

Basto Mercado, Luis Edgar

**Article**

## Estabilidad de expectativas cuando el Banco Central aprende de sus pronósticos autorreferenciados

Estudios de Economía

**Provided in Cooperation with:**

Department of Economics, University of Chile

*Suggested Citation:* Basto Mercado, Luis Edgar (2025) : Estabilidad de expectativas cuando el Banco Central aprende de sus pronósticos autorreferenciados, Estudios de Economía, ISSN 0718-5286, Universidad de Chile, Departamento de Economía, Santiago de Chile, Vol. 52, Iss. 1, pp. 97-132

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/315394>

**Standard-Nutzungsbedingungen:**

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

**Terms of use:**

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

## Estabilidad de expectativas cuando el Banco Central aprende de sus pronósticos autorreferenciados

*Expectations Stability when the Central Bank Learns from its Self-referenced Forecasts*

LUIS EDGAR BASTO MERCADO\*

### Resumen

*En la literatura de aprendizaje adaptativo se ha argumentado que la intensidad de la respuesta de la tasa de interés de un banco central (BC) a la inflación esperada debe ser más que proporcional. Este artículo tranquiliza en alguna medida al BC ya que muestra que, si este aprende de una forma más sofisticada que con aprendizaje adaptativo, la respuesta de política no tiene que ser tan fuerte. Y en especial, propone un aprendizaje autorreferenciado para el BC donde este tiene en cuenta que sus propias expectativas afectan a la misma inflación. Esto es bastante realista porque los BC dedican recursos en la generación de expectativas de las variables económicas.*

Palabras clave: *Aprendizaje adaptativo; estabilidad de expectativas; principio de Taylor; aprendizaje autorreferenciado.*

Clasificación JEL: *E52, D84.*

---

\* Docente ocasional de la Universidad Nacional de Colombia. Este artículo hace parte de mi tesis de Doctorado en la Universidad de los Andes. Agradezco la valiosa asesoría de Julián Andrés Parra Polanía y a las útiles recomendaciones de los revisores anónimos. Este documento fue financiado por la Universidad Sergio Arboleda. Los posibles errores del artículo son de mi responsabilidad exclusivamente.  
E-mail: le.basto21@uniandes.edu.co

## Abstract

*In adaptive learning literature it has been argued that the intensity of a Central Bank's (CB) interest rate response to expected inflation must be more than proportional. This article provides reassurance to the CB to some extent, showing that if it learns in a more sophisticated way than with adaptive learning, the policy response does not have to be as strong. Particularly, it proposes self-referenced learning for the CB to consider that its own expectations affect inflation itself. This is highly realistic because CBs dedicate resources to generating expectations for economic variables.*

**Key words:** *Adaptive learning, expectational stability, Taylor principle, self-referenced learning.*

**JEL Classification:** *E52, D84.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En los diversos estudios sobre aprendizaje econométrico o adaptativo en modelos macroeconómicos, se analiza si los agentes que realizan regresiones econométricas aprenden, al pasar el tiempo, el valor de los parámetros del equilibrio de expectativas racionales (REE). Para ello, recurren al concepto de estabilidad de expectativas (E-S) según el cual la creencia sobre el REE que tienen los agentes que hacen regresiones período a período, converge en el tiempo al equilibrio REE<sup>1</sup>.

Para el caso concreto del análisis de la política monetaria en un Modelo Nuevo Keynesiano estándar con aprendizaje econométrico, Bullard and Mitra (2002) encontraron que para la E-S es fundamental cómo forman sus expectativas tanto el banco central (BC) como los agentes privados. Mostraron que, si ambos agentes tienen expectativas de aprendizaje econométrico estándar (SAL)<sup>2</sup>, la condición de E-S equivale al Principio de Taylor (PT): el BC debe

---

<sup>1</sup> Ver, por ejemplo, Evans and Honkapohja (2001, 2003, 2008 y 2009) y Gaspar et al. (2006b).

<sup>2</sup> Es un aprendizaje que requiere dos condiciones. La primera, es que sea de mínimas variables de estado (MSV), es decir, cuando la ley de movimiento percibida por el agente (PLM), o su creencia sobre las variables determinantes de su variable de interés, tiene las mismas variables y la misma forma que el REE. Y la segunda condición, es que emplee mínimos cuadrados recursivos (RLS). En el Anexo 3 se presenta de manera simplificada cómo opera el SAL. Para una explicación detallada de las propiedades de este aprendizaje, ver Evans and Honkapohja (2001).

ajustar la tasa de interés nominal más que proporcionalmente a cambios en la inflación con respecto a su meta<sup>3</sup>.

A su vez, Honkapohja and Mitra (2005) encontraron que, si los agentes tienen expectativas heterogéneas de aprendizaje independientes, se rompe la equivalencia entre E-S y el PT. Y al mismo resultado llegó Muto (2011) pero suponiendo expectativas heterogéneas de aprendizaje dependientes, encontrando que el BC debe reaccionar con la tasa de interés el doble que lo que implica el PT. Ambos artículos resaltan a la heterogeneidad de expectativas como la característica que genera una mayor reacción del BC a las expectativas de inflación de los privados.

Sin embargo, en este artículo se presenta una alternativa: suponer que el BC, o los privados o ambos, elaboran sus expectativas de una manera más sofisticada que SAL. Empleando este supuesto, se llega al resultado más importante de este artículo: la reacción del BC a la inflación no tiene que ser tan fuerte, tanto en el caso de expectativas homogéneas que presentan Bullard and Mitra (2002) como en el caso de heterogéneas dependientes expuesto por Muto (2011). Para obtener este resultado, en este artículo se propone un aprendizaje más sofisticado que SAL, donde los agentes tienen en cuenta que sus expectativas afectan a la misma variable de interés, en este caso la inflación, el cual se denomina aprendizaje autorreferenciado (SRL).

Así, este artículo se divide en cinco secciones incluida esta introducción. En la sección 2 se presenta el modelo Nuevo Keynesiano estándar reducido con su equilibrio de expectativas racionales, que es el punto de referencia de este artículo. En la sección 3 se presentan tres casos analizados en la literatura de aprendizaje adaptativo. El primero es cuando el Banco central y los privados tienen el mismo SAL expuesto por Bullard and Mitra (2002). El segundo, cuando cada uno de estos agentes tiene un mecanismo diferente de aprendizaje adaptativo, presentado por Honkapohja and Mitra (2005). Y el tercer caso, cuando los agentes privados aprenden de los pronósticos del BC y éste emplea SAL, propuesto por Muto (2011). En la sección 4, se propone el SRL y se aplica tanto al modelo de Bullard and Mitra (2002) como al de Muto (2011), encontrando que en ambos casos se relajan las E-S y luego se presentan dos implicaciones de política que resultan del SRL. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones y la agenda de investigación.

En el cuadro 1 se resumen los casos y las condiciones de E-S de cada uno de ellos y que se contrastarán durante todo este artículo:

<sup>3</sup> Ver Bullard and Mitra (2002), pág. 1008 y 1116.

CUADRO 1  
CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE EXPECTATIVAS SEGÚN EL TIPO  
DE APRENDIZAJE DE CADA AGENTE

| BANCO CENTRAL | AGENTES PRIVADOS | PROPUESTO EN                | CONDICIONES DE E-S                    |
|---------------|------------------|-----------------------------|---------------------------------------|
| SAL           | SAL              | Bullard and Mitra (2002)    | PT                                    |
| CGL           | CGL              | Honkapohja and Mitra (2005) | PT es necesario pero no es suficiente |
| SAL           | LBF              | Muto (2011)                 | Doble que el PT                       |
| SRL           | SRL              | Este artículo, sección 4.1  | Menos que el PT                       |
| SRL           | LBSR             | Este artículo, sección 4.2  | Más que el PT pero menos que 2PT      |

RE: Expectativas Racionales. SAL: Aprendizaje Econométrico Estándar. CGL: Aprendizaje de Ganancia Constante. LBF: Aprendizaje de los pronósticos del Banco. SRL: Aprendizaje Autorreferenciado. E-S: Estabilidad de expectativas. PT: Principio de Taylor.

2. MODELO BASE

El modelo que sirve de punto de referencia es el Nuevo Keynesiano básico usado por Bullard and Mitra (2002). Está basado en Clarida, Galí and Gertler (1999), Galí (2008) y Walsh (2010). Es un modelo de equilibrio general cuya versión log-linealizada alrededor de una inflación de cero en estado estacionario, se resume en cuatro ecuaciones.

La primera de ellas recoge el comportamiento optimizador de los hogares. Es la curva IS con expectativas:

(1) 
$$x_t = x_{t+1}^{eP} - \sigma \left( r_t - r_t^n - \pi_{t+1}^{eP} \right)$$

Cada variable está definida como la desviación porcentual de su estado estacionario. Siguiendo la notación de Muto (2011),  $x_t$  representa la brecha del producto,  $\pi_t$  es la tasa de inflación,  $r_t$  es la desviación de la tasa de interés nominal de su nivel de estado estacionario consistente con inflación cero y con el respectivo crecimiento del producto,  $r_t^n$  es la tasa natural de interés real,  $x_{t+1}^{eP}$  representa la expectativa de los agentes privados con respecto a la brecha del producto y  $\pi_{t+1}^{eP}$  es la respectiva expectativa de la diferencia entre la infla-

ción y su valor de cero en estado estacionario<sup>4</sup>. Por su parte,  $\sigma > 0$  se refiere al inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal del agente representativo.

La segunda ecuación representa el proceso autorregresivo y estacionario de la tasa natural de interés real<sup>5</sup>:

$$(2) \quad r_t^n = \rho r_{t-1}^n + \varepsilon_t$$

Donde  $0 < \rho < 1$  y el choque  $\varepsilon_t$  se supone ruido blanco. Ahora bien, la tercera ecuación reúne el comportamiento optimizador de las empresas. Es la curva de Phillips con expectativas:

$$(3) \quad \pi_t = \beta \pi_{t+1}^{eP} + \kappa x_t$$

Aquí  $0 < \beta < 1$  se refiere al factor de descuento de los hogares y  $\kappa > 0$  es el grado de rigidez de los precios. A su vez, la cuarta ecuación reúne el comportamiento del Banco central. Es la regla monetaria tipo Taylor<sup>6</sup>:

$$(4) \quad r_t = \phi_\pi \pi_{t+1}^{eB} + \phi_x x_{t+1}^{eB}$$

El coeficiente  $\phi_\pi > 0$  representa la sensibilidad a la inflación,  $\phi_x > 0$  representa la sensibilidad a la brecha del producto y  $\pi_{t+1}^{eB}$  y  $x_{t+1}^{eB}$  representan las expectativas del BC con respecto a la inflación y a la brecha del producto, respectivamente. Para simplificar el análisis, Muto (2011) supone que el Banco central puede observar las expectativas de la brecha del producto futuro de los privados:

$$(5) \quad x_{t+1}^{eB} = x_{t+1}^{eP}$$

Además, Muto (2011) supone que el BC compensa completamente las variaciones de las expectativas de la brecha del producto futuro por parte de los privados:

$$(6) \quad \phi_x = \frac{1}{\sigma}$$

<sup>4</sup> Si la inflación de estado estacionario es diferente de cero, Ascari et al. (2017) y Kobayashi and Muto (2013) analizan cómo cambian las condiciones de estabilidad de expectativas.

<sup>5</sup> Bullard and Mitra (2002), pág. 1110 la definen con este proceso autorregresivo.

<sup>6</sup> Ver Bullard and Mitra (2002), pág. 1106. Los autores analizan cuatro tipos de reglas monetarias, en este caso, la ecuación (4) corresponde a la regla que ellos denominan con expectativas hacia adelante, pág. 1112 y 1121.

Evans and Honkapohja (2003) encuentran que estas restricciones son una respuesta apropiada del BC a las expectativas de la brecha del producto por parte de los agentes privados. Además, los supuestos (5) y (6) permiten concentrarse en el análisis de la influencia de las expectativas de inflación del BC sobre las respectivas expectativas de inflación de los privados<sup>7</sup>.

## 2.1 Dinámica de la Inflación

Si se reemplazan (5) y (6) en la Regla de Taylor (4), luego en (1) y el resultado en (2), se obtiene la forma reducida de la dinámica de la inflación o Ley de Movimiento (LoM):

$$(7) \quad \pi_t = \bar{A} + \bar{B}\pi_{t+1}^{eP} + \bar{C}\pi_{t+1}^{eB} + \bar{D}r_t^n$$

Con:  $\bar{A} = 0$ ;  $\bar{B} = \kappa\sigma + \beta > 0$ ;  $\bar{C} = -\kappa\sigma\phi_\pi < 0$ ;  $\bar{D} = \kappa\sigma > 0$ . Honkapohja and Mitra (2005, 2006) resaltan cómo los pronósticos de los agentes privados tienen un efecto desestabilizador ( $\bar{B} > 0$ ), ya que una mayor inflación esperada tenderá a aumentar la inflación, mientras que el respectivo pronóstico del Banco central tiene un efecto estabilizador ( $\bar{C} < 0$ ).

Los supuestos que se empleen para la formación de expectativas por parte de los agentes privados y del BC son fundamentales para obtener la dinámica de la inflación. A continuación, se presenta el equilibrio suponiendo que estos dos agentes tienen expectativas racionales. Este constituye el punto de referencia de este documento.

## 2.2 Solución Si Ambos Agentes Tienen Expectativas Racionales (RE)

Como se muestra en el anexo 1, si tanto el BC como los agentes privados tienen expectativas racionales (RE), es decir, si  $\pi_{t+1}^{eP} = \pi_{t+1}^{eB} = E_t\pi_{t+1}$ , el equilibrio de expectativas racionales (REE) para la inflación es:

$$(8a) \quad \pi_t = \frac{\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \frac{\bar{D}}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} r_t^n$$

$$(8b) \quad \pi_t = \bar{a} + \bar{b}r_t^n$$

Con:  $\bar{a} = 0$ ;  $\bar{b} = \frac{\kappa\sigma}{1 - \rho(\beta + \kappa\sigma(1 - \phi_\pi))}$ . Con base en (8b) ambos agentes pueden calcular su respectiva RE como:

<sup>7</sup> Para Muto (2011) esta influencia es importante en países con esquemas de inflación objetivo puesto que los privados tienden a prestarle atención a los pronósticos que realiza y publica el banco central. Ascari et al (2017) analizan las condiciones de estabilidad cuando éste tiene una regla de inflación objetivo en vez de una regla tipo Taylor.

$$(9a) \quad E_t^P \pi_{t+1} = E_t^B \pi_{t+1} = \frac{\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \frac{\bar{D}}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} \rho r_t^n$$

$$(9b) \quad E_t^P \pi_{t+1} = E_t^B \pi_{t+1} = \bar{a} + \bar{b} \rho r_t^n$$

Estas RE serán el punto de referencia en los modelos de aprendizaje adaptativo que presentaremos en el resto de este artículo. Para Evans and Honkapohja (2001) es importante relajar el supuesto de RE ya que éste es muy fuerte porque les exige a los agentes que tengan mucho conocimiento de la economía. En particular requiere que éstos conozcan la estructura del modelo con sus variables relevantes y los valores de todos los parámetros.

### 3. ESTABILIDAD DE EXPECTATIVAS SI LOS AGENTES TIENEN APRENDIZAJE ECONÓMETRICO

Por la limitación anterior, la literatura macroeconómica ha relajado el supuesto de RE con diversas alternativas. Una de ellas es el aprendizaje econométrico<sup>8</sup>, donde los agentes no conocen los parámetros del modelo y por tanto se comportan como econométristas: se forman una idea sobre el modelo económico, estiman los parámetros para pronosticar las variables y ajustan sus pronósticos cuando la nueva información está disponible.

A continuación, se presentan los principales resultados en términos de estabilidad de expectativas (E-S) de tres casos con este aprendizaje que ha analizado la literatura previa. El primero, cuando ambos agentes tienen aprendizaje econométrico estándar (SAL) presentado por Bullard and Mitra (2002); el segundo, cuando cada agente tiene un aprendizaje diferente e independiente del otro (Honkapohja and Mitra, 2005); y el tercer caso, cuando el BC tiene SAL y los privados aprenden estos pronósticos del BC (se denominará LBF), propuesto por Muto (2011). Esto con el fin de modificar, en la sección 4, el SAL en esos casos por uno más sofisticado, por el aprendizaje autorreferenciado (SRL), y ver si las condiciones de E-S se relajan y le exigen una reacción menos fuerte al BC con respecto a los anteriores casos.

#### 3.1 Estabilidad De Expectativas Cuando Ambos Agentes Tienen Aprendizaje Econométrico Estándar (SAL)

Si se supone que tanto el banco central como los agentes privados tienen SAL y si se cumple la condición (6), entonces la ley de movimiento (LoM) viene dada por (7) y la ley de movimiento percibida (PLM), es decir, su creencia

<sup>8</sup> Para una revisión sobre aprendizaje econométrico o adaptativo ver Evans and Honkapohja (2001, 2008, 2009).

sobre las variables determinantes de su variable de interés, para los dos agentes viene dada por<sup>9</sup>:

$$(10) \quad \pi_t = a + br_t^n$$

Esta PLM tiene la misma forma que el REE (8b), pero desconocen los parámetros  $a$  y  $b$ . Siguiendo la convención estándar de la literatura de aprendizaje adaptativo, supondremos que tanto el banco como los privados realizan la siguiente regresión por mínimos cuadrados al inicio<sup>10</sup> del período  $t$ :

$$(11) \quad \pi_{t-1} = a_{t-1} + b_{t-1}r_{t-1}^n + \hat{\epsilon}_{t-1}$$

Donde  $\hat{\epsilon}_{t-1}$  son los residuales estimados en tal regresión. Con base en las estimaciones de  $a$  y  $b$  usando información hasta  $t-1$ , es decir  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$ , ambos agentes generan su expectativa de la inflación como<sup>11</sup>:

$$(12) \quad \hat{E}_t^P \pi_{t+1} = \hat{E}_t^B \pi_{t+1} = \hat{E}_t \pi_{t+1} = a_{t-1} + b_{t-1}\rho r_t^n$$

Reemplazando (12) en (7) se obtiene la ley de movimiento real (ALM) de la inflación:

$$(13) \quad \pi_t = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C})a_{t-1} + \left[ \bar{D} + (\bar{B} + \bar{C})\rho b_{t-1} \right] r_t^n$$

Empleando el mapeo (T-map) de la PLM a la ALM y su ecuación diferencial ordinaria (ODE) asociada, Muto (2011) encuentra las siguientes condiciones para que haya estabilidad de expectativas<sup>12</sup>:

<sup>9</sup> Cuando la PLM tiene las mismas variables y la misma forma que el REE, se le denomina aprendizaje de mínimas variables de estado (MSV). Si adicionalmente, este aprendizaje se realiza con mínimos cuadrados recursivos (RLS) se le llama aprendizaje adaptativo estándar (SAL). En el Anexo 3 se presenta de manera simplificada cómo opera el SAL. Ver Evans and Honkapohja (2001) para las propiedades de este aprendizaje.

<sup>10</sup> En la literatura de aprendizaje adaptativo es estándar suponer que al inicio del período  $t$  no se conoce  $\pi_t$ , porque aún no se ha generado la expectativa  $\hat{E}_t \pi_{t+1}$ . Por tanto, el conjunto de información va hasta  $t-1$ . Se puede cambiar este supuesto, pero para Evans and Honkapohja (2001) se añadiría complejidad técnica en el análisis sin modificar los resultados generales de convergencia del aprendizaje.

<sup>11</sup> Siguiendo la notación de aprendizaje econométrico, se denotará cada coeficiente estimado con información hasta  $t-1$  como:  $\hat{a}_{|t-1} \equiv a_{t-1}$  y  $\hat{b}_{|t-1} \equiv b_{t-1}$ , respectivamente y  $\hat{E}_t \pi_{t+1}$  es la expectativa de la inflación condicional con información hasta  $t$  generada con SAL y con estos coeficientes estimados. Además, usando los supuestos estándar de esta literatura, se supondrá que los agentes conocen  $\rho$ .

<sup>12</sup> Ver Muto (2011) pág. 54-55. El proceso que emplea el T-map y la ODE para llegar a las condiciones de E-S en un modelo con SAL se presenta en este artículo en el anexo 3.

$$(14a) \quad \phi_{\pi} > 1 + \frac{\beta - 1}{\kappa \sigma}$$

$$(14b) \quad \phi_{\pi} > 1 + \rho \left( \frac{\beta - 1}{\kappa \sigma} \right)$$

Como  $0 < \rho < 1$  se tiene que (14b) se cumple si (14a) se cumple, por tanto, la condición necesaria y suficiente para que haya E-S del REE está dada por (14a). Esta condición no depende del coeficiente asociado a la expectativa del Banco central  $\bar{C}$ . En el caso más general de Bullard and Mitra (2002), donde no se impone la restricción (6), se tiene que la condición resultante es la versión general del principio de Taylor:

$$(14a') \quad \phi_{\pi} > 1 + \left( \frac{\beta - 1}{\kappa} \right) \phi_x$$

Estos autores muestran que tal principio resulta siendo una condición para que haya E-S con varios tipos de reglas monetarias, no sólo para la regla con expectativas hacia delante (4) que es la que se usará en todo este artículo.

### 3.2 Estabilidad de Expectativas Cuando Cada Agente Tiene Un Aprendizaje Econométrico Diferente E Independiente

Honkapohja and Mitra (2005) extienden el análisis de Bullard and Mitra (2002) al introducir distintos mecanismos de formación de expectativas de aprendizaje heterogéneos e independientes entre el banco central y los Agentes Privados. Ellos muestran en general que el Principio de Taylor, ecuación (14a') sigue siendo la condición necesaria y suficiente para la E-S, siempre que los mecanismos que empleen ambos agentes converjan en el tiempo a una misma distribución<sup>13</sup>.

Sin embargo, si tales mecanismos convergen a diferentes distribuciones Honkapohja and Mitra (2005) encuentran que tal Principio de Taylor es necesario, pero no suficiente para garantizar la estabilidad de expectativas<sup>14</sup>. Por tanto, ellos resaltan que la heterogeneidad en los mecanismos de aprendizaje entre el Banco y los Privados es crucial para determinar las condiciones de E-S. Por su parte, Muto (2011) usó heterogeneidad en tales aprendizajes, pero introduciendo dependencia entre ellos y encontró cómo cambian las condiciones de E-S, las cuales son presentadas en la siguiente subsección.

<sup>13</sup> Para llegar a este resultado, Honkapohja and Mitra (2005) usan algoritmos de Ganancia Constante con diferente valor para la ganancia.

<sup>14</sup> Estos autores encuentran tal resultado usando un algoritmo de Ganancia Constante para un agente y para el otro el de Mínimos Cuadrados (este último es el que emplearemos en todo este artículo). Y encuentran que además del principio de Taylor, se requieren que se cumplan ciertas condiciones sobre la autocorrelación de los choques y su varianza.

### 3.3 Estabilidad de Expectativas Cuando Los Privados Aprenden de Los Pronósticos del Banco Central y Este Tiene Aprendizaje Econométrico (LBF)

Muto (2011) propuso un modelo donde supone que el banco central anuncia su expectativa de inflación<sup>15</sup> y los agentes privados aprenden tales pronósticos del BC, usándolo para generar su propio pronóstico (este aprendizaje se denotará aquí como LBF). Este autor considera bastante realista ese supuesto ya que actualmente muchos bancos centrales publican pronósticos de distintas variables económicas agregadas, en especial si ellos tienen esquemas de inflación objetivo<sup>16</sup>.

Con el fin de hacer una modificación al aprendizaje LBF en la subsección 4.2 de este artículo, conservaremos los siguientes supuestos adicionales que emplea Muto (2011). Primero, él supone que el BC puede observar la tasa natural de interés, pero no los privados, bien sea porque les resulta muy costoso o difícil de conseguir esta información, mientras que el BC puede usar muchos recursos internos de investigación para observarla. Muto (2011) resalta que es precisamente esta asimetría de información la que genera incentivos para que los privados usen los pronósticos del BC en su proceso de aprendizaje. El segundo supuesto consiste en que el banco central anuncia primero su pronóstico (líder) y luego los agentes lo observan y con base en este obtienen su expectativa (seguidor)<sup>17</sup>. Y el tercero, Muto (2011) supone que los agentes privados usan el pronóstico del BC dependiendo de cómo ha sido su desempeño histórico.

De esta manera, si el BC tiene SAL, su PLM viene dada por (10), su regresión en cada período es de la forma (11) y su expectativa sigue siendo (12). Después de calcularla, éste la anuncia a los agentes privados. Estos a su vez, determinan cómo utilizar tal pronóstico  $\hat{E}_t^B \pi_{t+1}$  para formar su propia expectativa, evaluando el desempeño histórico que ha tenido. Siguiendo a Muto (2011) la PLM de los agentes privados sería ahora:

<sup>15</sup> Este anuncio puede ser por estrategia óptima del banco central o por algún requerimiento institucional que le exige publicar el pronóstico para mantener la transparencia de la política monetaria. Como en Muto (2011), en este artículo no se hará la discusión sobre cuál caso es, ni las implicaciones que pueda tener para la Estabilidad de las Expectativas. Para una presentación de anuncios óptimos ver por ejemplo Evans and Honkapohja (2003, 2009), Gómez y Parra-Polanía (2011) y Parra-Polanía (2012).

<sup>16</sup> Ver Muto (2011) pág 55.

<sup>17</sup> Existen varios estudios empíricos que soportan el uso de este supuesto, tal es el caso de Fujiwara (2005) que encuentra evidencia empleando datos de Japón. Hubert (2015a) también lo deduce con datos de Suecia, Reino Unido, Canadá y Suiza. Hubert (2014 y 2015b) llega a un resultado similar empleando datos de Estados Unidos al igual que lo encuentran Bordalo et al. (2020) con las predicciones de consenso. Hubert (2015c) encuentra que los pronósticos del Banco Central Europeo son influyentes en las expectativas de los privados. Pedersen (2015) obtiene resultados similares para datos de Chile.

$$(15) \quad \pi_t = c + d\hat{E}_{t-1}^B \pi_t$$

Con  $c$  y  $d$  desconocidos. Entonces los agentes privados realizan la siguiente regresión por mínimos cuadrados al inicio del período  $t$ :

$$(16) \quad \pi_{t-1} = c_{t-1} + d_{t-1}\hat{E}_{t-2}^B \pi_{t-1} + \hat{\xi}_{t-1}$$

Donde  $\hat{\xi}_{t-1}$  son los residuales estimados en tal regresión. De esta forma, si el pronóstico del banco central se ha desempeñado históricamente bien, el intercepto  $c_{t-1}$  se aproximará a 0 y la pendiente  $d_{t-1}$  deberá estar cerca de 1. En el caso contrario, si tal pronóstico se ha desempeñado mal,  $c_{t-1}$  se aproximará a la media muestral de la inflación y  $d_{t-1}$  deberá estar cerca de 0. Con base en las estimaciones  $c_{t-1}$  y  $d_{t-1}$ , los privados generan su expectativa de la inflación usando el pronóstico anunciado por el banco central (LBF):

$$(17) \quad \hat{E}_t^P \pi_{t+1} = c_{t-1} + d_{t-1}\hat{E}_t^B \pi_{t+1}$$

Esta forma de calcular la expectativa de los privados muestra de qué manera está influenciada por el pronóstico del BC y su impacto está medido por  $d_{t-1}$  y en últimas refleja qué tanta importancia le están dando ellos a  $\hat{E}_{t-1}^B \pi_t$ . Comparando (17) con (12) se puede ver cómo en LBF los agentes privados requieren menos conocimiento de la economía, sólo les basta conocer los valores históricos de las expectativas del banco central y de las inflaciones período a período. Reemplazando (12) y (17) en (7) se obtiene la ALM de la inflación:

$$(18) \quad \pi_t = \bar{A} + \bar{B}(c_{t-1} + d_{t-1}a_{t-1}) + \bar{C}a_{t-1} + \left(\bar{D} + \rho(\bar{B}d_{t-1} + \bar{C})b_{t-1}\right)r_t^n$$

Debido a que la PLM de los agentes privados no es de la forma de mínimas variables de estado (MSV) como sí lo era en (10), Muto (2011) deriva los T-maps de las condiciones de ortogonalidad relevantes y de la ALM “proyectada” de los privados, como lo propone Branch (2004). Y encuentra que el equilibrio es el mismo REE, ecuación (8b). Luego, al igual que en el modelo de la subsección 3.1, con LBF los agentes privados igualan su pronóstico al del BC en el equilibrio, aún si ellos no siguen perfectamente ese pronóstico durante la transición. Es decir, en el equilibrio se cumple que:  $\hat{E}_t^P \pi_{t+1} = \hat{E}_t^B \pi_{t+1}$ . Sin embargo, Muto (2011) encuentra que las condiciones de E-S cambian con respecto al modelo de la subsección 3.1, porque ahora son<sup>18</sup>:

<sup>18</sup> Ver Muto (2011) pág. 56-57. El proceso que emplea el T-map, las condiciones de ortogonalidad relevantes y la ALM “proyectada” para llegar a las condiciones de E-S en un modelo con LBF se presenta en este artículo en el anexo 5.

$$(19a) \quad \phi_{\pi} > 2 \left( 1 + \frac{\beta - 1}{\kappa \sigma} \right)$$

$$(19b) \quad \phi_{\pi} > 1 + \frac{\beta - 1}{\kappa \sigma}$$

Como lo resalta Muto (2011), si  $\kappa \sigma > 1 - \beta$  entonces si se cumple la condición (19a) implica que se cumple la ecuación (19b), es decir, el principio de Taylor. Por tanto, tal principio dejaría de ser la condición suficiente para que haya E-S y lo sería (19a), donde el banco debe ajustar la tasa nominal de interés más del doble al aumento de la inflación esperada por el banco.

De esta manera, si hay LBF el banco debe responder a la inflación esperada más fuertemente que lo que sugiere el principio de Taylor que, como se presentó en la subsección 3.1, es la condición necesaria y suficiente de estabilidad de expectativas en el modelo de Bullard and Mitra (2002). Y a su vez, es la condición necesaria en el modelo de Honkapohja and Mitra (2005), presentado en este artículo en la subsección 3.2.

Muto (2011) justifica este resultado indicando que en LBF al aprender los agentes privados de los pronósticos del BC, estos tienen dos fuentes de errores de pronóstico. La primera, es por los errores que le transmite el BC en su pronóstico al estimar los coeficientes en sus regresiones período a período, y son errores que se los transmite a los privados uno a uno en el largo plazo. Y la segunda fuente es por los propios errores que cometen los privados en su pronóstico al estimar los coeficientes de sus propias regresiones que realizan cada período y empleando en ellas como variable regresora los pronósticos que anuncia el banco Central<sup>19</sup>.

Por tanto, si los errores de pronóstico de los agentes privados exceden a los del BC se puede generar una dinámica inestable de la inflación porque, como se mencionó en la subsección 2.1, los errores de los privados tienen un efecto desestabilizador mientras que los del BC generan un efecto estabilizador. En esta situación, el BC debe reaccionar fuertemente a su pronóstico para fortalecer su efecto. Esta es la razón por la cual Muto (2011) justifica el resultado de la insuficiencia del principio de Taylor para garantizar la estabilidad de las expectativas.

<sup>19</sup> Ver Muto pág 58.

#### 4. ESTABILIDAD DE EXPECTATIVAS BAJO APRENDIZAJE AUTORREFERENCIADO (SRL)

En la subsección 3.1 se presentó el caso donde el banco central y los privados tienen expectativas homogéneas y emplean SAL. El principal resultado es que la condición para que haya estabilidad de expectativas es que se cumpla el principio de Taylor. Por su parte, en la subsección 3.2 se presentó la situación cuando ambos agentes tienen expectativas heterogéneas e independientes, resultando que es necesario que se cumpla el principio de Taylor pero ya no es suficiente para que haya E-S. Mientras que en la subsección 3.3 se expuso el caso cuando ambos agentes tienen expectativas heterogéneas pero dependientes, en el sentido que el BC tiene SAL y los privados aprenden de ese pronóstico que anuncia el BC. El principal resultado es que la condición para que haya estabilidad de expectativas es que se cumpla el doble del principio de Taylor. Estos dos últimos casos resaltan a la heterogeneidad de expectativas como la característica que genera una mayor reacción del BC a las expectativas de inflación de los privados. Sin embargo, en esta sección se presenta una alternativa: suponer que el BC, o los agentes privados o ambos, elaboran sus expectativas de una manera más sofisticada que SAL, independiente que las expectativas sean homogéneas o heterogéneas y dependientes.

Para tal fin, en la subsección 4.1 se les impondrá tanto al BC como a los privados que realicen un pronóstico más sofisticado con respecto al que ellos hacían con aprendizaje adaptativo estándar en el modelo de Bullard and Mitra (2002). Este aprendizaje más sofisticado que SAL se denominará aprendizaje autorreferenciado (SRL), donde los agentes tienen en cuenta que sus expectativas afectan a la misma variable de interés, en este caso la inflación. Por su parte, en la subsección 4.2 sólo se le impondrá al BC que realice su pronóstico con SRL, dejando a los privados que sigan aprendiendo de los pronósticos del banco central, como en el aprendizaje LBF propuesto por Muto (2011) y se denominará aprendizaje de los pronósticos autorreferenciados del Banco central (LBSR).

Con el fin de fortalecer los resultados que se encuentran en estas dos subsecciones, en la subsección 4.3 se le impondrá a alguno de los agentes que tenga RE, ya que es un aprendizaje más sofisticado que SRL, se encontrarán las condiciones de E-S y se comprobará que en la medida que el aprendizaje sea más sofisticado, tales condiciones implican una reacción menos fuerte para el BC. Finalmente, en la subsección 4.4 se presentan dos recomendaciones de política que pueden desprenderse del aprendizaje autorreferenciado<sup>20</sup>.

<sup>20</sup> Se deja como investigación futura la aplicación de SRL a otros mecanismos de aprendizaje mencionados en la subsección 3.2 ya que SAL es el más empleado en la literatura, como lo mencionan Honkapohja and Mitra (2006).

#### 4.1 Estabilidad Cuando Ambos Agentes Tienen Aprendizaje Autorreferenciado (SRL)

En esta subsección se introducirá un aprendizaje más sofisticado que SAL en el caso de Bullard and Mitra (2002), presentado aquí en la subsección 3.1, para intentar reducir el error de pronóstico que cometen ambos agentes y analizar si de esta forma se relajan las condiciones de E-S.

Cuando los dos agentes tenían SAL, ambos agentes estaban cometiendo un error: estimaban por mínimos cuadrados ordinarios (OLS) un modelo mal especificado, ya que no tenían en cuenta que sus pronósticos sobre la variable endógena (inflación) la afectan a ella misma, como se ve en la LoM (7). Este error ocurre porque el SAL supone que los dos agentes conocen la forma funcional del REE y las variables exógenas que afectan a la inflación, pero desconocen la dinámica de la inflación o LoM; para Evans and Honkapohja (2001) tal error de especificación se desvanece en el tiempo. Sin embargo, Ferrero (2007) encuentra que dependiendo del rango de valores que tomen los parámetros de la regla monetaria, con SAL la velocidad de convergencia hacia el REE puede ser muy lenta, haciendo que los errores de pronóstico perduren mucho tiempo y por tanto, la reacción del BC deba ser muy fuerte. Por todo lo anterior, tener en cuenta la LoM es muy importante para pronosticar la inflación y es la base del SRL.

De esta manera, en esta subsección supondremos que ambos agentes, además de conocer la forma funcional del REE, tienen en cuenta que sus pronósticos sobre la inflación la afectan a ella misma y conocen la forma funcional de la LoM (7). Esta es la razón por la que denominaremos a este aprendizaje como Autorreferenciado (SRL). En la literatura de aprendizaje, Milani (2005) empleó una metodología empírica que reconocía esta auto-referencia con el fin de estimar los parámetros estructurales de su modelo. A diferencia de este autor, aquí emplearemos la auto-referencia incorporándola en la teoría del aprendizaje econométrico<sup>21</sup>. Suponemos que desde el período  $t$  en adelante ambos agentes conocen la forma funcional de la LoM, entonces su PLM no será más como (10) sino que ahora su creencia de la LoM, la cual denominaremos PLM2 en  $t$ , es:

$$(20) \quad \pi_t = A + F \hat{E}_t \pi_{t+1} + D r_t^n$$

Donde  $\hat{E}_t \pi_{t+1}$  se define como la expectativa que se obtiene con aprendizaje autorreferenciado y con  $A$ ,  $F$  y  $D$  desconocidos. Como los privados y el BC tienen la misma expectativa, se tiene que  $F \equiv B + C$  en la ley de movimiento inicial (7). Por tanto, si su PLM2 es de la forma (20) tanto el banco como los

<sup>21</sup> Existen algunas implicaciones empíricas adicionales a las que Milani (2005) presenta y serán comentadas en la sección 4.4.

privados realizan la siguiente regresión<sup>22</sup> por mínimos cuadrados al inicio del período  $t$ :

$$(21) \quad \pi_{t-1} = A_{t-1} + F_{t-1} \hat{E}_{t-1} \pi_t + D_{t-1} r_{t-1}^n + \hat{v}_{t-1}$$

Donde  $\hat{v}_{t-1}$  son los residuales estimados en tal regresión. De esta manera, ellos incorporan su pronóstico de la inflación como otra de las variables que la determinan y de manera auto-referenciada, a diferencia de la regresión (11) donde no aparecía la expectativa de la inflación como regresora de la propia inflación. Adicionalmente, supondremos que los dos agentes conocen la forma funcional del REE dada por (8a) y con las estimaciones de  $A$ ,  $F$  y  $D$  encontradas en (21) con información hasta  $t-1$ , ellos calculan su expectativa de la inflación en  $t$ , empleando la misma forma funcional de la expectativa racional (9a):

$$(22) \quad \hat{E}_t \pi_{t+1} = \frac{A_{t-1}}{1-F_{t-1}} + \frac{D_{t-1}}{1-\rho F_{t-1}} \rho r_t^n$$

Una característica muy importante del pronóstico de la forma (22) es que expresa una relación no lineal de  $r_t^n$ , en la medida que las estimaciones de  $A$ ,  $D$  y  $F$  cambien cada vez que los agentes reciban nueva información período a período<sup>23</sup>. Por tanto, al hacer la regresión de la forma (21) existirá una relación no lineal entre los regresores  $\hat{E}_{t-1} \pi_t$  y  $r_{t-1}^n$  y no presentará problemas de multicolinealidad, a diferencia de lo que Muto (2011) argumenta que podría ocurrir en su modelo<sup>24</sup>. Ahora bien, si se define  $\bar{F} \equiv \bar{A} + \bar{C}$  y se reemplaza (22) en (7) se obtiene la ALM de la inflación:

$$(23) \quad \pi_t = \bar{A} + \bar{F} \left( \frac{A_{t-1}}{1-F_{t-1}} \right) + \left[ \bar{F} \left( \frac{D_{t-1}}{1-\rho F_{t-1}} \right) \rho + \bar{D} \right] r_t^n$$

Como la PLM2 no es de la forma MSV, en principio se podrían derivar los T-maps de las condiciones de ortogonalidad relevantes y de la ALM “proyectada” de los agentes privados, como en LBF. Sin embargo, ya que estas condiciones involucran el valor esperado no condicional, en particular sobre

<sup>22</sup> Para las primeras tres estimaciones de  $a$  y  $b$ , supondremos que los agentes conocen por lo menos los valores de  $\pi_{-2}$ ,  $\pi_{-1}$ ,  $\pi_0$ ,  $r_{-2}^n$ ,  $r_{-1}^n$  y  $r_0^n$ , hacen la regresión de la forma (11) y con ella estiman  $\hat{E}_i \pi_{i+1}$  para  $i=1,2,3$  como en (12) y luego estiman (21) para obtener  $\hat{E}_i \pi_{i+j}$  para  $i=1,2,3$  siguiendo (22). Evans and Honkapohja (2001) resaltan que la estabilidad de expectativas bajo SAL no depende de las condiciones iniciales, ya que sólo pueden afectar la trayectoria inicial de los parámetros estimados, al igual que ocurre con SRL en las diferentes simulaciones realizadas para este artículo.

<sup>23</sup> Esto ocurre porque el aprendizaje tarda un buen número de períodos en estabilizarse alrededor de los valores de RE, como lo comprueba Ferrero (2007) empleando varias reglas monetarias con SAL.

<sup>24</sup> Ver sección 3.1 de Muto (2011).

la ecuación (20), esto haría que el valor esperado de  $\hat{E}_t \pi_{t+1}$  y el de  $r_t^n$  estén correlacionados, haciendo inaplicable el procedimiento que presenta Branch (2004) para obtener los T-maps a partir de tales condiciones. Por tal razón, se simuló este modelo con unos conjuntos de parámetros basados en las calibraciones de Muto (2011) y de Bullard and Mitra (2002) y se encuentran en el anexo 2. Producto de tales simulaciones, se obtuvo el siguiente resultado numérico<sup>25</sup> en cuanto a la E-S.

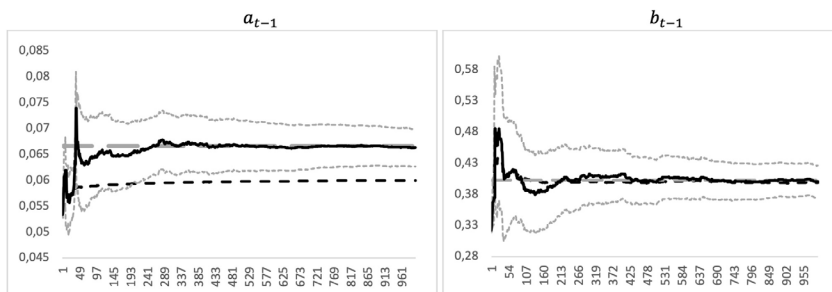
**Resultado Numérico 1. Estabilidad de Expectativas cuando ambos agentes tienen Aprendizaje Autorreferenciado (SRL):** *Considere el sistema dinámico (7), (22) y (23). Se tiene que la solución (8a) es estable en expectativas bajo SRL si  $\phi_\pi > 0$ , para el rango de los parámetros calibrados por Muto (2011) y Bullard and Mitra (2002).*

De esta forma, si se cumple el Principio de Taylor (14a) se obtuvo que tanto el aprendizaje autorreferenciado como el aprendizaje estándar presentan estabilidad de expectativas. Este resultado se puede ver en la gráfica 1 donde se compararon los dos coeficientes estimados  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  tanto en el modelo donde ambos agentes tienen SAL, como en el modelo donde los dos tienen SRL. Se usó el mismo coeficiente de la inflación en la regla monetaria ( $\phi_\pi = 1.5$ ) que emplea Muto (2011) con el cual se cumple el Principio de Taylor<sup>26</sup>.

<sup>25</sup> Ver la sección 5.1 de Muto (2011) donde obtiene un resultado numérico con tales parámetros calibrados para su modelo.

<sup>26</sup> Para otros valores para  $\phi_\pi > 1$  también se obtuvo este resultado. Las gráficas se realizaron con los parámetros calibrados por Muto (2011). Empleando tanto los parámetros de Bullard and Mitra (2002) como diversos conjuntos de parámetros del rango presentado en el anexo 2, se obtuvieron gráficas similares.

## GRÁFICA 1

SIMULACIÓN DE LOS MODELOS CON SAL Y CON SRL CON LAS CALIBRACIONES DE MUTO (2011) Y CUMPLIÉNDOSE EL PRINCIPIO DE TAYLOR ( $\phi_\pi > 1$ )

Las líneas grises con guión largo corresponden a los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  con RE. Las líneas negras con guion corto representan las estimaciones  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  con SAL. Las líneas negras continuas corresponden a las estimaciones con SRL y las líneas punteadas en gris representan los respectivos intervalos de confianza al 95%.

En la gráfica 1, se observa que  $b_{t-1}$  se acerca a su valor de expectativas racionales de manera rápida tanto en SAL como en SRL, mientras que  $a_{t-1}$  es rápida bajo SRL y muy lenta en SAL<sup>27</sup>. Adicionalmente, se simuló un intervalo de confianza al 95% para SRL con el fin de observar el rango más probable donde estará el respectivo coeficiente estimado y así que el resultado principal no dependa de su estimación específica.

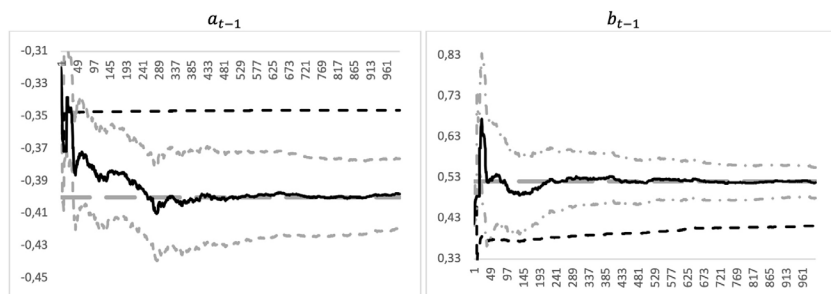
Ahora bien, si no se cumple el Principio de Taylor (14a) y empleando el mismo rango para los parámetros, se presenta E-S cuando ambos agentes tienen SRL, pero no cuando tienen SAL. Esto se puede observar en la gráfica 2 donde se compararon los dos coeficientes estimados  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  en estos dos casos y usando  $\phi_\pi = 0.85$ , donde no se cumple el Principio de Taylor<sup>28</sup>. Se observa que los dos coeficientes con sus respectivos intervalos de confianza se acercan a su valor de expectativas racionales de manera rápida bajo SRL, mientras que no convergen bajo SAL.

<sup>27</sup> Esta lenta velocidad de convergencia del intercepto lo encuentra Ferrero (2007) para varias reglas monetarias con SAL.

<sup>28</sup> Para otros valores el rango  $0 < \phi_\pi < 1$  donde no se cumple el principio de Taylor también se obtuvo este resultado.

## GRÁFICA 2

SIMULACIÓN DE LOS MODELOS CON SAL Y CON SRL CON LAS CALIBRACIONES DE MUTO (2011) PERO INCUMPLIÉNDOSE EL PRINCIPIO DE TAYLOR ( $\phi_\pi < 1$ )



Las líneas grises con guion largo corresponden a los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  con RE. Las líneas negras con guion corto representan las estimaciones  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  con SAL. Las líneas negras continuas corresponden a las estimaciones con SRL y las líneas punteadas en gris representan los respectivos intervalos de confianza al 95%.

#### 4.2 Estabilidad de Expectativas Cuando los Privados Aprenden de los Pronósticos del Banco Central y Este Tiene Aprendizaje Autorreferenciado y (LBSR)

El modelo de Muto (2011), presentado en la subsección 3.3, tiene un atractivo muy interesante ya que le asigna a las expectativas del banco central un papel muy importante porque no sólo le da información sobre cuál política monetaria es la más apropiada, sino que, al anunciárselas a los privados, estos la toman como información fundamental en la generación de su propio pronóstico. Pero, debido a esta dinámica, uno de los principales resultados de este modelo es que el BC debe reaccionar muy fuerte, más del doble, comparado con la reacción en el modelo de Bullard and Mitra (2002). La razón de este resultado para Muto (2011) es que los agentes privados tienen dos fuentes de errores de pronóstico: la de su propia estimación y la que le transmite el BC al generar su respectiva estimación. Por eso, vale la pena preguntarse: ¿Es posible disminuir los errores que causan cada una de estas fuentes para que la respuesta del banco central a los pronósticos de los privados no sea tan fuerte?

Como vimos en la subsección anterior, una opción consistiría en imponerle a los privados que realicen un pronóstico más sofisticado que (12) pero esto podría resultar poco realista<sup>29</sup>. Por esa razón es que la literatura de aprendizaje adaptativo supone en general que los agentes privados sólo hacen una regresión sencilla para pronosticar y en esta subsección mantendremos tal supuesto y nos concentraremos en la segunda fuente de los errores de pronóstico: la que

<sup>29</sup> Ver por ejemplo a Gaspar et al. (2006a y 2006b).

le transmite el banco central cuando le anuncia sus pronósticos a los privados. Por tanto, supondremos que el BC genera una expectativa más sofisticada que (12) ya que este sí tiene un mayor conocimiento de la economía y emplea modelos de pronóstico más sofisticados que los privados, porque en general tiene una parte de sus investigadores dedicados a generar pronósticos. Gaspar et al. (2006a) y Muto (2011) justifican por qué razón los bancos centrales pueden tener modelos más sofisticados que los privados<sup>30</sup>.

En concreto, supondremos que el banco central ya no tiene SAL sino que tiene SRL, mientras que los privados siguen aprendiendo del pronóstico del BC, este aprendizaje se denotará como LBSR. Y se mantendrán los demás supuestos del LBF. Por tanto, supondremos que desde el período  $t$  en adelante el BC conoce la forma funcional de la LoM, luego su PLM no será más como (10) sino que ahora su creencia de la LoM, la cual denominaremos PLM2 en  $t$ , es:

$$(24) \quad \pi_t = A + B\hat{E}_t^P \pi_{t+1} + C\hat{E}_t^B \pi_{t+1} + Dr_t^n$$

Donde  $\hat{E}_t^B \pi_{t+1}$  se define como la expectativa del banco central con SRL, al igual que en la subsección anterior, mientras que  $\hat{E}_t^P \pi_{t+1}$  es la expectativa que los privados obtienen basándose en la expectativa auto-referenciada del BC. Los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son desconocidos. Por tanto, el BC realiza la siguiente regresión<sup>31</sup> por mínimos cuadrados al inicio del período  $t$ :

$$(25) \quad \pi_{t-1} = A_{t-1} + B_{t-1}\hat{E}_{t-1}^P \pi_t + C_{t-1}\hat{E}_{t-1}^B \pi_t + D_{t-1}r_{t-1}^n + \hat{v}_{t-1}$$

Donde  $\hat{v}_{t-1}$  son los respectivos residuales estimados. Así, el BC incorpora su pronóstico y el de los privados como otras de las series determinantes de la inflación y de manera auto-referenciada<sup>32</sup>. Además, supondremos que el banco central conoce la forma funcional del REE dada por (8a) y con las estimaciones de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  encontradas en (25) con información hasta  $t-1$ , calcula su expectativa de la inflación en  $t$  empleando la misma forma funcional de la expectativa racional (9a):

$$(26) \quad \hat{E}_t^B \pi_{t+1} = \frac{A_{t-1}}{1 - (B_{t-1} + C_{t-1})} + \frac{D_{t-1}}{1 - \rho(B_{t-1} + C_{t-1})} \rho r_t^n$$

<sup>30</sup> Ver también Ehrmann et al. (2010), Adolfson et al. (2007), Tissot (2019) y Gaspar et al. (2006b).

<sup>31</sup> Como en la regresión de la subsección 4.1, los tres valores iniciales se estiman de manera análoga al procedimiento mencionado en la nota al pie 16.

<sup>32</sup> En esta situación se supondrá que el banco conoce el pronóstico de los privados, esto puede ser cierto si el banco realiza encuestas de expectativas a los privados o si calcula (27) con la información que tiene disponible.

El BC anuncia esta expectativa<sup>33</sup> a los privados y estos se forman la PLM como en (15), hacen la regresión de la forma (16) y obtienen su pronóstico como en (17) pero empleando el pronóstico del banco central (26) en vez del respectivo pronóstico (12):

$$(27) \quad \hat{E}_t^P \pi_{t+1} = c_{t-1} + d_{t-1} \hat{E}_t^B \pi_{t+1}$$

Si se reemplazan (26) y (27) en (7) se obtiene la ALM de la inflación:

$$(28) \quad \pi_t = \bar{A} + \bar{B}c_{t-1} + \frac{(\bar{B}d_{t-1} + \bar{C})A_{t-1}}{1 - (B_{t-1} + C_{t-1})} + \left( \frac{(\bar{B}d_{t-1} + \bar{C})D_{t-1}}{1 - \rho(B_{t-1} + C_{t-1})} \rho + \bar{D} \right) r_t^n$$

De manera análoga a la subsección 4.1, como la PLM2 no es de la forma MSV, en principio se podrían derivar los T-maps de las condiciones de ortogonalidad relevantes y de la ALM “proyectada” de los agentes privados, pero esto haría que el valor esperado de  $\hat{E}_t \pi_{t+1}$ , de  $\hat{E}_t^B \pi_{t+1}$  y el de  $r_t^n$  estén correlacionados, haciendo inaplicable el procedimiento de Branch (2004) para obtener los T-maps a partir de tales condiciones. Por ello, se simuló este LBSR con los conjuntos de parámetros del anexo 2 obteniendo el siguiente resultado numérico en cuanto a la E-S.

**Resultado Numérico 2. Estabilidad de Expectativas cuando los Privados aprenden de los pronósticos Autorreferenciados del Banco Central (LBSR):** Considere el sistema dinámico (7), (26), (27) y (28). Se tiene que la solución (8b) es estable en expectativas bajo LBSR si  $\phi_\pi > 1$  para el rango de los parámetros calibrados por Muto (2011) y Bullard and Mitra (2002).

Por tanto, si se cumple la condición (19<sup>a</sup>) hay E-S si los privados aprenden de los pronósticos del BC y este tiene SRL y también hay estabilidad con LBF. Este resultado se puede ver en la gráfica 3 donde se compararon los dos coeficientes estimados  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  tanto en el modelo donde hay LBF, como en el modelo con LBSR. Se usó  $\phi_\pi = 2.5$  para cumplir la condición (19<sup>a</sup>), es decir, el doble del Principio de Taylor<sup>34</sup>. Se observa que  $b_{t-1}$  se acerca a su valor de expectativas racionales de manera rápida, mientras que  $a_{t-1}$  es rápida bajo

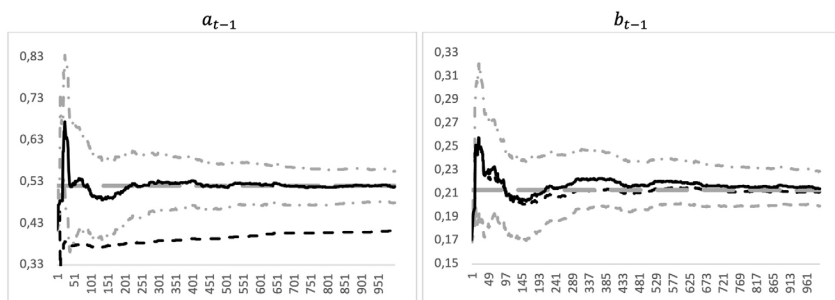
<sup>33</sup> Esta expectativa expresa una relación no lineal con  $r_t^n$ , al igual que ocurre con el pronóstico (22), evitando así multicolinealidad en las estimaciones que se obtienen con las regresiones de la forma (25).

<sup>34</sup> Para otros valores para  $\phi_\pi > 2$ , también se obtuvo este resultado. Como en el caso de la subsección 4.1 las gráficas se realizaron con los parámetros calibrados por Muto (2011). Y se obtuvieron gráficas similares usando tanto los parámetros de Bullard and Mitra (2002) como diversos conjuntos de parámetros del rango presentado en el anexo 2.

LBSR y muy lenta con LBF. También se simuló un intervalo de confianza para LBSR con el fin de observar el rango más probable donde estarán cada uno de los coeficientes estimados y así que el resultado principal no dependa de su estimación puntual.

### GRÁFICA 3

SIMULACIÓN DEL LBSR Y LBF CON LAS CALIBRACIONES DE MUTO (2011) Y CUMPLIÉNDOSE EL DOBLE DEL PRINCIPIO DE TAYLOR ( $\phi_\pi > 2$ )

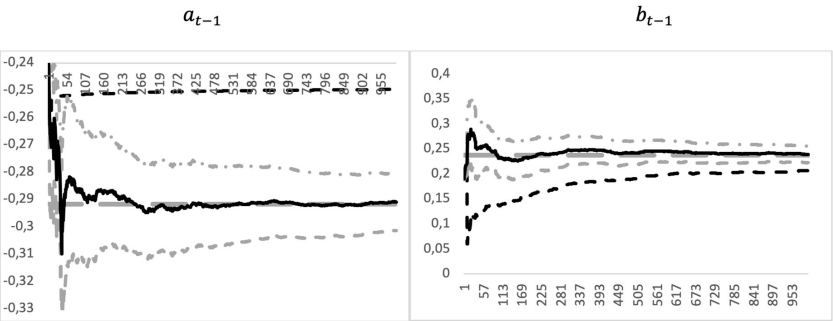


Las líneas grises con guion largo corresponden a los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  con RE. Las líneas negras con guion corto representan las estimaciones  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  con LBF. Las líneas negras continuas corresponden a las estimaciones con LBSR y las líneas punteadas en gris representan los respectivos intervalos de confianza al 95%.

Ahora bien, si no se cumple la condición (19<sup>a</sup>) se presenta E-S si los privados aprenden de los pronósticos autorreferenciados del BC pero no si el éste tiene SAL, usando el mismo rango para los parámetros. Esto se ve en la gráfica 4 donde se compararon los dos coeficientes estimados  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  en ambos modelos y se usó  $\phi_\pi = 1.85$ , que no cumple el doble del Principio de Taylor<sup>35</sup>. Se observa que bajo el LBSR los dos coeficientes con sus respectivos intervalos de confianza se acercan a su valor de RE de manera rápida, mientras que no convergen bajo LBF.

<sup>35</sup> Para otros valores el rango  $1 < \phi_\pi < 2$  donde no se cumple el doble del principio de Taylor también se obtuvo el mismo resultado.

GRÁFICA 4  
SIMULACIÓN DEL LBSR Y LBF CON CALIBRACIONES DE MUTO (2011) PERO  
INCUMPLIÉNDOSE EL DOBLE DEL PRINCIPIO DE TAYLOR Y  $1 < \phi_{\pi} < 2$



Las líneas grises con guion largo corresponden a los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  con RE. Las líneas negras con guion corto representan las estimaciones  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$  con LBF. Las líneas negras continuas corresponden a las estimaciones con LBSR y las líneas punteadas en gris representan los respectivos intervalos de confianza al 95%.

**4.3 Estabilidad de Expectativas Cuando Alguno de los Agentes Tiene Expectativas Racionales y El Otro Tiene Algún Tipo de Aprendizaje Econométrico**

En las subsecciones 4.1 y 4.2 se presentaron los aprendizajes SRL y LBSR que son más sofisticados que SAL y que LBF respectivamente, ya que les exigen a los agentes más conocimiento de la economía. El resultado más importante es que en ambos casos, con aprendizaje autorreferenciado se relajan las condiciones de estabilidad de expectativas.

Para fortalecer este resultado, se obtuvieron tales condiciones si se le impusiera a alguno de los agentes que tuviera RE ya que este mecanismo se puede considerar como el aprendizaje más sofisticado posible. En estos casos se confirmó que las E-S son las menos fuertes posibles y se encuentran en los anexos 3, 4 y 5 y la síntesis de los resultados se presentan en el cuadro 2.

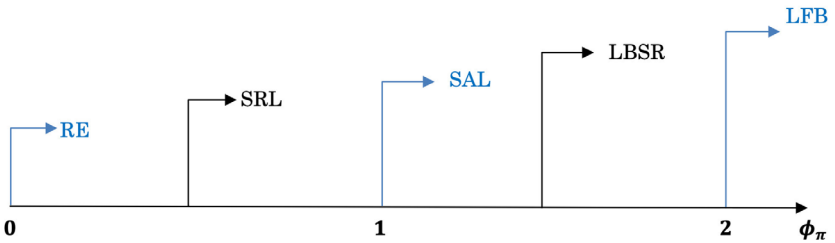
CUADRO 2  
CONDICIONES DE ESTABILIDAD DE EXPECTATIVAS CUANDO UN AGENTE TIENE  
EXPECTATIVAS RACIONALES Y EL OTRO TIENE SAL O LBF

| BANCO CENTRAL | AGENTES PRIVADOS | CONDICIONES DE E-S                                                    |
|---------------|------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| RE            | SAL              | Menos que PT: $\phi_{\pi} > 0$<br>(Ver anexo 3)                       |
| SAL           | RE               | Menos que PT: $\phi_{\pi} > -\frac{1}{\kappa\sigma}$<br>(Ver anexo 4) |
| RE            | LBF              | Menos que PT: $\phi_{\pi} > 0$<br>(Ver anexo 5)                       |

RE: Expectativas Racionales. SAL: Aprendizaje Econométrico Estándar. LBF: Aprendizaje del Banco.

Con base en estas condiciones de E-S y con los resultados numéricos 1 y 2, presentados anteriormente, se puede ver al aprendizaje autorreferenciado como un punto intermedio entre expectativas racionales y aprendizaje econométrico estándar, en términos de la estabilidad de expectativas, como lo muestra la gráfica 5.

GRÁFICA 5  
CONDICIONES DE  $\phi_{\pi}$  PARA QUE HAYA ESTABILIDAD DE  
EXPECTATIVAS EN L DISTINTOS CASOS ANALIZADOS



RE: Algún agente con Expectativas Racionales (subsección 4.3). SRL: Ambos agentes con Aprendizaje Autorreferenciado (subsección 4.1). SAL: Ambos agentes con Aprendizaje Econométrico Estándar (subsección 3.1). LBSR: el BC tiene SRL y los privados aprenden de los pronósticos Autorreferenciados del BC (subsección 4.2). LFB: el BC tiene SAL y los privados aprenden de los pronósticos del BC (subsección 3.3).

Como puede observarse, en la medida que el aprendizaje sea más sofisticado al pasar de LFB a LBSR y de SAL a SRL y luego a RE (de derecha a izquierda en la gráfica 5) las condiciones de estabilidad de expectativas son menos fuertes, ya que el valor requerido para el coeficiente de la inflación esperada (el  $\phi_\pi$  en la regla monetaria (4)) es menor en cada caso.

#### 4.4 Algunas Implicaciones de Política del Aprendizaje Autorreferenciado

Como vimos en dos anteriores subsecciones, SRL permite relajar las condiciones de estabilidad de expectativas tanto del Modelo de Bullard and Mitra (2002) donde hay expectativas homogéneas con SAL, como en el Modelo de Muto (2011) donde las expectativas son heterogéneas (el banco central tiene SAL y los privados aprenden de ese pronóstico del BC).

De aquí, pueden surgir dos recomendaciones de política. La primera es que, si el banco central tiene en cuenta que sus pronósticos de inflación afectan a la misma inflación, no tiene que reaccionar tan fuerte ante cambios en la inflación esperada aumentando demasiado la tasa de interés.

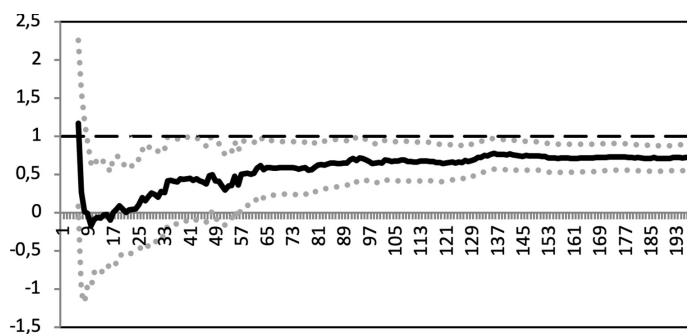
Y la segunda recomendación, es que el aprendizaje autorreferenciado también le sirve al banco central como una herramienta para estimar la condición de E-S. Así, si en algún período observa que las expectativas no están convergiendo a su valor de expectativas racionales, entonces el BC puede cambiar sus parámetros de política para modificar tal condición y con esto que las expectativas retomen su trayectoria hacia RE. A manera de ejemplo, en la gráfica 6 se presenta una condición de estabilidad estimada<sup>36</sup> ( $B_{t-1} + C_{t-1} < 1$ ) en 200 períodos, junto con el respectivo intervalo de confianza al 95%. Se observa que existen unos períodos donde la condición estimada tiende a incrementarse hacia el valor de 1, en esos períodos el banco central podría actuar con sus parámetros de política para que tal condición disminuya y con esto conseguir que las expectativas tiendan hacia las racionales.

<sup>36</sup> En todos modelos presentados en este artículo, esta condición es por lo menos necesaria para que haya estabilidad de expectativas.

## GRÁFICA 6

EJEMPLO DE ESTIMACIÓN DE LA CONDICIÓN DE ESTABILIDAD DE EXPECTATIVAS

$$B_{t-1} + C_{t-1} < 1$$



La línea negra con guiones corresponde a la condición de E-S teórica, la línea negra continua es la condición de E-S estimada período a período y las líneas grises punteadas representan el intervalo de confianza al 95%.

## 5. CONCLUSIONES Y AGENDA DE INVESTIGACIÓN

Este artículo tomó como punto de referencia tres casos expuestos en la literatura de aprendizaje econométrico. En el primero de ellos, si el banco central y los privados tienen aprendizaje adaptativo estándar entonces la condición para que haya estabilidad de expectativas es que se cumpla el principio de Taylor. En el segundo caso, si ambos agentes tienen aprendizajes heterogéneos e independientes, entonces el principio de Taylor es una condición necesaria pero no suficiente para que haya estabilidad de expectativas. Y en el tercer caso, si los privados aprenden del pronóstico que anuncia el banco central y éste tiene aprendizaje econométrico estándar, entonces la condición para que haya estabilidad de expectativas es que se cumpla el doble del principio de Taylor.

Estos dos últimos casos resaltan a la heterogeneidad de expectativas como la característica que genera una mayor reacción del banco central a las expectativas de inflación de los privados. Sin embargo, en este artículo se presentó una alternativa, que consiste en suponer que el banco central, o los agentes privados o ambos, elaboran sus expectativas de una manera más sofisticada que aprendizaje econométrico estándar, independiente que las expectativas sean homogéneas o heterogéneas y dependientes.

Para ellos, se presentaron dos escenarios. El primero, consistió en suponer que alguno de los agentes tiene expectativas racionales como el mecanismo

más sofisticado y el otro algún tipo de aprendizaje. Se encontró que las condiciones de estabilidad de expectativas son las menos restrictivas posibles, ya que el banco central sólo debe reaccionar positivamente a la inflación.

Como imponer expectativas racionales es muy fuerte, en el segundo escenario se supuso que alguno de los agentes tiene un aprendizaje más sofisticado que el adaptativo estándar pero menos que expectativas racionales. Este aprendizaje se denominó autorreferenciado, donde los agentes tienen en cuenta que sus expectativas afectan a la misma variable de interés, en este caso la inflación.

En este documento se emplearon los rangos estándar para los parámetros que se han usado en varios artículos de la literatura de aprendizaje econométrico. Con base en tales rangos se obtuvieron los siguientes resultados. En el primer caso de referencia, donde las expectativas eran homogéneas, se encontró que si el aprendizaje fuera autorreferenciado, la condición para que haya estabilidad de expectativas es menor que la que impone el principio de Taylor. Mientras que en el tercer caso, donde los privados aprenden del pronóstico que anuncia el Banco central, la condición para que haya estabilidad de expectativas es que se cumpla el principio de Taylor si el banco central tuviera tal aprendizaje autorreferenciado.

De esta forma, la reacción del banco central para garantizar la condición de estabilidad de expectativas puede relajarse si por lo menos alguno de los agentes tiene un aprendizaje más sofisticado que el econométrico y más cercano a expectativas racionales. Además, el aprendizaje autorreferenciado le sirve al banco central como una herramienta para estimar período a período la condición de estabilidad de expectativas, para que cuando observe que las expectativas no están convergiendo a su valor de expectativas racionales, pueda cambiar sus parámetros de política para modificar tal condición y de esta manera, permitir que las expectativas retomen su trayectoria hacia las expectativas racionales.

Como agenda de investigación, podría aplicarse el aprendizaje autorreferenciado a modelos con otras reglas monetarias como las que presentan Bullard and Mitra (2002). También se podría emplear con otros aprendizajes como los expuestos por Honkapojha and Mitra (2005). De igual forma, se podría aplicar SRL en el modelo generalizado de Muto (2011) donde también se requiere pronosticar la brecha del producto. A su vez, se podría incorporar en el modelo de economía abierta que presentan Llosa and Tuesta (2005 y 2008) que es la extensión del modelo de Bullard and Mitra (2002) analizado en este artículo.

Ahora bien, en los modelos presentados en este artículo si los agentes usan SAL se tiene que las condiciones de E-S permiten que las expectativas de inflación de los privados se anclen en el largo plazo al valor de expectativas racionales (9b). Sin embargo, se podrían analizar aprendizajes que no sean de MSV donde las expectativas pueden anclarse a un valor diferente al de RE

como lo exponen Ascari et al. (2017). Para ellos, el valor de inflación objetivo y la información que trasmite el banco central a los privados son determinantes fundamentales para el ancla de las expectativas de inflación que se formen los agentes privados.

## REFERENCES

- Adolfson, M., M. Andersson, J. Lindé, M. Villani, and A. Vredin. (2007) "Modern Forecasting Models in Action: Improving Macroeconomic Analyses at Central Banks". *International Journal of Central Banking*, Vol. 3, 4; 111–144.
- Ascari, G., A. Florio, and A. Gobbic. (2017). "Transparency, Expectations Anchoring and Inflation Target". *European Economic Review*, Vol. 91; 261–273.
- Bordalo, P., N. Gennaioli, Y. Ma, and A. Shleifer. (2020). "Overreaction in Macroeconomic Expectations." *American Economic Review*, Vol. 110 (9); 2748-82.
- Branch, W. (2004). "The Theory of Rationally Heterogeneous Expectations: Evidence from Survey Data on Inflation Expectations", *Economic Journal*, Royal Economic Society, Vol. 114; 592-621.
- Bullard J., and K. Mitra. (2002). "Learning about Monetary Policy Rules", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 49 (6); 1105–1129
- Clarida, R., J. Galí, and M. Gertler. (1999). "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective". NBER Working Paper, 7147.
- Ehrmann, M., S. Eijffinger and M. Fratzscher. (2010) "The Role of Central Bank Transparency for Guiding Private Sector Forecasts", *European Central Bank Working Paper Series*, 1146.
- Evans, G. and S. Honkapohja. (2001). *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press.
- Evans, G. and S. Honkapohja. (2003). "Adaptive Learning and Monetary Policy Design". *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 35; 1045-1072.
- Evans, G. and S. Honkapohja. (2008). "Expectations, Learning and Monetary Policy: An Overview of Recent Research". *Centre for Dynamic Macroeconomic Analysis Working Paper*, 08 / 02.
- Evans, G. and S. Honkapohja. (2009). "Learning and Macroeconomics". *Annual Review of Economics*, Vol. 1.
- Ferrero, G. (2007) "Monetary Policy, Learning and the Speed of Convergence".

- Journal of Economic Dynamics & Control, Vol. 31; 3006-3041.
- Fujiwara, I. (2005). "Is the Central Bank's Publication of Economic Forecasts Influential?", *Economics Letters*, Vol. 89 (3); 255-261.
- Galí, J. (2008). *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework and Its Applications*. Princeton University Press.
- Gaspar, V., F. Smets, and D. Vestin. (2006a). "Optimal Monetary Policy under Adaptive Learning", *Computing in Economics and Finance from Society for Computational Economics*, 183.
- Gaspar, V., F. Smets, and D. Vestin. (2006b). "Adaptive Learning, Persistence, and Optimal Monetary Policy", *Journal of the European Economic Association*, Vol. 4 (2-3); 376-385.
- Gómez S. y J. Parra-Polanía. (2011). "Comportamiento Estratégico de los Bancos Centrales al Anunciar Pronósticos de Inflación", *Borradores de Economía*, Banco de la República, 653.
- Honkapohja, S., and K. Mitra. (2005). "Performance of Monetary Policy with Internal Central Bank Forecasting", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 29 (4); 627-658.
- Honkapohja, S., and K. Mitra. (2006). "Learning Stability in Economies with Heterogeneous Agents", *Review of Economic Dynamics*, Vol. 9(2); 284-309.
- Hubert, P. (2014). "FOMC Forecasts as a Focal Point for Private Expectations". *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 46, 7; 1381-1420.
- Hubert, P. (2015a). "Do Central Bank Forecasts Influence Private Agents? Forecasting Performance versus Signals". *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 47, 4; 771-789.
- Hubert, P. (2015b). "The Influence and Policy Signalling Role of FOMC Forecasts". *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 77, 5; 655-680.
- Hubert, P. (2015c). "ECB Projections as a Tool for Understanding Policy Decisions". *Journal of Forecasting*, Vol. 34; 574-587.
- Kobayashi, T. and I. Muto (2013). "A Note on Expectational Stability under Nonzero Trend Inflation", *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 17; 681-693.
- Llosa, G. and V. Tuesta (2005). "Learning about Monetary Policy Rules in Small Open Economies", *SSRN Working Papers Series*, march.
- Llosa, G. and V. Tuesta (2008). "Determinacy and Learnability of Monetary Policy Rules in Small Open Economies", *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol.40; 1033-63.
- Milani, F. (2005). "Adaptive Learning and Inflation Persistence". Working Papers 050607, University of California-Irvine, Department of Economics.

- Muto, I. (2011). "Monetary Policy and Learning from the Central Bank's Forecast". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 35, (1); 52–66.
- Parra-Polanía, J. (2012). "Transparency: can Central Banks Commit to Truthful Communication?", *Borradores de Economía*, Banco de la República, 711.
- Pedersen, M. (2015). "What Affects the Predictions of Private Forecasters? The Role of Central Bank Forecasts in Chile", *International Journal of Forecasting*, Vol. 31; 1043-1055.
- Tissot (2019). "Big data for central banks", in: *The Use of Big Data Analytics and Artificial Intelligence in Central Banking*, Bank for International Settlements, vol. 50.
- Walsh, C. (2010). *Monetary Theory and Policy*, 3rd Edition, MIT press.

## ANEXO 1

### EQUILIBRIO BAJO EXPECTATIVAS RACIONALES (REE)

Se obtiene con base en la ecuación (7), la dinámica de la inflación. Entonces si ambos agentes tienen expectativas racionales se tiene que:  $\pi_{t+1}^{eP} = \pi_{t+1}^{eB} = E_t \pi_{t+1}$ . Por tanto, (7) se convierte en:

$$(A1) \quad \pi_t = A + (B + C)E_t \pi_{t+1} + Dr_t^n$$

Adelantando (A1) un período y aplicando  $E_t(\cdot)$  se observa que  $E_t \pi_{t+1}$  sólo adiciona constantes y  $r_t^n$ , por tanto, se puede conjeturar que la inflación es:

$$(A2) \quad \pi_t = a + br_t^n$$

Adelantando (A2) un período y aplicando  $E_t(\cdot)$  se calcula  $E_t \pi_{t+1}$ :

$$(A3) \quad E_t \pi_{t+1} = a + b\rho r_t^n$$

Reemplazando (A3) y (A2) en (A1), se tienen las siguientes condiciones para los coeficientes  $a$  y  $b$ :

$$(A4) \quad \bar{a} = \frac{A}{1 - (B + C)}$$

$$(A5) \quad \bar{b} = \frac{D}{1 - \rho(B + C)}$$

Reemplazando (A4) y (A5) en (A2), se obtiene el REE, ecuación (8b) del documento:

$$(A6) \quad \pi_t = \frac{A}{1 - (B + C)} + \frac{D}{1 - \rho(B + C)} r_t^n$$

**ANEXO 2**

CONJUNTO DE VALORES DE LOS PÁMETROS BASADOS EN LAS CALIBRACIONES  
DE BULLARD AND MITRA (2002) Y DE MUTO (2011)

| Parámetros | Mínimo | Máximo |
|------------|--------|--------|
| $\sigma$   | 1.0    |        |
| $\beta$    | 0.9    |        |
| $\kappa$   | 0.024  | 0.3    |
| $\rho$     | 0.35   | 0.8    |

### ANEXO 3

#### ESTABILIDAD CUANDO EL BANCO CENTRAL TIENE EXPECTATIVAS RACIONALES Y LOS PRIVADOS TIENEN APRENDIZAJE ECONÓMETRICO

En este caso, la expectativa del BC es (9b):

$$(A7) \quad E_t^B \pi_{t+1} = \bar{a} + \bar{b} \rho r_t^n$$

Mientras que si los privados tienen SAL entonces creen que inflación depende de una constante y de la tasa natural de interés real, la misma forma que el REE (8b), pero desconocen los parámetros  $\bar{a}$  y  $\bar{b}$ . Por tanto, su PLM viene dada por (10), realizan la regresión (11) y con base en las estimaciones  $a_{t-1}$  y  $b_{t-1}$ , genera su expectativa de la inflación como en (12):

$$(A8) \quad \hat{E}_t^P \pi_{t+1} = a_{t-1} + b_{t-1} \rho r_t^n$$

Reemplazando (A7) y (A8) en (7) se obtiene la ALM de la inflación:

$$(A9) \quad \pi_t = \bar{A} + \frac{\bar{C}\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \bar{B}a_{t-1} + \left( \bar{D} + \frac{\rho \bar{D}\bar{C}}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} + \bar{B}\rho b_{t-1} \right) r_t^n$$

Para ver cómo se acerca la PLM a la ALM, se construye el mapeo o T-map (coeficientes de las variables del REE en la ALM)<sup>37</sup>:

$$(A10) \quad T(\phi) = T \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} + \frac{\bar{C}\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \bar{B}a_{t-1} \\ \bar{D} + \frac{\rho \bar{D}\bar{C}}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} + \bar{B}\rho b_{t-1} \end{pmatrix}$$

Y su ecuación diferencial ordinaria (ODE) asociada:

$$(A11) \quad T(\phi) - \phi = T \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} + \frac{\bar{C}\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \bar{B}a_{t-1} - a_{t-1} \\ \bar{D} + \frac{\rho \bar{D}\bar{C}}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} + \bar{B}\rho b_{t-1} - b_{t-1} \end{pmatrix}$$

<sup>37</sup> Ver Evans and Honkapohja (2001), capítulo 8.

Se obtiene la Matriz Jacobiana de la ODE:

$$(A12) \quad J(\phi) = \begin{bmatrix} \bar{B}-1 & 0 \\ 0 & \bar{B}\rho-1 \end{bmatrix}$$

Y se analiza la convergencia del SAL al REE con la estabilidad de  $J(\phi)$ : las condiciones de estabilidad de expectativas E-S se obtienen cuando la parte real de sus valores propios sean menores que cero:

$$(A13a) \quad \bar{B}-1 < 0$$

$$(A13b) \quad \bar{B}\rho-1 < 0$$

Si se cumplen estas condiciones de E-S entonces la estimación econométrica de los agentes privados (A8) convergerá al pasar el tiempo a la expectativa racional (9b), es decir, si:

$$(A14a) \quad \phi_t \rightarrow \bar{\phi} \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

$$(A14b) \quad \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Por tanto, las condiciones (A13a) y (A13b) generan el siguiente resultado:

**Proposición A1. Estabilidad de expectativas bajo aprendizaje estándar de los agentes privados:** Considere el sistema dinámico (7), (A7), (A8), y (A9). Se tiene que la solución (8b) es estable en expectativas si se cumple:

$$(A15) \quad \kappa\sigma + \beta < 1$$

sérvase que esta condición no depende del coeficiente asociado a la expectativa del Banco central  $\bar{C}$  ni del parámetro de la regla de política  $\phi_\pi$ , por tanto, cualquier valor de  $\phi_\pi > 0$  permite que los agentes privados aprendan con el tiempo el REE. Esto se da así porque al ser racionales las expectativas de los privados, no se necesita un ajuste adicional para compensar el efecto que genera sobre la inflación el efecto de las expectativas del BC, como es explicado en Honkapohja and Mitra (2005, 2006).

### ANEXO 4

#### ESTABILIDAD CUANDO EL BANCO CENTRAL TIENE APRENDIZAJE ECONOMÉTRICO Y LOS PRIVADOS TIENEN EXPECTATIVAS RACIONALES

En este otro caso, la expectativa de los privados viene dada por (9b):

$$(A16) \quad E_t^P \pi_{t+1} = \bar{a} + \bar{b} \rho r_t^n$$

Y si el banco central tiene SAL entonces su PLM viene dada por (10), realiza la regresión (11) y su expectativa de la inflación es como (12):

$$(A17) \quad \hat{E}_t^B \pi_{t+1} = a_{t-1} + b_{t-1} \rho r_t^n$$

Reemplazando (A16) y (A17) en (7) se obtiene ALM de la inflación:

$$(A18) \quad \pi_t = \bar{A} + \frac{\bar{B}\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \bar{C}a_{t-1} + \left( \bar{D} + \frac{\rho \bar{D}\bar{B}}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} + \bar{D}\rho b_{t-1} \right) r_t^n$$

Empleando el T-map de la PLM a la ALM y su ODE asociada (como se realizó en el anexo anterior), se obtienen las siguientes condiciones de E-S para que el aprendizaje del BC converja en el tiempo a la solución de expectativas racionales (REE):

**Proposición A2. Estabilidad de expectativas bajo aprendizaje estándar del Banco Central:** Considere el sistema dinámico (7), (A16), (A17), y (A18). Se tiene que la solución (8b) es E-stable si se cumple que:

$$(A19) \quad \phi_\pi > -\frac{1}{\kappa\sigma}$$

Debido a que los parámetros  $\kappa$ ,  $\sigma$  son positivos, se cumple la condición (A19) siempre que el parámetro de la regla de política sea  $\phi_\pi > 0$ . Sesto ocurre, el banco aprenderá con el tiempo el REE, porque al ser las expectativas de los privados racionales, no se necesita un ajuste adicional en las expectativas del banco para compensar el efecto que generan las expectativas de los privados sobre  $\pi_t$ , como lo explican Honkapohja and Mitra (2005, 2006).

## ANEXO 5

### ESTABILIDAD CUANDO EL BANCO CENTRAL TIENE EXPECTATIVAS RACIONALES Y LOS PRIVADOS APRENDEN DE LOS PRONÓSTICOS DEL BANCO

Si el BC tiene RE su pronóstico de la inflación será (A7). Después de calcularla, éste la anuncia a los privados. Estos a su vez, determinan cómo utilizar tal pronóstico  $E_t^B \pi_{t+1}$  para formar su propia expectativa, evaluando el desempeño histórico que ésta ha tenido. Como se presentó en la subsección 3.3, siguiendo a Muto (2011), la PLM de los privados será:

$$(A20) \quad \pi_t = c + dE_{t-1}^B \pi_t$$

Con  $c$  y  $d$  desconocidos. Entonces los privados realizan la siguiente regresión inicio de t:

$$(A21) \quad \pi_{t-1} = c_{t-1} + d_{t-1}E_{t-2}^B \pi_{t-1} + \hat{\xi}_{t-1}$$

Donde  $\hat{\xi}_{t-1}$  son los residuales estimados en tal regresión. Con base en  $c_{t-1}$  y  $d_{t-1}$  los privados generan su expectativa de la inflación usando el pronóstico anunciado por el BC:

$$(A22) \quad \hat{E}_t^P \pi_{t+1} = c_{t-1} + d_{t-1}E_t^B \pi_{t+1}$$

Reemplazando (A7) y (A22) en (7) se obtiene la ALM de la inflación:

$$(A23) \quad \pi_t = \bar{A} + \bar{B}c_{t-1} + \frac{\bar{A}(\bar{C} + \bar{B}d_{t-1})}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} + \left( \bar{D} + \frac{\rho\bar{D}(\bar{C} + \bar{B}d_{t-1})}{1 - \rho(\bar{B} + \bar{C})} \right) r_t^n$$

Debido a que la PLM de los privados no es de la forma MSV, se deben derivar los T-maps de las condiciones de ortogonalidad relevantes, como lo expone Branch (2004). Con base en (10) y (23) la ALM “proyectada” de los entes se puede expresar como<sup>38</sup>:

$$(A24) \quad \pi_t = T_c + T_d \left( \bar{a} + \bar{b} \rho r_{t-1}^n \right)$$

Por tanto, las condiciones de ortogonalidad en este caso son:

$$(A25a) \quad E \left[ 1 * \left( \pi_t - T_c - T_d \left( \bar{a} + \bar{b} \rho r_{t-1}^n \right) \right) \right] = 0$$

<sup>38</sup> Ver el procedimiento que emplea Muto (2011), sección 3.3.

$$(A25b) \quad E \left[ \left( \bar{a} + \bar{b} \rho r_{t-1}^n \right) \left( \pi_t - T_c - T_d \left( \bar{a} + \bar{b} \rho r_{t-1}^n \right) \right) \right] = 0$$

Reemplazando (A23) en (A25a) y (A25b), se obtienen:

$$(A26) \quad T_c(c_{t-1}) = \bar{A} + \bar{B}c_{t-1} + \frac{\bar{A}}{1 - (\bar{B} + \bar{C})} \left[ \bar{C} + \bar{B}d_{t-1} - \rho \bar{B}(d_{t-1} - 1) + 1 \right]$$

$$(A27) \quad T_d(d_{t-1}) = \rho \bar{B}(d_{t-1} - 1) + 1$$

El equilibrio se puede derivar como los puntos fijos de los T-maps, ver Evans and Honkapohja (2001). Usando (A24), (A26) y (A27), se encuentra que los coeficientes son  $\bar{c} = 0$  y  $\bar{d} = 1$  obteniéndose el mismo REE de (8b) con la ALM proyectada (A24). Así, los agentes privados igualan su pronóstico al del BC en el equilibrio, aún si ellos no siguen perfectamente ese pronóstico durante la transición, es decir en el equilibrio se cumple que:  $\hat{E}_t^P \pi_{t+1} = E_t^B \pi_{t+1}$ . Las condiciones de estabilidad de expectativas se obtienen con los T-map (A26) y (A27) y sus ODE asociadas, siguiendo el proceso del anexo 3, obteniéndose el siguiente resultado:

**Proposición A3. Estabilidad de expectativas cuando los privados aprenden de los pronósticos de expectativas racionales del Banco Central:** Considere el sistema dinámico (7), (A7), (A24), (A26), y (A27). Se tiene que la solución (8b) es E-stable si se cumple que:

$$(A28) \quad \kappa\sigma + \beta < 1$$

Por tanto, se encuentra la misma condición que en el caso del anexo 3, donde el banco central tenía RE, al igual que en este caso, pero los privados no aprendían de los pronósticos del BC, sino que ellos tenían aprendizaje econométrico. La razón por la cual se llega a la misma condición es que en ambos modelos el banco central tiene expectativas racionales y el error de pronóstico que está cometiendo, en el modelo de este anexo se lo transmite directamente a los agentes privados por medio de su anuncio, mientras que en el modelo del anexo 3 se lo está transmitiendo indirectamente a través de la ALM.