607	607

Tabelle 4: Empirie: Δt (Durchschnittswerte, „tatsächliche“ Volatilität, Eigene Darstellung)

Den folgenden Tests liegt grundsätzlich die Annahme einer Normalverteilung der Hedgefehler zugrunde. Dies stellt jedoch für die empirischen Verteilungen eine starke Approximation dar.¹³⁰

Die Erwartungswerte liegen deutlich über dem Nullpunkt. Die Nullhypothese $\hat{\mu}_{HF} = 0$ kann für jede Kategorie verworfen werden. Des Weiteren unterscheiden sich die Werte höchst signifikant. Dasselbe gilt für den Schätzer der Varianz und auch der VaR unterscheidet sich stark. Eine Verlängerung der Intervalle zwischen den Handlungszeitpunkten führt also zu einer Erhöhung des Risikos. Auffällig sind die sehr hohen Beträge für die Risikomaße. Die Verteilungsgraphen zeigen eine sehr rechtschiefe Verteilung. Der $VaR_{0,95}$ ist dementsprechend sehr gering und die Verteilung reicht sehr weit in den positiven Bereich.

¹³⁰Eine Verbesserung der Vergleichbarkeit der Varianzen wäre mittels der Bootstrap-Methode möglich. Tendenzen sind jedoch auch so erkennbar.

5.3.2 Einfluss der Moneyness-Ratio

Wert/Kategorie	0.85	0.95	1.05	1.15	5.0
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2265	0.2574	0.2516	0.2611	0.2835
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.1455	0.1312	0.1281	0.1306	0.1338
T	299.7273	110.8477	118.5245	113.6744	164.4474
S_0/K	0.7628	0.906	0.9948	1.0941	1.3266
C_0^{BS}	2.0188	1.2735	4.4712	10.9881	25.2949
μ_{HF}^*	1.5944	0.3659	0.7919	0.9505	0.897
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	7.8959	1.8458	1.9249	1.9376	3.8733
$Var_{0,95}$	-0.0044	-0.3969	-0.4686	-0.0547	-0.2186
Zahl der HF	66	197	143	86	114

Tabelle 5: Empirie: Moneyness $\frac{S_i}{K}$ (Durchschnittswerte, „tatsächliche“ Volatilität, Eigene Darstellung)

Für den Erwartungswert der Hedgefehler ist keine eindeutige Tendenz feststellbar. Die Randklassen werden vernachlässigt, da diese eine überdurchschnittlich hohe durchschnittliche Laufzeit aufweisen. Dies könnte die Resultate beeinflussen. Für den Erwartungswert und die Varianz ist so eine monotone Steigung feststellbar. Die Zunahme der Varianz ist jedoch nicht signifikant und der Erwartungswert steigt nur von den Intervallen „aus dem Geld“ zu „am Geld“ signifikant.

Demnach ergibt sich keine Dominanz für das μ/σ -Kriterium, da für Optionen „aus dem Geld“ Erwartungswert und das Risiko sinken, für Optionen „im Geld“ steigen dagegen beide Werte.

Der ansteigende Erwartungswert könnte auf den steigenden Optionswert zurückzuführen sein. Dazu müsste dieser allerdings über seinen „fairen“ Wert notieren. Dies ist der Wert, der durch die gesteigerte Chance „im Geld“ zu enden, gerechtfertigt ist.

Eine weitere Erklärung könnte das hohe beobachtete μ_{Akt} sein. Wie bereits oben erläutert führen Optionen, für die der Aktienkurs nahe „am Geld“ notiert zu hohem Risiko, wogegen Optionen „aus dem Geld“ oder „im Geld“ ein deutlich geringeres Risiko aufweisen. Eine hohe erwartete Rendite würde dazu führen, dass Optionen, die „aus dem Geld“ notieren mit hoher Wahrscheinlichkeit einen steigenden Kursverlauf aufweisen. Dies hat steigende Hedgefehler zur Folge, da das Gamma am Höchsten ist, wenn der Kurs des Basiswertes dem Ausübungskurs entspricht. Dort sind auch die größten Hedgefehler zu verbuchen. Alle anderen Optionen würden sich tendenziell aus dem Bereich hoher Hedgefehler hinaus bewegen. Eine Option, die tief „im Geld“ notiert, hat dann ein nur leicht schwankendes Delta i. H. v. fast Eins.

Wert/Kategorie	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	100.0
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.5285	0.2846	0.3726	0.0648	0.1163	0.2492	0.2643
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.0903	0.1141	0.1301	0.1508	0.1639	0.1971	0.2105
T	13.0	103.6061	135.7617	107.2817	423.4545	643.9	603.0
S_0/K	0.9176	1.0742	1.0114	1.0018	0.8447	0.9322	1.0648
C_0^{BS}	0.0081	8.5551	7.4216	6.3194	7.5445	18.5126	25.6086
$\hat{\mu}_{HF}$	0.008	0.5863	0.4353	0.3948	2.1504	6.6168	6.1408
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	56.4163	31.673	33.5465	35.2394	28.3283	4.0973	1.3344
$VaR_{0,95}$	0.0019	-0.2134	-0.2877	-0.5396	-0.2	3.1222	4.5983
Zahl der HF	3	231	193	142	11	20	7

Tabelle 6: Empirie: σ (Durchschnittswerte, „tatsächliche“ Volatilität, Eigene Darstellung)

5.3.3 Einfluss von Sigma

Für die unterschiedlichen Kategorien ist kein monotoner Trend für μ_{HF} oder σ_{HF} feststellbar. Die Randgruppen (0,1; 0,18 bis 100) beinhalten zum einen zu wenige Werte oder haben eine überdurchschnittliche Laufzeit und werden daher vernachlässigt.

Der Erwartungswert der Hedgefehler sinkt leicht für steigende Standardabweichung des Aktienkursprozesses. Demgegenüber steigt die Varianz und der VaR an. Das steigende Risiko des Basiswertes geht also mit einem steigenden Hedgerisiko einher.

5.3.4 Einfluss der Laufzeit

Wert/Kategorie	37	59	71	115	235	301
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2578	0.1956	0.2651	0.2957	0.2723	0.2698
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.1311	0.1279	0.1295	0.13	0.1243	0.1245
T	21.878	52.5294	64.2623	100.6667	169.9259	261.5233
S_0/K	0.9174	0.9325	1.0383	1.3438	1.075	1.055
C_0^{BS}	0.3256	2.5293	7.0247	6.96	10.6009	12.318
$\hat{\mu}_{HF}$	0.0278	0.012	0.1555	0.1733	0.6597	1.2293
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	1.5066	1.5432	1.3087	1.4324	1.4571	0.9835
$VaR_{0,95}$	-0.0428	-0.2787	-0.4267	-0.5105	-0.6128	0.0431
Zahl der HF	41	34	324	15	54	86

Tabelle 7: Empirie: Laufzeit (Durchschnittswerte, „tatsächliche“ Volatilität, Eigene Darstellung)

Der erwartete Hedgefehler steigt (nicht monoton) für zunehmende Laufzeit. Das Risiko, gemessen mit Hilfe der Varianz, bleibt zunächst annähernd konstant, für sehr lange Laufzeiten sinkt es, jedoch nicht signifikant. Der VaR steigt, bis auf die letzte Kategorie, kontinuierlich an. Insgesamt ergibt sich so eine Linksverschiebung der Verteilungsgraphen.

5.3.5 Einfluss des Schätzfehlers

Es werden zwei, im Sinne der historischen Simulation durchführbaren, Methoden angewandt, um die jeweiligen Hedgeparameter zu bestimmen. Zum einen werden die Standardabweichung der logarithmierten Zuwächse der Index-Kurse, die direkt vor der betrachteten Periode liegen, als Schätzer für die zukünftige (konstante) Standardabweichung, verwendet.¹³¹ Zum anderen werden für die zweite Methode die in den Optionskursen implizit enthaltene Standardabweichung numerisch angenähert und als Hedgeparameter verwendet. Diese Volatilität wird, im Gegensatz zur vorhergehenden, für jeden Hedge neu berechnet.¹³² Als Vergleichsgröße wird die im betrachteten Zeitraum realisierte Volatilität errechnet.

Die Methode der impliziten Volatilität müsste intuitiv die besten Resultate liefern, da diese direkt die im Modell verwendete, also die prozessgenerierende, Volatilität verwendet. Dies gilt jedoch nur dann, wenn das Modell korrekt ist, also keine Ungewissheit darüber herrscht.

Jedoch kann für die betrachteten Ausgangsdaten keine der Methoden als dominant bestimmt werden. Keine führt also grundsätzlich zu den geringsten Hedgefehlern. Des Weiteren sind keine systematischen Unterschiede erkennbar.

¹³¹ Vgl. Tabellen 22 bis 25.

¹³² Vgl. Tabellen 26 bis 29.

6 Komparative Analyse

6.1 Vergleich Diskretisierung – Sprünge

Obwohl die Gesamtvarianz des Aktienkursprozesses für den Black-Scholes- und Merton-Prozess stets gleich ist, zeigen sich signifikante Unterschiede in den Risikoprofilen der resultierenden Hedgefehler. Diese Differenzen können je nach verwendeter Hedgestrategie und zugrundeliegender Parameterkombination variieren.

Bei Verwendung der Naiven Hedgestrategie können keine signifikanten Abweichungen festgestellt werden. Auch die dazugehörigen Varianzen sind statistisch identisch.

Für die Delta-Hedging-Methode ist der Einfluss eines Sprungprozesses deutlich größer. Der Erwartungswert liegt noch bei beiden Prozessen bei Null, solange die implizite gleich der tatsächlichen Volatilität ist. Die Varianz ist jedoch bei alleiniger Diskretisierung höchst signifikant geringer als mit zusätzlichem Sprungprozess. Die relative Differenz ist dabei für große Werte von Δt kleiner als für kleine. Der Einfluss des Sprungrisikos wird also geringer, dafür steigt der Einfluss des Risikos der Diskretisierung.

Der Portfolio-Hedge zeigt dieselben Risikoeigenschaften nur die Absolutbeträge werden jeweils in etwa halbiert. Auch eine größere Zahl an Sprüngen oder eine höhere Standardabweichung der Sprunghöhen hat keinen Einfluss auf diese Relation. Die Annahme, dass Sprünge durch Diversifikation eventuell versicherbar sind, kann bestätigt werden. Somit kann das Sprungrisiko wie auch das Risiko der Diskretisierung mittels der Portfolio-Strategie gehedgt werden.

Für die Gamma-Strategie sind die Änderungen noch extremer. Für kleine Δt schneidet die Methode für einen Black-Scholes-Kursverlauf deutlich besser ab, als für einen Merton-Verlauf. Für große Δt dagegen zeigt sich sogar ein höheres Risiko bei ersterem Kursverlauf, diese Beobachtung ist jedoch nicht signifikant.

Der Einfluss der Miteinbeziehung von Schätzfehlern hat keine signifikant unterschiedlichen Auswirkungen auf die Erwartungswerte der Hedgefehler bei den verglichenen Prozessen. Die relativen Abstände der Varianzen sind deutlich geringer. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass der Einfluss des Schätzrisiko hier im Gegensatz zum zusätzlichen Sprungrisiko dominant ist.

6.2 Vergleich Diskretisierung, Sprünge – Empirie

Im Folgenden werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Simulationen mit Diskretisierungsrisiko und Sprungrisiko sowie den empirischen Ergebnissen aufgezeigt. Bei Vergleich mit der Moneyness-Tabelle (5) kann die charakteristische Eigenschaft der Varianz der Hedgefehler aus der Simulation nicht nachvollzogen werden. Optionen, die „am Geld“ notieren, müssten eigentlich das höchste Risiko aufweisen. Dies ist jedoch nicht der Fall. Trotz einer Standardisierung zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse liegen die beobachteten Varianzen der Empirie deutlich über denen der Simulation. Dies könnte auf die deutlich längere durchschnittliche Laufzeit der empirischen Optionen zurückzuführen sein.

Das Schätzrisiko hat in der Theorie einen hohen Einfluss auf die Hedgequalität der Optionen. Der Anteil der Parameterungewissheit kann einen beträchtlichen Anteil am gesamten Modellrisiko ausmachen. Dieser Einfluss ist für die empirischen Werte in Ermangelung der tatsächlichen Volatilität nicht berechenbar. Jedoch könnte diese Ungewissheit über die Modellparameter Ursache für das beobachtete hohe Risiko der empirischen Hedgefehler sein.¹³³

Der Einfluss der Laufzeit ist in der Simulation generell eher gering. Die empirischen Beobachtungen zeigen jedoch, dass eine längere Laufzeit zu stark ansteigenden Varianzen der Hedgefehler führt. Der *VaR* steigt für die empirischen Werte ebenfalls monoton stark an, jedoch liegt dieser, aufgrund der höheren vereinnahmten Optionsprämien, stets deutlich unter den simulierten Werten.

Änderungen des Δt wirken sich für Simulation und Empirie sehr ähnlich aus. Im Vergleich zu der Simulation führt eine fünftägliche statt tägliche Anpassung der Hedgestrategie annähernd zu einer Verdopplung des Risikos, gemessen mit Hilfe der Varianz.

Die Unterschiede zwischen den Kennzahlen der Simulation mit einem Black-Scholes-Prozess und einem Merton-Prozess sind zwar für sich genommen sehr hoch, dennoch reichen diese Verbesserungen nicht, um stets realistischere Ergebnisse letztgenanntem Prozess zu erzielen. Folgende Ausnahme ist zu beobachten:

Der größere Einfluss der Laufzeit auf den Hedgefehler wird von dem Diffusions-Sprungprozess besser abgebildet, auch hier steigt die Varianz an, wenn auch nicht in dem empirisch beobachteten Maße.

Auffällig ist auch, dass der erwartete Hedgefehler, im Gegensatz zu den Ergebnissen der Simulation, fast durchgehend signifikant größer Null ist. Dies deutet auf ei-

¹³³ Dies wurde von Pástor/Stambaugh (1999) bestätigt.

ne Kompensation des eingegangenen Risikos hin. Im Black-Scholes-Modell würde sich dies in Form einer höheren implizite Volatilität niederschlagen. Eine Überprüfung ist schwierig, da die prozessgenerierende Volatilität nicht bekannt ist.

7 Resümee

Bereits in den 1870er Jahren gab es einen Markt für Optionen.¹³⁴ Aufgrund fehlender Modelle kam es zu großen Fehlbewertungen. Für den Fall, dass Modelle existieren können diese jedoch zu Modellrisiko führen, daher sind diese nur sehr vorsichtig zu verwenden.¹³⁵

In dieser Arbeit wurde das Hedgerisiko unter Ungewissheit in der Simulation und Empirie näher beleuchtet. Ziel war es theoretisch und empirisch die Höhe dieser Risikokomponente zu bestimmen und gleichzeitig Einflussfaktoren aufzuzeigen.

Die Bewertung des Risikos erfolgt zum einen auf Basis des μ/σ -Kriteriums und zum anderen mit Hilfe des $VaR_{0,99}$. Zunächst wird das dem Black-Scholes-Modell anhaftende Risiko, dass bei Diskretisierung der Handlungszeitpunkte entsteht, analysiert. Diese Abweichung von den Modellannahmen ist als besonders grundlegend anzusehen. Neben anderen Modellanpassungen werden vor allem alternative Aktienkursprozesse erforscht. Als Beispiel dafür wird in Kapitel 4 ein Diffusions-Sprung-Prozess implementiert und verschiedene Hedgestrategien daran getestet.

Zusammenfassend zeigt sich, dass der betrachtete Sprungprozess generell zu höheren Varianzen des Hedgefehlers führt. Die empirischen Ergebnisse haben jedoch nochmals deutlich höhere Varianzen zu verzeichnen. Dies deutet darauf hin, dass der Sprungprozess Teil eines realistischeren Modells ist. Eine Anpassung der Sprunghöhe bzw. -häufigkeit könnte zu ähnlich hohen Varianzen der Hedgefehler führen wie sie auch empirisch auftreten. Die hier verwendete Schätzmethode für die Gesamtstandardabweichung der Aktienrenditen scheint jedoch nicht in der Lage zu sein derartig extreme Sprünge überhaupt darzustellen. Die geschätzten Varianzen sind so gering, dass die Standardabweichung des Diffusionsprozesses auf Null absinkt, bevor die benötigten extremen Sprunghöhen erreicht sind. Diese Vorgehensweise ist also für einen Diffusions-Sprungprozess ungeeignet und ein Konstanthalten der Gesamtstandardabweichung somit nicht mehr möglich. Andere Schätzmethoden könnten hier Abhilfe schaffen, indem mehrere Parameter gleichzeitig aus den Kursreihen geschätzt werden.

Der positive erwartete Hedgefehler stellt eine weitere Auffälligkeit der empirischen Ergebnisse dar. In beiden Simulationskapiteln kann eine solche Abweichung ausschließlich durch eine (positiv) abweichende implizite Volatilität erreicht werden. Dies könnte bedeuten, dass die Marktteilnehmer grundsätzlich bereit sind einen

¹³⁴ Vgl. Kairys/Valerio (1997).

¹³⁵ Vgl. Merton (1998), S. 343.

Aufschlag auf den fairen Wert zu bezahlen bzw. dass sich Optionsemittenten¹³⁶ das verbleibende, nicht ohne weiteres hedgebare, Risiko über die Optionsprämie entgelten lassen. Ein solcher Volatilitätsaufschlag wird ebenfalls in der Literatur als Möglichkeit für Emittenten vorgeschlagen, um die Risiken der Absicherung auf den Markt umzuwälzen.¹³⁷ In keiner einzigen der hier betrachteten Kategorien kommt es zu negativen erwarteten Hedgefehlern. Entsprechend vorteilhaft zeigt sich auch der *VaR*. Das Restrisiko ist zwar dennoch nicht zu vernachlässigen, es stellt jedoch vor allem in Verbindung mit zusätzlichen Hedgestrategien eine kontrollierbare Risikoposition dar.

Kombinationsmöglichkeiten ergeben sich bspw. durch zusätzliche Emission von Optionen auf unterschiedliche Aktien (Portfolio-Hedging) oder durch gleichzeitigen An- und Verkauf von Optionen mit demselben Basiswert (Gamma-Hedging). Erstere Methode basiert auf dem Umstand, dass unterschiedliche Wertpapiere meist nicht vollständig korreliert sind; letztere darauf, dass sich die Zahlungsströme zweier fast identisch bestimmter Derivate ebenfalls annähernd eliminieren. Das verbleibende Hedgerisiko eines Optionsemittenten ist so nahezu beliebig minderbar.

Es sind jedoch Szenarien denkbar, in welchen es nicht möglich ist, auch nach eingehender Analyse der Einflussfaktoren, das Risiko zu eliminieren.

Da das Risiko in der Simulation symmetrisch sowohl positive als auch negative Hedgefehler bewirken kann würde sich ein (annähernd) risikoneutraler Entscheider davon nicht beeinflussen lassen. Für jede andere Risikoeinstellung ist es jedoch nötig abzuwägen, inwiefern das zusätzliche Risiko von dem Entscheider getragen werden kann.

Drei grundlegende Richtungen für zukünftige Forschungen sind denkbar. Ziel muss sein, optimale Schätzmethoden für die Parameter der Aktienkursprozesse zu finden. Unterschiedliche Schätzmethoden und Datengrundlagen müssen demnach miteinander verglichen und bewertet werden. Dies ist vor allem auch in Zusammenhang mit der Suche nach alternativen stochastischen Prozessen nötig, für die möglicherweise mehrere Parameter simultan geschätzt werden müssen. Die Suche nach Prozessen, die eine verbesserte Abbildung realer Kursverläufe erlauben, stellt die zweite Herausforderung dar. Auch hier muss stets die Anwendbarkeit und Verbesserungen für das Hedging im Auge behalten werden. Darüber hinaus könnten alternative Hedgestrategien das Potential beinhalten das Risiko für Emittenten deutlich zu senken und müssen daher weiter erforscht werden.

¹³⁶ Im Fall von EUREX-Optionen also Netto-Leerverkäufer.

¹³⁷ Vgl. Green/Figlewski (1999), S. 1493.

Anhang

Gewinnung und Verarbeitung der Daten

Verwendete Programmiersprache	Python	2.4.3
Verwendete Module	Numeric	24.2
	Gnuplot-Py	1.7

Tabelle 8: Programmierumgebung

Python ist verfügbar unter <http://www.python.org/download/>. Desweiteren wurde Gnuplot (4.0.0, <http://www.gnuplot.info/download.html>) für die Erzeugung der Graphiken verwendet.

Gleichverteilte Zufallszahlen werden in Python mit dem Mersenne Twister, einem Algorithmus mit einer Periode von $2^{19937} - 1$, erzeugt.

Die Simulationsdurchläufe wurden auf dem Parallelrechner der Universität Mannheim ausgeführt.¹³⁸ Herzlichen Dank hierfür an Herrn Dr. Kredel für die Bereitstellung eines Remote-Zugangs.

Die Quelltexte der Programme befinden sich auf beigefügter CD-ROM.

Name des Programms	Parameter	Beschreibung
diplomarbeit.py	„s“: Sprungprozess; „d“: Diskretisierung	Hauptprogramm für die Simulation: Enthält die Iterationen für unterschiedliche Options- und Kursprozessstypen.
diskret.py	–	Wird indirekt aus „diplomarbeit.py“ aufgerufen. Durchführung der Hedgestrategien anhand von generierten Kursreihen.
kursgen.py	–	Enthält Funktionen zur Kursreihengenerierung.
riskmeasure.py	–	Enthält Funktionen zur Berechnung von Risikomaßen und Ausgabe selbiger.
plotncalc.py	–	Enthält Funktionen zur Optionsbewertung und Datenausgabe in Form von Graphen.
apeswork.py	–	Programm zur interaktiven Generierung von Latex-Tabellen aus den Ergebnissen der Simulation.
empirie.py	–	Programm zur Generierung (bei einem ersten Durchlauf) und Auswertung (ab dem zweiten Durchlauf) vorgegebener empirischer Daten.
makeBoyle.py	„d“: Delta; „g“: Gamma	Dient der Erzeugung der Graphiken zur Analyse der Entstehung von Hedgefehlern.

Tabelle 9: Verwendete Programme und Zweck

¹³⁸Nähere Informationen dazu auf <http://suparum.rz.uni-mannheim.de/>.

Auswertung Hedgefehler durch Diskretisierung

LFZ/Hedge- strategie	24	65	130
Naiv			
μ	-2,9269	-5,4443	-8,7803
$\hat{\sigma}^2$	17,5192	52,4035	118,7722
[%]	–	199.12 %	126.65 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	47,4479	52,4035	59,3861
$VaR_{0,99}$	-15,2609	-27,6447	-42,0221
[%]	–	81.15 %	52.01 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372
Zahl Trans.	3,521	5,5236	7,556
Delta			
μ	-0,0024	0,0039	0,0001
$\hat{\sigma}^2$	0,1785	0,1779	0,1821
[%]	–	-0.32 %	2.36 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,4834	0,1779	0,0911
$VaR_{0,99}$	-1,1413	-1,1141	-1,1384
[%]	–	-2.39 %	2.18 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0265	-0,0357	-0,0316
$\hat{\sigma}^2$	0,3255	0,3105	0,3137
[%]	–	-4.63 %	1.06 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,8816	0,3105	0,1569
$VaR_{0,99}$	-1,5635	-1,5319	-1,4885
[%]	–	-2.02 %	-2.83 %
$\varnothing C_0^{BS}$	2,3981	3,9475	5,6032
PF			
μ	-0,0028	-0,0011	-0,0004
$\hat{\sigma}^2$	0,0883	0,0911	0,0932
[%]	–	3.25 %	2.21 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,2391	0,0911	0,0466
$VaR_{0,99}$	-0,7691	-0,7903	-0,7884
[%]	–	2.76 %	-0.24 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372
Gamma			
μ	-0,0012	-0,0304	-0,0204
$\hat{\sigma}^2$	0,0084	0,0085	0,006
[%]	–	2.13 %	-30.05 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,0226	0,0085	0,003
$VaR_{0,99}$	-0,2536	-0,377	-0,3356
[%]	–	48.67 %	-10.99 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372

Tabelle 10: Diskret: Hedgestrategien/ Δt

S_0 /Hedge- strategie	90	100	110
Naiv			
μ	-1,3434	-5,4443	5,4042
$\hat{\sigma}^2$	16,8571	52,4035	83,214
[%]	-	210.87 %	58.79 %
$VaR_{0,99}$	-17,6981	-27,6447	-21,5203
[%]	-	56.2 %	-22.15 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539
Zahl Trans.	1,3898	5,5236	2,8258
Delta			
μ	-0,0004	0,0039	-0,0036
$\hat{\sigma}^2$	0,1049	0,1779	0,0886
[%]	-	69.64 %	-50.22 %
$VaR_{0,99}$	-0,9935	-1,1141	-0,9554
[%]	-	12.14 %	-14.25 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539
Delta Schätzfehler			
μ	-0,017	-0,0357	-0,0241
$\hat{\sigma}^2$	0,1748	0,3105	0,1517
[%]	-	77.58 %	-51.13 %
$VaR_{0,99}$	-1,3464	-1,5319	-1,2402
[%]	-	13.78 %	-19.04 %
\hat{C}_0^{BS}	0,6982	3,9475	10,9311
PF			
μ	0,0	-0,0011	-0,0026
$\hat{\sigma}^2$	0,052	0,0911	0,0449
[%]	-	75.24 %	-50.69 %
$VaR_{0,99}$	-0,6608	-0,7903	-0,6267
[%]	-	19.61 %	-20.71 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539
Gamma			
μ	-0,0215	-0,0304	-0,0154
$\hat{\sigma}^2$	0,0059	0,0085	0,0046
[%]	-	44.47 %	-46.38 %
$VaR_{0,99}$	-0,3335	-0,377	-0,3249
[%]	-	13.03 %	-13.82 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539

Tabelle 11: Diskret: Hedgestrategien/ S_0

μ /Hedgestrategie	0,05	0,1	0,15
Naiv			
μ	-4,7882	-5,4443	-6,0825
$\hat{\sigma}^2$	47,1762	52,4035	55,5612
[%]	-	11.08 %	6.03 %
$VaR_{0,99}$	-26,3999	-27,6447	-28,0572
[%]	-	4.72 %	1.49 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Zahl Trans.	5,5666	5,5236	5,5502
Delta			
μ	0,0015	0,0039	0,0027
$\hat{\sigma}^2$	0,1845	0,1779	0,1844
[%]	-	-3.57 %	3.64 %
$VaR_{0,99}$	-1,1783	-1,1141	-1,194
[%]	-	-5.45 %	7.18 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0499	-0,0357	-0,0418
$\hat{\sigma}^2$	0,3333	0,3105	0,3176
[%]	-	-6.85 %	2.3 %
$VaR_{0,99}$	-1,6825	-1,5319	-1,592
[%]	-	-8.95 %	3.92 %
$\varnothing C_0^{BS}$	3,9394	3,9475	3,9437
PF			
μ	0,0023	-0,0011	-0,0019
$\hat{\sigma}^2$	0,0912	0,0911	0,092
[%]	-	-0.1 %	0.94 %
$VaR_{0,99}$	-0,7675	-0,7903	-0,757
[%]	-	2.98 %	-4.22 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Gamma			
μ	-0,0314	-0,0304	-0,0303
$\hat{\sigma}^2$	0,0082	0,0085	0,0082
[%]	-	3.97 %	-3.82 %
$VaR_{0,99}$	-0,3606	-0,377	-0,3652
[%]	-	4.56 %	-3.13 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878

Tabelle 12: Diskret: Hedgestrategien/ μ

σ /Hedgestrategie	0,1	0,1414	0,2	0,3	0,5
Naiv					
μ	-3,497	-4,282	-5,4443	-7,4823	-11,2977
$\hat{\sigma}^2$	14,1032	27,39	52,4035	116,7611	334,2835
[%]	-	94.21 %	91.32 %	122.81 %	186.3 %
$VaR_{0,99}$	-13,9682	-19,2347	-27,6447	-41,7075	-73,7621
[%]	-	37.7 %	43.72 %	50.87 %	76.86 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477
Zahl Trans.	5,4566	5,4996	5,5236	5,545	5,4538
Delta					
μ	-0,0055	-0,0008	0,0039	0,0037	0,0003
$\hat{\sigma}^2$	0,0448	0,0891	0,1779	0,4058	1,1119
[%]	-	98.96 %	99.72 %	128.1 %	173.98 %
$VaR_{0,99}$	-0,5968	-0,7913	-1,1141	-1,7149	-2,8501
[%]	-	32.59 %	40.79 %	53.93 %	66.2 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477
Delta Schätzfehler					
μ	-0,0288	-0,0322	-0,0357	-0,0594	-0,1163
$\hat{\sigma}^2$	0,0789	0,1606	0,3105	0,7052	1,9765
[%]	-	103.68 %	93.26 %	127.15 %	180.28 %
$VaR_{0,99}$	-0,8198	-1,117	-1,5319	-2,2766	-3,86
[%]	-	36.25 %	37.15 %	48.61 %	69.55 %
C_0^{BS}	1,9703	2,7887	3,9475	5,9169	9,8347
PF					
μ	-0,0047	-0,001	-0,0011	-0,002	-0,0016
$\hat{\sigma}^2$	0,0225	0,0446	0,0911	0,2092	0,5702
[%]	-	98.16 %	104.51 %	129.5 %	172.57 %
$VaR_{0,99}$	-0,3919	-0,5403	-0,7903	-1,209	-1,9373
[%]	-	37.88 %	46.27 %	52.97 %	60.24 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477
Gamma					
μ	-0,0142	-0,0202	-0,0304	-0,0451	-0,0771
$\hat{\sigma}^2$	0,002	0,0043	0,0085	0,0185	0,052
[%]	-	110.38 %	100.08 %	117.2 %	180.58 %
$VaR_{0,99}$	-0,1813	-0,2536	-0,377	-0,5425	-0,9248
[%]	-	39.85 %	48.67 %	43.88 %	70.47 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477

Tabelle 13: Diskret: Hedgestrategien/ σ

<i>iVola</i> /Hedge- strategie	$\sigma - 0,05$	σ	$\sigma + 0,05$
Naiv			
μ	-6,3782	-5,4443	-4,259
$\hat{\sigma}^2$	51,3709	52,4035	50,1757
[%]	-	2.01 %	-4.25 %
$VaR_{0,99}$	-27,6927	-27,6447	-26,1727
[%]	-	-0.17 %	-5.32 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835
Zahl Trans.	5,4482	5,5236	5,5314
Delta			
μ	-0,9873	0,0039	0,9978
$\hat{\sigma}^2$	0,3673	0,1779	0,2899
[%]	-	-51.56 %	62.94 %
$VaR_{0,99}$	-2,826	-1,1141	-0,008
[%]	-	-60.58 %	-99.28 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0473	-0,0357	-0,0482
$\hat{\sigma}^2$	0,3192	0,3105	0,3166
[%]	-	-2.73 %	1.97 %
$VaR_{0,99}$	-1,5667	-1,5319	-1,5651
[%]	-	-2.22 %	2.17 %
$\varnothing C_0^{BS}$	3,9438	3,9475	3,9394
PF			
μ	-0,993	-0,0011	0,9964
$\hat{\sigma}^2$	0,1825	0,0911	0,145
[%]	-	-50.05 %	59.08 %
$VaR_{0,99}$	-2,2074	-0,7903	0,2365
[%]	-	-64.2 %	-129.92 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835
Gamma			
μ	-0,0168	-0,0304	-0,047
$\hat{\sigma}^2$	0,0129	0,0085	0,0093
[%]	-	-34.11 %	8.87 %
$VaR_{0,99}$	-0,4382	-0,377	-0,3843
[%]	-	-13.96 %	1.94 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835

Tabelle 14: Diskret: Hedgestrategien/*iVola*

Auswertung Hedgefehler durch Sprünge

Δt /Hedge- strategie	0,05	0,5	1	5	10
Naiv					
μ	-5,3456	-5,362	-5,5545	-5,6951	-5,8356
$\hat{\sigma}^2$	50,9313	51,4617	61,1691	69,803	80,8371
[%]	–	1.04 %	18.86 %	14.11 %	15.81 %
$VaR_{0,99}$	-26,8751	-27,3395	-29,3796	-30,976	-34,1252
[%]	–	1.73 %	7.46 %	5.43 %	10.17 %
C_0^{BS}			3,9878		
Zahl Trans.	7,4808	5,4812	2,6866	2,087	1,8286
Delta					
μ	0,003	-0,0092	-0,018	-0,02	-0,0504
$\hat{\sigma}^2$	0,1534	0,2581	0,9046	1,5955	2,3583
[%]	–	68.24 %	250.48 %	76.38 %	47.81 %
$VaR_{0,99}$	-1,1984	-1,5217	-2,8044	-3,4986	-4,428
[%]	–	26.98 %	84.29 %	24.75 %	26.57 %
C_0^{BS}			3,9878		
Delta Schätzfehler					
μ	-1,1834	-0,0659	4,398	7,5272	9,4277
$\hat{\sigma}^2$	0,5074	0,4516	5,1524	15,4798	29,551
[%]	–	-11.0 %	1040.86 %	200.44 %	90.9 %
$VaR_{0,99}$	-3,3474	-1,9253	-0,1196	-0,3836	-0,7658
[%]	–	-42.49 %	-93.79 %	220.8 %	99.64 %
$\varnothing C_0^{BS}$	2,7997	3,9327	8,4027	11,5497	13,4118
PF					
μ	0,0025	-0,0037	-0,015	-0,0119	-0,048
$\hat{\sigma}^2$	0,0782	0,127	0,4476	0,7917	1,1775
[%]	–	62.46 %	252.41 %	76.85 %	48.74 %
$VaR_{0,99}$	-0,8254	-1,0039	-1,779	-2,3881	-3,0661
[%]	–	21.63 %	77.2 %	34.24 %	28.39 %
C_0^{BS}			3,9878		
Gamma					
μ	-0,0157	-0,031	-0,1531	-0,1525	-0,3255
$\hat{\sigma}^2$	0,008	0,0128	0,0736	0,0667	0,1725
[%]	–	60.26 %	476.06 %	-9.31 %	158.51 %
$VaR_{0,99}$	-0,2868	-0,3925	-0,9167	-0,9329	-1,352
[%]	–	36.87 %	133.54 %	1.77 %	44.93 %
C_0^{BS}			3,9878		

Tabelle 15: Sprung: Hedgestrategien/ Δt

LFZ/Hedgestrategie	24	65	130
Naiv			
μ	-2,8622	-5,362	-8,4386
$\hat{\sigma}^2$	17,7912	51,4617	114,1872
[%]	-	189.25 %	121.89 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	48,1846	51,4617	57,0936
$VaR_{0,99}$	-15,4489	-27,3395	-41,4124
[%]	-	76.97 %	51.48 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372
Zahl Trans.	3,4564	5,4812	7,577
Delta			
μ	0,0082	-0,0092	-0,0045
$\hat{\sigma}^2$	0,2298	0,2581	0,2628
[%]	-	12.33 %	1.81 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,6223	0,2581	0,1314
$VaR_{0,99}$	-1,4469	-1,5217	-1,5332
[%]	-	5.17 %	0.75 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372
Delta Schätzfehler			
μ	-0,033	-0,0659	-0,0363
$\hat{\sigma}^2$	0,4177	0,4516	0,445
[%]	-	8.12 %	-1.47 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	1,1313	0,4516	0,2225
$VaR_{0,99}$	-1,9001	-1,9253	-1,8924
[%]	-	1.33 %	-1.71 %
$\varnothing C_0^{BS}$	2,3841	3,9327	5,6041
PF			
μ	0,0098	-0,0037	-0,0047
$\hat{\sigma}^2$	0,1149	0,127	0,1276
[%]	-	10.55 %	0.42 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,3112	0,127	0,0638
$VaR_{0,99}$	-0,9524	-1,0039	-0,9891
[%]	-	5.41 %	-1.48 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372
Gamma			
μ	0,0007	-0,031	-0,0238
$\hat{\sigma}^2$	0,0113	0,0128	0,0108
[%]	-	13.35 %	-15.41 %
$\hat{\sigma}_{65}^2$	0,0305	0,0128	0,0054
$VaR_{0,99}$	-0,2694	-0,3925	-0,3711
[%]	-	45.71 %	-5.45 %
C_0^{BS}	2,4238	3,9878	5,6372

Tabelle 16: Sprung: Hedgestrategien/LFZ

S_0 /Hedge- strategie	90	100	110
Naiv			
μ	-1,3798	-5,362	5,5933
$\hat{\sigma}^2$	17,3246	51,4617	78,3263
[%]	-	197.04 %	52.2 %
$VaR_{0,99}$	-17,7036	-27,3395	-21,1656
[%]	-	54.43 %	-22.58 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539
Zahl Trans.	1,397	5,4812	2,8042
Delta			
μ	-0,0005	-0,0092	-0,0048
$\hat{\sigma}^2$	0,1413	0,2581	0,1236
[%]	-	82.7 %	-52.1 %
$VaR_{0,99}$	-1,2239	-1,5217	-1,2553
[%]	-	24.34 %	-17.51 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0209	-0,0659	-0,0227
$\hat{\sigma}^2$	0,2337	0,4516	0,2099
[%]	-	93.23 %	-53.52 %
$VaR_{0,99}$	-1,478	-1,9253	-1,5518
[%]	-	30.26 %	-19.4 %
\hat{C}_0^{BS}	0,6978	3,9327	10,935
PF			
μ	-0,004	-0,0037	-0,0039
$\hat{\sigma}^2$	0,0718	0,127	0,0611
[%]	-	76.94 %	-51.86 %
$VaR_{0,99}$	-0,8642	-1,0039	-0,7808
[%]	-	16.17 %	-22.22 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539
Gamma			
μ	-0,0208	-0,031	-0,0161
$\hat{\sigma}^2$	0,0079	0,0128	0,0087
[%]	-	60.93 %	-31.74 %
$VaR_{0,99}$	-0,3554	-0,3925	-0,3435
[%]	-	10.45 %	-12.48 %
C_0^{BS}	0,7124	3,9878	10,9539

Tabelle 17: Sprung: Hedgestrategien/ S_0

μ /Hedgestrategie	0,05	0,1	0,15
Naiv			
μ	-4,5007	-5,362	-6,1557
$\hat{\sigma}^2$	46,3629	51,4617	58,7907
[%]	-	11.0 %	14.24 %
$VaR_{0,99}$	-25,7937	-27,3395	-29,7136
[%]	-	5.99 %	8.68 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Zahl Trans.	5,3834	5,4812	5,443
Delta			
μ	0,001	-0,0092	-0,0056
$\hat{\sigma}^2$	0,2501	0,2581	0,2399
[%]	-	3.2 %	-7.06 %
$VaR_{0,99}$	-1,4897	-1,5217	-1,4536
[%]	-	2.15 %	-4.48 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0493	-0,0659	-0,0544
$\hat{\sigma}^2$	0,444	0,4516	0,413
[%]	-	1.71 %	-8.55 %
$VaR_{0,99}$	-1,9063	-1,9253	-1,8924
[%]	-	0.99 %	-1.71 %
$\varnothing C_0^{BS}$	3,9387	3,9327	3,9363
PF			
μ	0,0017	-0,0037	-0,0043
$\hat{\sigma}^2$	0,1248	0,127	0,1216
[%]	-	1.76 %	-4.31 %
$VaR_{0,99}$	-0,9658	-1,0039	-0,9993
[%]	-	3.95 %	-0.46 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Gamma			
μ	-0,0298	-0,031	-0,0292
$\hat{\sigma}^2$	0,0131	0,0128	0,0143
[%]	-	-2.41 %	12.32 %
$VaR_{0,99}$	-0,4123	-0,3925	-0,3944
[%]	-	-4.81 %	0.49 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878

Tabelle 18: Sprung: Hedgestrategien/ μ

$\sigma_{Gesamt}/\text{Hedge-}$ strategie	0,1	0,1414	0,2	0,3	0,5
Naiv					
μ	-3,4097	-4,2318	-5,362	-7,3244	-11,0205
$\hat{\sigma}^2$	14,4609	27,3408	51,4617	118,277	336,646
[%]	-	89.07 %	88.22 %	129.84 %	184.63 %
$VaR_{0,99}$	-14,8295	-19,4121	-27,3395	-41,2508	-71,8331
[%]	-	30.9 %	40.84 %	50.88 %	74.14 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477
Zahl Trans.	5,1482	5,362	5,4812	5,4818	5,3912
Delta					
μ	0,0106	0,0036	-0,0092	0,0078	0,0227
$\hat{\sigma}^2$	0,2681	0,207	0,2581	0,4298	1,1276
[%]	-	-22.8 %	24.7 %	66.53 %	162.35 %
$VaR_{0,99}$	-1,7655	-1,4686	-1,5217	-1,8023	-2,9016
[%]	-	-16.82 %	3.62 %	18.44 %	61.0 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477
Delta Schätzfehler					
μ	-0,0453	-0,0417	-0,0659	-0,0678	-0,088
$\hat{\sigma}^2$	0,4687	0,3568	0,4516	0,7519	1,9797
[%]	-	-23.87 %	26.57 %	66.5 %	163.28 %
$VaR_{0,99}$	-2,1634	-1,7166	-1,9253	-2,4192	-3,8763
[%]	-	-20.65 %	12.15 %	25.65 %	60.23 %
$\varnothing C_0^{BS}$	1,9339	2,7724	3,9327	5,9034	9,8343
PF					
μ	0,0112	0,0047	-0,0037	0,0036	0,0106
$\hat{\sigma}^2$	0,1341	0,1042	0,127	0,2193	0,5663
[%]	-	-22.27 %	21.88 %	72.67 %	158.18 %
$VaR_{0,99}$	-1,1637	-0,9751	-1,0039	-1,2351	-1,936
[%]	-	-16.21 %	2.96 %	23.03 %	56.74 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477
Gamma					
μ	-0,0131	-0,0208	-0,031	-0,0464	-0,0762
$\hat{\sigma}^2$	0,0296	0,0144	0,0128	0,02	0,0528
[%]	-	-51.2 %	-11.46 %	56.44 %	164.32 %
$VaR_{0,99}$	-0,4749	-0,3445	-0,3925	-0,5629	-0,9457
[%]	-	-27.45 %	13.93 %	43.41 %	68.01 %
C_0^{BS}	1,9945	2,8204	3,9878	5,9785	9,9477

Tabelle 19: Sprung: Hedgestrategien/ σ

<i>iVola</i> /Hedge- strategie	$\sigma - 0,05$	σ	$\sigma + 0,05$
Naiv			
μ	-6,357	-5,362	-4,2321
$\hat{\sigma}^2$	51,9726	51,4617	49,5728
[%]	-	-0.98 %	-3.67 %
$VaR_{0,99}$	-28,3418	-27,3395	-25,9888
[%]	-	-3.54 %	-4.94 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835
Zahl Trans.	5,4854	5,4812	5,4658
Delta			
μ	-0,9995	-0,0092	1,0025
$\hat{\sigma}^2$	0,4258	0,2581	0,356
[%]	-	-39.39 %	37.95 %
$VaR_{0,99}$	-3,0385	-1,5217	-0,3057
[%]	-	-49.92 %	-79.91 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0532	-0,0659	-0,0455
$\hat{\sigma}^2$	0,436	0,4516	0,4378
[%]	-	3.57 %	-3.07 %
$VaR_{0,99}$	-1,8406	-1,9253	-1,8944
[%]	-	4.6 %	-1.61 %
$\varnothing C_0^{BS}$	3,936	3,9327	3,9408
PF			
μ	-0,9947	-0,0037	0,9977
$\hat{\sigma}^2$	0,2106	0,127	0,179
[%]	-	-39.69 %	40.95 %
$VaR_{0,99}$	-2,3094	-1,0039	0,0616
[%]	-	-56.53 %	-106.14 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835
Gamma			
μ	-0,019	-0,031	-0,0482
$\hat{\sigma}^2$	0,0186	0,0128	0,0118
[%]	-	-31.45 %	-7.45 %
$VaR_{0,99}$	-0,4759	-0,3925	-0,3984
[%]	-	-17.52 %	1.5 %
C_0^{BS}	2,9914	3,9878	4,9835

Tabelle 20: Sprung: Hedgestrategien/*iVola*

$\sigma_{Sprung}/$ Hedge- strategie	0.01	0.02	0.05
Naiv			
μ	-5,3583	-5,362	-5,0952
$\hat{\sigma}^2$	51,1297	51,4617	55,6967
[%]	–	0.65 %	8.23 %
$VaR_{0,99}$	-26,9913	-27,3395	-29,5373
[%]	–	1.29 %	8.04 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Zahl Trans.	5,5044	5,4812	4,9244
Delta			
μ	0,0037	-0,0092	0,0684
$\hat{\sigma}^2$	0,1872	0,2581	2,3808
[%]	–	37.84 %	822.44 %
$VaR_{0,99}$	-1,1802	-1,5217	-5,0923
[%]	–	28.94 %	234.64 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Delta Schätzfehler			
μ	-0,0416	-0,0659	-0,1642
$\hat{\sigma}^2$	0,3306	0,4516	4,147
[%]	–	36.62 %	818.23 %
$VaR_{0,99}$	-1,6149	-1,9253	-6,2655
[%]	–	19.22 %	225.43 %
$\varnothing C_0^{BS}$	3,942	3,9327	3,7456
PF			
μ	0,0003	-0,0037	0,0725
$\hat{\sigma}^2$	0,0929	0,127	1,2006
[%]	–	36.79 %	845.19 %
$VaR_{0,99}$	-0,8045	-1,0039	-3,4311
[%]	–	24.79 %	241.77 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878
Gamma			
μ	-0,0299	-0,031	-0,0179
$\hat{\sigma}^2$	0,0082	0,0128	0,2741
[%]	–	55.17 %	2046.06 %
$VaR_{0,99}$	-0,3653	-0,3925	-1,4363
[%]	–	7.44 %	265.94 %
C_0^{BS}	3,9878	3,9878	3,9878

Tabelle 21: Sprung: Hedgestrategien/ σ_{Sprung}

Auswertung empirischer Hedgefehler

Wert/Kategorie	0.85	0.95	1.05	1.15	5.0
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.0209	0.2499	0.1925	0.1989	0.1566
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.2133	0.1397	0.1389	0.1371	0.1502
T	299.7273	110.8477	118.5245	113.6744	164.4474
$S_{0/K}$	0.7628	0.906	0.9948	1.0941	1.3266
C_0^{BS}	2.0188	1.2735	4.4712	10.9881	25.2949
μ_{HF}	3.5332	0.4217	0.6306	0.7992	0.6158
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	37.4089	2.0461	1.3468	0.8224	1.2228
$Var_{0,95}$	-0.0294	-0.5761	-0.7655	0.0686	-0.2185
Zahl der HF	66	197	143	86	114

Tabelle 22: Empirie: Moneyness $\frac{S_t}{K}$ (Durchschnittswerte, geschätzte Volatilität)

Wert/Kategorie	37	59	71	115	235	301
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.3319	0.3188	0.2431	0.2929	0.1365	0.141
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.1278	0.124	0.1216	0.1198	0.1341	0.1609
T	21.878	52.5294	64.2623	100.6667	169.9259	261.5233
$S_{0/K}$	0.9174	0.9325	1.0383	1.3438	1.075	1.055
C_0^{BS}	0.3256	2.5293	7.0247	6.96	10.6009	12.318
μ_{HF}	0.0257	0.0982	0.1487	0.1362	0.5048	1.2857
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	1.6506	1.5067	1.4772	1.7744	1.6998	0.6165
$Var_{0,95}$	-0.1297	-0.1045	-0.5943	-0.8136	-1.0911	0.2752
Zahl der HF	41	34	324	15	54	86

Tabelle 23: Empirie: Laufzeit (Durchschnittswerte, geschätzte Volatilität)

Wert/Kategorie	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	100.0
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2642	0.2898	0.2744	0.1226	0.0809	0.1932	-0.2593
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.0955	0.1149	0.1292	0.149	0.1671	0.1814	0.3538
T	57.4225	72.8835	74.2778	134.0513	197.0	237.8857	575.1698
$S_{0/K}$	1.0922	1.0197	1.0251	1.0156	1.1324	1.0388	0.9257
C_0^{BS}	6.049	6.4841	6.2675	7.2238	15.0361	11.738	15.6026
μ_{HF}	0.1063	0.0801	-0.0076	0.6262	1.0653	1.6718	6.6587
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	43.6179	43.7082	45.1372	37.0082	32.8879	26.4188	18.9354
$Var_{0,95}$	-0.1836	-0.7171	-0.7504	-0.3036	0.0015	0.0064	2.6004
Zahl der HF	71	206	90	117	35	35	53

Tabelle 24: Empirie: σ (Durchschnittswerte, geschätzte Volatilität)

Wert/Kategorie	1	2	5
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.1867	0.1867	0.1867
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.149	0.149	0.149
T	143.5997	143.5997	143.5997
$S_{0/K}$	1.0276	1.0276	1.0276
C_0^{BS}	8.1359	8.1359	8.1359
μ_{HF}	0.8984	1.2777	1.5382
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	5.664	8.7831	10.9098
$Var_{0,95}$	-0.5369	-0.4156	-0.5324
Zahl der HF	607	607	607

Tabelle 25: Empirie: Δt (Durchschnittswerte, geschätzte Volatilität)

Wert/Kategorie	0.85	0.95	1.05	1.15	5.0
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2265	0.2574	0.2516	0.2611	0.2835
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.167	0.1768	0.1552	0.1219	0.1074
T	299.7273	110.8477	118.5245	113.6744	164.4474
s_0/K	0.7628	0.906	0.9948	1.0941	1.3266
C_0^{BS}	2.0188	1.2735	4.4712	10.9881	25.2949
μ_{HF}	2.1002	0.3586	0.1133	-0.2107	-0.2121
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	16.0153	1.4068	0.965	0.6019	0.364
$Var_{0,95}$	-0.0605	-0.5906	-0.9996	-1.4537	-1.0915
Zahl der HF	66	197	143	86	114

Tabelle 26: Empirie: Moneyness $\frac{S_t}{K}$ (Durchschnittswerte, implizite Volatilität)

Wert/Kategorie	37	59	71	115	235	301
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2578	0.1956	0.2651	0.2957	0.2723	0.2698
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.2237	0.2044	0.1751	0.1027	0.1002	0.0858
T	21.878	52.5294	64.2623	100.6667	169.9259	261.5233
s_0/K	0.9174	0.9325	1.0383	1.3438	1.075	1.055
C_0^{BS}	0.3256	2.5293	7.0247	6.96	10.6009	12.318
μ_{HF}	0.031	0.0737	-0.1296	0.3479	0.1678	0.0003
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	0.0187	0.0588	0.2598	0.2898	0.646	0.7594
$Var_{0,95}$	-0.0926	-0.1727	-1.0499	-0.2998	-1.1735	-1.1877
Zahl der HF	41	34	324	15	54	86

Tabelle 27: Empirie: Laufzeit (Durchschnittswerte, implizite Volatilität)

Wert/Kategorie	0.1	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2	100.0
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2666	0.3225	0.3061	0.3209	0.3319	0.2573	0.218
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.0699	0.1154	0.1353	0.1511	0.1733	0.195	0.2955
T	191.1206	85.6154	84.6667	67.1111	62.3333	64.0	87.1217
s_0/K	1.1046	0.9041	0.8999	1.0062	0.9264	0.9405	0.9152
C_0^{BS}	12.6019	0.4933	0.3352	5.1191	0.5164	1.047	2.1607
μ_{HF}	0.4345	0.3522	0.3114	0.1547	0.6385	0.4734	0.0864
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	3.6055	0.4349	0.36	0.408	0.6931	0.3745	0.8604
$Var_{0,95}$	-1.1378	-1.3968	-0.9928	-1.1024	0.1379	0.2798	-0.5429
Zahl der HF	340	13	15	45	3	2	189

Tabelle 28: Empirie: σ (Durchschnittswerte, implizite Volatilität)

Wert/Kategorie	1	2	5
$\hat{\mu}_{Akt}$	0.2579	0.2579	0.2579
$\hat{\sigma}_{Akt}$	0.1497	0.0804	0.0456
T	143.5997	143.5997	143.5997
s_0/K	1.0276	1.0276	1.0276
C_0^{BS}	8.1359	8.1359	8.1359
μ_{HF}	0.3017	1.05	1.4813
$\hat{\sigma}_{HF}^2$	3.6807	6.1038	7.6951
$Var_{0,95}$	-1.04	-0.7186	-0.3761
Zahl der HF	607	607	607

Tabelle 29: Empirie: Δt (Durchschnittswerte, implizite Volatilität)

Literatur

- Andersen, Leif; Andreasen, Jasper** (2000): *Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing*, in: Review of Derivatives Research, Vol. 4, 2000, S. 231–262.
- Andersen, Torben G.; Benzoni, Luca; Lund, Jesper** (1999): *Estimating Jump-Diffusions for Equity Returns*, Arbeitspapier, September 1999.
- Bakshi, Gurdip; Cao, Charles; Chen, Zhiwu** (1997): *Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models*, in: Journal of Finance, Vol. 52, 1997, Nr. 5, S. 2003–2049.
- Ball, Clifford A.; Torous, Walter N.** (1985): *On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing*, in: Journal of Finance, Vol. 40, 1985, Nr. 1, S. 155–173.
- Bates, David S.** (1996): *Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options*, in: Review of Financial Studies, Vol. 9, 1996, Nr. 1, S. 69–107.
- Beckers, Stan** (1981): *A Note on Estimating the Parameters of the Diffusion-Jump Model of Stock Returns*, in: Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 16, 1981, Nr. 1, S. 127–140.
- Belledin, Michael; Schlag, Christian** (1999): *An Empirical Comparison of Alternative Stochastic Volatility Models*, Arbeitspapier, Mai 1999.
- Black, Fischer; Scholes, Myron** (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, in: Journal of Political Economy, Vol. 81, 1973, Nr. 3, S. 637–654.
- Bollerslev, Tim; Gibson, Michael; Zhou, Hao** (2004): *Dynamic Estimation of Volatility Risk Premia and Investor Risk Aversion from Option-Implied and Realized Volatilities*, Arbeitspapier, 2004.
- Bondarenko, Julia; Branger, Nicole; Esser, Angelika; Schlag, Christian** (2002): *Mean-Variance Hedging With Limited Capital – A Decomposition Result*, Arbeitspapier, August 2002.
- Boyle, Phelim P.; Emanuel, David** (1980): *Discretely Adjusted Option Hedges*, in: Journal of Financial Economics, Vol. 8, 1980, S. 259–282.
- Branger, Nicole** (2004): *An Anatomy of Option Pricing Models*, Arbeitspapier, Dezember 2004.

- Branger, Nicole; Breuer, Beate; Schlag, Christian** (2004): *Discrete-Time Implementation of Continuous-Time Portfolio Strategies*, Arbeitspapier, Mai 2006.
- Branger, Nicole; Schlag, Christian** (2004): *Model Risk: A Conceptual Framework for Risk Measurement and Hedging*, Arbeitspapier, Januar 2004.
- Branger, Nicole; Schlag, Christian; Schneider, Eva** (2005): *General Equilibrium with Stochastic Volatility and Jumps*, Arbeitspapier, November 2005.
- Branger, Nicole; Schlag, Christian; Schneider, Eva** (2005): *Optimal Portfolios when Volatility can Jump*, Arbeitspapier, November 2005.
- Briys, Eric C.; Bellalah, Mondher; Mai, Huu M.; Varenne, François** (1998): *Options, Futures and Exotic Derivatives*, New York, u. a.: John Wiley & Sons.
- Brown, Gregory W.; Toft, Klaus B.** (2002): *How Firms Should Hedge*, in: Review of Financial Studies, Vol. 15, 2002, Nr. 4, S. 1283–1324.
- Buraschi, Andrea; Jiltsov, Alexei** (2005): *Model Uncertainty and Option Markets in Heterogeneous Economies*, Arbeitspapier, Februar 2005.
- Carr, Peter; Wu, Liuren** (2004): *Static Hedging of Standard Options*, Workingpaper, Mai 2004.
- Christensen, Bent J.; Prabhala, Nagpurnanand R.** (1998): *The relation between implied and realized volatility*, in: Journal of Financial Economics, Vol. 50, 1998, S. 125–150.
- Cont, Rama; Tankov, Peter** (2004): *Financial Modelling With Jump Processes*, Boca Raton, u. a.: Chapman & Hall/CRC.
- Cox, John C.; Ross, Stephen A.** (1976): *The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes*, in: Journal of Financial Economics, Vol. 3, 1976, S. 145–166.
- Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark** (1979): *Option Pricing: A Simplified Approach*, in: Journal of Financial Economics, Vol. 7, 1979, S. 229–263.
- Culp, Christopher L.** (2004): *Risk Transfer – Derivatives in Theory and Practice*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Eisenführ, Franz; Weber, Martin** (2003): *Rationales Entscheiden*, 4. Aufl., Berlin, u. a.: Springer.

- Epstein, Larry G.; Wang, Tan** (1994): *Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty*, in: *Econometrica*, Vol. 62, 1994, Nr. 2, S. 283–322.
- Figlewski, Stephen** (1989): *Options Arbitrage in Imperfect Markets*, in: *Journal of Finance*, Vol. 44, 1989, Nr. 5, S. 1289–1311.
- Figlewski, Stephen** (1997): *Derivatives Risks, Old and New*, Arbeitspapier, Dezember 1997.
- Figlewski, Stephen** (2003): *Estimation Error in the Assessment of Financial Risk Exposure*, Arbeitspapier, Juni 2003.
- Green, Clifton T.; Figlewski, Stephen** (1999): *Market Risk and Model Risk for a Financial Institution Writing Options*, in: *Journal of Finance*, Vol. 54, 1999, Nr. 4, S. 1465–1499.
- Hartmann-Wendels, Thomas; Pfingsten, Andreas; Weber, Martin** (2004): *Bankbetriebslehre*, 3. Aufl., Berlin, u. a.: Springer.
- Heston, Steven L.** (1993): *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, in: *Review of Financial Studies*, Vol. 6, 1993, Nr. 2, S. 327–343.
- Hull, John C.** (2003): *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5. Aufl, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Crouhy, Michel; Galai, Dan; Mark, Robert** (1999): *Overview: Model Risk*, in: *Journal of Financial Engineering*, Vol. 7, 1999, S. 267–288.
- Jacquier, Eric; Jarrow, Robert** (2000): *Contingent Claim Models with Deterministic Volatility: Model Error vs. Poor Estimation*, in: **Gibson, Rajna** (Hrsg.): *Model Risk*, London: Haymarket House, S. 35–64.
- Kairys, Joseph P. J.; Valerio, Nicholas I.** (1997): *The Market for Equity Options in the 1870s*, in: *Journal of Finance*, Vol. 52, 1997, Nr. 4, S. 1707–1723.
- Kremer, Joseph W.; Roenfeldt, Rodney L.** (1997): *Warrant Pricing: Jump-Diffusion vs. Black-Scholes*, in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, 1993, Nr. 2, S. 255–272.
- Merton, Robert C.** (1973): *Theory of Rational Option Pricing*, in: *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, 1973, Nr. 1, S. 141–183.
- Merton, Robert C.** (1976): *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, in: *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, 1976, S. 125–144.

- Merton**, Robert C. (1998): *Applications of Options-Pricing Theory: Twenty-Five Years Later*, in: American Economic Review, Vol. 88, 1998, Nr. 3, S. 323–349.
- Ofek**, Eli; **Richardson**, Matthew; **Whitelaw**, Robert F. (2004): *Limited arbitrage and short sales restrictions: evidence from the options markets*, in: Journal of Financial Economics, Vol. 74, 2004, S. 305–342.
- Pástor**, Ľuboš; **Stambaugh**, Robert F. (1999): *Costs of equity capital and model mispricing*, in: Journal of Finance, Vol. 54, 1999, Nr. 1, S. 67–121.
- Rubinstein**, Mark (1985): *Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 Through August 31, 1978*, in: Journal of Finance, Vol. 40, 1985, Nr. 2, S. 455–480.
- Vocke**, Carsten (2005): *Hedging with Multi-Factor Interest Rate Models*, Diss. St. Gallen.

Ich versichere, dass ich die beiliegende Diplomarbeit ohne Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mannheim, 21. Juli 2006 gez.