

Siebert, Horst

**Article — Digitized Version**

## Optimale Kapitalakkumulation und optimale intertemporale Ressourcennutzung: Eine Anmerkung

Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft

**Provided in Cooperation with:**

Kiel Institute for the World Economy – Leibniz Center for Research on Global Economic Challenges

*Suggested Citation:* Siebert, Horst (1979) : Optimale Kapitalakkumulation und optimale intertemporale Ressourcennutzung: Eine Anmerkung, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, ISSN 0044-2550, Mohr, Tübingen, Vol. 135, Iss. 4, pp. 679-682

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/3579>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*

## Kurzbeiträge

### Optimale Kapitalakkumulation und optimale intertemporale Ressourcennutzung

Eine Anmerkung

von

*Horst Siebert*  
Mannheim

Die im Rahmen der Kapital-<sup>1</sup> oder Wachstumstheorie<sup>2</sup> diskutierte Frage der optimalen Kapitalakkumulation in einer Volkswirtschaft und das in der Theorie natürlicher Ressourcen erörterte Problem einer optimalen intertemporalen Allokation entsprechen sich. Dieser Beitrag stellt sich zur Aufgabe, die Entsprechung beider Fragestellungen deutlich zu machen.

#### I

1. Bei der Frage nach der optimalen Kapitalakkumulation unterstellen wir im einfachsten Fall eine "cow-economy" (Meade), in der ein Gut zum Konsum ( $C$ ) oder zur Kapitalbildung ( $\dot{K}$ ) eingesetzt werden kann. Mit Hilfe des Kapitalstocks ( $K$ ) kann das Gut produziert werden, dessen Konsum die "Wohlfahrt" der Volkswirtschaft bestimmt. Die Nutzenströme zukünftiger Generationen werden mit der Diskontrate  $\delta$  abdiskontiert. Das Maximierungsproblem stellt sich wie folgt:

$$(1) \quad \omega = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} W_t(C_t) dt$$

u. d. B.

$$\dot{K}_t = F(K_t) - C_t.$$

Die Hamilton-Funktion des Problems 1 (in laufenden Werten) lautet

$$(2) \quad H = W(C_t) + p [F(K_t) - C_t].$$

Es ergeben sich die Optimalbedingungen

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \text{(i)} & \frac{\partial H}{\partial C} = 0: W' = p \\ \text{(ii)} & \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{K} = F(K_t) - C_t \end{array}$$

<sup>1</sup> Vgl. RAMSEY [1928].

<sup>2</sup> Vgl. PHELPS [1961].

$$(iii) \quad \dot{p} = p\delta - p \frac{dF}{dK}$$

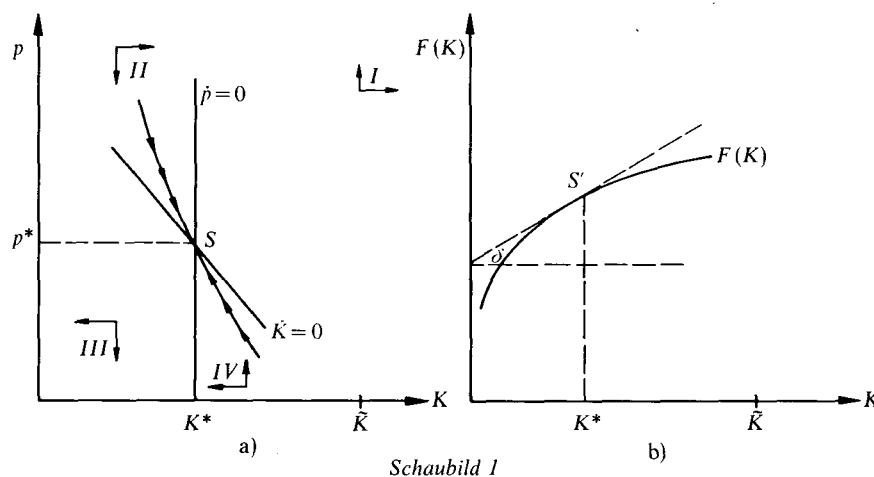
Der steady state ist definiert durch  $\dot{K}, \dot{p} = 0$ , d.h. es gilt  $F(K_t) = C_t$  und  $\delta = \partial F / \partial K$ . Im steady state wird das gesamte Volkseinkommen konsumiert, es findet also keine Nettokapitalbildung statt. Das intertemporale Allokationsoptimum wird erreicht, wenn die Grenzproduktivität des Kapitals (interner Zins, Grenzleistungsfähigkeit des Kapitals, Eigenzinssatz) der Diskontrate entspricht.

2. Graphisch ist das Resultat in Schaubild 1 dargestellt. Die  $\dot{p} = 0$ -Kurve in Schaubild 1a verläuft senkrecht; ihre Lage wird durch die Höhe der Diskontrate  $\delta$  bestimmt. Je höher  $\delta$ , um so mehr rückt die  $\dot{p} = 0$ -Kurve zum Ursprung. Rechts von der  $\dot{p} = 0$ -Kurve, d.h. für  $K > K^*$ , gilt  $(\partial F / \partial K)(K) < (\partial F / \partial K)(\bar{K}) = \delta$  und  $p$  steigt. Links von  $K^*$ , also für  $K < K^*$  muß  $p$  sinken.

Die  $\dot{K} = 0$ -Kurve in Schaubild 1a hat negative Steigung, da wegen 3i  $C = C(p)$  und aus  $F(K) = C(p)$  folgt

$$\frac{dp}{dK} = \frac{\frac{dF}{dK}}{\frac{dC}{dp}} < 0$$

und  $dC/dp = 1/W'' < 0$ , da  $W'' < 0$ <sup>3</sup>. Unterhalb der  $\dot{K} = 0$ -Kurve gilt für gegebenes  $K$   $F(K) < C(p)$ , da mit niedrigerem  $p$  der Konsum steigt, so daß  $\dot{K} < 0$ . Rechts der  $\dot{K} = 0$ -Kurve gilt  $\dot{K} > 0$ .



In Schaubild 1a kennzeichnet  $K^*$  den Kapitalbestand und  $p^*$  den Schattenpreis der Konsumgüter im steady-state. Die Felder I, II, III, IV kennzeichnen

<sup>3</sup> Die  $\dot{K} = 0$ -Kurve ist zur Vereinfachung linearisiert gezeichnet, obwohl  $d^2p/dC^2 \geq 0$ .

den Verlauf der Pontryagin-Pfade bei alternativen Konstellationen des Kapitalbestandes  $K$  und des Schattenpreises. Beispielsweise impliziert ein Schattenpreis  $p > p^*$  für  $K > K^*$  einen zu geringen Konsum und damit eine übermäßige Kapitalbildung. Die Volkswirtschaft entfernt sich vom steady state.

In Schaubild 1 b kennzeichnet  $S'$  den steady-state-Punkt. Die Diskontrate ist gleich der Grenzproduktivität des Kapitals ( $tg \alpha$ ). Wird die Diskontrate erhöht, d.h. stärker abdiskontiert, d.h. wird das Interesse zukünftiger Generationen geringer gewichtet, so wird der Kapitalstock reduziert.

## II

1. Das Problem der optimalen intertemporalen Ressourcenallokation hat die gleiche Struktur wie das Problem der optimalen intertemporalen Kapitalakkumulation. Betrachtet wird eine natürliche Ressource  $R$ , die sich in der Natur regeneriert (Fischbestände, Holz). Die Regeneration sei eine Funktion der Bestände, z.B. in der Form<sup>4</sup>

$$\dot{R}^N = F(R)$$

mit

$$\frac{dF}{dR} \geq 0; R \leq \bar{R}.$$

Kennzeichnet  $C_t$  die Entnahme aus der Natur, so lautet die Bewegungsgleichung des Systems

$$\dot{R}_t = F(R_t) - C_t.$$

Ferner wird unterstellt, daß die entnommene Ressource konsumiert (und nicht in einen Produktionsprozeß eingesetzt) wird. Das Maximierungsproblem lautet

$$(4) \quad \omega = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} W_t(C_t) dt$$

u.d.B.

$$\dot{R}_t = F(R_t) - C_t.$$

Das Maximierungsproblem 1 entspricht Problem 4. Es ist lediglich  $K$  durch  $R$  zu ersetzen. Dem Produktivitätseffekt des Kapitals in Problem 1 entspricht die Regeneration von natürlichen Ressourcen in Problem 4. Auch die Implikationen entsprechen sich.

2. Bei der Interpretation<sup>5</sup> der  $\dot{R}=0$ -Kurve ist zu beachten, daß diese Kurve wegen  $dF/dR < 0$  für  $R > \bar{R}$  positive Steigung haben kann. Aus  $\dot{p}=0$ :  $\delta = dF/dR$  folgt aber, daß für eine positive Diskontrate  $\delta > 0$  der steady state

<sup>4</sup> Vgl. PLOURDE [1970].

<sup>5</sup> Vgl. SIEBERT [1978], Kap. 8.

$dF/dR > 0$  impliziert, d.h.  $R < \bar{R}$ . Folglich ist für die relevante Lösung  $R < \bar{R}$  und damit  $dF/dR > 0$ . Das Schaubild 1 gilt also auch im Fall der regenerierbaren Ressourcen.  $\bar{R}$  entspricht einem  $\bar{K}$ , das die steady-state-Lösung nicht beeinflusst. Beispielsweise läßt sich in Schaubild 1b die Funktion  $F(K)$  als Regenerationsfunktion interpretieren.

3. Das Resultat ist nicht überraschend, da im Fall der regenerierbaren Ressourcen der Ressourcenbestand ein Kapitalgut ist, wobei die Eigenverzinsung in der Regeneration der Bestände liegt. Unterschiede zwischen den Problemen 1 und 4 ergeben sich erst dann, wenn die Regenerationsfunktion wesentlich von der Produktionsfunktion abweicht, wenn z.B. ein minimaler Ressourcenbestand  $R$  als Untergrenze definiert wird, bei dem die Ressource  $R$  ausgelöscht wird. In diesem Fall wird die  $\dot{R}=0$ -Kurve im  $p$ - $R$ -Schaubild eingeschränkt<sup>6</sup>. Läßt man die Regenerationsrate einer Ressource gegen Null gehen, so wird aus einer erneuerbaren eine nicht erneuerbare Ressource (Minerale), und die natürliche Ressource verliert die Produktivitätseigenschaft des Kapitalgutes. In diesem Fall gilt die Analogie des Maximierungsproblems 1 und 4 nicht mehr.

#### Literatur

- PHELPS, E.S. [1961], "The Golden Rule of Accumulation: A Fable for Growthmen", *American Economic Review* 51, 638–643.
- PLOURDE, C.G. [1970], "A Simple Model of Replenishable Resource Exploitation", *American Economic Review* 60, 518–522.
- RAMSEY, F.P. [1928], "A Mathematical Theory of Saving", *Economic Journal* 38, 543–559.
- SIEBERT, H. [1978], *Ökonomische Theorie der Umwelt*, Tübingen.
- SMITH, V.L. [1977], "Control Theory Applied to Natural and Environmental Resources. An Exposition", *Journal of Environmental Economics and Management* 4, 1–24.

Professor Dr. Horst Siebert  
 Universität Mannheim  
 Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre und Außenwirtschaft  
 D-6800 Mannheim  
 Bundesrepublik Deutschland

<sup>6</sup> Vgl. SMITH [1977].