

Klein, Ingo

Working Paper
Rüschendorf-Copulas

Diskussionspapier, No. 56/2004

Provided in Cooperation with:

Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nuremberg, Chair of Statistics and Econometrics

Suggested Citation: Klein, Ingo (2004) : Rüschendorf-Copulas, Diskussionspapier, No. 56/2004, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie, Nürnberg

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/29603>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Wirtschafts-und Sozialwissenschaftliche Fakultät

Diskussionspapier

56 / 2004

Rüschendorf-Copulas

Ingo Klein



Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Lange Gasse 20 · D-90403 Nürnberg

Rüschendorf-Copulas

Ingo Klein

Lehrstuhl für Statistik und Ökonometrie
Universität Erlangen-Nürnberg
ingo.klein@wiso.uni-erlangen.de

5. Mai 2003

1

- Mari, D.D. & Kotz, S. (2001). *Correlation and Dependence*. Imperial College Press, London.
- **Rüschendorf**, L. (1985). Construction of Multivariate Distributions with Given Marginals. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **37**, 225-233.
- Shubina, M. & Lee, M.-L. T. (2004). On maximum attainable correlation and other measures of dependence for the Sarmanov family of bivariate distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **33**, 1031-1052.

Literatur:

- Amblard, C. & Girard, S. (2000). Symmetry and dependence within a semiparametric family of bivariate copulas. Working Paper **CRM-2690**, University of Montreal.
- Fischer, M. & Klein, I. (2003). Constructing symmetric generalized FGM copulas by means of certain univariate distributions. Working Paper **50**, University of Erlangen-Nuremberg.
- Lee, M.-L. T. (1996). Properties and applications of the Sarmanov family of bivariate distributions. *Communications in Statistics - Theory and Methods* **25**, 1207-1222.
- Long, D. & Krzysztofowicz, R. (1995). A family of bivariate densities constructed from marginals. *Journal of the American Statistical Association* **90**, 739-746.

2

Rüschendorf-Copulas I: Bivariater Fall Definition

3

4

Bivariate Copula

Seien U und V über $[0, 1]$ rechteckverteilt, dann heißt

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) \text{ für } u, v \in [0, 1].$$

Copula.

Beachte:

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

ist die Copuladichte.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

$$P(V \leq v | U \leq u) = \frac{C(u, v)}{u}.$$

5

$$\begin{aligned} P(V \leq v | U = u) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{P(V \leq v < u - \varepsilon < U \leq u + \varepsilon)}{P(u - \varepsilon < U \leq u + \varepsilon)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \end{aligned}$$

Überschreitungswahrscheinlichkeiten:

$$\bar{C}(u, v) = P(U \geq u, V \geq v) = 1 - 2u + C(u, v).$$

Survival-Copula:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

6

Beispiele:

1. **Unabhängigkeitscopula:** $\Pi(u, v) = uv$
2. **Minimumscopula:** $W(u, v) = \max(0, u + v - 1)$
3. **Maximumscopula:** $M(u, v) = \min(u, v)$

Konvexe Kombinationen

Wenn C_1 und C_2 zwei Copulas sind, ist auch

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \theta C_1(u, v) + (1 - \theta) C_2(u, v) \\ &= C_2(u, v) + \theta(C_1(u, v) - C_2(u, v)) \\ &= C_2(u, v) + (-\theta)(C_2(u, v) - C_1(u, v)). \end{aligned}$$

eine Copula für $\theta \in [0, 1]$.

Beispiel: B11-Copula von Joe

$$C(u, v) = \theta \min(u, v) + (1 - \theta)uv = uv + \theta(\min(u, v) - uv).$$

7

8

Farlie-Gumbel-Morgenstern- (FGM-) Copula

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$$

für $\theta \in [-1, 1]$.

9

Rüschendorf-Copula

$$C(u, v) = uv + \theta F^1(u, v)$$

mit

$$F^1(0, v) = F^1(u, 0) = 0 \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

$$F^1(1, v) = F^1(u, 1) = 0 \text{ für } u, v \in [0, 1].$$

und für $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ und $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$

$$(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq -\theta(F^1(u_2, v_2) - F^1(u_1, v_2) - F^1(u_2, v_1) + F^1(u_1, v_1))$$

10

Rüschendorf-Copuladichte

$$c(u, v) = 1 + \theta f^1(u, v)$$

mit

$$f^1(u, v) = \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

D.h. insbesondere

$$\int_0^1 f^1(u, v) du = \int_0^1 f^1(u, v) dv = 0 \text{ für } u, v \in [0, 1].$$

Problem: Es muß θ existieren, so daß

$$c(u, v) \geq 0 \text{ für } u, v \in [0, 1].$$

Beispiele:

11

• Konvexe Kombination: $f^1(u, v) = c_1(u, v) - c_2(u, v)$ für $\theta \in [0, 1]$,

• FGM: $f^1(u, v) = (1 - 2u(1 - 2v))$ für $\theta \in [-1, 1]$.

BEACHTE: Jede Copuladichte besitzt mittels

$$c(u, v) = 1 + f^1(u, v) \text{ mit } f^1(u, v) = c(u, v) - 1$$

eine **Rüschendorf-Darstellung** mit Parameter $\theta = 1$.

12

Covariance Characteristic und Scaler

$$\text{Cov}(U, V) = \theta \int_0^1 \int_0^1 uv f^1(u, v) dudv.$$

Long & Kizydztofowicz bezeichnen

- θ als "covariance scaler"
- und die Funktion f^1 als "covariance characteristic".

Beide bestimmen **gemeinsam** die Abhängigkeitsstruktur der zugehörigen Copula.

BEACHT: θ spielt aber nicht allgemein die Rolle eines Abhängigkeitsparameters.

13

2. Falls $a \rightarrow \infty$ folgt damit

$$\Theta(f_1) = [-1/b, 0].$$

D.h. θ kann **nur negative** Werte annehmen.

3. Falls $b \rightarrow \infty$ folgt damit

$$\Theta(f_1) = [0, 1/a].$$

D.h. θ kann **nur positive** Werte annehmen.

4. Falls $a \rightarrow \infty$ und $b \rightarrow \infty$ folgt

$$\Theta(f_1) = \{0\}.$$

D.h. $\theta = 0$, so daß nur die Unabhängigkeitscopula vorliegen kann.

15

Parameterraum

Allgemein kann man für eine vorgegebene Funktion f^1

$$\Theta(f^1) = \{\theta \mid 1 + \theta f^1(u, v) \geq 0, \text{ für alle } 0 \leq u, v \leq 1\}$$

den **Parameterraum** betrachten, für den das Konstruktionsprinzip von Rüschendorf eine Copuladichte liefert.

Fällunterscheidung:

1. Wenn $-a = \inf_{[0,1]^2} \{f^1(u, v)\}$ und $b = \sup_{[0,1]^2} \{f^1(uv)\}$ (d.h. f^1 ist **beidseitig beschränkt**), dann folgt

$$\Theta(f_1) = [-1/b, 1/a].$$

14

Häufig werden Parameterbereiche präferiert, die durch -1 bzw. $+1$ beschränkt werden.

Dies läßt sich für spezielle Copulas sehr einfach erreichen:

1. Wenn f^1 **beidseitig beschränkt** ist, dann erfüllt

$$f^1(u, v; a, b) = \frac{f^1(u, v)}{\max\{a, b\}} \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

für $\theta \in [-1, 1]$ die Eigenschaften, um eine Copuladichte zu generieren.

Beispiel: FGM-Copula

$$-1 \leq f^1(u, v) = (1 - 2u)(1 - 2v) \leq 1.$$

16

2. Ist f^1 nur **einseitig beschränkt**, dann lassen sich

$$f^1(u, v; a) = \frac{f^1(u, v)}{a} \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

bzw.

$$f^1(u, v; b) = \frac{f^1(u, v)}{b} \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

betrachten, damit für $0 \leq \theta \leq 1$ bzw. $-1 \leq \theta \leq 0$ die Eigenschaften einer Copuladichte erfüllt sind.

17

Beispiele von Rüschemdorf-Copulas

- Auf der Diagonalen konzentrierte Copulas
- Copulas mit polygonaler Kovarianzcharakteristik
- Allgemeine Produktcopulas
- Semiparametrische Produktcopulas nach Amblard & Girard
- Dichtegenerierte Produktcopulas nach Fischer

19

Verallgemeinerung des Konstruktionsprinzips

Rüschemdorf hat gezeigt, daß sich die Funktion f^1 einfach als

$$f^1(u, v) = f(u, v) - \int_0^1 f(u, v) du - \int_0^1 f(u, v) dv + \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) dudv$$

konstruieren läßt, wenn f eine **beliebige** über dem Einheitsquadrat nicht-negative und integrierbare Funktion ist.

Bezeichne $F(u, v) = \int_0^u \int_0^v f(x, y) dy dx$, dann ist

$$F^1(u, v) = F(u, v) - uF(1, v) - vF(u, 1) + uvF(1, 1)$$

mit z.B.

$$F^1(u, 1) = F(u, 1) - uF(1, 1) - F(u, 1) + uF(1, 1) = 0.$$

18

Auf der Diagonalen konzentrierte Copula (DC-Copula)

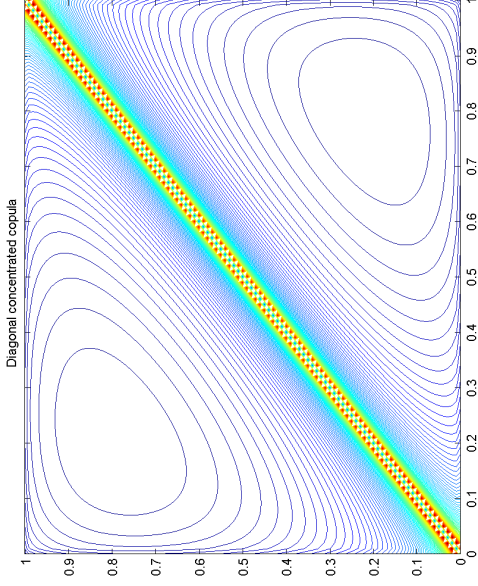
$$f(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|u-v|}} \quad 0 < u \neq v < 1,$$

so daß

$$f^1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{|u-v|}} - 2\sqrt{u-2\sqrt{1-u}-2\sqrt{v}-2\sqrt{1-v}} + \frac{8}{3}.$$

BEACHTEN: Singularität für $u = v$.

20



$$F^1(u, v) = \frac{4}{3} \begin{cases} u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u)u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (v-u)^{3/2} - v - u + 2uv & \text{für } 0 \leq u \leq v \leq 1 \\ u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u)u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (u-v)^{3/2} - v - u + 2uv & \text{für } 0 \leq v \leq u \leq 1 \end{cases}$$

BEACHTE: Da f und entsprechend f^1 nach oben nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt sind, muß

$$\Theta(f^1) = [0, 1/a]$$

sein mit $-a = \inf_{[0,1]^2} \{f^1(u, v)\} = -4/3$.

21

22

Copulas mit polygonaler Kovarianzcharakteristik (PCC-Copula)

$$f^1(u, v) = f_1^1(u, v) + f_2^1(u, v) - 2K(1)$$

mit

$$f_1^1(u, v) = \begin{cases} \kappa(u-v) & \text{für } u \geq v \\ \kappa(v-u) & \text{für } v \geq u \end{cases}$$

und

$$f_2^1(u, v) = \begin{cases} \kappa(u+v) & \text{für } u \leq 1-v \\ \kappa(2-u-v) & \text{für } u \geq 1-u, \end{cases}$$

wobei κ eine auf $[0, 1]$ stetige und monotone Funktion und

$$K(\omega) = \int_0^\omega \kappa(t) dt.$$

23

BEACHTE: Isoquanten verlaufen parallel zur Hauptdiagonalen bzw. zur Gegendiagonalen des Einheitsquadrates.

Long & Krzyztofowicz bezeichnen κ als **regression characteristic**, da die zweite Ableitung, d.h. die Krümmung der Regressionskurve $E(U|V = v)$ nur durch κ bestimmt wird:

$$\frac{d^2 E(U|V = v)}{dv^2} = 2\theta(\kappa(v) - \kappa(1-v)) \quad \text{für } 0 \leq v \leq 1.$$

24

PCC-Copula:

$$C(u, v) = uv + \theta \begin{cases} \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(u-v) - 2uv\tilde{K}(1) & \text{für } u \geq v, u \leq 1-v \\ \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(v-u) - 2uv\tilde{K}(1) & \text{für } u \leq v, u \leq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(u-v) - 2(1-u)(1-v)\tilde{K}(1) & \text{für } u \geq v, u \geq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(v-u) - 2(1-u)(1-v)\tilde{K}(1) & \text{für } u \leq v, u \geq 1-v. \end{cases}$$

mit $\tilde{K}(\omega) = \int_0^\omega K(t)dt$.

25

Für die "power regression characteristic" sind speziell

$$K(\omega) = \frac{1}{\beta+1} (1 - (1-\omega)^{\beta+1})$$

und

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)} (-1 + (\beta+2)\omega + (1-\omega)^{\beta+2})$$

für $0 \leq \omega \leq 1$.

27

Copula mit Power Regression Characteristic (PRC-Copula)

Power Regression Characteristic:

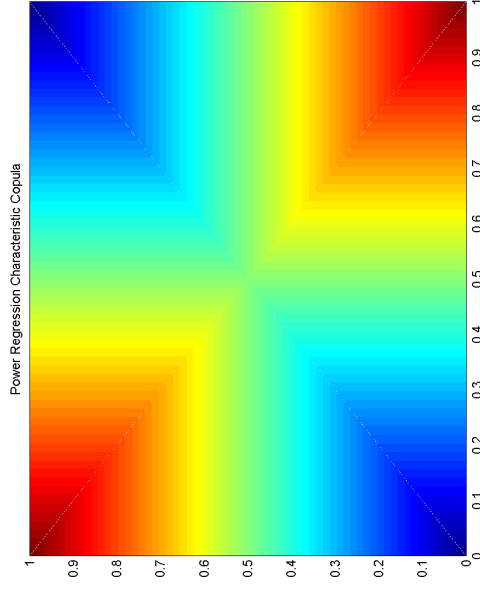
$$\kappa(\omega) = (1-\omega)^\beta \quad \text{für } 0 \leq \omega \leq 1, \beta > 0$$

Je nach dem Wert für β ergibt sich ein konkaver ($0 < \beta < 1$), linear ($\beta = 1$) oder konvexer ($\beta > 1$) Verlauf von κ .

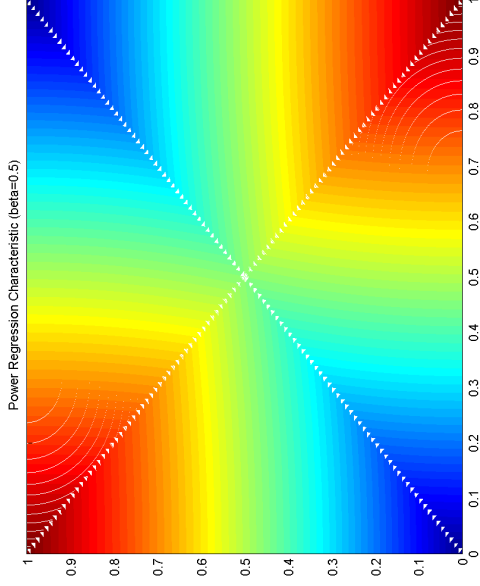
Parameterraum für θ :

$$\Theta(\kappa) = \left[-\frac{\beta+1}{2\beta}, \frac{\beta+1}{2} \right].$$

26



28



29

Allgemeine Produktcopulas (Sarmanov-Copulas)

$$\begin{aligned}
 F^{-1}(u, v) &= \phi(u)\psi(v) - u\psi(v)\phi(1) - v\phi(u)\psi(1) + uv\phi(1)\psi(1) \\
 &= (\phi(u) - u\phi(1))(\psi(v) - v\psi(1))
 \end{aligned}$$

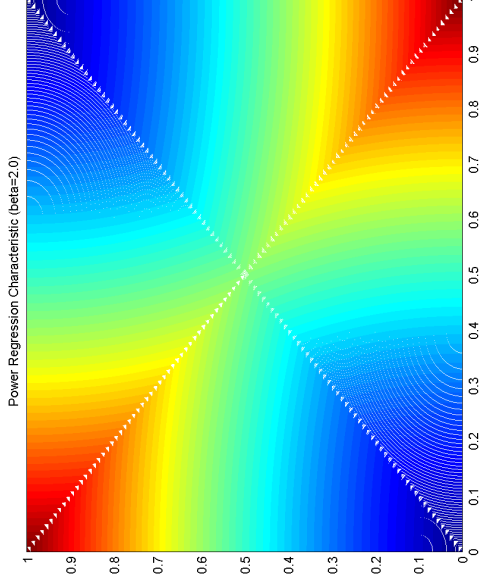
für ϕ und ψ Funktionen auf $[0, 1]$ mit $\phi(1) < \infty$ und $\psi(1) < \infty$.

Sind ϕ und ψ auf $[0, 1]$ differenzierbar mit beschränkten Ableitungen ϕ' und ψ' , dann existiert ein θ , so daß

$$c(u, v; \phi, \psi) = 1 + \theta(\phi'(u) - \phi(1))(\psi'(v) - \psi(1))$$

eine Copuladichte ist.

31



30

Der **Vorteil der Produktcopula** besteht darin, daß der Parameter nicht nur die Rolle eines Kovarianzskalierers spielt, der im wesentlichen das Vorzeichen der Abhängigkeit determiniert, sondern komplett die Abhängigkeitsstruktur festlegt.

Wenn $-a = \inf_{[0,1]^2} \{(\phi'(u) - \phi(1))(\psi'(v) - \psi(1))\} > -\infty$ und $b = \sup_{[0,1]^2} \{(\phi'(u)\psi'(v))\} < \infty$, dann ist

$$\Theta(f^1) = [-1/b, 1/a].$$

32

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\phi'(u) = u^k \text{ und } \psi'(v) = v^q \text{ f\"ur } u, v \in [0, 1].$$

Dann sind

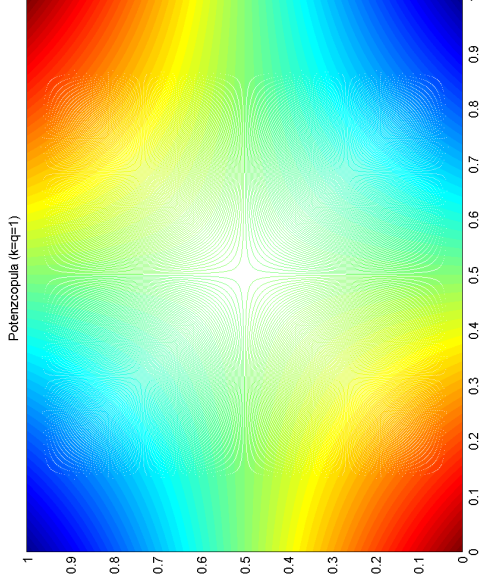
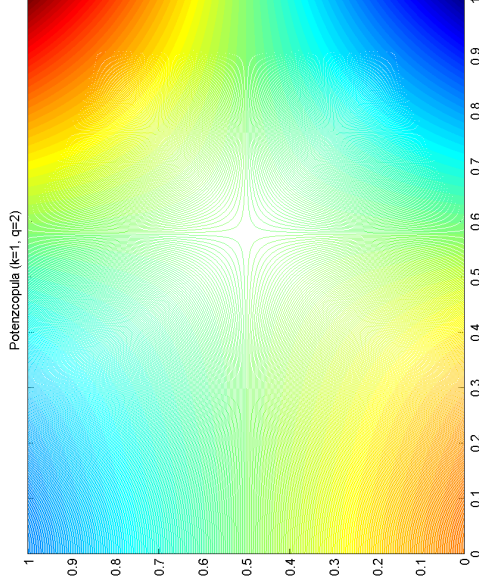
$$\phi(u) = \frac{1}{k+1}u^{k+1} \text{ und } \psi(v) = \frac{1}{q+1}v^{q+1} \text{ f\"ur } u, v \in [0, 1],$$

so da\B $\phi(1) = 1/(k+1)$ und $\psi(1) = 1/(q+1)$. Die zugeh\"orige Copula-dichte ist dann

$$c(u, v; k, q) = 1 + \theta \left(u^k - \frac{1}{k+1} \right) \left(v^q - \frac{1}{q+1} \right)$$

f\"ur

$$-\frac{(k+1)(q+1)}{kq} \leq \theta \leq \min \left\{ \frac{(k+1)(q+1)}{k}, \frac{(k+1)(q+1)}{q} \right\}.$$



BEISPIEL: Produktcopula mit festem Nullpunkt

F\"ur $k \geq 0$ sei

$$\phi(u; k) = \frac{1}{k+1}u^{k+1} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi u)$$

mit $\phi(0) = \phi(1) = 0$ und

$$\phi'(u; k) = u^k - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi u) + \frac{1}{k+1}u^{k+1} \cos(2\pi u).$$

Beachte: $\phi'(u; k) = 0$ f\"ur $u = 0, 1$ und f\"ur $u = 0.5$. Es wird die Produktcopula

$$c(u, v; k, q) = 1 + \theta u^k \cos(2\pi u) v^q \cos(2\pi v)$$

betrachtet.

BEISPIEL: Produktcopula mit variablem Nullpunkt

$$\phi(u; k) = u(1 - u)(1 - ku)$$

mit den Nullstellen $u = 0, 1$ und $u = 1/k$. Es ist

$$\phi'(u; k) = 3ku^2 - 2u(k + 1) + 1.$$

Es wird die Produktcopula

$$C(u, v; k, q) = 1 + \theta u(1 - u)(1 - kv)v(1 - v)(1 - qv)$$

betrachtet.

37

Amblard & Girard (2000) betrachten den Spezialfall einer Funktion ϕ^* mit $\phi^*(1) = 0$ und fordern weiterhin, daß $\Theta = [-1, 1]$ ist.

Wenn ϕ eine beidseitig beschränkte Ableitung ϕ' besitzt, dann stellen diese Forderungen keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da

$$\phi^*(u) = \frac{\phi(u) - u\phi(1)}{\max\{a, b\}}$$

mit

$$\begin{aligned} -a &= \inf_{[0,1]^2} \{(\phi'(u) - \phi(1))(\phi'(v) - \phi(1))\} \\ b &= \sup_{[0,1]^2} \{(\phi'(u) - \phi(1))(\phi'(v) - \phi(1))\} \end{aligned}$$

immer die Forderungen von Amblard & Girard erfüllt.

39

Semiparametrische Produktcopula nach Amblard & Girard

Spezialfall einer Produktcopula mit $\psi(u) = \phi(u)$:

$$C(u, v; \phi) = uv + \theta(\phi(u) - u\phi(1))(\phi(v) - v\phi(1))$$

bzw.

$$c(u, v; \phi) = 1 + \theta(\phi'(u) - \phi(1))(\phi'(v) - \phi(1)),$$

wenn ein entsprechendes θ existiert.

38

Bestimmte Werte von θ sichern spezielle Eigenschaften von ϕ bzw. (falls existent) von deren Ableitung ϕ' :

1. Wenn es $\theta \neq 0$ gibt, so daß

$$C(u, v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v) \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

eine Copula ist, dann sind wegen $C(0, 0) = 0$ und $C(1, 1) = 1$

$$\phi(0) = 0 \text{ und } \phi(1) = 0.$$

2. Weiterhin ist für $\theta = -1$

$$(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) \geq -\theta(\phi(u_2) - \phi(u_1))(\phi(v_2) - \phi(v_1)),$$

so daß, wenn $u_i = v_i$, $i = 1, 2$ gesetzt wird, die Lipschitz-Bedingung

$$|u_2 - u_1| \geq |\phi(u_2) - \phi(u_1)| \text{ für alle } u_1, u_2 \in [0, 1]$$

40

gilt. Für $u_1 = 0$ und $u_1 = u \in [0, 1]$ ist zusätzlich

$$u \geq \phi(u).$$

Für $u_2 = 1$ und $u_1 = u \in [0, 1]$ ist mit $\phi(1) = 0$ (da $\theta = -1 \neq 0$):

$$1 - u \geq -\phi(u) \iff \phi(u) \leq 1 - u.$$

Insgesamt ist also $\phi(u) \leq \min\{u, 1 - u\}$ für $u \in [0, 1]$.

3. Ebenfalls für $\theta = -1$ ergibt sich für $u \in [0, 1]$:

$$1 - \phi'(u)^2 \geq 0 \iff |\phi'(u)| \leq 1$$

D.h. die **Ableitung von ϕ ist beidseitig beschränkt**.

41

Dichtegenerierte Produktcopula nach Fischer

Zur Konstruktion von Copulas nach dem Verfahren von Amblard & Girard eignen sich besonders solche Funktionen mit $\phi(0) = \phi(1) = 0$.

Prinzipiell besitzen viele Dichtefunktionen, deren Träger die reellen Zahlen sind und für die $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ gilt, diese Eigenschaften, wenn sie an der Stelle der Quantilsfunktion

$$\phi_f(u) = f(F^{-1}(u)) \text{ für } u \in (0, 1).$$

und der Grenzübergang

$$\phi_f(0) \equiv \lim_{u \rightarrow 0^+} \phi_f(u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \phi_f(u) \equiv \phi_f(1) = 0$$

betrachtet werden.

43

Somit läßt sich ϕ insbesondere dann näher charakterisieren, wenn $C(u, v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v)$ für $\theta = -1$ eine Copula ist.

O.B.d.A. lassen sich aber Funktionen ϕ betrachten, für die $C(u, v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v)$ für ein $\theta < 0$ eine Copula ist, da dann ein zugehöriges ϕ^* konstruiert werden kann, so daß $C(u, v) = uv + \theta\phi^*(u)\phi^*(v)$ für $\theta = -1$ eine Copula ist.

Hinreichend dafür ist, daß ϕ' nach oben beschränkt ist.

42

Die zugehörige Copula lautet für geeignete θ

$$C(u, v; \theta, f) = uv + \theta f(F^{-1}(u))f(F^{-1}(v)) \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

Die Copuladichte ist, sofern f differenzierbar ist:

$$c(u, v; \theta, f)(u, v) = 1 + \theta \left(-\frac{f'}{f}(F^{-1}(u)) \right) \left(-\frac{f'}{f}(F^{-1}(v)) \right) \text{ für } u, v \in [0, 1].$$

D.h. die Copuladichte wird durch die **Scorefunktion $-f'/f$** bestimmt.

Für die Existenz der Copula für $\theta = -1$ ist allerdings entscheidend, daß diese Scorefunktion nach oben beschränkt ist.

44

Damit kommen sofort einige Dichtefamilien nicht mehr in Frage. Zu ihnen gehört die **Power Exponential Family**

$$f(x) = k_1 \exp(-k_2|x|^{k_3}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

wobei $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ und $k_3 \geq 2$ so gewählt sind, daß $f(x)$ eine Dichte darstellt.

Die zugehörige Scorefunktion ist ein Polynom mindestens 1. Grades und beidseitig unbeschränkt.

Zu dieser Verteilungsfamilie gehört auch die Standardnormalverteilung.

45

46

Fischer (2003) behandelt die Beispiele der Laplace-, der logistischen, der hyperbolischen Sekant- und der Cauchy-Verteilung, die allesamt zu in der Literatur wohlbekanntesten Copulas führen.

Diese Funktionen sind sämtlich symmetrisch.

Das folgende Beispiel diskutiert mit der **Gumbelverteilung** eine asymmetrische Verteilung:

$$F(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

so daß $f(x) = e^{-x}F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

und $-\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$

sind.

D.h. die Scorefunktion besitzt den Wert 1 als kleinste obere Schranke, ist aber nach unten nicht beschränkt.

47

Mit der zugehörigen Quantilsfunktion

$$F^{-1}(u) = -\ln(-\ln(u)) \quad \text{für } u \in (0, 1]$$

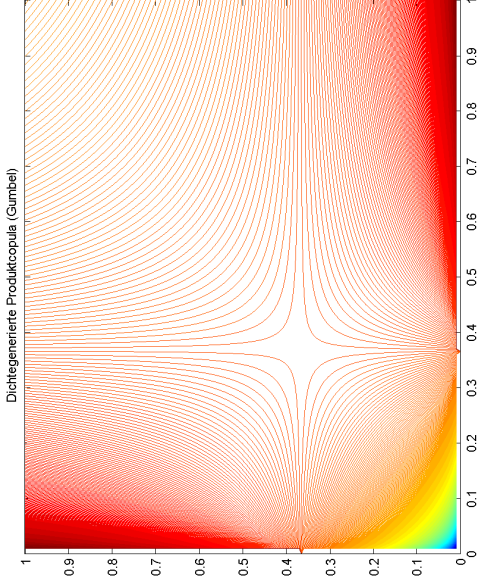
ist

$$\phi_f(u) = f(F^{-1}(u)) = u \ln u \quad \text{für } u \in (0, 1].$$

Für $u \rightarrow 0^+$ ist $\phi_f(0) \equiv \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$.

48

Welche Dichten generieren Potenzcopulas?



Die zu einer Funktion ϕ zugehörige Dichte f errechnet sich durch Lösen der **Differentialgleichung**

$$F'(F^{-1}(u)) = \phi(u) \iff F'(x) = \phi(F(x))$$

nach F .

Diese Differentialgleichung läßt sich z.B. für die in der Potenzcopula auftretenden Funktion

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1}u(1-u^k)$$

durch Überführen in einer **Bernoullische Differentialgleichung** explizit lösen.

49

50

Die Lösung lautet

$$F(x) = k \left(1 + Ce^{-k/(k+1)x} \right)^{-k},$$

wobei C derart, daß F die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion besitzt.

Beweis: Setze $y = F(x)$ und $y' = f(x)$. Dann ist zu lösen

$$y' - \frac{1}{k+1}y = -\frac{1}{k+1}y^{k+1}.$$

Division durch y^{k+1} ergibt

$$\frac{y'}{y^{k+1}} - \frac{1}{k+1}y^{-k} = -\frac{1}{k+1}.$$

Substituiert man $z = y^{-k}$, so ist $z' = -ky^{-(k+1)}y'$, so daß

$$-\frac{1}{k}z' - \frac{1}{k+1}z = -\frac{1}{k+1}.$$

Multipliziert man mit $-k$, so ergibt sich ein Spezialfall der einfachen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$z' + P(x)z = Q(x),$$

51

52

deren Lösung

$$z = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

lautet (siehe z.B. Bronstein & Semendjajew). Mit $P(x) = Q(x) = \frac{k}{k+1}$ ist

$$\begin{aligned} z &= e^{-k/(k+1)x} \left(\frac{k}{k+1} \int e^{k/(k+1)x} dx + C \right) \\ &= 1 + C e^{-k/(k+1)x}. \end{aligned}$$

Substituiert man $y = z^k$ zurück, so ist schließlich

$$y = \left(1 + C e^{-k/(k+1)x} \right)^{-k},$$

was zu zeigen war.

53

54

Rüschendorf-Copulas II: Bivariater Fall Eigenschaften

Eigenschaften

- Symmetrie
- Abhängigkeitseigenschaft
- Abhängigkeitsordnung
- Abhängigkeitsmaße
- Tailabhängigkeit

55

Symmetriekonzepte

1. **Austauschbarkeit:** X und Y heißen austauschbar, wenn (X, Y) und (Y, X) dieselbe Verteilung besitzen.
2. **Marginale Symmetrie:** (X, Y) heißt marginal symmetrisch um (a, b) , wenn die Verteilung von $X - a$ und $a - X$ bzw. $Y - b$ und $b - Y$ dieselbe Verteilung besitzen.
3. **Radiale Symmetrie:** (X, Y) heißen radialsymmetrisch um (a, b) , wenn $(X - a, Y - b)$ und $(a - X, b - Y)$ dieselbe Verteilung besitzen.
4. **Gemeinsame Symmetrie:** (X, Y) heißen gemeinsam symmetrisch um (a, b) , wenn $(X - a, Y - b)$ und $(a - X, b - Y)$ ($X - a, b - Y$) und $(a - X, Y - b)$ dieselbe Verteilung besitzen.

56

Spezialfall: Copulas

Da Copulas Verteilungsfunktionen zweier Zufallsvariablen U und V über $[0, 1]^2$ mit Rechteckverteilungen als Randverteilungen sind, liegt marginale Symmetrie von (U, V) um $(1/2, 1/2)$ vor.

Radiale Symmetrie ist gegeben, wenn

$$\begin{aligned} P(U - 1/2 \leq x, V - 1/2 \leq y) &= P(U \leq x + 1/2, V \leq y + 1/2) \\ &= P(1/2 - U \leq x, 1/2 - V \leq y) \\ &= P(U \geq 1/2 - x, V \geq 1/2 - y) \end{aligned}$$

für $x, y \in [-1/2, 1/2]$ sind.

Setze $u = x + 1/2$ und $v = y + 1/2$, dann ist bei radialer Symmetrie

$$C(u, v) = P(U \geq 1 - u, V \geq 1 - v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad \text{für } u, v \in [0, 1].$$

57

Symmetrie der Rüschemondorf-Copula

Für die Rüschemondorf-Copula liegt **Radialsymmetrie** vor, wenn $F^1(u, v) = F^1(1 - u, 1 - v)$ ist, da dann

$$\begin{aligned} C(u, v) &= uv + \theta F^1(u, v) \\ &= u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) + \theta F^1(1 - u, 1 - v) \\ &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \end{aligned}$$

für $0 \leq u, v \leq 1$ ist.

Gemeinsame Symmetrie einer Copula C liegt vor, wenn zusätzlich zur radialen Symmetrie

$$C(u, v) = u - C(u, 1 - v) = v - C(1 - u, v) \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

gilt.

58

BEISPIEL: Betrachte

$$F^1(u, v) = \min(u, v) - uv$$

für $0 \leq u, v \leq 1$.

Dann ist

$$F^1(1 - u, 1 - v) = \min(1 - u, 1 - v) - (1 - u)(1 - v)$$

Sei o.B.d.A. $u < v$, dann ist $1 - u > 1 - v$ und

$$\begin{aligned} F^1(1 - u, 1 - v) &= 1 - v - (1 - u)(1 - v) = (1 - v)(1 - (1 - u)) \\ &= u(1 - v) = \min(u, v) - uv = F^1(u, v). \end{aligned}$$

59

60

Gemeinsame Symmetrie der Rüschen-Copula ist gegeben, wenn

$$F^{-1}(u, v) = F^{-1}(1-u, 1-v) = -F^{-1}(u, 1-v) = -F^{-1}(1-u, v) \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

gelten, da dann z.B.

$$\begin{aligned} u - C(u, 1-v) &= u - u(1-v) - \theta F^{-1}(u, 1-v) = uv - \theta F^{-1}(u, 1-v) \\ &= uv + \theta F^{-1}(u, v) = C(u, v) \end{aligned}$$

für $u, v \in [0, 1]$ ist. Analog kann $v - C(1-u, v) = C(u, v)$ untersucht werden.

BEISPIEL: Betrachte die FGM-Copula mit

$$F^{-1}(u, v) = u(1-u)v(1-v).$$

Dann sind

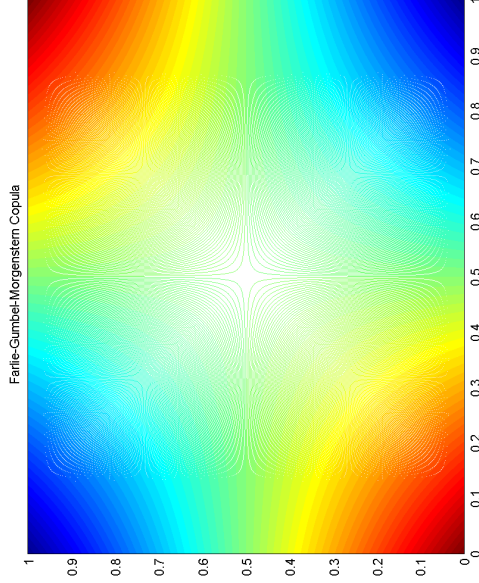
$$\begin{aligned} F^{-1}(u, v) &= u(1-u)v(1-v) = (1-u)u(1-v)v = F^{-1}(1-u, 1-v) \\ F^{-1}(u, v) &= u(1-u)(1-v)v = F^{-1}(u, 1-v) \\ F^{-1}(u, v) &= (1-u)uv(1-v) = F^{-1}(1-u, v), \end{aligned}$$

so daß

$$F^{-1}(u, v) \neq -F^{-1}(u, 1-v) \text{ für } u, v \neq 1/2$$

ist.

D.h. die FGM-Copula ist zwar radial, aber nicht gemeinsam symmetrisch.



BEISPIEL: Betrachte eine verallgemeinerte FGM-Copula mit

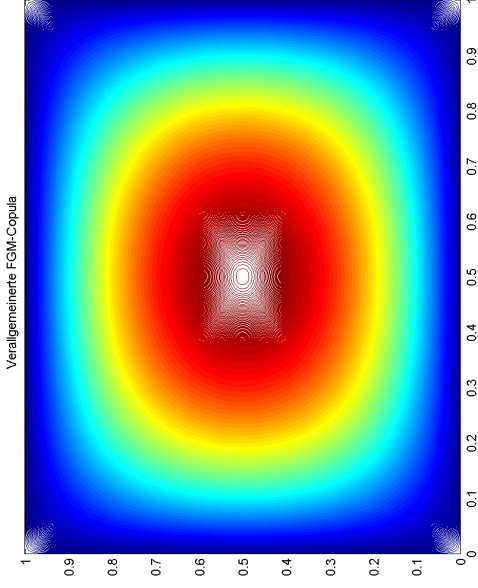
$$F^{-1}(u, v) = u(1-u)(1-2u)v(1-v)(1-2v).$$

Beachte: $1-2u = -(1-2(1-u))$.

Damit ist zwar $F^{-1}(u, v) = F^{-1}(1-u, 1-v)$. Es gilt aber auch $F^{-1}(u, v) = -F^{-1}(u, 1-v) = -F^{-1}(1-u, v)$.

D.h. diese verallgemeinerte FGM-Copula ist gemeinsam symmetrisch.

Symmetrie der "diagonal concentrated copula"



65

Für

$$F^1(u, v) = \frac{4}{3} \begin{cases} u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u) + u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (v-u) \\ -v-u + 2uv \\ u^{3/2}(1-v) + v^{3/2}(1-u)u(1-v)^{3/2} + v(1-u)^{3/2} - (u-v)^{3/2} \\ -v-u + 2uv \end{cases}$$

ist offensichtlich $F^1(u, v) = F^1(1-u, 1-v)$, da aus $0 \leq u \leq v \leq 1$ $0 \leq 1-v \leq 1-u \leq 1$ folgt und $(1-u-(1-v)) = v-u$ gilt.

66

Weiterhin ist

$$F^1(u, 1-v) = \frac{4}{3} \begin{cases} u^{3/2}v + (1-v)^{3/2}(1-u) + uv^{3/2} + (1-v)(1-u)^{3/2} \\ -((1-v)-u)^{3/2} - (1-v) - u + 2u(1-v) \\ \text{für } 0 \leq u \leq 1-v \leq 1 \\ u^{3/2}v + (1-v)^{3/2}(1-u)uv^{3/2} + (1-v)(1-u)^{3/2} \\ -(u-(1-v))^{3/2} - (1-v) - u + 2u(1-v) \\ \text{für } 0 \leq 1-v \leq u \leq 1 \end{cases}$$

67

Setze $u = 1/4$ und $v = 1/3$, dann sind

$$F^1(u, v) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = 0.1395$$

und

$$F^1(u, 1-v) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \oplus^2 \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} + \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{3/2} \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \\ - \left(\frac{5}{12}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) + 2 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = 0.0782,$$

womit $F^1(1/4, 1/3) \neq -F^1(1/4, 2/3)$, so daß **keine** gemeinsame Symmetrie vorliegt.

68

Symmetrie der PCC-Copula

Für die "Polygonal Covariance Characteristic"-Copula ist

$$F^1(u, v) = \begin{cases} \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(u-v) - 2uvK(1) & \text{für } u \geq v, u \leq 1-v \\ \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(v-u) - 2uvK(1) & \text{für } u \leq v, u \leq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(u-v) - 2(1-u)(1-v)K(1) & \text{für } u \leq v, u \geq 1-v \\ \tilde{K}(2-(u+v)) - \tilde{K}(v-u) - 2(1-u)(1-v)K(1) & \text{für } u \geq v, u \geq 1-v. \end{cases}$$

69

Symmetrie der allgemeinen Produktcopula

Betrachte $C(u, v; \phi, \psi) = uv + \theta\phi(u)\psi(v)$ für $u, v \in [0, 1]$. Somit ist $F^1(u, v) = \phi(u)\psi(v)$.

Hinreichende und notwendige Bedingung für die radiale Symmetrie von C ist $F^1(u, v) = F^1(1-u, 1-v)$ für $u, v \in [0, 1]$, d.h. $\phi(u)\psi(v) = \phi(1-u)\psi(1-v)$.

Hinreichende Bedingungen für radiale Symmetrie sind offensichtlich $\phi(u) = \phi(1-u)$ und $\psi(v) = \psi(1-v)$ bzw. $\phi(u) = -\phi(1-u)$ und $\psi(v) = -\psi(1-v)$.

Ob diese Bedingungen auch notwendig sind, diskutiert die folgende Fallunterscheidung:

Für $u \geq v$ und $u \leq 1-v$ sind, ist $1-u \leq 1-v$ und $1-u \geq 1-(1-v)$, so daß

$$\begin{aligned} F^1(1-u, 1-v) &= \tilde{K}(2-(1-u+(1-v))) - \tilde{K}(1-v-(1-u)) \\ &\quad - 2(1-(1-u))(1-(1-v))K(1) \\ &= \tilde{K}(u+v) - \tilde{K}(u-v) - 2uvK(1) = F^1(u, v). \end{aligned}$$

Analog lassen sich die anderen drei Fälle abarbeiten, so daß die PCC-Copula für jede Wahl von κ **radial symmetrisch** ist.

Allerdings lassen sich wieder sehr einfach u und v derart wählen, daß $F^1(u, v) \neq -F^1(u, 1-v)$, womit die PCC-Copula im allgemeinen **keine** gemeinsame Symmetrie aufweist.

Diese Ergebnisse gelten natürlich insbesondere für den Spezialfall der "Power Regression Characteristic"-Copula.

70

1. Ist $\phi(1/2) \neq 0$ folgt aus $\phi(u)\psi(v) = \phi(1-u)\psi(1-v)$ für $u, v \in [0, 1]$

$$\psi(v) = \psi(1-v) \quad \text{für } v \in [0, 1].$$

Dann ist aber auch $\phi(u) = \phi(1-u)$. Analog verhält es sich, wenn $\psi(1/2) \neq 0$ ist. Somit ist im Falle $\phi(1/2) \neq 0$ oder $\psi(1/2) \neq 0$ notwendig für radiale Symmetrie, daß

$$\phi(u) = \phi(1-u) \quad \text{und} \quad \psi(v) = \psi(1-v) \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

gelten.

2. Wenn $\phi(1/2) = \psi(1/2) = 0$ ist und es existiert ein $u^* \in [0, 1]$ oder ein $v^* \in [0, 1]$ mit $\phi(u^*) = \phi(1-u^*)$ oder $\psi(v^*) = \psi(1-v^*)$, dann sind offensichtlich ebenfalls

$$\phi(u) = \phi(1-u) \quad \text{und} \quad \psi(v) = \psi(1-v) \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

71

72

notwendig sein.

3. Verbleibt der Fall $\phi(1/2) = \psi(1/2) = 0$ und $\phi(u) \neq \phi(1-u)$ und $\psi(u) \neq \psi(1-u)$ für $u \neq 1/2$. Existiert ein $u^* \in [0, 1]$ oder $v^* \in [0, 1]$ mit $\phi(u^*) = -\phi(1-u^*)$ oder $\psi(v^*) = \psi(1-v^*)$, dann sind

$$\phi(u) = -\phi(1-u) \text{ und } \psi(v) = -\psi(1-v) \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

notwendig für radiale Symmetrie.

4. Schließlich gibt es noch den Fall $\phi(1/2) = \psi(1/2) = 0$ und $|\phi(u)| \neq |\phi(1-u)|$ und $|\psi(u)| \neq |\psi(1-u)|$ für $u \neq 1/2$. Dann ist

$$\phi(u)\psi(v) = \phi(1-u)\psi(1-v) \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

notwendig für radiale Symmetrie.

73

Somit folgt mit $\phi(1/2) \neq 0$ bzw. $\psi(1/2) \neq 0$, daß **keine gemeinsame Symmetrie** vorliegen kann.

75

Es sind weiterhin

$$F^{-1}(u, v) = -F^{-1}(u, 1-v) \iff \phi(u)\psi(v) + \psi(1-v) = 0$$

und

$$F^{-1}(u, v) = -F^{-1}(1-u, v) \iff \psi(v)\phi(u) + \phi(1-u) = 0$$

für alle $u, v \in [0, 1]$.

Wenn es ein $u^* \in [0, 1]$ und ein $v^* \in [0, 1]$ gibt mit $\phi(u^*) \neq 0$ und $\psi(v^*) \neq 0$, dann ist hinreichend und notwendig für die gemeinsame Symmetrie von $C(u, v; \phi, \psi)$, daß

$$\phi(u) = -\phi(1-u) \text{ und } \psi(v) = -\psi(1-v) \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

gelten.

74

Spezialfall: Potenzcopula

Wir betrachten die Potenzcopula mit

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1}u(u^k-1) \text{ und } \psi(v) = \frac{1}{q+1}v(v^q-1) \text{ für } u, v \in [0, 1].$$

Es sind $\phi(1/2) \neq 0$ und $\psi(1/2) \neq 0$. Damit kann **keine gemeinsame Symmetrie** der Produktcopula vorliegen.

Für radiale Symmetrie müssen

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1}u(u^k-1) = \frac{1}{k+1}(1-u)((1-u)^k-1) = \phi(1-u)$$

für alle $u \in [0, 1]$ sein.

76

Dies kann aber nur sein, wenn

$$u^{k+1} - 2u + 1 = (1 - u)^{k+1} \quad u \in [0, 1]$$

ist, was nur für $k = 1$ erfüllbar ist.

D.h. **nur**

$$\phi(u) = \frac{1}{2}u(u-1) \quad \text{und} \quad \psi(v) = \frac{1}{2}v(v-1) \quad \text{für } u, v \in [0, 1].$$

liefert eine radial symmetrische Copula.

77

Symmetrie der Produktcopula nach Amblard & Girard

Amblard & Girard (2000) diskutieren ebenfalls radiale und gemeinsame Symmetrie ihrer semiparametrischen Copula $C(u, v) = uv + \theta\phi(u)\phi(v)$.

Als Spezialfall der allgemeinen Produktcopula ergibt sich sofort, daß hinreichend für radiale Symmetrie ist, daß $\phi(u) = \phi(1-u)$ für $u \in [0, 1]$ oder $\phi(u) = -\phi(1-u)$ für $u \in [0, 1]$ gelten.

Da $\phi(u)^2 = \phi(1-u)^2$ für $u \in [0, 1]$ ist, folgt für $u^* \in [0, 1]$, daß entweder $\phi(u^*) = \phi(1-u^*)$ oder $\phi(u^*) = -\phi(1-u^*)$ sind.

78

Damit entfällt der vierte Fall, in dem für die allgemeine Produktcopula nicht gezeigt werden konnte, daß

$$\phi(u) = \phi(1-u) \quad \text{und} \quad \psi(v) = \psi(1-v) \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

oder

$$\phi(u) = -\phi(1-u) \quad \text{und} \quad \psi(v) = -\psi(1-v) \quad \text{für } u, v \in [0, 1]$$

notwendig für radiale Symmetrie sind.

Damit ist $\phi(u) = \phi(1-u)$ für $u \in [0, 1]$ oder $\phi(u) = -\phi(1-u)$ für $u \in [0, 1]$ hinreichend und notwendig für radiale Symmetrie von $C(u, v; \phi)$.

Als hinreichend und notwendig für gemeinsame Symmetrie erweist sich die Bedingung $\phi(u) = -\phi(1-u)$ für $u \in [0, 1]$.

79

Amblard & Girard (2000) geben einige Beispiele für die Funktion ϕ an, die sich bez. radialer und gemeinsamer Symmetrie klassifizieren lassen:

1. $\phi(u) = u(1-u)$ liefert radiale, aber keine gemeinsame Symmetrie für $-1 \leq \theta \leq 1$.
2. $\phi(u) = u(1-u)(1-2u)$ ergibt eine Copula mit gemeinsamer Symmetrie für $-1 \leq \theta \leq 1$.
3. $\phi(u) = -u \ln u$ führt zu keiner radial symmetrischen Copula für $0 \leq \theta \leq 0.3769$.

80

Produktcopula nach Fisher

Der Ansatz von Fisher schließt zunächst gemeinsam symmetrische Copulas aus, da $-f(F^{-1}(1-u)) \leq 0$ für alle $u \in [0, 1]$ sein muß.

Ausgehend von einer um 0 symmetrischen Dichtefunktion ist allerdings

$$f(F^{-1}(u)) = f(F^{-1}(1-u)) \text{ für } u \in [0, 1],$$

so daß dann radiale Symmetrie vorliegen muß. Umgekehrt folgt aus dieser Bedingung, daß die zugrunde liegende Dichte symmetrisch um 0 sein muß.

81

4. **RTI(Y|X)**: Y heißt "right tail increasing in X ", wenn gilt:

$$P(Y > y | X > x) \text{ ist nicht abnehmend in } x \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

5. **SI(Y|X)**: Y heißt "stochastically increasing in X ", wenn gilt:

$$P(Y > y | X = x) \text{ ist nicht abnehmend in } x \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

6. **LCSD**: X und Y heißen "left corner set decreasing", wenn gilt:

$$P(X \leq x, Y \leq y | X \leq x', Y \leq y') \text{ ist nicht zunehmend in } x' \text{ und } y'$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

83

Abhängigkeitseigenschaft

Seien (X, Y) Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Verteilung $F_{X,Y}$ und der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}$.

1. **PFD**: X und Y heißen "positive function dependent", wenn für jede integrierbare reellwertige Funktion g gilt:

$$\text{Cov}(g(X)g(Y)) = E(g(X)g(Y)) - E(g(X))E(g(Y)) \geq 0.$$

2. **PQD**: X und Y heißen "positive quadrant dependent", wenn gilt:

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. **LTD(Y|X)**: Y heißt "left tail decreasing in X ", wenn gilt:

$$P(Y \leq y | X \leq x) \text{ ist nicht abnehmend in } x \text{ für alle } y \in \mathbb{R}.$$

82

7. **RCSI**: X und Y heißen "right corner set increasing", wenn gilt:

$$P(X > x, Y > y | X > x', Y > y') \text{ ist nicht abnehmend in } x' \text{ und } y'$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

8. **TP2**: (X, Y) besitzen die "total positivity of order 2-Eigenschaft", wenn gilt:

$$f_{X,Y}(x_1, y_1)f_{X,Y}(x_2, y_2) - f_{X,Y}(x_1, y_2)f_{X,Y}(x_2, y_1)$$

für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$.

X, Y werden auch **likelihood ratio dependent (LRD)** genannt.

84

Abhängigkeitseigenschaften von Copulas

- **Bedingungen für Tail-Monotonie:**

$$LTD(Y|X) \iff \frac{C(u,v)}{u} \text{ nichtzunehmend in } u$$

bzw.

$$LTD(Y|X) \iff P(V \leq v|U = u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq \frac{C(u,v)}{u}.$$

und

$$RTI(Y|X) \iff \frac{1-u-v-C(u,v)}{1-u} \text{ nichtabnehmend in } u$$

85

- **Stochastically Increasing:**

$$SI(Y|X) \iff P(V \leq v|U = u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \text{ nicht zunehmend in } u$$

bzw.

$$SI(Y|X) \iff C(u,v) \text{ konkav in } u$$

87

bzw.

$$RTI(Y|X) \iff \frac{v-C(u,v)}{1-u} \text{ nichtzunehmend in } u$$

bzw.

$$RTI(Y|X) \iff P(V \leq v|U = u) = \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \geq \frac{v-C(u,v)}{1-u}.$$

86

- **Corner Set Eigenschaften:**

$$LCSD(X,Y) \iff C(u,v)C(u',v') \geq C(u,v')C(u',v)$$

für alle $u, u', v, v' \in [0, 1]$ mit $u < u', v < v'$.

bzw.

$$RCSI(X,Y) \iff \bar{C}(u,v)\bar{C}(u',v') \geq \bar{C}(u,v')\bar{C}(u',v)$$

für alle $u, u', v, v' \in [0, 1]$ mit $u < u', v < v'$.

88

Beachte:

$$LCSD(X, Y) \iff C \text{ ist TP2}$$

und

$$RCSI(X, Y) \iff \hat{C} \text{ ist TP2.}$$

- **Totally Positivity of order 2 (TP2):**

$$\begin{vmatrix} c(u, v) & c(u, v') \\ c(u', v) & c(u', v') \end{vmatrix} \geq 0$$

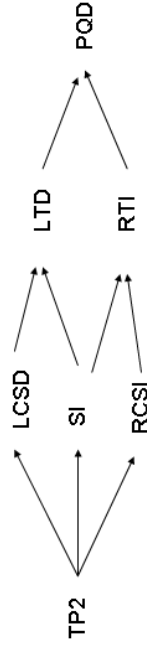
für alle $u < u', v < v'$.

89

90

- Beachte: Die PQD-Eigenschaft ist die schwächste Eigenschaft, die aus allen anderen folgt.

D.h.: Liegt sie nicht vor, kann auch keine der anderen Abhängigkeits-eigenschaften erfüllt sein.



91

92

Abhängigkeitseigenschaften von Rüschen-Copulas

Allgemeine Voraussetzung: $\theta > 0$.

- X und Y sind im allgemeinen nicht *PFD*,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(g(X)g(Y)) &= \text{Cov}(g(F^{-1}(U)), g(F^{-1}(V))) \\ &= \theta \int \int g(u)g(v) f^+(u, v) du dv. \end{aligned}$$

- Positive Quadranten Eigenschaft (PQE):**

$$PQD(X, Y) \iff \theta F^1(u, v) \geq 0 \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

93

- Stochastically Increasing:**

$$SI(Y|X) \iff \theta \frac{\partial^2 F^1(u, v)}{\partial u^2} \leq 0.$$

D.h. für $\theta > 0$ muß $F^1(u, v)$ konkav und für $\theta < 0$ konvex in u sein.

- Tail-Monotonie:**

$$\begin{aligned} LTD(X, Y) &\iff \theta \frac{F^1(u, v)}{u} \text{ monoton nichtzunehmend in } u \\ &\iff \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial u} \leq \frac{F^1(u, v)}{u}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RTI(X, Y) &\iff \theta \frac{F^1(u, v)}{1-u} \text{ monoton nichtabnehmend in } u \\ &\iff \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial u} \geq \frac{F^1(u, v)}{1-u}. \end{aligned}$$

94

- Corner Set Eigenschaften:**

$$\begin{aligned} LCSD(X, Y) &\iff \theta(F^1(u_2, v_2)F^1(u_1, v_1) - F^1(u_1, v_2)F^1(u_2, v_1)) \\ &\geq -u_2v_2F^1(u_1, v_1) - u_1v_1F^1(u_2, v_2) \\ &\quad + u_1v_2F^1(u_2v_1) - u_2v_1F^1(u_1v_2) \end{aligned}$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ mit $u_1 < u_2, v_1 < v_2$.

Die TP2-Eigenschaft für F^1 reicht nicht aus, um die LCSD-Eigenschaft zu sichern.

Für die RCSI-Eigenschaft wird

$$\begin{aligned} \hat{C}(u, v) &= u - (1-v) + (1-u)(1-v) + \theta F^1(1-u, 1-v) \\ &= (1-u)(1-v) + \theta F^1(1-u, 1-v) \end{aligned}$$

benötigt.

95

96

- **Totally Positivity of order 2 (TP2):**

$$\begin{aligned}
 TP2(X, Y) &\iff \theta(f^1(u_2, v_2)f^1(u_1, v_1) - f^1(u_1, v_2)f^1(u_2, v_1)) \\
 &\geq -f^1(u_1, v_1) - f^1(u_2, v_2) + f^1(u_2v_1) - f^1(u_1v_2).
 \end{aligned}$$

97

Abhängigkeitseigenschaften von Produktcopulas

Allgemeine Voraussetzung: $\theta > 0$.

- X und Y sind im allgemeinen nicht PF D,

$$\begin{aligned}
 Cov(g(X)g(Y)) &= Cov(g(F^{-1}(U)), g(F^{-1}(V))) \\
 &= \theta \int \int g(u)g(v)\phi'(u)\psi'(v)dudv \\
 &= \theta \int_0^1 g(u)\phi'(u)du \int_0^1 g(v)\psi'(v)dv
 \end{aligned}$$

98

Hinreichende und notwendige Bedingung für die PQD-Eigenschaft:

$$PQD(X, Y) \iff \theta\phi(u)\psi(v) \geq 0$$

Daß nicht jede Produktcopula die PQD-Eigenschaft besitzt, zeigen die Beispiele der Copulas mit fixem und variablem Nullpunkt.

Notwendige Bedingung für die PQD-Eigenschaft:

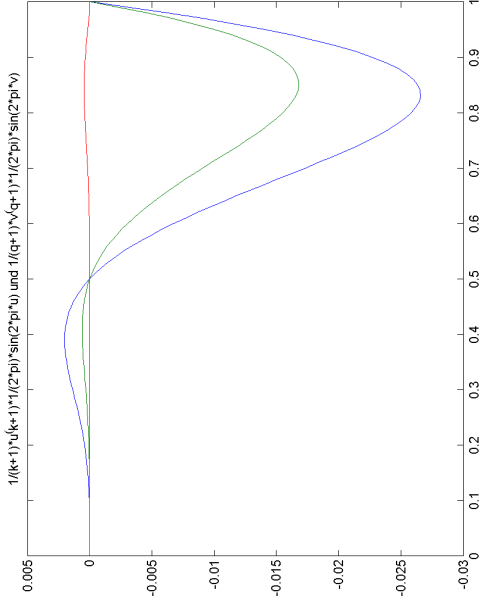
$$PQD(X, Y) \implies \theta\phi(u)\psi(u) \geq 0$$

D.h.: $\text{sign}(\phi(u)) = \text{sign}(\psi(u))$.

99

Diese notwendige Bedingung wird von der Copula mit festem Nullpunkt, aber nicht von der Copula mit variablem Nullpunkt erfüllt.

100



101

- Beachte: Wenn aber $\text{sign}(\phi(u)) \neq \text{sign}(\psi(u))$, dann gilt nicht $PQD(X, Y)$ und damit auch keine der anderen Abhängigkeitseigenschaften außer u.U. $PF D(X, Y)$.
- Sei $\phi(u^*) \neq 0$ für ein $u^* \in [0, 1]$ und $\psi(v^*) \neq 0$ für ein $v^* \in [0, 1]$.

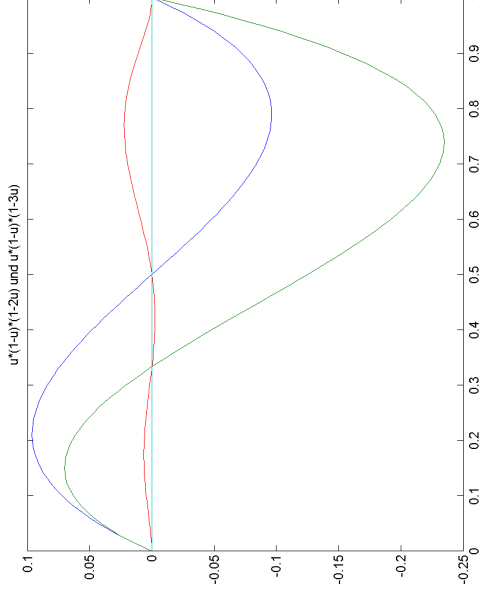
Eine **hinreichende und notwendige Bedingung** für $PQD(X, Y)$ liefert:

$$\phi(u) \geq 0 \text{ und } \psi(v) \geq 0 \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

oder

$$\phi(u) \leq 0 \text{ und } \psi(v) \leq 0 \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

103



102

Beweis: Sei $\phi(u)\psi(v) \geq 0$ für alle $u, v \in [0, 1]$.

1. Wenn es ein u^* gibt mit $\phi(u^*) > 0$, dann ist $\psi(v) \geq 0$ für alle $v \in [0, 1]$.
2. Wenn es ein u^* gibt mit $\phi(u^*) < 0$, dann ist $\psi(v) \leq 0$ für alle $v \in [0, 1]$.
3. Wenn es ein v^* gibt mit $\psi(v^*) > 0$, dann ist $\phi(u) \geq 0$ für alle $u \in [0, 1]$.
4. Wenn es ein v^* gibt mit $\psi(v^*) < 0$, dann ist $\phi(u) \leq 0$ für alle $u \in [0, 1]$.

Da die PQD-Eigenschaft eine notwendige Bedingung für die anderen Abhängigkeitseigenschaften ist, wird im folgenden vorausgesetzt, daß ϕ und ψ entweder gemeinsam nichtnegativ oder gemeinsam nichtpositiv sind.

104

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\phi(u) = u(u^k - 1) \leq 0 \text{ und } \psi(v) = v(v^q - 1) \leq 0$$

für $u, v \in [0, 1]$.

105

D.h.

$$LTD(Y|X) \iff \phi(u)/u \text{ monoton.}$$

$$LTD(X|Y) \iff \psi(v)/v \text{ monoton.}$$

$LTD(X|Y)$ und $LTD(Y|X) \iff \phi(u)/u$ und $\psi(v)/v$ gemeinsam nichtabnehmend oder gemeinsam nichtzunehmend.

107

• **Tail-Monotonie:** Setzt man

$$F^1(u, v) = \phi(u)\psi(v)$$

in die hinreichende und notwendige Bedingung für die LTD - und RTI -Eigenschaft ein, folgt sofort

$$LTD(Y|X) \iff \frac{F^1(u, v)}{u} \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$

$$\iff \frac{\phi(u)}{u}\psi(v) \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$

1. Wenn ψ nichtnegativ ist, muß $\phi(u)/u$ monoton nichtzunehmend sein.
2. Wenn ψ nichtpositiv ist, muß $\phi(u)/u$ monoton nichtabnehmend sein.

106

$$RTI(Y|X) \iff \frac{F^1(u, v)}{1-u} \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$

$$\iff \frac{\phi(u)}{1-u}\psi(v) \text{ monoton nichtzunehmend in } u$$

$RTI(X|Y)$ und $RTI(Y|X) \iff \phi(u)/(1-u)$ und $\psi(v)/(1-v)$ gemeinsam monoton nichtabnehmend oder gemeinsam nichtzunehmend.

108

BEISPIEL: Potenzcopula

$\phi(u)/u = u^k - 1$ monoton nichtabnehmend in u
bzw.

$$\phi(u)/(1-u) = u \frac{u^k - 1}{1-u} = \text{monoton nichtabnehmend in } u,$$

da $(u^k - 1)$ und $u/(1-u)$ monoton nichtabnehmend sind, ist die Potenzcopula *LTD* und *RTI*-abhängig.

BEISPIEL: Potenzcopula

Es sind $\psi(v) \leq 0$ für $v \in [0, 1]$ und

$$\phi''(u) = (k+1)ku^{k-1} \geq 0 \text{ für } u \in [0, 1].$$

• **Stochastically Increasing:**

$$SI(Y|X) \iff \frac{\partial^2 F^1(u, v)}{\partial u^2} \leq 0 \\ \iff \psi(v)\phi''(u) \leq 0.$$

Da $\psi(v) \geq 0$ für alle $v \in [0, 1]$ oder $\psi(v) \leq 0$ für alle $v \in [0, 1]$ sein muß, gilt

$$SI(Y|X) \iff \phi \text{ konkav oder konvex.}$$

Da ϕ und ψ überall gemeinsam nichtnegativ oder überall gemeinsam nichtpositiv sind, folgt:

$$SI(Y|X) \text{ und } SI(X|Y) \iff \phi \text{ und } \psi \\ \text{gemeinsam konkav oder gemeinsam konvex}$$

• **Corner Set Eigenschaft LCSD:**

$$LCSD(X, Y) \iff \theta(F^1(u_2, v_2)F^1(u_1, v_1) - F^1(u_1, v_2)F^1(u_2, v_1)) \\ \geq -u_2v_2F^1(u_1, v_1) - u_1v_1F^1(u_2, v_2) \\ + u_1v_2F^1(u_2v_1) - u_2v_1F^1(u_1v_2)$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ mit $u_1 < u_2, v_1 < v_2$.

D.h.

$$\begin{aligned}
 LCSD(X, Y) &\iff \phi(u_2)\psi(v_2)\phi(u_1)\psi(v_1) - \phi(u_1)\psi(v_2)\phi(u_2)\psi(v_1) \\
 &\geq \frac{1}{\theta}(-u_2v_2\phi(u_1)\psi(v_1) - u_1v_1\phi(u_2)\psi(v_2) + u_1v_2\phi(u_2)\psi(v_1)
 \end{aligned}$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ mit $u_1 < u_2, v_1 < v_2$.

Dann ist

$$LCSD(X, Y) \iff \left(\frac{\phi(u_2)}{u_2} - \frac{\phi(u_1)}{u_1} \right) \left(\frac{\psi(v_2)}{v_2} - \frac{\psi(v_1)}{v_1} \right) u_1 u_2 v_1 v_2 \geq 0$$

für $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ mit $u_1 < u_2, v_1 < v_2$.

113

114

Wenn $\phi(u_2)/u_2 \geq \phi(u_1)/u_1$ ist, dann folgt $\psi(v_2)/v_2 \geq \psi(v_1)/v_1$ für alle $v_1 < v_2$, so daß $\psi(v)/v$ monoton nichtabnehmend ist. Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}
 LCSD(X, Y) &\iff \phi(u)/u \text{ und } \psi(v)/v \\
 &\text{gemeinsam nichtabnehmend oder} \\
 &\text{gemeinsam nicht zunehmend} \\
 &\iff LTD(Y|X) \text{ und } LTD(X|Y).
 \end{aligned}$$

BEISPIEL: Potenzcopula

Die gleichgerichtete Monotonie von $\phi(u)/u = u^b - 1$ und $\psi(v) = v^a - 1$ sichert $LCSD(X, Y)$.

115

• **Corner Set Eigenschaft $RC'SI$:**

Analog $R'SCI(X, Y)$:

$$\begin{aligned}
 RC'SI(X, Y) &\iff \phi(u)/(1-u) \text{ und } \psi(v)/(1-v) \\
 &\text{gemeinsam nichtabnehmend oder} \\
 &\text{gemeinsam nicht zunehmend} \\
 &\iff RTI(Y|X) \text{ und } RTI(X|Y).
 \end{aligned}$$

116

- **Totally Positivity of Order 2 (TP2):**

Es ist

$$f^1(u, v) = \phi'(u)\psi'(v),$$

so daß

$$TP2(X, Y) \iff (\phi'(u_2) - \phi'(u_1))(\psi'(v_2) - \psi'(v_1)) \geq 0$$

für $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$.

Damit müssen ϕ' und ψ' gemeinsam monoton nichtabnehmend oder gemeinsam monoton nichzunehmend sein, so daß gilt:

$$TP2(X, Y) \iff \phi \text{ und } \psi$$

gemeinsam konvex oder gemeinsam konkav

$$\iff SI(Y|X) \text{ und } SI(X|Y).$$

117

Abhängigkeitseigenschaften von Produktcopulas nach Amblard & Girard

Die Bedingungen für die Abhängigkeitseigenschaften entsprechen bis auf eine Ausnahme denen der Produktcopulas.

Ausnahme: Produktcopulas nach Amblard & Girard besitzen stets die *PFD*-Eigenschaft.

$$\begin{aligned} Cov(g(X)g(Y)) &= Cov(g(F^{-1}(U)), g(F^{-1}(V))) = \theta \int \int g(u)g(v)\phi'(u)\phi'(v) \\ &= \theta \left(\int_0^1 g(u)\phi'(u)du \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

119

Zusammenfassung:



118

Abhängigkeitseigenschaften von Produktcopulas nach Fischer

Werden ϕ und ψ durch Dichtefunktionen f bzw. g entsprechend

$$\phi(u) = f(F^{-1}(u)) \geq 0 \text{ für alle } u \in [0, 1]$$

und

$$\psi(v) = g(G^{-1}(v)) \geq 0 \text{ für alle } v \in [0, 1]$$

erzeugt, folgt sofort die *PQD*-Eigenschaft, da $\phi(u)\psi(v) \geq 0$ für $u, v \in [0, 1]$ ist.

120

Sind $f'/f(F^{-1}(u))$ und $g'/g(G^{-1}(v))$ gemeinsam monoton nichtabnehmend oder gemeinsam monoton nichtzunehmend, dann folgen die $TP2$ - und damit alle anderen Abhängigkeitseigenschaften.

BEISPIEL: Für die Cauchy-Verteilung sind

$$f(F^{-1}(u)) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (\tan(\pi * (u - 1/2)))^2)}$$

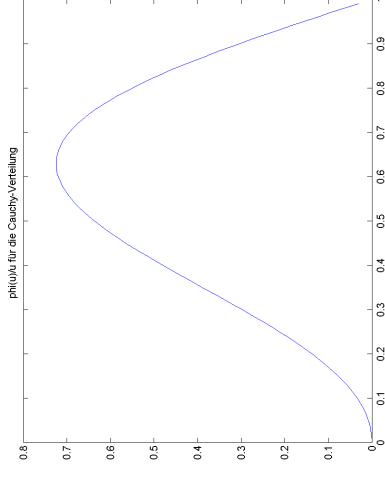
und

$$\frac{f'}{f}(F^{-1}(u)) = -\sin(2\pi u),$$

so daß keine LTD - und keine $TP2$ -Eigenschaft vorliegen kann.

Globale Abhängigkeitsmaße

- (Linearer) Korrelationskoeffizient
- Volumenmaß
- Rangkorrelationskoeffizient von Spearman
- Pangkorrelationskoeffizient von Kendall
- Rangkorrelationskoeffizient von Blest



Problem: Wähle f , so daß LTD - aber keine $TP2$ -Eigenschaft vorliegt.

(Linearer) Korrelationskoeffizient (allgemein)

$$\text{corr}(X_1, X_2) = E \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)$$

Grenzen des linearen Korrelationskoeffizienten für Produktcopulas

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)(1 + \theta\phi^*(x_1)\psi^*(x_2))$$

mit

$$\int \phi^*(x_1)f_1(x_1)dx_1 = \int \psi^*(x_2)f_2(x_2)dx_2 = 0.$$

und

$$\phi^*(x_1) = \phi(F_1(x_1)) \text{ und } \psi^*(x_2) = \psi(F_2(x_2))$$

bzw.

$$\phi(u) = \phi^*(F_1^{-1}(u)) \text{ und } \psi(v) = \psi(F_2^{-1}(v))$$

125

Seien $-1 \leq -h_1 \leq \phi(u) \leq 1$ und $-1 \leq -h_2 \leq \psi(v) \leq 1$ und setze

$$L(h_i) = -E\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} | F_i(X) \geq \frac{h}{1+h}\right)$$

$$U(h_i) = -E\left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} | F_i(X) \leq \frac{h}{1+h}\right),$$

dann sind (Shubina & Lee (1994)):

$$L(h_1) \leq \frac{\int_0^1 F_1^{-1}(u)\phi(u)du}{\sigma_1} \leq U(h_1)$$

und

$$L(h_2) \leq \frac{\int_0^1 F_2^{-1}(v)\psi(v)dv}{\sigma_2}.$$

127

Linearer Korrelationskoeffizient (Lee (1996)):

$$\text{corr}(X_1, X_2) = \theta \frac{\int_0^1 F_1^{-1}(u)\phi(u)du \int_0^1 F_2^{-1}(v)\psi(v)dv}{\sigma_1\sigma_2}$$

126

Setze weiterhin

$$L(h_1, h_2) = \min(L_1(h_1)U_2(h_2), L_2(h_2)U_1(h_1))$$

und

$$U(h_1, h_2) = \max(L_1(h_1)L_2(h_2), U_1(h_1)U_2(h_2)),$$

dann ist

$$\min\left(-U(h_1, h_2), \frac{L(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)}\right) \leq \text{corr}(X_1, X_2) \leq \max\left(-L(h_1, h_2), \frac{U(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)}\right)$$

126

BEISPIEL: Exponentialverteilung

$$L(h) = -\ln(1+h) \quad \text{und} \quad U(h) = h \ln((1+h)/h).$$

$$-0.4804 \leq \text{corr}(X_1, X_2) \leq 0.6476 \quad (\text{für } h = 0.2550).$$

129

130

Spezialfall: Symmetrische Dichten

$$-\frac{U(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)} \leq \text{corr}(X_1, X_2) \leq \frac{U(h_1, h_2)}{\max(h_1, h_2)}.$$

Maximal erreichbarer Bereich für den linearen Korrelationskoeffizienten:

$$-\max_h \frac{U(h, h)}{h} \leq \text{corr}(X_1, X_2) \leq \max_h \frac{U(h, h)}{h}.$$

BEISPIEL: [0, 1]-Rechteckverteilung

$$\frac{U(h, h)}{h} = \frac{3h}{1+h)^2},$$

ist monoton zunehmend auf [0, 1], so daß für $h = 1$

$$-\frac{3}{4} \leq \text{corr}(X_1, X_2) \leq \frac{3}{4}.$$

131

132

BEISPIEL: Normalverteilung

$$-\frac{2}{\pi} \leq \text{corr}(X_1, X_2) \leq \frac{3}{4}.$$

Maße, die nur von der Copula abhängen

1. Normalisiertes Volumen zwischen den Graphen der gemeinsamen Verteilung $F_{X,Y}$ dem Produkt der Randverteilungen $F_X F_Y$

$$\sigma = 12 \int_0^1 \int_0^1 |C(u, v) - uv| dudv.$$

2. Rangkorrelationskoeffizient von Spearman

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) - uv) dudv = \text{corr}(U, V).$$

133

Abhängigkeitsmaße für die Rüschendorf-Copula

Sei $C(u, v) = uv + \theta F^1(u, v)$, dann ist das normalisierte Volumen σ sofort als Funktion von θ und der Funktion F^1 zu erkennen:

$$\sigma = 12|\theta| \int_0^1 \int_0^1 |F^1(u, v)| dudv.$$

Offensichtlich erlaubt σ keine Aussage über die Richtung der Abhängigkeit, da es immer ein positives Vorzeichen besitzt. Der Spearmanische Rangkorrelationskoeffizient ist ebenfalls sehr einfach als

$$\rho = 12\theta \int_0^1 \int_0^1 F^1(u, v) dudv$$

darstellbar.

135

3. Rangkorrelationskoeffizient von Kendall

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) c(u, v) dudv - 1$$

4. Maß von Blest

$$\nu = 2 - 12 \int_0^1 \int_0^1 (1 - u)^2 v c(u, v) dudv.$$

Beachtet man, daß $\int_0^1 \int_0^1 uv dudv = 1/4$ ist, kann auch

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 (C(u, v) c(u, v) - uv) dudv$$

geschrieben werden.

134

Etwas komplizierter gestaltet sich der Rangkorrelationskoeffizient von Kendall

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 ((uv + \theta F^1(u, v))(1 + \theta f^1(u, v)) - uv) dudv.$$

Beachtet man, daß mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 u \left(\int_0^v v f^1(u, v) dv \right) du &= \int_0^1 \left(u \left[v \int_0^v f^1(u, y) dy \right]_0^1 - \int_0^v \int_0^v f^1(u, y) dy dv \right) du \\ &= - \left(\int_0^1 \int_0^v \left[u \int_0^u f^1(x, y) dx \right]_0^1 - \int_0^1 \int_0^u f^1(x, y) dx du \right) dy dv \\ &= \int_0^1 \int_0^v \int_0^1 f^1(x, y) dx du dy dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 F^1(u, v) dudv \end{aligned}$$

136

wegen $\int_0^1 f^1(x, y) dx = \int_0^1 f^1(x, y) dy = 0$ und

$$\int_0^1 \int_0^1 f^1(u, v) F^1(u, v) dv du = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial v} dudv$$

wegen $F^1(u, 0) = F^1(u, 1) = 0$ sind, dann lautet

$$\begin{aligned} \tau &= 8\theta \int_0^1 \int_0^1 F^1(u, v) dudv + 4\theta^2 \int_0^1 \int_0^1 F^1(u, v) F^1(u, v) dudv \\ &= \frac{2}{3}\rho - 4\theta^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial F^1(u, v)}{\partial v} dudv. \end{aligned}$$

137

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 F^1(u, v) dudv &= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} F^1(u, v) dudv + \int_0^{1/2} \int_{1/2}^1 F^1(u, v) dudv \\ &\quad + \int_{1/2}^1 \int_0^{1/2} F^1(u, v) dudv + \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 F^1(u, v) dudv \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} F^1(u, v) dudv - \int_0^{1/2} \int_{1/2}^0 F^1(u, 1-v) dudv \\ &\quad - \int_{1/2}^0 \int_0^{1/2} F^1(1-u, v) dudv + \\ &\quad \int_{1/2}^0 \int_{1/2}^1 F^1(1-u, 1-v) dudv \\ &= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} (F^1(u, v) + F^1(u, 1-v) + F^1(1-u, v) \\ &\quad + F^1(1-u, 1-v)) dudv \\ &= 0, \end{aligned}$$

139

Spezialfall: Symmetrie

Zu beachten ist, daß der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman für eine gemeinsam symmetrische Copula den Wert 0 annimmt, wie die folgende Überlegung zeigt:

138

wegen

$$F^1(u, v) = -F^1(u, 1-v) = -F^1(1-u, v) = F^1(1-u, 1-v) \text{ für } u, v \in [0, 1/2].$$

Mit einer analogen Überlegung und der Tatsache, daß bei gemeinsamer Symmetrie

$$f^1(u, v) = f^1(u, 1-v) = f^1(1-u, v) = f^1(1-u, 1-v) \text{ für } u, v \in [0, 1/2]$$

gilt, folgt $\tau = 0$ für eine gemeinsam symmetrische Copula.

140

Allgemeine Produktcopula

Ausgehend von

$$\int_0^1 \int_0^1 F^{11}(u, v) du dv = \int_0^1 \phi(u) du \int_0^1 \psi(v) dv$$

und

$$\int_0^1 \int_0^1 |F^{11}(u, v)| du dv = \int_0^1 |\phi(u)| du \int_0^1 |\psi(v)| dv$$

sind

$$\sigma = 12|\theta| \int_0^1 |\phi(u)| du \int_0^1 |\psi(v)| dv$$

und

$$\rho = 12\theta \int_0^1 \phi(u) du \int_0^1 \psi(v) dv.$$

141

wegen $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Damit ist

$$\tau = \frac{2}{3}\rho.$$

Für den Rangkorrelationskoeffizienten von Kendall wird

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f^{11}(u, v) F^{11}(u, v) du dv &= \int_0^1 \int_0^1 \phi'(u) \psi'(v) \phi(u) \psi(v) du dv \\ &= \int_0^1 \phi'(u) \phi(u) du \int_0^1 \psi'(v) \psi(v) dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

benötigt. Dieses Ergebnis erhält man mittels partieller Integration

$$\int_0^1 \phi'(u) \phi(u) du = [\phi(u)^2]_0^1 - \int_0^1 \phi'(u) \phi(u) du,$$

womit

$$\int_0^1 \int_0^1 \phi'(u) \phi(u) du = \frac{1}{2} (\phi(1)^1 - \phi(0)^2) = 0$$

142

BEISPIEL: Potenzcopula

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(u) du &= \int_0^1 \frac{1}{k+1} u(k+1) du \\ &= \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{-2} \right) \\ &= -\frac{k}{2(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

und analog

$$\int_0^1 \psi(v) dv = -\frac{1}{2(q+1)(q+2)},$$

so daß

$$\rho = 12\theta \frac{k}{2(k+1)(k+2)} \frac{q}{2(q+1)(q+2)}$$

ist.

143

144

Da $\phi(u) = 1/(k+1)u(u^{k+1}-1) \leq 0$ für $u \in [0, 1]$ falls $k \geq 1$ und damit auch $\psi(v) \leq 0$ für $v \in [0, 1]$ falls $q \geq 1$, folgt

$$\sigma = \text{sign}(\theta)\rho.$$

145

Produktcopula nach Amblard & Girard

Das Ergebnis der allgemeinen Produktcopula läßt sich unmittelbar auf die semiparametrische Copula von Amblard & Girard übertragen. Es sind

$$\sigma = 12|\theta| \left(\int_0^1 |\phi(u)| du \right)^2$$

und

$$\rho = 12\theta \left(\int_0^1 \phi(u) du \right)^2$$

und

$$\tau = \frac{2}{3}\rho.$$

146

BEISPIEL:

1. Sei $\phi(u) = u(1-u)$ für $u \in [0, 1]$, dann ist

$$\int_0^1 \phi(u) du = \int_0^1 |\phi(u)| du = \frac{1}{6},$$

womit

$$\rho = \frac{1}{3}\theta.$$

folgt.

2. Für $\phi(u) = u(1-u)(1-2u)$ ist

$$\int_0^1 \phi(u) du = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = 0,$$

so daß $\rho = \tau = 0$ sind.

147

Dieses Ergebnis folgt aus der gemeinsamen Symmetrie der zugehörigen Copula.

Wegen

$$\int_0^1 |\phi(u)| du = \int_0^{1/2} u(1-u)(1-2u) du + \int_{1/2}^1 u(1-u)(2u-1) du =$$

ist jedoch $\sigma = 12|\theta| \frac{1}{16} = \frac{3}{4}|\theta|$.

148

Dichtegenerierte Produktcopula nach Fischer

Für den Vorschlag von Fischer gilt

$$\phi(u) = f(F^{-1}(u)) \geq 0 \quad \text{für } u \in [0, 1],$$

so daß

$$\begin{aligned} \rho &= 12\theta \left(\int_0^1 f(F^{-1}(u)) du \right)^2 = 12\theta \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz \right)^2 \\ &= \text{sign}(\theta)\sigma \\ &= \frac{3}{2}\tau \end{aligned}$$

ist.

149

Tailindizes

Ausgangspunkt:

$$\bar{\lambda}_U(u) = \frac{P(U > u)P(V > u)}{P(U > u, V > u)} - 1 = \frac{(1-u)^2}{1-2u+C(u,u)} - 1$$

für $u \rightarrow 1$;

$$\bar{\lambda}_L(u) = \frac{P(U < u)P(V < u)}{P(U < u, V < u)} - 1 = \frac{u^2}{C(u,u)} - 1$$

für $u \rightarrow 0$;

$$\lambda_U(u) \equiv P(U > u|V > u) = \frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} = 2 - \frac{1-C(u,u)}{1-u}$$

für $u \rightarrow 1$;

151

BEISPIEL: Für die Extremwertverteilung ist

$$f(F^{-1}(u)) = -u \ln u \quad \text{für } u \in [0, 1],$$

so daß

$$\int_0^1 -u \ln u du = \left[-\frac{1}{2}u^2 \ln u \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}u^2 \frac{1}{u} du = \frac{1}{4}$$

gilt.

Damit sind

$$\rho = \frac{3}{4}\theta \quad \text{und} \quad \tau = \frac{1}{2}\theta.$$

150

$$\lambda_L(u) \equiv P(U < u|V < u) = \frac{C(u,u)}{u} = \quad \text{für } u \in [0, 1].$$

für $u \rightarrow 0$.

152

Asymptotische Tailindizes:

$$\lambda_U \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \lambda_U(u) \in [0, 1]$$

$$\lambda_L \equiv \lim_{u \rightarrow 0} \lambda_L(u) \in [0, 1]$$

$$\bar{\lambda}_U \equiv \lim_{u \rightarrow 1} \bar{\lambda}_U(u) \in [-1, 1]$$

$$\bar{\lambda}_L \equiv \lim_{u \rightarrow 0} \bar{\lambda}_L(u) \in [-1, 1]$$

153

Charakterisierung nach Ledford & Tawn:

Seien

$$S = -1/\log U \text{ bzw. } T = -1/\log V,$$

dann besitzen S und T besitzen Einheits-Fréchet-Randverteilungen mit

$$P(S > s) = P(T > s) = P(U > e^{-1/s}) = 1 - e^{-1/s} \text{ für } s > 0.$$

Eine im Punkte ∞ langsam variierende Funktion \mathcal{L} hat die Eigenschaft

$$\frac{\mathcal{L}(ct)}{\mathcal{L}(t)} \rightarrow 1 \text{ für } t \rightarrow \infty$$

für jedes $c > 0$.

Es gilt

$$F_U(t, t) = P(S > t, T > t) \approx \mathcal{L}(t)P(S > t)^{1/\eta} \text{ für große } t,$$

wobei $\mathcal{L}(t)$ eine in ∞ langsam variierende Funktion mit Grenzwert c für $t \rightarrow \infty$ und $\eta \in [0, 1]$ sind.

155

Ist $C(u, v)$ total differenzierbar, so ergibt sich der obere Tailkoeffizient als

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1} \frac{dC(u, u)}{du}.$$

und der untere als

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{dC(u, u)}{du}.$$

154

Analog ist

$$F_L(t, t) = P(S < t, T < t) \approx \mathcal{L}(t)P(S < t)^{1/\eta} \text{ für große } t,$$

156

Zusammenhang zwischen λ_U , $\bar{\lambda}_U$ und c , η

$$\lambda_U = \begin{cases} c, & \text{falls } \mathcal{L}(t) \rightarrow c \text{ und } \bar{\lambda}_U = 1 \\ 0, & \text{falls } \bar{\lambda}_U < 1 \end{cases}$$

$$\bar{\lambda}_U = 2\eta - 1.$$

	Oberer Tailabhängigkeit	Oberer Tailunabhängigkeit
λ_U	> 0	$= 0$
$\bar{\lambda}_U < 1$	$= 1$	< 1
c	> 0	$= 0$
η	$= 1$	< 1

Analog für die unter Tailabhängigkeit.

157

Interpretation:

1. Wenn $\eta = 1$ und damit $\bar{\lambda}_U = 1$ sind, treten extreme positive Werte von S und T (und damit U und V) mit positiver Wahrscheinlichkeit auf, wenn der Stichprobenumfang gegen ∞ geht.
2. Wenn $1/2 < \eta < 1$ und damit $0 < \bar{\lambda}_U < 1$ sind, können zwar extreme positive Werte von S und T mit gemeinsam mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten; diese Wahrscheinlichkeit geht aber mit zunehmendem Stichprobenumfang gegen 0, wobei die Geschwindigkeit von η und \mathcal{L} abhängt.
3. Für $\eta = 1/2$ ist $\bar{\lambda}_U = 0$ und extreme positive Werte von S und T treten approximativ unabhängig voneinander auf.
4. Wenn $0 \leq \eta < 1/2$ und somit $-1 \leq \bar{\lambda}_U < 0$ sind, treten extreme positive Werte gemeinsam seltener auf, als es bei Unabhängigkeit der Fall wäre.

159

Übersicht:

158

Das folgende Beispiel illustriert die Berechnung des Koeffizienten der oberen Tailabhängigkeit im weiteren Sinne.

1. Für die Unabhängigkeitscopula ist

$$\begin{aligned} \bar{F}_U(t, t) &= 1 - 2e^{-1/t} + (e^{-1/t})^2 \approx 1 - 2(1 - 1/t) + (1 - 1/t)^2 = 2/t - 2 \\ &= 1 \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Somit ist $\eta = 1/2$ und $\bar{\lambda}_U = 2\eta - 1 = 0$. D.h es ist auch $\lambda_U = 0$.

2. Für die Maximumscopula ist

$$\bar{F}_U(t, t) = 1 - e^{-1/t} \approx 1 - (1 - 1/t) = 1 \cdot 1/t.$$

D.h. $\eta = 1$ und damit $\bar{\lambda}_U = 2\eta - 1 = 1$. Die langsam variierende Funktion $\mathcal{L}(t) = 1$ ist konstant, so daß $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}(t) = 1$, so daß maximale obere Tailabhängigkeit vorliegt.

160

3. Für die FGM-Copula hat Heffernan (2000), S. 284 gezeigt, daß

$$\bar{F}_U(t, t) = 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t}(1 + \theta(1 - e^{-1/t})^2) \approx \frac{1 + \theta}{t^2}$$

für große t gilt. Somit sind $\eta = 1/2$, d.h. $\bar{\lambda}_U = 0$ und $\lambda_U = 0$.

4. Joe (1997), S. 148 diskutiert die Copula B12

$$C(u, v; \theta) = \min(u, v)^\theta (uv)^{(1-\theta)} \text{ für } u, v \in [0, 1]$$

und $0 \leq \theta \leq 1$. Es ist ein geometrisches Mittel der Unabhängigkeits- und der Maximumcopula. Für diese Copula gilt

$$\bar{F}_U(t, t) = 1 - 2e^{-1/t} + e^{-\theta/t} e^{-2(1-\theta)/t} \approx \frac{\theta}{t}.$$

Damit sind $\eta = 1$, $\bar{\lambda}_U = 1$ und $\lambda = \theta > 0$ für $\theta > 0$. Für $\theta = 1$ liegt maximale obere Tailabhängigkeit vor.

161

Obere Tailindizes von Rüschemdorf-Copulas

Für die Rüschemdorf-Copula ist

$$\frac{dC(u, u)}{du} = 2u + \theta \frac{dF^1(u, u)}{du},$$

so daß

$$\lambda_U = -\theta \lim_{u \rightarrow 1} \frac{dF^1(u, u)}{du}.$$

ist.

D.h. der Tailkoeffizient wird durch θ und F^1 bestimmt.

163

Tailsymmetrie

Von Tailsymmetrie wird gesprochen, wenn $\lambda_L \neq \lambda_U$ ist.

Radial symmetrische Copulas sind tailsymmetrisch, da

$$\lambda_L(u) = \lambda_U(u) \text{ für } u \in [0, 1]$$

und

$$\bar{\lambda}_L(u) = \bar{\lambda}_U(u) \text{ für } u \in [0, 1].$$

162

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} \bar{F}_U(t, t) &= 1 - 2e^{-1/t} + e^{-2/t} + \theta F^1(e^{-1/t}, e^{-1/t}) \\ &\approx 1 - 2(1 - 1/t) + (1 - 2/t) + \theta F^1(1 - 1/t, 1 - 1/t) \\ &= \theta F^1(1 - 1/t, 1 - 1/t) \end{aligned}$$

für große t .

D.h. die Funktion F^1 in der Nähe von 1 bzw. 0 ist verantwortlich für Art und Ausmaß der Tailabhängigkeit.

164

Entscheidend für die Tailabhängigkeit sind die Ableitungen von $F^1(u, u)$ für u nahe 1 bzw. u nahe 0, d.h. große t , wie die folgende Überlegung zeigt:

Wenn $F^1(u, u)$ zweimal stetig differenzierbar für alle $u \in (0, 1)$ ist (falls der Grenzwert existiert)

$$\frac{dF^1(u, u)}{du} \Big|_{u=1} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{dF^1(u, u)}{du}$$

bzw.

$$\frac{dF^1(u, u)}{du} \Big|_{u=0} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{dF^1(u, u)}{du}$$

sind, gilt die Taylor-Approximation

$$F^1(u, u) \approx F^1(1, 1) + \frac{dF^1(v, v)}{dv} \Big|_{v=1} (u-1) + \frac{1}{2} \frac{d^2 F^1(v, v)}{dv^2} \Big|_{v=1} (u-1)^2.$$

165

BEISPIEL:

$$C(u, v) = (1 - \theta)uv + \theta \min(u, v) = uv + \theta(\min(u, v) - uv).$$

D.h. $F^1(u, v) = \min(u, v) - uv$, womit

$$\frac{dF^1(v, v)}{dv} \Big|_{v=1} = \frac{dv(1-v)}{dv} \Big|_{v=1} = 1 - 2v \Big|_{v=1} = -1 \neq 0,$$

so daß $\eta = 1$ und damit $\bar{\lambda}_U = 1$ sind. Es folgt $\lambda_U = 1$, was maximale asymptotische obere Tailabhängigkeit bedeutet.

167

Für $u = 1 - 1/t$ und große t ist dann wegen $F^1(1, 1) = 0$

$$\bar{F}_U(t, t) \approx \frac{dF^1(v, v)}{dv} \Big|_{v=1} \left(-\frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 F^1(v, v)}{dv^2} \Big|_{v=1} \left(\frac{1}{t} \right)^{1/(1/2)}.$$

Fallunterscheidung:

1. Wenn $\frac{dF^1(v, v)}{dv} \Big|_{v=1} \neq 0$ ist $\eta = 1$, $\bar{\lambda}_U = 1$ und $\lambda_U > 0$ mit

$$\lambda_U = -\theta \frac{dF^1(v, v)}{dv} \Big|_{v=1}.$$

2. Für $\frac{1}{2} \frac{d^2 F^1(v, v)}{dv^2} \Big|_{v=1} \neq 0$ ist $\eta = 1/2$, was $\bar{\lambda}_U = 0$ und $\lambda_U = 0$ bedeutet.

166

Für eine auf $[0, 1]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion $F^1(u, u)$ kann somit nur $\bar{\lambda}_U = 1$ bzw. $\bar{\lambda}_U = 0$ bzw. $\bar{\lambda}_U = 1$ bzw. $\bar{\lambda}_U = 0$ gelten.

Andere Werte können nur auftreten, wenn die Grenzwerte $\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{dF^1(u, u)}{du}$ oder $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{dF^1(u, u)}{du}$ nicht existieren.

168

BEISPIEL: Betrachte

$$C(u, v) = \min(u, v)^\delta (uv)^{1-\delta}$$

für $0 < \delta < 1$. Damit ist

$$C(u, u) = u^2 + F^1(u, u)$$

mit

$$F^1(u, u) = u^2(u^{-\delta} - 1).$$

169

Spezialfall: PCC-Copula

Betrachtet man den Spezialfall der PCC-Copula von Long et al., so ist

$$F^1(u, u) = \tilde{K}(2(1-u)) - 2K(1)(u-1)^2$$

für $u > 1/2$.

Wegen der Tailsymmetrie braucht für die PCC-Copula nur die obere Tailabhängigkeit untersucht zu werden. Es ist für $u > 1/2$:

$$F^1(u, u) = \tilde{K}(2(1-u)) - 2K(1)(u-1)^2,$$

womit

$$\frac{dF^1(u, u)}{du} = -2K(2(1-u)) - 4K(1)(u-1)$$

und

$$\frac{d^2F^1(u, u)}{du^2} = 4\kappa(2(1-u)) - 4K(1).$$

171

Die Grenzwerte sind

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{dF^1(u, u)}{du} = -\delta \neq 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{dF^1(u, u)}{du} = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{d^2F^1(u, u)}{du^2} = \delta(\delta^2 - 3),$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{d^2F^1(u, u)}{du^2} = \infty.$$

Bezügliche der unteren Tailabhängigkeit hat Heffernan (2002)

$$\bar{F}_U(t, t) \approx \frac{1}{t^{2-\delta}}$$

nachgewiesen, so daß $\eta = 1/(2-\delta)$ und $\bar{\chi}_L = \delta/(2-\delta)$ ist.

170

Damit sind die Grenzwerte

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{dF^1(u, u)}{du} = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{d^2F^1(u, u)}{du^2} = -4K(1) \neq 0.$$

Damit sind $\bar{\chi}_L = \bar{\chi}_U = 0$, d.h. die PCC-Copula verhält sich unabhängig von der Wahl von κ in den Extrembereichen wie eine Unabhängigkeitscopula.

172

PRC-Copula

Obwohl sich das Ergebnis der PCC-Copula übertragen läßt, soll für den Spezialfall der PRC-Copula ein direkter Nachweis geführt werden. Für diese ist

$$\begin{aligned} F^1(1-1/t, 1-1/t) &= \tilde{K}(2(1-(1-1/t))) - 2K(1)((1-1/t) - 1)^2 \\ &= \tilde{K}(2/t) - 2K(1)/t^2 \\ &= \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)} \left(-1 + (\beta+2)\frac{2}{t} + \left(1 - \frac{2}{t}\right)^{\beta+2} \right) \\ &\quad - 2K(1) \left(\frac{1}{t}\right)^2. \end{aligned}$$

173

DCC-Copula

Wiederum liegt radiale Symmetrie vor, so daß nur die obere Teilabhängigkeit untersucht wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} F^1(e^{-1/t}, e^{-1/t}) &= \frac{8}{3} \left((e^{-1/t})^{3/2} (1 - e^{-1/t}) \right. \\ &\quad \left. + e^{-1/t} (1 - e^{-1/t})^{3/2} - e^{-1/t} + e^{-2/t} \right) \\ &\approx \frac{8}{3} \left(\left(1 - \frac{3/2}{t}\right) \frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \left(\frac{1}{t}\right)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{t}\right) + \left(1 - \frac{2}{t}\right) \right) \\ &= \frac{8}{3} \left(\left(\frac{1}{t}\right)^{3/2} - \frac{3/2}{t^2} - \left(\frac{1}{t}\right)^{5/2} \right). \end{aligned}$$

175

Mit der Entwicklung

$$\left(1 - \frac{2}{t}\right)^{\beta+2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\beta+2}{j} \left(\frac{2}{t}\right)^j$$

für große t , so daß $|2/t| < 1$ ist, ergibt sich

$$F^1(1-1/t, 1-1/t) = \frac{1}{(\beta+1)(\beta+2)} \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^j \binom{\beta+2}{j} \left(\frac{2}{t}\right)^j \right) - 2K(1) \left(\frac{1}{t}\right)^2.$$

für große t . D.h. es treten nur Potenzen von $1/t$ auf, die nicht kleiner als 2 sind, so daß $\eta = 1/2$ und damit $\bar{\chi}_U = 0$ sind.

174

Damit sind $\eta = 2/3$ und $\bar{\chi}_U = 1/3$. D.h. DCC-Copula verfügt zwar über obere Teilunabhängigkeit; der asymptotische Zusammenhang ist aber etwas stärker als bei der Unabhängigkeitscopula.

Alternativ können auch die ersten beiden Ableitungen von

$$F^1(u, u) = \frac{8}{3} \left(u^{3/2} (1-u) + u(1-u)^{3/2} - u + u^2 \right)$$

betrachtet werden. Diese lauten

$$\frac{dF^1(u, u)}{du} = \frac{8}{3} \left(\frac{3}{2} u^{1/2} (1-u) - u^{3/2} + (1-u)^{3/2} - \frac{3}{2} u(1-u)^{1/2} - 1 + 2u \right)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F^1(u, u)}{du^2} &= \frac{8}{3} \left(\frac{3}{4} u^{-1/2} (1-u) - \frac{3}{2} u^{1/2} - \frac{3}{2} u^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} (1-u)^{1/2} - \frac{3}{2} (1-u)^{1/2} + \frac{3}{4} u(1-u)^{-1/2} + 2 \right). \end{aligned}$$

176

Während die erste Ableitung mit $u \rightarrow 1^-$ gegen 0 konvergiert, existiert der Grenzwert der zweiten Ableitungen nicht, da $(1-u)^{-1/2}$ über alle Grenzen wächst. Dies zeigt einen Wert $\eta \neq 1/2$ und $\eta \neq 1$ an.

177

Existieren weiterhin $\phi''(1)$, $\psi''(1)$, so sind wegen $\phi(0) = \phi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{dF^1(u, u)}{du} = \phi'(1)\psi(1) + \phi(1)\psi'(1) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{d^2F^1(u, u)}{du^2} = \phi''(1)\psi(1) + 2\phi'(1)\psi'(1) + \phi(1)\psi''(1) = 2\phi'(1)\psi'(1).$$

Fallunterscheidung:

1. Wenn $\phi'(1) \neq 0$ und $\psi'(0) \neq 0$ sind, ist $\bar{\chi}_U = 0$. Die Produktcopula verhält sich für große Werte wie die Unabhängigkeitscopula.
2. Wenn $\phi'(1) = 0$ oder $\psi'(0) = 0$ bzw. wenn die zweite Ableitung von ϕ oder ψ an der Stelle 1 nicht existiert, ist $0 < \bar{\chi}_U < 1$.

179

Tailindizes von Produkt-Copulas

Für die Produktcopula gilt

$$F^1(u, u) = \phi(u)\psi(u).$$

Es müssen $|\phi'(u)| \leq 1$ und $|\psi'(u)| \leq 1$ sein, so daß

$$\frac{dF^1(u, u)}{du} = \phi'(u)\psi(u) + \phi(u)\psi'(u)$$

ist.

Wenn $\phi(1) = \psi(1) = 0$ folgt stets die obere Tailunabhängigkeit, so daß $\bar{\chi}_U < 1$ ist.

178

BEISPIEL:

1. Für eine Potenzcopula gilt für $k > 0$

$$\phi(u) = \frac{1}{k+1}u(u^k - 1),$$

so daß $\phi(1) = \phi(0) = 0$ ist, woraus $\lambda_U = \lambda_L = 0$ folgt.

Weiterhin ist

$$\phi'(u) = \frac{1}{k(k+1)}(u^{k-1} - 1)$$

mit $\phi'(0) = -1/(k(k+1)) = -1$, so daß $\bar{\chi}_U = 0$ folgt.

Wegen $\phi'(1) = 0$ und

$$\phi''(1) = \frac{1}{(k-1)k(k+1)} \neq 0$$

ist aber $\bar{\chi}_L = 1$.

180

2. Die Fischer-Copula für die Cauchy-Verteilung führt zu

$$\phi'(u) = -\sin(2\pi u)$$

mit $\phi'(1) = 0$. Nun ist aber jede Ableitung von ϕ an der Stelle 1 gleich 0.

3. Die Fischer-Copula für die Extremwertverteilung führt zu

$$\phi(u) = -u \ln u$$

mit $\phi(1) = 0$ und $\phi(0) = 0$. D.h. obere und untere Tailunabhängigkeit.

Wegen

$$\phi'(1) = -1 \quad \text{und} \quad \phi'(0) = -\infty$$

gilt $\bar{\chi}_U = 1$