

Schmitt, Christian

Working Paper — Digitized Version

Volatilitätsprognosen für deutsche Aktienkurse mit ARCH- und Markov-Mischungsmodellen

ZEW Discussion Papers, No. 94-07

Provided in Cooperation with:

ZEW - Leibniz Centre for European Economic Research

Suggested Citation: Schmitt, Christian (1994) : Volatilitätsprognosen für deutsche Aktienkurse mit ARCH- und Markov-Mischungsmodellen, ZEW Discussion Papers, No. 94-07, Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW), Mannheim

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/29479>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

Discussion Paper

Discussion Paper No. 94-07

Volatilitätsprognosen für deutsche Aktienkurse mit ARCH- und Markov- Mischungsmodellen

Christian Schmitt

ZEW

Zentrum für Europäische
Wirtschaftsforschung GmbH

International Finance Series

Wirtschaft
Net

20 071 1/2

Discussion Paper No. 94-07

**Volatilitätsprognosen für
deutsche Aktienkurse mit
ARCH- und Markov-
Mischungsmodellen**

Christian Schmitt

W 636 (94.07)



522509

Volatilitätsprognosen für deutsche Aktienkurse mit ARCH- und Markov- Mischungsmodellen

von

Christian Schmitt

Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung (ZEW)

Februar 1994

Zusammenfassung

In dieser Untersuchung wird gezeigt, wie neuere ökonometrische Verfahren zur Modellierung und Prognose von Volatilitäten auf Aktienmärkten eingesetzt werden können. Hierzu werden verschiedene Varianten aus der Klasse der ARCH Modelle und das Markov-Mischungsmodell herangezogen. Die Datenbasis stellen tägliche Renditen des Deutschen Aktienindex (DAX) und von elf DAX-Werten der Jahre 1987 bis 1992 da. Es zeigt sich, daß das EGARCH Modell dem historischen Volatilitätsschätzer, der von einer konstanten Varianz ausgeht, bei der Prognose von Volatilitäten überlegen ist.

Diese Arbeit entstand im Rahmen des Forschungsprojektes "Volatilitätsmodelle und ihre Implikationen für die Optionspreisbildung", das von der Deutschen Forschungsgemeinschaft innerhalb des Schwerpunktprogramms "Empirische Kapitalmarktforschung" gefördert wird, ebenso wie die Karlsruher Kapitalmarktdatenbank (KKMDB), aus der die Aktiendaten stammen. Für hilfreiche Kommentare möchte ich mich bei Jürgen Kaehler und Olaf Korn bedanken.

1 Einleitung

Mit der Entwicklung von Finanzderivativen wie Optionen, Futures und Futuresoptionen, die in den achtziger Jahren einen enormen Aufschwung erlebt hat, hat sich die Schätzung und Prognose von Volatilität(en) auf Finanzmärkten zu einem überaus wichtigen Forschungsgebiet entwickelt, da Veränderungen der Volatilität eine enorme Auswirkung auf den Wert von derivativen Wertpapieren haben. Die Bestimmung der Volatilität spielt auch in anderen Bereichen der modernen Finanzierungstheorie eine große Rolle. So ist man im Portfoliomanagement zur Risikominderung um eine möglichst genaue Bestimmung der Volatilität, mit der Risiko i.a. assoziiert wird, bemüht.

Da Volatilität eine nicht direkt beobachtbare Größe ist, kann sie nicht gemessen, sondern nur geschätzt werden. In den meisten Fällen greift man hierbei als Standardmaß für die Volatilität auf die Varianz der Kursveränderungen zurück und nimmt dabei an, daß die Volatilität konstant und die Kursveränderungen normalverteilt seien. Zahlreiche Untersuchungen finanzwirtschaftlicher Zeitreihen, die in den letzten 30 Jahren durchgeführt wurden, haben jedoch gezeigt, daß die Kursveränderungen weder normalverteilt, noch die Volatilität im Zeitablauf konstant ist.

Aus diesem Grund versuchte man, die zeitabhängige Struktur der Volatilität zu modellieren. Ein hierfür besonders geeignetes Modell ist das von Engle [19] entwickelte *autoregressive conditional heteroskedasticity* (ARCH) Modell, in dem die bedingte Varianz von den vergangenen Realisierungen des Prozesses abhängig ist.

Eine zweite Modellklasse sind die Markov-Mischungsmodelle von Hamilton [31], die eine dynamische Weiterentwicklung der Mischverteilungsmodelle darstellen. Diese beiden Modellklassen sind auch in der Lage, die Leptokurtosis der Kursrenditen nachzubilden.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Eignung von ARCH- und Markov-Mischungsmodellen zur Modellierung der Renditestruktur von Aktienmärkten und ihre Fähigkeiten zur Prognose von Volatilität darzustellen. In Kapitel 2 werden die statistischen Eigenschaften der betrachteten Aktienkurse erläutert und es wird gezeigt, daß auch diese Zeitreihen *nicht* normalverteilt sind und keine konstante Varianz besitzen. Nach der Darstellung des grundlegenden ARCH Modells von Engle und der wichtigsten Erweiterungen von Bollerslev [8], [9] und Nelson [47] in Kapitel 3, folgt im vierten Kapitel

eine kurze Einführung in das Markov-Mischungsmodell. In Kapitel 5 wird dann die Vorgehensweise bei der Prognose von Volatilitäten mit diesen Modellen skizziert und mit dem historischen Volatilitätsschätzer verglichen. Im abschließenden Kapitel 6 folgt dann eine zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse.

2 Statistische Eigenschaften der Daten

Die in der Untersuchung verwendeten Kursdaten des Deutschen Aktienindex (DAX) und von 11 der 30 im DAX enthaltenen Aktien¹ entstammen der Karlsruher Kapitalmarktdatenbank KKMDB. Der Untersuchungszeitraum umfasst sechs Jahre vom 2. Januar 1987 bis 30. Dezember 1992. Somit ergeben sich aus den 1497 Tagesschlußkursen im Betrachtungszeitraum 1496 tägliche Renditen. Um die Additivitätseigenschaft der täglichen Renditen zu erhalten, werden die kontinuierlichen (logarithmischen) Renditen wie folgt berechnet:

$$R_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad (1)$$

mit

R_t kontinuierliche Rendite der Periode t

S_t Aktienkurs zum Zeitpunkt t

S_{t-1} Aktienkurs zum Zeitpunkt $t - 1$

Zur Eliminierung der Effekte, die auf technisch bedingten Aktienkursveränderungen² basieren, und nicht im Markt begründet sind, werden kursbereinigte Daten verwendet.

Eine Übersicht über die statistischen Eigenschaften der Renditen gibt Tabelle 2. Die Ergebnisse sind mit denen früherer Untersuchungen vergleichbar³. Alle untersuchten Werte sind linksschief^{4 5}. Eine weitere Abweichung von der Nor-

¹Vgl. Tabelle 1.

²Z. B. Dividendenzahlungen, Kapitalveränderungen oder Notizwechsel.

³Vgl. z. B. Akgiray/Booth/Loistl [2], S. 21, Akgiray/Booth/Loistl [3], S. 971, Funke [28], S. 7 und Schlag [51], S. 356.

⁴Die Überprüfung der Hypothese H_0 : Schiefe = 0 erfolgt mittels der S_U -Transformation von Johnson (vgl. Bowman/Shenton [12], S. 281 ff.) und kann in allen Fällen auf dem 1 %-Niveau abgelehnt werden.

⁵Schlag [51] erhält für BAY einen geringfügig positiven Wert (0.0027). Allerdings betrachtet er den Zeitraum von Januar 1986 bis Dezember 1990. Alle anderen untersuchten Aktien sind ebenfalls linksschief.

Tabelle 1: Untersuchte Aktien

WPKN ^a	Name	Kürzel
846900	Deutscher Aktienindex	DAX
515100	BASF AG	BAS
519000	BMW AG	BMW
550000	Daimler-Benz AG	DAI
575200	Bayer AG	BAY
627500	Karstadt AG	KAR
656000	Mannesmann AG	MMW
723600	Siemens AG	SIE
748500	Thyssen AG	THY
803200	Commerzbank AG	CBR
804010	Deutsche Bank AG	DBK
840400	Allianz AG	ALV

^aWertpapierkennnummer

malverteilung kann mittels der Kurtosis (Wölbung) festgestellt werden. Für die Normalverteilung beträgt die Kurtosis 3. Verteilungen, deren Kurtosis 3 übersteigt, werden als leptokurtisch und für den Fall, daß die Kurtosis kleiner als 3 ist, als platykurtisch bezeichnet. Man erkennt, daß alle Renditeverteilungen leptokurtisch sind⁶.

Abbildung 1 veranschaulicht die Leptokurtosis der täglichen Renditen des DAX. Während die glatte Linie die unter der Annahme der Normalverteilung erwartete Verteilung angibt, stellt die gezackte Linie die tatsächlichen Häufigkeiten dar. Die Häufung der Renditen um den Mittelwert, d. h. das Auftreten von vielen geringen Kursschwankungen, ist augenfällig. Weiterhin erkennt man bei genauerer Betrachtung, daß mehr extreme Kursausschläge auftreten als man erwarten würde.

Der Anderson-Darling Test⁷ auf Normalverteilung lehnt folglichweise die Hypothese, daß eine Normalverteilung vorliegt, auf sehr hohem Niveau ab⁸.

⁶Die Überprüfung auf Mesokurtosis (Kurtosis = 3) mittels der Anscombe/Glynn-Approximation (vgl. D'Agostino [16], S. 388 f.) ergibt, daß die Nullhypothese in allen Fällen auf dem 1 %-Niveau verworfen werden kann.

⁷Vgl. D'Agostino [16], S. 372 f.

⁸Der Anderson-Darling Test basiert, genauso wie der Kolmogorow-Smirnoff Test, auf der vertikalen Differenz zwischen der empirischen und der theoretischen Verteilungsfunktion, und ist mächtiger als der Kolmogorow-Smirnoff Test (vgl. D'Agostino [16], S. 404).

Tabelle 2: Statistische Eigenschaften der Renditen

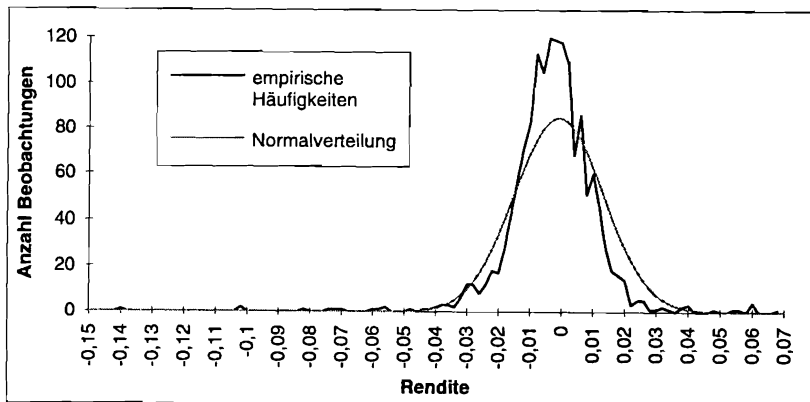
Name	$\mu \cdot 10^3$	$\sigma^2 \cdot 10^3$	Schiefe	Kurtosis	AD ^a	LL ^b
DAX	0.0596 (0.1644) ^c	0.1967	-1.0942 ***	16.1254 ***	24.3211 ***	4260.09
BAS	0.0039 (0.0106)	0.1978	-0.6072 ***	9.2050 ***	15.1506 ***	4256.86
BMW	0.0833 (0.1842)	0.3057	-0.5370 ***	12.0297 ***	24.8018 ***	3931.20
DAI	-0.4599 (-0.9669)	0.3384	-0.7033 ***	12.0196 ***	20.2862 ***	3855.15
BAY	0.0538 (0.1393)	0.2230	-0.2473 ***	9.0002 ***	18.5609 ***	4167.18
KAR	0.1214 (0.2744)	0.2927	-1.1299 ***	23.2555 ***	22.6367 ***	3963.79
MMW	0.3488 (0.6622)	0.4150	-0.4233 ***	13.2034 ***	19.7285 ***	3702.56
SIE	-0.0520 (-0.1336)	0.2269	-0.7858 ***	9.5703 ***	15.7473 ***	4154.32
THY	0.3608 (0.7803)	0.3198	-0.2737 ***	6.4747 ***	7.9991 ***	3897.53
CBR	0.0035 (0.0084)	0.2568	-0.8327 ***	12.8767 ***	11.9408 ***	4061.65
DBK	-0.0201 (-0.0480)	0.2632	-0.6814 ***	13.1932 ***	19.9655 ***	4042.98
ALV	0.1295 (0.2598)	0.3719	-0.4264 ***	14.4769 ***	40.3659 ***	3784.75
Signifikanzniveaus: * = 10 Prozent, ** = 5 Prozent, *** = 1 Prozent						

^aAnderson-Darling Test

^bLoglikelihood

^cDie Werte in Klammern sind die *t*-Statistiken.

Abbildung 1: Empirische und theoretische Verteilung der DAX-Renditen



Mit dem Ljung-Box Test⁹

$$LB_i = T(T + 2) \sum_{k=1}^i \frac{1}{T - k} \cdot \rho^2(k) \quad (2)$$

wird nun die Unkorreliertheit der Renditen unter Berücksichtigung mehrerer Lags überprüft. Dabei T bezeichnet die Anzahl der Beobachtungen und $\rho(k)$ ist der Autokorrelationskoeffizient zum Lag k . Die Teststatistik LB_i folgt dann asymptotisch einer χ^2 -Verteilung mit i Freiheitsgraden. Es werden hierbei die Residuen¹⁰ und die quadrierten Residuen der Renditen untersucht, um zeitliche Abhängigkeit erster oder höherer Ordnung herauszufinden. Betrachtet man die Ljung-Box Statistiken der quadrierten Residuen, die in den letzten beiden Spalten der Tabelle 3 angegeben sind, so erkennt man, daß in allen Fällen die kritischen Werte der χ^2 -Verteilung überschritten werden¹¹. Dies bedeutet, daß etliche Autokorrelationskoeffizienten der quadrierten Residuen signifikant sind. Daß alle diese Autokorrelationskoeffizienten positiv sind, ist ein Zeichen dafür, daß kleine Kursausschläge auf kleine Kursausschläge und große Kursausschläge auf große Kursausschläge (ungeachtet des Vorzeichens) folgen. Dieses Ergebnis ist seit langem in der Literatur bekannt¹²

⁹Siehe Ljung/Box [44], S. 297 ff.

¹⁰Die Residuen berechnen sich als die Renditen vermindert um den Mittelwert der Renditen.

¹¹Die Werte der 10/5/1%-Quantile lauten bei einer χ^2 Verteilung mit 12 Freiheitsgraden: 18.55, 21.03 und 26.22 bzw. bei 24 Freiheitsgraden: 33.20, 36.42 und 42.98.

¹²Vgl. Mandelbrot [45] und Fama [25].

Tabelle 3: Ljung-Box Statistik

Name	$LB_{12}(r)$	$LB_{24}(r)$	$LB_{12}(r^2)$	$LB_{24}(r^2)$
DAX	6.994	18.864	248.128 ***	292.671 ***
BAS	14.214	21.875	87.480 ***	95.372 ***
BMW	7.570	22.205	398.566 ***	491.374 ***
DAI	6.814	26.197	343.840 ***	454.540 ***
BAY	10.041	18.796	651.343 ***	757.696 ***
KAR	8.038	20.235	123.761 ***	133.313 ***
MMW	5.409	28.644	63.818 ***	86.179 ***
SIE	11.340	19.370	256.530 ***	322.797 ***
THY	12.680	23.700	202.833 ***	249.087 ***
CBR	8.010	17.282	32.782 ***	40.475 ***
DBK	12.102	19.837	283.752 ***	357.954 ***
ALV	9.650	15.817	580.963 ***	818.474 ***

Signifikanzniveaus: siehe Tabelle 2

und wurde in vielen Studien bestätigt¹³. Man bezeichnet diesen Effekt oftmals als *Volatility Clustering*¹⁴. Diese Klumpung der Renditen wird in der graphischen Darstellung der täglichen Renditen des DAX in Abbildung 2 sofort deutlich.

Zusammen mit dem Lagrange-Multiplikatoren Test auf ARCH-Effekte nach Engle [19], dessen Ergebnisse hier nicht dargestellt sind, kommt man zum Schluß, daß genügend Evidenz besteht, die Nullhypothese, daß kein ARCH-Prozeß vorliegt, abzulehnen. Unter dieser Voraussetzung ist es jedoch erforderlich, beim Ljung-Box Test auf Autokorrelation der Renditen eine Modifikation der Autokorrelationskoeffizienten vorzunehmen¹⁵, da ansonsten die Nullhypothese, daß *keine* Autokorrelation vorliegt, fälschlicherweise zu oft abgelehnt wird¹⁶. Wie man erkennen kann, ist keiner der Werte des „modifizierten“ Ljung-Box Tests der Residuen signifikant, die Residuen also nicht autokorreliert.

In Abbildung 3 sind die (unmodifizierten) Autokorrelationskoeffizienten der täglichen Residuen (r), quadrierten Residuen ($r * r$) und absoluten Residuen

¹³Siehe z. B. Taylor [52], Akgiray [1] und Akgiray/Booth/Loistl [3].

¹⁴Vgl. Geyer [29], S. 6.

¹⁵Zur Vorgehensweise siehe Diebold [17], S. 27 f.

¹⁶Das üblicherweise verwendete 95 %-Konfidenzintervall von $\pm \frac{2}{\sqrt{T}}$ für die Autokorrelationskoeffizienten wäre bei Vorliegen von ARCH-Effekten zu klein (vgl. Weiss [58], Krämer/Runde [38], [39], [40]).

Abbildung 2: Tägliche DAX-Renditen

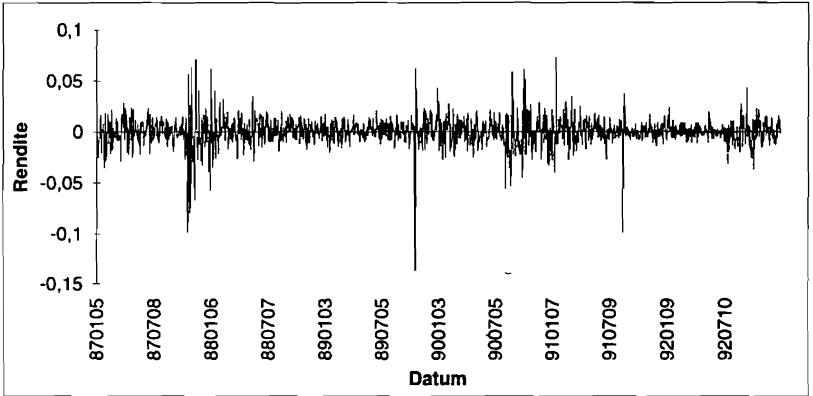
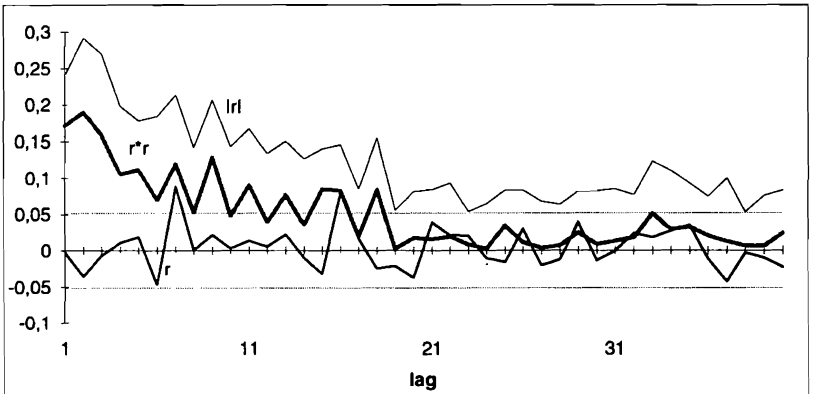


Abbildung 3: Autokorrelationsfunktion der täglichen Residuen des DAX



($|r|$) zusammen mit den $\pm \frac{2}{\sqrt{T}}$ Signifikanzgrenzen, die zu klein sind¹⁷, bis zum Lag 40 dargestellt. Man findet die Ergebnisse des Ljung-Box Tests bestätigt. So liegen bei den Residuen (r) nur die Autokorrelationskoeffizienten zum Lag 7 und Lag 16 ausserhalb der (zu optimistischen) Signifikanzgrenzen und der Autokorrelationskoeffizient zum Lag 1 ist sogar geringfügig kleiner als Null. Es stellt sich nun die Frage nach einem Modell oder einer Modellklasse, die in der Lage ist, die festgestellten Phänomene der Leptokurtosis und Heteroskedastizität in den Kursrenditen abzubilden. Die Leptokurtosis kann man durch Mischverteilungsmodelle¹⁸ darstellen, allerdings ist die Klasse der statischen Modelle, zu der die Mischverteilungsmodelle gehören, nicht in der Lage, die Heteroskedastizität zu modellieren, da sie die zeitliche Unabhängigkeit der Varianz unterstellen.

Die Heteroskedastizität kann mittels zweier Modellklassen, die in den 80er Jahren entwickelt wurden, direkt spezifiziert werden. Dies ist zum einen die Klasse der *autoregressive conditional heteroscedasticity* (ARCH)-Modelle, die auf der Arbeit von Engle [19] basiert, und das Markov-Mischungsmodell. Diese Modelle können nicht nur die zeitliche Dynamik der Volatilität modellieren, sondern implizieren auch Leptokurtosis.

3 ARCH Modelle

Seit der bahnbrechenden Arbeit von Engle [19] entstanden eine Vielzahl von Modellvarianten und Erweiterungen des ARCH Modells. In der vorliegenden Arbeit werden die wichtigsten Vertreter dieser Modellklasse, das ARCH Modell von Engle [19], das GARCH Modell von Bollerslev [8], das GARCH-t Modell von Bollerslev [9] und das EGARCH Modell von Nelson [47] dargestellt. Eine gute Übersicht über weitere Modellspezifikationen, insbesondere multivariate, und ihre Anwendungen auf Finanzmärkte ist in dem Übersichtsartikel von Bollerslev/Chou/Kroner [10] zu finden, in dem über 300 Literaturstellen angegeben sind.

Auf deutsche Aktienkurse fanden ARCH Modelle bis jetzt noch selten Anwendung. Akgiray/Booth/Loistl [3] untersuchten tägliche Renditen des DAX mit einem GARCH(1,1) Modell für den Zeitraum vom 1. Januar 1986 bis

¹⁷Vgl. Fußnote 16.

¹⁸Die Mischung von zwei Normalverteilungen mit gleichem Mittelwert und unterschiedlicher Varianz ist *immer* leptokurtisch.

18. August 1988. Schlag [51] betrachtete tägliche Renditen von fünf deutschen Aktien von Januar 1986 bis Dezember 1990 mit ARCH und GARCH Modellen bis zu einer Parametrisierung von ARCH(4) bzw. GARCH(1,3). Grünbichler/Schwartz [30] benutzten ebenfalls tägliche Renditen für einen Vergleich des DAX (Juli 1988 bis Juli 1991) und des SMI (Swiss Market Index) (Januar 1989 bis Oktober 1991) mittels eines ARCH(1) und eines GARCH(1,1) Modells. Bauer/Nieuwland/Verschoor [4] erweitern die Varianzgleichung des GARCH(1,1) Modells um den Faktor Handelsumsatz, um die These von Lamoureux/Lastrapes [42], daß sich die ARCH Effekte durch das Handelsvolumen erklären lassen, auf dem deutschen Aktienmarkt anhand von zehn DAX-Werten zu überprüfen. Funke [28] benutzte das SGARCH-M (Stochastic GARCH in Mean) Modell zur Analyse täglicher Renditen des Index der Frankfurter Allgemeinen Zeitung (FAZ) von Januar 1987 bis Dezember 1990. Auf das SGARCH-M Modell wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen, es sollen vielmehr erstmals Kursrenditen mittels des EGARCH Modells analysiert werden.

3.1 ARCH

Das von Engle [19] eingeführte ARCH Modell spezifiziert den dynamischen Prozeß der Volatilität in Form eines linearen Ansatzes, in dem die bedingte Varianz einer Normalverteilung als Funktion der quadrierten Residuen einer zeitverzögerten Zufallsvariable modelliert wird.

$$r_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \phi_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3)$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (4)$$

Die Koeffizienten in Gleichung (4) müssen die Bedingungen $a_0 > 0$ und $a_i \geq 0$ erfüllen. Werden in Gleichung (4) p zeitverzögerte Terme berücksichtigt, so spricht man von einem ARCH(p)-Prozeß¹⁹. σ_t^2 ist die *bedingte* Varianz von r_t in Abhängigkeit von der Informationsmenge ϕ_t zum Zeitpunkt t . Die ε_t

¹⁹Betrachtet man den Spezialfall mit $a_0 = 0$ und $a_i = \frac{1}{p}$, so ergibt sich σ_t^2 als die Stichprobenvarianz der letzten p Aktienkursrenditen (vgl. Engle [20], S. 74). Dies ist der Volatilitätsschätzer, der in der Praxis oft verwendet wird, und für unterschiedliche Zeiträume regelmäßig in Tageszeitungen (z. B. Handelsblatt) veröffentlicht wird.

können als unerwartete Kursausschläge (Residuen) interpretiert werden²⁰. Die Auswirkung eines unwarteten Kursauschlages, der vor i Perioden aufgetreten ist ($i < p$), wird durch den Faktor a_i gewichtet. Liegt der Kursauschlag länger als p Perioden zurück, so findet er keine Berücksichtigung mehr.

Die stationäre (unbedingte) Varianz entspricht:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^p a_i} \quad (5)$$

Als Stationaritätsbedingung muß dann gelten:

$$\sum_{i=1}^p a_i < 1 \quad (6)$$

Engle [19] hat gezeigt, daß sich die Kurtosis K eines ARCH(1) Modells berechnet als

$$K = 3 \cdot \frac{1 - a_1^2}{1 - 3a_1^2}. \quad (7)$$

Für²¹ $a_1 < \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,577$, ist der Quotient in Gleichung (7) *immer* größer als 1 und somit die Kurtosis größer als 3²². Ein ARCH(1)-Prozeß impliziert also eine leptokurtische Verteilung²³.

Die Ergebnisse der Maximum-Likelihood Schätzungen²⁴ für ein ARCH(1) Modell sind in Tabelle 4 dargestellt²⁵. Die Werte in Klammern sind die t -Statistiken, die sich aus den Standardfehlern ergeben. In allen Fällen ist eine signifikante Verbesserung der Loglikelihood gegenüber der Annahme einer Normalverteilung eingetreten. Ein Vergleich der Modelle mittels des Schwarz Information Criterion (SIC)²⁶ ergibt, daß das ARCH(1) Modell die Daten besser darstellt als eine Normalverteilung. Um das geeignetste ARCH(p) Modell zu bestimmen, könnte man nun Modelle mit einer zunehmenden Anzahl

²⁰Vgl. Engle/Ng [22], S. 1751.

²¹Diese Bedingung ist für alle Aktien in Tabelle 4 erfüllt.

²²Ist die Ungleichung $3a^2 < 1$ nicht erfüllt, ist die Kurtosis unendlich und somit auch größer als 3 (Vgl. Bollerslev/Engle/Nelson [11], S. 8).

²³Milhoj [46] hat diesen Sachverhalt für ARCH(p)-Prozesse verallgemeinert.

²⁴Die Maximum-Likelihood Schätzungen der Parameter des ARCH(1)-, GARCH(1,1)- und EGARCH(1,1) Modells wurden mit dem Programm-Paket RATS.

²⁵Auf eine Darstellung der Ergebnisse für den Parameter μ wurde verzichtet, da für die weiteren Untersuchungen nur die Volatilitätsgleichung (4) von Interesse ist.

²⁶Das Schwarz Information Criterion errechnet sich als $SIC = n \ln T - 2L^*$. Hierbei bezeichnet T die Anzahl der Kursrenditen, n die Anzahl der geschätzten Parameter und L^* die maximierte Loglikelihood.

Tabelle 4: Parameter der ARCH-Schätzungen

Name	$\alpha_0 \cdot 10^3$	α_1	LL ^a	SIC
DAX	0.1403 (58.9514) ^b	0.3260 (15.5817)	4324.64	-8627.34
BAS	0.1568 (40.3259)	0.2168 (6.1459)	4288.35	-8554.77
BMW	0.2289 (50.0469)	0.2618 (8.6084)	3988.61	-7955.30
DAI	0.2475 (44.3061)	0.2707 (9.2407)	3924.06	-7826.19
BAY	0.1469 (32.1485)	0.3405 (9.2561)	4264.00	-8506.07
KAR	0.24784 (48.3260)	0.1347 (5.7431)	3997.88	-7973.83
MMW	0.34598 (54.1544)	0.1701 (6.2767)	3734.02	-7446.12
SIE	0.1805 (45.6373)	0.2142 (7.7739)	4188.85	-8355.78
THY	0.2570 (35.4465)	0.1914 (6.30481)	3928.45	-7834.98
CBR	0.2349 (63.4556)	0.0868 (3.47349)	4067.53	-8113.13
DBK	0.2067 (64.2496)	0.2019 (7.9281)	4097.42	-8172.91
ALV	0.2520 (63.3742)	0.3202 (11.2645)	3897.22	-7772.52

^aLoglikelihood

^bDie Werte in Klammern sind die *t*-Statistiken.

von *lags* schätzen und diese mittels eines Lagrange-Multiplikatoren (LM) Tests oder des SIC miteinander vergleichen. Andere Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß eine recht hohe Anzahl von *lags* für eine adäquate Modellspezifikation erforderlich ist²⁷. Da die Modelle in den nächsten Abschnitten eine bessere Modellierung des Volatilitätsprozesses darstellen, wie man anhand des SIC erkennen kann, und man auch bei den hier verwendeten Kursreihen einen hohen *lag p* wählen müsste, wie eigene Untersuchungen bestätigt haben, wird hier nur ein ARCH(1) Modell geschätzt.

3.2 GARCH

Da sich, wie im letzten Abschnitt schon erwähnt, bei empirischen Untersuchungen von Finanzmarktdaten gezeigt hat, daß viele signifikante zeitverzögerte Terme in den Volatilitätsprozeß eingehen, stellt sich die Frage, wie man zu einer sparsameren Parametrisierung gelangen kann. Hierbei macht man sich die Tatsache zunutze, daß autoregressive Prozesse höherer Ordnung durch ARMA-Modelle geringerer Ordnung dargestellt werden können²⁸. Bollerslev [8] hat diesen Ansatz auf die Volatilitätsgleichung (4) angewandt und gelangte so zum *generalized* ARCH (GARCH) Modell, in dem die Varianz folgende Struktur besitzt:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j \sigma_{t-j}^2 \quad (8)$$

Analog zum ARCH Modell müssen die Nichtnegativitätsbedingungen $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ und $b_j \geq 0$ erfüllt sein. Im GARCH(p, q) Modell ist die Volatilität nicht nur von Abweichungen ε_{t-i} der vorhergehenden Zeitpunkte, sondern auch von den entsprechenden Varianzen σ_{t-j}^2 abhängig. Ersetzt man rekursiv σ_t^2 in Gleichung (8), so erkennt man, daß das GARCH Modell einem ARCH(∞)-Prozeß mit abnehmenden Parametern entspricht²⁹. Dies steht im Einklang mit der Intuition, daß der Einfluß von Informationen umso geringer ist, je länger der Zeitpunkt ihres Eintreffens zurückliegt. Im GARCH(p, q) Modell lautet die stationäre Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{1 - \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j} \quad (9)$$

²⁷Vgl. z. B. Engle [19], Akgiray [1] und Fornari [26].

²⁸Vgl. Geyer [29], S. 204.

²⁹Vgl. Bollerslev [8], S. 323 f.

bzw. die Stationaritätsbedingung³⁰:

$$\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{j=1}^p b_j < 1 \quad (10)$$

Im folgenden wird nun das GARCH(1,1) Modell verwendet, da sich bei empirischen Studien gezeigt hat, daß ein GARCH Modell mit $p = 1$ und $q = 1$ in den meisten Fällen ausreichend ist³¹. Dieses Ergebnis trifft auch für die hier verwendeten Kurse zu. Die geschätzten Parameter des GARCH(1,1) Modells sind in Tabelle 5 dargestellt. In *allen* Fällen ergibt sich eine Verbesserung des SIC, d. h. das Modell besitzt eine bessere Anpassung an die Daten als das ARCH(1) Modell. Man erkennt, daß die Summe der Parameter a_1 und b_1 jeweils kleiner als 1 ist, die Stationaritätsbedingung ist also für alle betrachteten Renditereihen erfüllt. Allerdings ist die Summe $a_1 + b_1$ recht nahe bei 1, d. h. es besteht eine hohe Persistenz der Volatilität und bei ALV wäre die Anwendung eines IGARCH Modells gerechtfertigt. Weiterhin erkennt man, daß bei allen untersuchten Kursreihen der Einfluß der Volatilität σ_{t-1}^2 der vorhergehenden Periode, gekennzeichnet durch b_1 , erheblich höher ist als der Einfluß a_1 der Innovation ε_{t-1}^2 der vorhergehenden Periode.

3.3 GARCH-t

Da man bei Anwendungen des GARCH Modells festgestellt hat, daß die standardisierten Residuen ε_t/σ_t^2 oftmals noch erhebliche Leptokurtosis besitzen, ersetzte man die Annahme einer Normalverteilung für $\varepsilon_t|\phi_t$ durch eine Student-t-Verteilung, da die Student-t-Verteilung selbst schon Leptokurtosis impliziert³².

$$\varepsilon_t|\phi_t \sim t(n) \quad (11)$$

Gegenüber dem GARCH(1,1) Modell wird beim GARCH(1,1)-t Modell ein Parameter mehr geschätzt: die Anzahl der Freiheitsgrade der t-Verteilung. Die Ergebnisse der Maximum-Likelihood-Schätzungen können der Tabelle 6 entnommen werden³³. Es ergibt sich jeweils eine weitere signifikante Verbes-

³⁰Ist die Summe der Parameter größer oder gleich 1, so ist die Spezifikation als IGARCH (Integrated GARCH) Modell erforderlich (vgl. Engle/Bollerslev [21]).

³¹Vgl. z. B. Akgiray [1], Grünbichler/Schwartz [30], Taylor [53] und die zahlreichen Verweise im Übersichtsartikel von Bollerslev/Chou/Kroner [10], S. 21 ff.

³²Vgl. Bollerslev [9].

³³Die Parameterschätzungen für das GARCH(1,1)-t Modell wurden mit GAUSS durchgeführt.

Tabelle 5: Parameter der GARCH-Schätzungen

Name	$a_0 \cdot 10^3$	a_1	b_1	$a_1 + b_1$	LL ^a	SIC
DAX	0.0152 (8.7615) ^b	0.1955 (16.1454)	0.7468 (33.8692)	0.9423	4443.82	-8858.41
BAS	0.0309 (8.1252)	0.1687 (7.8362)	0.6838 (18.0766)	0.8526 ^c	4333.03	-8636.82
BMW	0.0242 (7.5329)	0.2241 (14.4712)	0.7182 (35.1402)	0.9423	4111.36	-8193.48
DAI	0.0147 (6.5331)	0.1187 (7.2432)	0.8424 (41.7883)	0.9610 ^c	4016.02	-8002.81
BAY	0.0140 (8.2748)	0.2034 (10.4164)	0.7497 (40.1355)	0.9531	4342.95	-8656.67
KAR	0.0384 (7.8329)	0.2308 (9.0764)	0.6682 (21.1825)	0.8989 ^c	4070.35	-8111.46
MMW	0.0211 (13.9742)	0.0502 (10.3217)	0.8991 (130.5655)	0.9493	3761.01	-7492.79
SIE	0.0164 (6.2847)	0.1051 (7.1299)	0.8215 (31.7750)	0.9266	4269.62	-8510.00
THY	0.0212 (4.7577)	0.0869 (5.4762)	0.8450 (29.7406)	0.9319	3970.66	-7912.08
CBR	0.0133 (4.3781)	0.0706 (9.0032)	0.8820 (45.9744)	0.9525 ^c	4114.09	-8198.94
DBK	0.0181 (7.0524)	0.1252 (8.3696)	0.8106 (35.8846)	0.9359 ^c	4181.54	-8333.85
ALV	0.0087 (6.1331)	0.1720 (13.5866)	0.8237 (76.6949)	0.9956 ^c	4077.46	-8125.69

^aLoglikelihood

^bDie Werte in Klammern sind die t -Statistiken.

^cDie Abweichungen beruhen auf Rundungsfehlern.

Tabelle 6: Parameter der GARCH-t-Schätzungen

Name	$a_0 \cdot 10^3$	a_1	b_1	$a_1 + b_1$	n	LL ^a	SIC
DAX	0.004 (2.6037) ^b	0.1114 (4.2533)	0.8660 (30.212)	0.9774	5.8031 (8.1029)	4601.9	-9167.19
BAS	0.0134 (2.9543)	0.1441 (4.3647)	0.7935 (17.737)	0.9376	4.8122 (8.3068)	4452.2	-8867.79
BMW	0.0146 (3.1606)	0.1657 (4.6763)	0.7897 (19.601)	0.9554	5.0898 (7.7273)	4227.9	-8419.29
DAI	0.0073 (1.7694)	0.1135 (3.0324)	0.8683 (19.965)	0.9818	5.1784 (8.1094)	4134.6	-8232.69
BAY	0.0081 (3.1771)	0.1421 (5.0032)	0.8253 (26.753)	0.9674	5.3453 (7.7554)	4430.6	-8824.59
KAR	0.0530 (3.4558)	0.1365 (3.6799)	0.6704 (9.2342)	0.8069	4.038 (8.6304)	4206.9	-8377.29
MMW	0.0061 (1.6585)	0.0460 (2.9454)	0.9385 (43.2600)	0.9845	4.2443 (9.1462)	3931.7	-7826.79
SIE	0.0029 (1.6358)	0.0715 (3.2562)	0.9153 (34.2020)	0.9869 ^c	5.5220 (7.8330)	4388.4	-8740.29
THY	0.0072 (1.9523)	0.0735 (3.9134)	0.9044 (34.365)	0.9779	6.4339 (6.8204)	4033.9	-8031.29
CBR	0.0033 (2.4512)	0.0581 (4.5351)	0.9285 (63.605)	0.9866	5.3818 (10.3200)	4245.8	-8455.19
DBK	0.0035 (2.6847)	0.0842 (5.2499)	0.9041 (55.724)	0.9883	5.1496 (10.8590)	4324.6	-8612.69
ALV	0.0186 (2.9438)	0.1995 (4.4777)	0.7638 (16.623)	0.9633	3.9372 (9.2955)	4206.6	-8376.59

^aLoglikelihood

^bDie Werte in Klammern sind die *t*-Statistiken.

^cDie Abweichung beruht auf einem Rundungsfehler.

serung des SIC. Ebenso existieren die stationären Volatilitäten. Der Wert für den Freiheitsgrad der t-Verteilung schwankt zwischen 3,9 und 6,4. In diesem Bereich bestehen noch große Unterschiede zwischen der t-Verteilung und der Normalverteilung, gegen die die t-Verteilung mit zunehmender Anzahl von Freiheitsgraden konvergiert³⁴.

3.4 EGARCH

Bei den Untersuchungen der (G)ARCH Modelle in den letzten Abschnitten sind einige Probleme zutage getreten; so wirft z. B. die Nichtnegativitätsbedingung der Parameter bei der Maximum-Likelihood Schätzung Probleme auf. Weiterhin können nichtstationäre Varianzen auftreten³⁵. Diese Problematik wird mit dem *Exponential* GARCH (EGARCH) Modell von Nelson [47] umgangen. Im EGARCH(p,q) Modell ist die Volatilitätsgleichung wie folgt definiert

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^q \left[a_{ia} \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + a_{ib} \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| - E \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| \right) \right] + \sum_{j=1}^p b_j \ln \sigma_{t-j}^2 \quad (12)$$

Im Falle einer Normalverteilung gilt³⁶: $E \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,798$. Durch die Verwendung des Logarithmus bzw. der Exponentialfunktion können die Parameter negativ werden, ohne daß die Varianz negativ wird. Als Stationaritätsvoraussetzung muß beim EGARCH(1,1) Modell nur $b_1 < 1$ gelten³⁷. Sie ist für alle betrachteten Aktienwert erfüllt.

Weiterhin enthält die Gleichung (12) mit $a_{ia} \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}}$ auch einen Term um die empirisch belegten, asymmetrischen Effekte zu berücksichtigen³⁸. Diese asymmetrischen Effekte beruhen auf dem sog. *Leverage Effect*, d. h. sinkende Aktienkurse führen (i.a.) zu einer höheren Volatilität, währenddessen steigende Aktienkurse tendenziell eine niedrigere Volatilität zur Folge haben. Während im (G)ARCH Modell das *Vorzeichen* der Kursänderungen – aufgrund der Berücksichtigung in quadrierter Form – unberücksichtigt bleibt, kann die-

³⁴Dieser Sachverhalt läßt sich anhand eines Vergleiches der Perzentile der beiden Verteilungsfunktionen verdeutlichen.

³⁵Vgl. Gleichung (5) und (9).

³⁶Vgl. Johnson/Kotz [35], S. 49.

³⁷Im allgemeinen Fall lautet die Stationaritätsbedingung: $\sum_{j=1}^p b_j < 1$.

³⁸Vgl. Black [7], Christie [14] und French/Schwert/Stambaugh [27].

Tabelle 7: Parameter der EGARCH-Schätzungen

Name	a_0	a_{1a}	a_{1b}	b_1	LL ^a	SIC
DAX	-0.7170 (-7.4881) ^b	-0.1169 (-10.5193)	0.1912 (11.0562)	0.9166 (85.6909)	4449.93	-8863.31
BAS	-1.4109 (-7.7118)	-0.0901 (-6.3183)	0.2963 (9.7169)	0.8343 (39.9736)	4340.86	-8645.18
BMW	-0.6769 (-7.6316)	-0.0648 (-7.4693)	0.3234 (10.0890)	0.9160 (88.3648)	4120.72	-8204.90
DAI	-0.2392 (-4.9233)	-0.0738 (-9.1532)	0.1253 (8.1554)	0.9698 (162.9557)	4032.25	-8027.95
BAY	-0.8321 (-8.5756)	-0.0569 (-3.9083)	0.3914 (14.4010)	0.9012 (84.0309)	4350.25	-8663.96
KAR	-1.0164 (-5.4721)	-0.0889 (-8.3759)	0.2776 (9.0962)	0.8745 (38.8964)	4083.82	-8131.10
MMW	-0.2299 (-10.8120)	-0.0808 (-9.9285)	0.0773 (14.0310)	0.9699 (362.6320)	3777.47	-7518.40
SIE	-0.2028 (-5.0626)	-0.0539 (-8.3536)	0.0890 (8.6587)	0.9756 (210.0201)	4279.83	-8523.11
THY	-0.2167 (-5.4995)	-0.0859 (-8.0400)	0.0568 (8.6297)	0.9732 (203.6090)	3991.93	-7947.31
CBR	-0.2769 (-3.9495)	0.0089 (0.7792)	0.1443 (9.2828)	0.9656 (115.4890)	4127.26	-8217.96
DBK	-0.5032 (-6.2585)	-0.0398 (-3.1178)	0.2109 (8.3343)	0.9383 (98.5864)	4195.54	-8354.54
ALV	-0.3126 (-6.3262)	-0.0745 (-7.5277)	0.2670 (14.4410)	0.9595 (160.8710)	4086.98	-8137.42

^aLoglikelihood

^bDie Werte in Klammern sind die t -Statistiken.

ser Umstand im EGARCH Modell explizit modelliert werden³⁹. Die Auswirkung einer *positiven* Innovation auf den Logarithmus der bedingten Volatilität beläuft sich im EGARCH(1,1) Modell auf $(a_{1b} + a_{1a}) \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$ und im Falle einer *negativen* Innovation auf $(a_{1b} - a_{1a}) \frac{|\varepsilon_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}$. Ist der Parameter a_{1a} negativ, so führt eine grosse positive Kursänderung ($\varepsilon > 0$) zu einer sinkenden Volatilität und ein fallender Kurs zu einem Ansteigen der Volatilität.

Untersucht man die in Tabelle 7 angegebenen Parameter der EGARCH Modelle, so erkennt man, daß der *Leverage Effect* ($a_{1a} < 0$) in elf von zwölf Fällen auftritt. Nur bei der Commerzbank (CBR) ist der Asymmetrieparameter a_{1a}

³⁹Vgl. Bollerslev/Engle/Nelson [11], S. 10.

Tabelle 8: Vergleich der Modelle mittels des SIC

Name	NV	ARCH	GARCH	GARCH-t	EGARCH
DAX	-8505.56	-8627.34	-8858.41	-9167.19	-8863.31
BAS	-8499.10	-8554.77	-8636.82	-8867.79	-8645.18
BMW	-7847.78	-7955.30	-8193.48	-8419.29	-8204.90
DAI	-7695.68	-7826.19	-8002.81	-8232.69	-8027.95
BAY	-8319.74	-8506.07	-8656.67	-8824.59	-8663.96
KAR	-7912.96	-7973.83	-8111.46	-8377.29	-8131.10
MMW	-7390.50	-7446.12	-7492.79	-7826.79	-7518.40
SIE	-8294.02	-8355.78	-8510.00	-8740.29	-8523.11
THY	-7780.44	-7834.98	-7912.08	-8031.29	-7947.31
CBR	-8108.68	-8113.13	-8198.94	-8455.19	-8217.96
DBK	-8071.34	-8172.91	-8333.85	-8612.69	-8354.54
ALV	-7554.88	-7772.52	-8125.69	-8376.59	-8137.42

größer als Null⁴⁰. Dies ist jedoch zugleich der einzige *nicht* signifikant von Null verschiedene Wert. Untersuchungen der Aktienmärkte in den USA⁴¹, Großbritannien⁴², Japan⁴³ und Frankreich⁴⁴ mittels des EGARCH Modells haben weitere empirische Evidenz für den *Leverage Effect*, d. h. die Negativität des Parameters a_{1a} , ergeben.

3.5 Vergleich der Modelle mittels des SIC

In der Tabelle 8 sind die Werte des Schwarz Information Criterion (SIC) für die verschiedenen ARCH Modelle dem SIC bei Annahme einer Normalverteilung gegenübergestellt. Das SIC berücksichtigt die maximierte Loglikelihood und nimmt eine Korrektur in Abhängigkeit der geschätzten Parameter vor, da i. a. eine größere Anzahl von Parametern auch zu einer besseren Loglikelihood führt. Man erkennt, daß alle ARCH Modelle eine bessere Anpassung liefern als es das Modell unabhängig und identisch normalverteilter Renditen vermag.

Weiterhin ergibt sich in *allen* Fällen eine eindeutige Reihenfolge: das beste

⁴⁰Auch für die anderen im DAX enthaltenen Aktien, deren Ergebnisse hier nicht angegeben sind, ist a_{1a} kleiner Null.

⁴¹Siehe Nelson [47], S. 357.

⁴²Siehe Engle/Ng [22], S. 1770 und S. 1775.

⁴³Siehe Poon/Taylor [50], S. 50 und Kuwahara/Marsh [41], S. 1616.

⁴⁴Siehe Crouhy/Rockinger [15], Anhang Tabelle 4.

Modell ist das GARCH-t(1,1) Modell vor dem EGARCH(1,1) Modell. Danach folgen das GARCH(1,1) und das ARCH(1) Modell.

4 Markov-Mischungsmodell

Die Markov-Mischungsmodelle, die eine dynamische Erweiterung der statischen Mischungsmodelle darstellen, haben in der empirischen Kapitalmarktforschung erheblich weniger Verbreitung gefunden als die ARCH Modelle⁴⁵. Um das empirische Phänomen der Heteroskedastizität zu erfassen, wird angenommen, daß die Zustandsvariable s_t einem Markovprozeß folgt. Im folgenden wird nun von einem Markov-Mischungsmodell mit zwei Regimes ausgegangen. Befindet sich der Prozeß im Zustand $s_t = 1$, so entstammt die Kursänderung r_t einer Normalverteilung mit Mittelwert μ_1 und Varianz σ_1^2 , ist $s_t = 2$ so ist r_t $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ -verteilt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den beiden Zuständen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 p(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) &= p_{11} & (13) \\
 p(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) &= p_{21} = 1 - p_{11} \\
 p(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) &= p_{12} = 1 - p_{22} \\
 p(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) &= p_{22}
 \end{aligned}$$

Die Übergangsmatrix P lautet also:

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ 1 - p_{22} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Sind die Wahrscheinlichkeiten p_{11} und p_{22} größer als $1/2$, so ist es wahrscheinlicher, in einem Regime zu bleiben, als in das andere Regime zu wechseln. In diesem Fall läßt sich mit dem Markov-Mischungsmodell ein „Volatility Clustering“ erzeugen. In Tabelle 9 sind die mittels des EM-Algorithmus von Baum/Petrie/Soules/Weiss [5], Lindgren [43] und Hamilton [33] geschätzten Parameter für die untersuchten Zeitreihen dargestellt. Die Mittelwerte der beiden Regimes unterscheiden sich nur geringfügig voneinander, wobei μ_1

⁴⁵Turner/Startz/Nelson [54], Pagan/Schwert [49] und Van Norden/Schaller [55], [56], [57] haben das Markov-Mischungsmodell auf amerikanische Aktienkurse angewendet. Korn [37] hat den Deutschen Aktienindex (DAX) mit dem Markov-Mischungsmodell untersucht. Allerdings benutzt er Monatsdaten und einen Bayesschen Schätzansatz, während in dieser Arbeit, wie auch in den oben genannten, der „klassische“ Maximum-Likelihood Ansatz verwendet wird.

Tabelle 9: Parameter der Markov-Schätzungen

Name	$\mu_1 \cdot 10^3$	$\mu_2 \cdot 10^3$	$\sigma_1^2 \cdot 10^3$	$\sigma_2^2 \cdot 10^3$	p_{11}	p_{22}	LL ^a	SIC
DAX	-2.1499 (-1.6735) ^b	0.7855 (2.9297)	0.5709 (11.0500)	0.0718 (18.0982)	0.9543 (64.4986)	0.9849 (215.1232)	4553.37	-9062.88
BAS	-0.9597 (-0.7382)	0.3119 (1.0157)	0.5433 (8.5264)	0.0868 (1.3622)	0.9036 (29.4848)	0.9692 (121.2511)	4435.68	-8827.50
BMW	-0.3463 (-0.2071)	0.2162 (0.5938)	0.9093 (8.5030)	0.1186 (15.8825)	0.9320 (37.0600)	0.9789 (150.1030)	4188.06	-8332.26
DAI	-1.8828 (-1.0454)	-0.0222 (-0.0580)	1.0025 (6.6264)	0.1331 (13.3200)	0.8920 (20.2255)	0.9669 (102.3441)	4082.79	-8121.72
BAY	-0.8498 (-0.7211)	0.4175 (1.3274)	0.5559 (10.7694)	0.0883 (14.8862)	0.9540 (58.0090)	0.9814 (157.3036)	4387.17	-8730.48
KAR	-4.2177 (-0.8213)	0.3984 (1.0875)	2.1679 (4.7033)	0.1715 (20.6221)	0.7980 (12.0178)	0.9872 (216.1375)	4181.72	-8319.58
MMW	-2.8247 (-0.8987)	0.8406 (1.9320)	1.7617 (6.9624)	0.2042 (16.1142)	0.7814 (13.6248)	0.9663 (94.6963)	3901.04	-7758.22
SIE	-0.6484 (-0.4524)	0.1262 (0.3960)	0.6512 (8.5910)	0.0997 (16.7530)	0.9265 (36.0084)	0.9782 (148.7107)	4356.27	-8668.68
THY	-3.8170 (-1.9176)	1.2978 (3.0940)	0.8873 (8.0760)	0.1875 (17.3274)	0.9336 (38.4148)	0.9850 (176.5991)	4021.28	-7998.70
CBR	-0.9465 (-0.6804)	0.3513 (0.9391)	0.6296 (7.8118)	0.1196 (13.9771)	0.9246 (33.2738)	0.9720 (122.8506)	4210.45	-8377.04
DBK	-3.0584 (-1.3059)	0.4947 (1.4390)	1.0611 (6.1019)	0.1261 (16.2454)	0.8763 (22.9351)	0.9792 (173.0957)	4271.29	-8498.72
ALV	-2.5881 (-0.9757)	0.6537 (1.8869)	1.6346 (7.9684)	0.1263 (16.8124)	0.8544 (24.7882)	0.9720 (148.2480)	4156.37	-8268.88

^aLoglikelihood

^bDie Werte in Klammern sind die *t*-Statistiken.

immer kleiner als der Mittelwert der Stichprobe⁴⁶ und μ_2 immer größer als der entsprechende Mittelwert der Stichprobe ist. Bei den Varianzen der Regimes gibt es deutliche Unterschiede: Die Varianz σ_1^2 des Regime 1 beträgt das 4,7-fache (THY) bis 12,9-fache (ALV) der Varianz σ_2^2 des Regime 2. Weiterhin ist σ_1^2 (σ_2^2) immer größer (kleiner) als die Stichprobenvarianz.

Die beiden Regimes lassen sich also folgendermaßen charakterisieren: Regime 1 besitzt einen negativen Mittelwert μ_1 und eine große Varianz σ_1^2 , Regime 2 ist hingegen durch einen positiven Mittelwert⁴⁷ μ_2 und eine viel kleinere Varianz σ_2^2 gekennzeichnet. Dieses Ergebnis wurde auch in den anderen Untersuchungen festgestellt⁴⁸. Auf den ersten Blick erscheint dieses Ergebnis überraschend: Der Aktienmarkt läßt sich durch einen Zustand mit relativ geringem Risiko und überdurchschnittlichem Ertrag und einen Zustand erheblich höheren Risikos, bei dem die Investoren-im Durchschnitt Geld verlieren, erklären.

Brock/Lakonishok/LeBaron [13] haben festgestellt, daß im Falle des Vorliegens eines *Kaufsignals*⁴⁹ die durchschnittliche Rendite der nachfolgenden Renditen positiv ist, während sie bei einem Verkaufssignal *negativ* ist. Weiterhin sind negative Renditen mit einer höheren Varianz als positive verbunden⁵⁰. Hier zeigen sich Parallelen zum „Leverage Effect“. Der Erklärungsansatz von Turner/Startz/Nelson [54] basiert auf der Ansicht, daß die Marktteilnehmer nicht in der Lage seien, zu erkennen, in welchem Regime sich der Markt zur Zeit befindet.

Die Wahrscheinlichkeiten im selben Regime zu verbleiben, p_{11} und p_{22} , bewegen sich zwischen 0,781 (MMW) und 0,987 (KAR), d. h. sie sind erheblich größer als 1/2. Das empirische Phänomen der Volatilitätsklumpung wird also sehr gut von den geschätzten Parametern der Markov-Mischungsmodelle abgebildet. Die Verbleibewahrscheinlichkeiten des Regime 1 sind in allen Fällen kleiner als die des Regime 2, d. h. der Zustand der hohen Volatilität wird eher verlassen als der der geringen Volatilität. Analysiert man die durchschnittli-

⁴⁶Vgl. Tabelle 2 auf Seite 4.

⁴⁷DAI stellt hierbei eine Ausnahme dar. Allerdings ist bei DAI der Mittelwert der Stichprobe *erheblich* kleiner Null.

⁴⁸Z. B. Turner/Startz/Nelson [54], Brock/Lakonishok/LeBaron [13] und Van Norden/Schaller [57].

⁴⁹Ob ein Kauf- oder Verkaufssignal vorliegt, wird aufgrund verschiedener Handelsstrategien bestimmt (vgl. Brock/Lakonishok/LeBaron [13], S. 1735 ff.).

⁵⁰Vgl. Brock/Lakonishok/LeBaron [13], S. 1731.

che Verweildauer⁵¹ λ_i des Prozesses in einem Regime

$$\lambda_i = \frac{1}{1 - p_{ii}} \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

so beträgt sie im Regime 1 zwischen 4,6 (MMW) und 22 (DAX) Tagen, im Regime 2 zwischen 30 (MMW) und 78 (KAR) Tagen. Die stationären (unbedingten) Wahrscheinlichkeiten ω_i der beiden Regimes, die sich berechnen als⁵²

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \\ \omega_2 &= 1 - \omega_1 \end{aligned} \quad (16)$$

liegen im Regime 1 zwischen 0,0597 (KAR) und 0,2879 (BAY) und im Regime 2 zwischen 0,7121 (BAY) und 0,9403 (KAR), d.h. die Anzahl der Beobachtungen, die sich im Regime 1 befindet, beträgt – je nach Aktie – zwischen 6 und 29 %, also nur ein geringer Teil der Beobachtungen der Stichprobe stammen aus dem Regime mit der höheren Varianz σ_1^2 .

Aus den geschätzten Parametern lassen sich rekursiv⁵³ die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\pi_i(t, \tau)$ für die beiden Regime bestimmen, sich zum Zeitpunkt t im Regime i zu befinden. Für $\tau = t$ erhält man auf Basis der Informationen vor dem Zeitpunkt t die "Filter"-Wahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t , während man für $\tau = T$ die "geglätteten" Wahrscheinlichkeiten erhält, die auf den *ex post* verfügbaren Informationen der gesamten Stichprobe basieren⁵⁴.

In Abbildung 4 sind die "geglätteten" Wahrscheinlichkeiten für die täglichen Renditen des Deutschen Aktienindex (DAX) im Zeitraum Januar 1987 bis Dezember 1992 dargestellt. Es können mehrere Phasen hoher Volatilität, verbunden mit extremen Kursänderungen, beobachtet werden⁵⁵. Der Crash im Oktober 1987 sowie der Mini-Crash im Oktober 1989 kann identifiziert werden, ebenso wie die Kuwait-Krise in der zweiten Hälfte des Jahres 1990. Der Gorbatschow-Putsch im August 1991 schlägt sich in Abbildung 4 nur als kurzer "Peak" nieder.

⁵¹Vgl. Engel/Hamilton [18], S. 699.

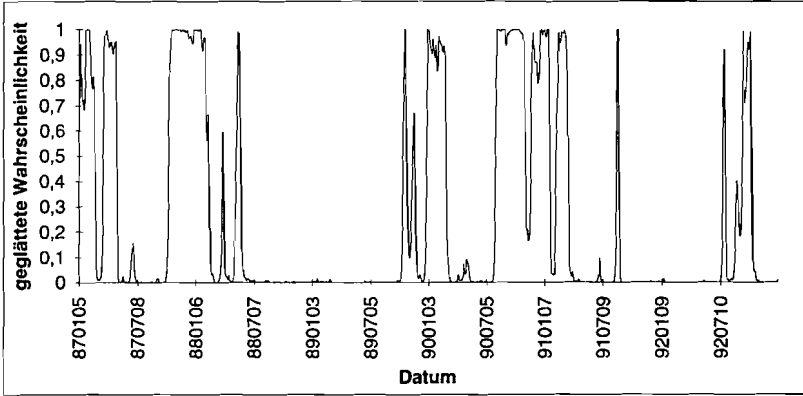
⁵²Vgl. Hamilton [32], S. 361.

⁵³Vgl. Hamilton [32], S. 367 ff.

⁵⁴Vgl. Hamilton [32], S. 370 f.

⁵⁵Vgl. Abbildung 2.

Abbildung 4: "Geglättete" Wahrscheinlichkeiten des Regime 1: tägliche DAX-Renditen



Beim Vergleich der SIC-Werte des Markov-Mischungsmodells aus Tabelle 9 mit den Angaben in Tabelle 8 zeigt sich, daß das Markov-Mischungsmodell immer besser ist die Annahme einer statischen Normalverteilung und in Bezug auf die Güte der Anpassung zwischen dem GARCH(1,1)-t und dem EGARCH(1,1) Modell liegt.

5 Volatilitätsprognosen

5.1 Systematik

In diesem Abschnitt sollen die vorgestellten Modelle auf ihre Fähigkeiten bei Volatilitätsprognosen untersucht werden.

Hierzu werden die Modelle in Bezug auf ihre *mittleren Fehler* und *mittleren quadratischen Fehler* mit einem *naiven* Modell verglichen. Im naiven Modell wird als Schätzer für die zukünftige Volatilität von der historischen Volatilität ausgegangen, die sich berechnet als:

$$\sigma_{\tau+k}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=\tau-T+1}^{\tau} (r_t - \mu)^2 \quad (17)$$

Die historische Volatilität ist die Varianz der letzten T täglichen Kursrenditen, die vor dem Zeitpunkt τ gemessen wurden. Es wird angenommen, daß die historische (naive) Volatilität im Prognosezeitraum bis zum Zeitpunkt $\tau + k$ konstant ist.

Für das erste Prognoseexperiment werden mit den Kursrenditen von $t = 1$ (5.1.1987) bis $t = 1000$ (4.1.1991) die Modellparameter geschätzt. Damit werden dann die Volatilitäten für die nächsten $k = 10$ Zeitpunkte von $\tau = 1001$ (7.1.1991) bis $\tau + k = 1010$ (18.1.1991) prognostiziert, mit den quadrierten Residuen der *tatsächlichen* Renditen im Prognosezeitraum verglichen und die Abweichungen bestimmt⁵⁶. Als Maß der Prognosegüte dient der mittlere Fehler sowie der RMSE (Root Mean Square Error), d. h. die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung zwischen realisiertem und prognostiziertem Wert.

Im nächsten Schritt werden dann 10 Beobachtungen hinzugefügt, die Parameter neu geschätzt und wiederum die Abweichungen errechnet. Damit die Anzahl der Beobachtungen in der Stichprobe konstant bei $T = 1000$ gehalten wird, werden jeweils die *ersten* zehn Beobachtungen aus der Stichprobe entfernt. Auf diese Weise erhält man für jede der zwölf betrachteten Rendite-reihen 49 Prognoseexperimente. Es wird dann der Durchschnitt der mittleren Fehler und mittleren quadratischen Fehler über diese 49 Stichproben gebildet.

5.2 Prognosen mit ARCH Modellen

Die Prognosen eines ARCH(1) Modells können auf folgende Weise rekursiv bestimmt werden: Die Volatilitätsprognose $\hat{\sigma}_{\tau+1}^2$ für den Zeitpunkt $\tau+1$ ergibt sich mit der Varianzgleichung (4)

$$\sigma_{\tau}^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{\tau-1}^2$$

zu

$$\hat{\sigma}_{\tau+1}^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{\tau}^2. \quad (18)$$

Mit der Prognose für $\tau + 1$ gemäß Gleichung (18), in die nur die geschätzten Parameter und die Innovation ε_{τ} eingehen, lassen sich für die Zeitpunkte $k > 1$ Volatilitätsprognosen bestimmen als⁵⁷:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\tau+k}^2 &= a_0 + a_1 \cdot E(\varepsilon_{\tau+k-1}^2 | \phi_{\tau+k-1}) \\ &= a_0 + a_1 \cdot \hat{\sigma}_{\tau+k-1}^2 \end{aligned} \quad (19)$$

⁵⁶Verwendet man als Schätzer für die "wahre" Volatilität die quadrierten Renditen, so ergeben sich nur unwesentliche Änderungen der Ergebnisse.

⁵⁷Vgl. Engle/Bollerslev [21], S. 4 ff.

Mit zunehmendem k konvergiert die prognostizierte Varianz gegen die stationäre Varianz⁵⁸. Beim GARCH(1,1) Modell ergeben sich die Volatilitätsprognosen analog⁵⁹:

$$\hat{\sigma}_{\tau+1}^2 = a_0 + a_1 \cdot \varepsilon_{\tau}^2 + b_1 \cdot \sigma_{\tau}^2 \quad (20)$$

bzw. für $k > 1$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\tau+k}^2 &= a_0 + a_1 \cdot E(\varepsilon_{\tau+k-1}^2 | \phi_{\tau+k-1}) + b_1 \cdot \sigma_{\tau+k-1}^2 \\ &= a_0 + (a_1 + b_1) \cdot \hat{\sigma}_{\tau+k-1}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Prognosen des GARCH(1,1)-t und des EGARCH Modells bestimmen⁶⁰.

Im folgenden wird zur Vereinfachung nur noch vom ARCH, GARCH, GARCH-t und EGARCH Modell gesprochen. Hierbei ist jeweils das ARCH(1), GARCH(1,1), GARCH(1,1)-t bzw. das EGARCH(1,1) Modell gemeint.

5.3 Prognosen mit Markov-Mischungsmodellen

Beim Markov-Mischungsmodell wird die Volatilitätsprognose im Zeitpunkt τ für $\tau + k$ errechnet als die mit den jeweiligen Zustandswahrscheinlichkeiten gewichtete Summe der Regimevarianzen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau+k}^2 &= \sigma_1^2 \cdot p(s_{\tau+k} = 1 | r_{\tau}) + \sigma_2^2 \cdot p(s_{\tau+k} = 2 | r_{\tau}) \\ &= (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cdot p(s_{\tau+k} = 1 | r_{\tau}) + \sigma_2^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Hierbei bezeichnet $p(s_{\tau+k} = 1 | r_{\tau})$ die "Filter"-Wahrscheinlichkeit⁶¹, sich, bei gegebener Rendite r_{τ} des Zeitpunktes τ , im Regime 1 zu befinden. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich in folgende zwei Komponenten zerlegen:

$$\begin{aligned} p(s_{\tau+k} = 1 | r_{\tau}) &= p(s_{\tau+k} = 1 | s_{\tau} = 1) \cdot p(s_{\tau} = 1 | r_{\tau}) \\ &\quad + p(s_{\tau+k} = 1 | s_{\tau} = 2) \cdot p(s_{\tau} = 2 | r_{\tau}) \end{aligned} \quad (23)$$

$p(s_{\tau+k} = 1 | s_{\tau} = i)$ ist die k -schrittige Übergangswahrscheinlichkeit von Regime i in Regime 1. Diese Wahrscheinlichkeit kann aus der k -schrittigen

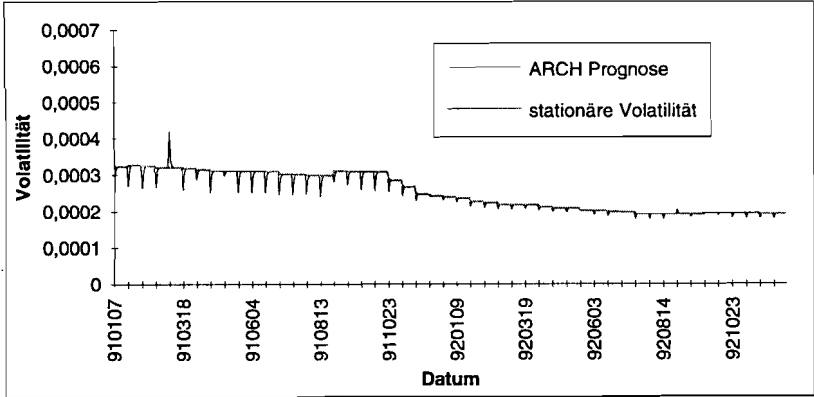
⁵⁸Dieser Sachverhalt gilt auch für das GARCH(1,1), das GARCH(1,1)-t und das EGARCH(1,1) Modell.

⁵⁹Vgl. Engle/Bollerslev [21], S. 21 f. und Engle/Kane/Noh [23], S. 5.

⁶⁰Vgl. Gleichung (12).

⁶¹Vgl. Seite 22 dieser Arbeit.

Abbildung 5: Prognosen des ARCH Modells



Übergangsmatrix $P^k = (p_{ij}^k)$ entnommen kann⁶². Im Falle einer Markovkette mit zwei Zuständen erhält man⁶³:

$$p(s_{\tau+k} = 1 | r_{\tau}) = \omega_1 + (p_{11} + p_{22} - 1)^k \cdot [p(s_{\tau} = 1 | r_{\tau}) - \omega_1] \quad (24)$$

mit⁶⁴

$$\omega_1 = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}}$$

5.4 Ergebnisse

In den Abbildungen 5 bis 9 sind exemplarisch für DBK (Deutsche Bank) die stationären Volatilitäten der 49 Prognoseexperimente sowie die jeweiligen Prognosewerte aufgetragen⁶⁵. In den vorhergehenden Darstellungen wurde jeweils die Renditereihe des Deutschen Aktienindex (DAX) für graphische Darstellungen herangezogen. Da beim 16. Prognoseexperiment ($t = 151$ bis $t = 1150$) des DAX die Summe der geschätzten Parameter a_1 und b_1 größer

⁶²Vgl. Fahrmeir/Kaufmann/Ost [24], S. 19.

⁶³Vgl. Hamilton [34], S. 25.

⁶⁴Siehe Gleichung (16).

⁶⁵Um eine Vergleichbarkeit der Abbildungen zu gewährleisten, wurde bei allen Abbildungen die gleiche Skalierung der Y-Achse gewählt. Dadurch wurde bei den Prognosen des Markov-Mischungsmodell (vgl. Abbildung 9) vier Werte des zweiten Prognoseexperimentes abgeschnitten. Die Prognosen der Volatilität für $t = 1011$ (21.1.1991) bis $t = 1014$ (24.1.1991) betragen $\hat{\sigma}_{1011}^2 = 0.000956$, $\hat{\sigma}_{1012}^2 = 0.000861$, $\hat{\sigma}_{1013}^2 = 0.000782$ bzw. $\hat{\sigma}_{1014}^2 = 0.000714$.

Abbildung 6: Prognosen des GARCH Modells

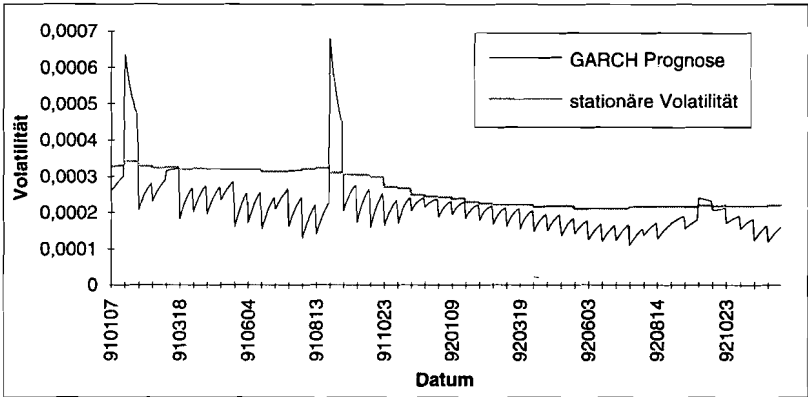


Abbildung 7: Prognosen des GARCH-t Modells

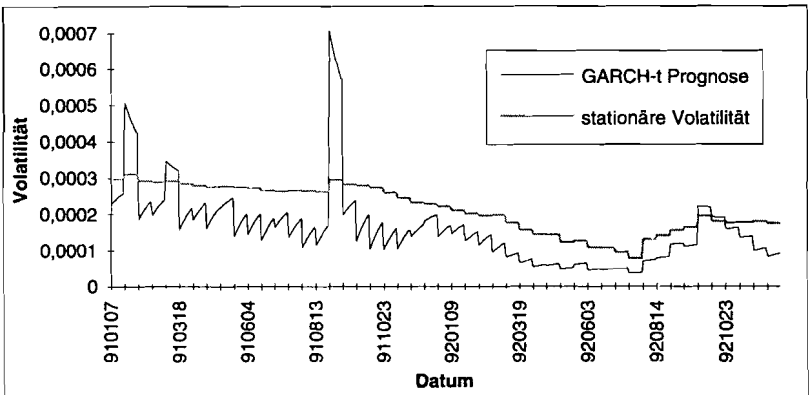


Abbildung 8: Prognosen des EGARCH Modells

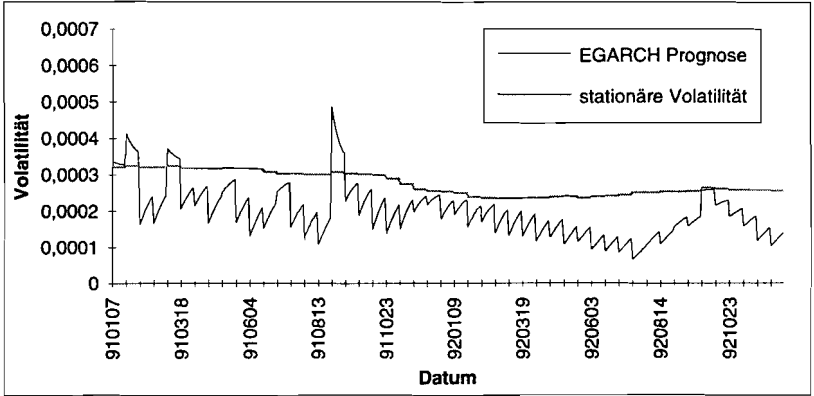
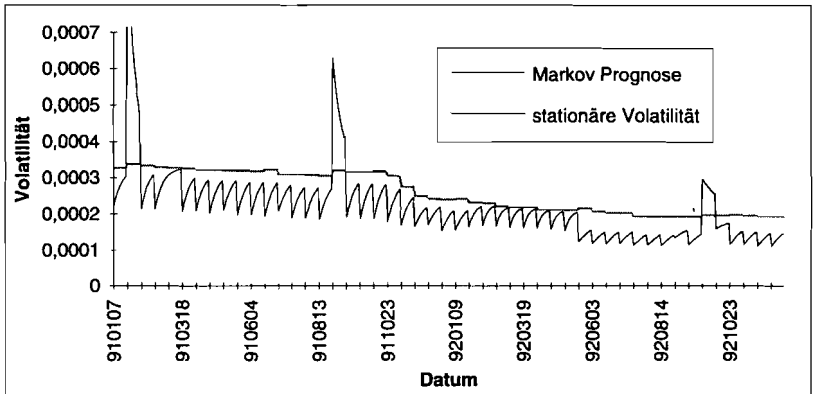


Abbildung 9: Prognosen des Markov-Mischungsmodells



als Eins ist, wäre in diesen Fällen eine IGARCH Spezifikation erforderlich⁶⁶. IGARCH Prozesse sind zwar stationär, die stationäre Volatilität existiert jedoch nicht. Aus diesem Grund wurde die Deutsche Bank ausgewählt.

Man erkennt, daß sich mit zunehmendem Prognosehorizont k die prognostizierten Volatilitäten (erwartungsgemäß) der stationären Volatilität nähern. Dadurch entsteht der "sägezahnartige" Verlauf der Prognosen. Aufgrund der geringen Werte für a_1 für die 49 Parameterschätzungen des ARCH(1) Modells (a_1 liegt zwischen 0,054 und 0,195) konvergieren die Prognosewerte erheblich schneller gegen die stationären Volatilitäten als bei den anderen Modellen. Wegen dieser Konvergenz wurde der Prognosezeitraum auf $k = 10$ festgesetzt. Während im ARCH(1) Modell nur die "Innovation" ε_τ einen Einfluß auf die Prognose hat⁶⁷, geht bei den (E)GARCH Modellen noch die Volatilität σ_τ^2 , die von den vorhergehenden Zeitpunkten abhängt, als Bestimmungsgröße ein.

Bei den Prognosen des GARCH-t Modells ist zu beachten, daß zwischen $\tau = 1300$ und $\tau = 1400$ (März bis August 1992) die Summe aus a_1 und b_1 sehr nahe bei eins liegt. Dies hat zur Folge, daß sich Rundungsfehler bei a_0 , das sich in der Größenordnung von 10^{-7} bewegt, sehr stark auswirken. Aufgrund der sehr großen Rechenzeit, die die Schätzung eines GARCH-t Modells erfordert, ist es derzeit nicht möglich, den Parameter a_0 in einem vertretbaren Zeitrahmen genauer zu schätzen. Dies hat zur Folge, daß die stationäre Volatilität gegenüber den anderen Modellen *absinkt*, obwohl man das Gegenteil erwarten würde⁶⁸. Auf die Prognosewerte hat a_0 jedoch nur einen geringen Einfluß⁶⁹.

In den Tabellen 10 und 11 sind die Prognoseabweichungen der sechs Modelle in Bezug auf den mittleren Fehler und mittleren quadratischen Fehler dargestellt.

Tabelle 10 zeigt, daß *alle* Modelle im Mittel eine zu große Volatilität prognostizieren. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, sind in der Abbildung 10 die Prognosen des EGARCH Modells und die naiven Prognosen auf Basis der historischen Volatilität den quadrierten Residuen der Tagesrenditen

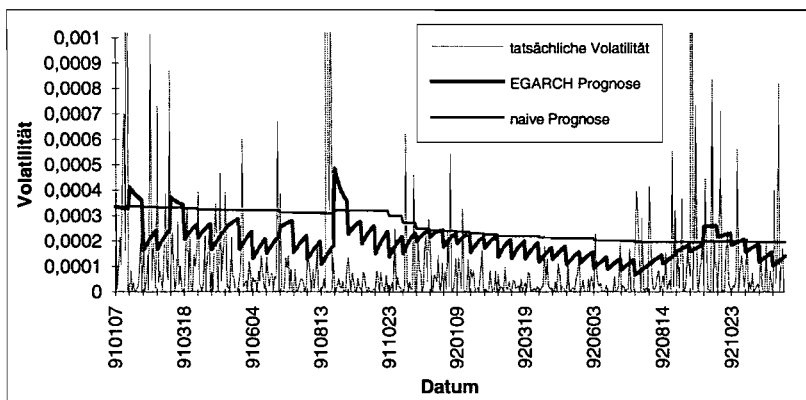
⁶⁶IGARCH Verhalten tritt außer beim DAX nur noch bei einigen Prognoseexperimenten der ALV (Allianz) auf.

⁶⁷Vgl. Gleichung (18).

⁶⁸Nähert sich die Summe aus $a_1 + b_1$ Eins, so geht die stationäre Varianz, die sich berechnet als $\frac{a_0}{1-(a_1+b_1)}$, gegen unendlich.

⁶⁹Vgl. Gleichung (21).

Abbildung 10: Vergleich der Prognosen mit der tatsächlichen Volatilität



gegenübergestellt. Hierzu wurde ebenfalls die Deutsche Bank ausgewählt. Da infolge des Putsches in Moskau am 19.8.1991 die Aktienkurse um rund 10 % fielen⁷⁰, würde die Skalierung der Y-Achse bis $0.1^2 = 0.01$ reichen. Um eine Interpretation der Abbildung zu ermöglichen, wurde die Skalierung der Y-Achse auf 0.001 beschränkt. Die Beobachtungen 1 bis 1000 umfassen den Zeitraum von Januar 1987 bis Anfang Januar 1991. In diese Zeit fielen sowohl der Crash 1987, der Mini-Crash 1989 und der Beginn der Kuwait-Krise. Dies hat zur Folge, daß die naive Volatilitätsprognose relativ hoch ist und nach dem Moskau-Putsch noch geringfügig ansteigt. Ab Oktober 1991 sinkt die historische Volatilität stetig. Dies ist darauf zurückzuführen, daß der Stichprobenumfang 1000 Beobachtungen (≈ 4 Jahre) umfasst, und der vier Jahre zurückliegende Crash von 1987 aus der Stichprobe herausgenommen wird, während sich der Aktienmarkt des Winterhalbjahres 1991/92 durch geringe Kursschwankungen auszeichnet.

Man erkennt, daß sich die Prognosen des EGARCH Modells den Schwankungen des Marktes besser anpassen als das naive Modell. Die Prognosen des EGARCH Modells liegen, ebenso wie die des naiven Modells, oftmals über der tatsächlichen Volatilität, so daß die Unterschätzungen der Volatilität im Januar 1991, August 1991 und Sommer 1992 mehr als kompensiert werden und eine zu *hohe* durchschnittliche Prognose resultiert⁷¹.

⁷⁰Vgl. Abbildung 2.

⁷¹Dies gilt auch für die anderen Modelle.

Tabelle 10: Mittlere Fehler der Volatilitätsprognosen

Name	naive	ARCH	GARCH	GARCH-t	EGARCH	Markov
DAX	7.75 E-5 (4)	9.43 E-5 (6)	8.56 E-5 (5)	1.82 E-5 (1)	3.92 E-5 (2)	4.05 E-5 (3)
BAS	4.32 E-5 (6)	4.27 E-5 (5)	3.46 E-5 (3)	1.96 E-5 (1)	2.96 E-5 (2)	3.55 E-5 (4)
BMW	9.24 E-5 (4)	9.43 E-5 (5)	11.31 E-5 (6)	6.42 E-5 (3)	5.52 E-5 (2)	5.27 E-5 (1)
DAI	15.41 E-5 (6)	14.54 E-5 (5)	8.91 E-5 (3)	4.51 E-5 (1)	7.40 E-5 (2)	11.86 E-5 (4)
BAY	7.77 E-5 (6)	7.45 E-5 (5)	4.41 E-5 (4)	2.45 E-5 (1)	2.94 E-5 (2)	4.18 E-5 (3)
KAR	10.29 E-5 (5)	9.61 E-5 (4)	13.19 E-5 (6)	5.45 E-5 (1)	7.88 E-5 (2)	9.59 E-5 (3)
MMW	11.95 E-5 (6)	11.76 E-5 (5)	8.94 E-5 (2)	7.04 E-5 (1)	10.18 E-5 (3)	11.41 E-5 (4)
SIE	11.15 E-5 (6)	11.04 E-5 (5)	7.46 E-5 (4)	2.42 E-5 (1)	5.61 E-5 (2)	6.76 E-5 (3)
THY	6.09 E-5 (6)	5.39 E-5 (4)	3.57 E-5 (2)	1.79 E-5 (1)	5.90 E-5 (5)	4.38 E-5 (3)
CBR	6.85 E-5 (6)	6.70 E-5 (5)	5.57 E-5 (4)	2.35 E-5 (2)	2.09 E-5 (1)	4.42 E-5 (3)
DBK	13.63 E-5 (6)	12.76 E-5 (5)	9.27 E-5 (3)	3.53 E-5 (1)	7.45 E-5 (2)	9.48 E-5 (4)
ALV	13.76 E-5 (6)	12.97 E-5 (5)	8.25 E-5 (3)	6.64 E-5 (2)	6.55 E-5 (1)	12.36 E-5 (4)
Ranking	67	59	45	16	26	39

Untersucht man die Ergebnisse in Tabelle 10, so zeigt sich, daß das naive Modell in neun von zwölf Fällen das schlechteste Modell ist. Es wird bei *allen* betrachteten Kursreihen vom GARCH-t Modell, dem EGARCH Modell und dem Markov-Mischungsmodell dominiert. Weiterhin liefert das GARCH-t Modell bei neun der zwölf untersuchten Renditereihen den geringsten Fehler.

Führt man ein Ranking ein, das dem besten Modell, d. h. dem Modell mit der geringsten Abweichung von Null, den Wert 1 und dem schlechtesten Modell den Wert 6 zuweist⁷², und summiert die Werte über die zwölf betrachteten Aktien auf⁷³, so erhält man folgendes Ergebnis: Am besten schneidet das GARCH-t Modell mit 16 ab, gefolgt vom EGARCH Modell mit 26, dem Markov-Mischungsmodell mit 39 und dem GARCH Modell mit 45. An vorletzter Stelle liegt das ARCH Modell mit 59, während das naive Modell mit 67 das Schlußlicht darstellt.

Während sich mit dem mittleren Fehler systematische Abweichungen feststellen lassen, führt der mittlere *quadratische* Fehler zu Rückschlüssen auf die Genauigkeit.

In Tabelle 11 können die Ergebnisse bei Berücksichtigung des RMSE-Kriteriums entnommen werden. Bei neun der zwölf Renditereihen liefert das EGARCH Modell die höchste Genauigkeit, d. h. die geringste mittlere qua-

⁷²Diese Werte sind in den Tabellen jeweils in Klammern angegeben.

⁷³Die Spaltensummen sind in den Tabellen in der Zeile mit der Bezeichnung *Ranking* aufgeführt.

Tabelle 11: Mittlere quadratische Fehler der Volatilitätsprognosen

Name	naive	ARCH	GARCH	GARCH-t	EGARCH	Markov
DAX	3.99 E-4 (2)	4.03 E-4 (4)	4.48 E-4 (6)	4.00 E-4 (3)	3.90 E-4 (1)	4.09 E-4 (5)
BAS	3.36 E-4 (4)	3.36 E-4 (5)	3.34 E-4 (2)	3.35 E-4 (3)	3.33 E-4 (1)	3.38 E-4 (6)
BMW	5.70 E-4 (2)	5.69 E-4 (1)	6.19 E-4 (6)	6.14 E-4 (5)	5.79 E-4 (4)	5.76 E-4 (3)
DAI	4.51 E-4 (6)	4.47 E-4 (5)	4.34 E-4 (3)	4.24 E-4 (2)	4.19 E-4 (1)	4.43 E-4 (4)
BAY	3.60 E-4 (6)	3.59 E-4 (5)	3.57 E-4 (4)	3.54 E-4 (2)	3.47 E-4 (1)	3.55 E-4 (3)
KAR	5.35 E-4 (4)	5.33 E-4 (2)	5.66 E-4 (6)	5.21 E-4 (1)	5.34 E-4 (3)	5.44 E-4 (5)
MMW	9.35 E-4 (4)	9.32 E-4 (2)	9.34 E-4 (3)	9.53 E-4 (6)	9.32 E-4 (1)	9.51 E-4 (5)
SIE	3.63 E-4 (6)	3.62 E-4 (5)	3.55 E-4 (4)	3.47 E-4 (2)	3.39 E-4 (1)	3.55 E-4 (3)
THY	5.83 E-4 (3)	5.82 E-4 (2)	5.85 E-4 (5)	5.84 E-4 (4)	5.81 E-4 (1)	5.92 E-4 (6)
CBR	6.44 E-4 (4)	6.44 E-4 (3)	6.59 E-4 (5)	6.60 E-4 (6)	6.37 E-4 (1)	6.42 E-4 (2)
DBK	4.17 E-4 (6)	4.12 E-4 (5)	4.06 E-4 (3)	3.91 E-4 (1)	3.93 E-4 (2)	4.12 E-4 (4)
ALV	5.25 E-4 (4)	5.22 E-4 (3)	5.36 E-4 (5)	5.16 E-4 (2)	5.09 E-4 (1)	5.39 E-4 (6)
Ranking	51	42	52	37	18	52

drastische Abweichung, zweimal ist das GARCH-t Modell an erster Stelle und einmal das ARCH Modell. Bei Heranziehung des RMSE-Kriterium stellt man fest, daß das *naive* Modell von keinem anderen Modell in allen Fällen dominiert wird, jedoch kommt das EGARCH Modell diesem Ziel mit elf von zwölf möglichen Fällen recht nahe⁷⁴.

Das Markov-Mischungsmodell liefert in sieben Fällen ein schlechteres RMSE als das naive Modell, während es bei Betrachtung des mittleren Fehlers dem naiven Modell klar überlegen ist. Dieser Effekt ist beim GARCH-t Modell, das beim RMSE in der Hälfte der Fälle schlechter ist, ebenso zu beobachten.

Nimmt man mittels des RMSE-Kriteriums ebenfalls ein Ranking vor, so zeigt sich, daß das EGARCH-Modell mit 18 an erster Stelle steht. Dahinter folgt das GARCH-t Modell mit 37 und das ARCH Modell mit 42. Die verbleibenden drei Modelle, das naive Modell mit 51 und das GARCH Modell sowie Markov-Mischungsmodell mit jeweils 52 liegen nahe beieinander, wobei das Markov-Mischungsmodell fünfmal und das GARCH Modell sechsmal besser als das naive Modell ist.

In den Tabellen 12 und 13 sind die Ergebnisse der Prognosen für $\tau + 1$ dargestellt. Hier wurde bei den einzelnen Prognoseexperimenten nicht der Durchschnitt aus den Abweichungen der zehn Prognosewerte gebildet, sondern nur der *erste* Prognosewert betrachtet. Die zukünftige Volatilität wird ebenfalls tendenziell zu hoch prognostiziert: nur zehn der $6 \cdot 12 = 72$ Werte

⁷⁴BMW ist diese Ausnahme.

Tabelle 12: Mittlere Fehler der Volatilitätsprognosen für $\tau + 1$

Name	naive	ARCH	GARCH	GARCH-t	EGARCH	Markov
DAX	10.35 E-5 (6)	8.06 E-5 (5)	7.33 E-5 (4)	3.96 E-5 (1)	5.54 E-5 (2)	5.66 E-5 (3)
BAS	-0.06 E-5 (1)	-1.79 E-5 (3)	-2.50 E-5 (4)	-3.61 E-5 (6)	-2.71 E-5 (5)	-1.25 E-5 (2)
BMW	8.32 E-5 (6)	7.62 E-5 (5)	5.63 E-5 (4)	3.65 E-5 (3)	3.27 E-5 (2)	2.84 E-5 (1)
DAI	13.03 E-5 (6)	9.54 E-5 (5)	4.07 E-5 (3)	0.59 E-5 (1)	3.28 E-5 (2)	6.37 E-5 (4)
BAY	7.85 E-5 (6)	3.78 E-5 (5)	1.65 E-5 (3)	0.99 E-5 (1)	1.18 E-5 (2)	3.44 E-5 (4)
KAR	12.22 E-5 (6)	10.07 E-5 (5)	8.57 E-5 (3)	6.01 E-5 (1)	7.78 E-5 (2)	9.56 E-5 (4)
MMW	27.33 E-5 (6)	23.82 E-5 (4)	21.98 E-5 (2)	19.81 E-5 (1)	22.28 E-5 (3)	25.31 E-5 (5)
SIE	14.85 E-5 (6)	12.56 E-5 (5)	9.43 E-5 (4)	5.68 E-5 (1)	8.33 E-5 (2)	8.37 E-5 (3)
THY	1.70 E-5 (4)	-0.72 E-5 (2)	-1.85 E-5 (5)	-3.29 E-5 (6)	1.49 E-5 (3)	-0.65 E-5 (1)
CBR	9.44 E-5 (6)	8.88 E-5 (5)	7.01 E-5 (4)	4.43 E-5 (2)	3.56 E-5 (1)	4.99 E-5 (3)
DBK	16.65 E-5 (6)	13.71 E-5 (5)	9.95 E-5 (3)	5.41 E-5 (1)	8.21 E-5 (2)	10.05 E-5 (4)
ALV	16.19 E-5 (6)	11.99 E-5 (4)	7.80 E-5 (3)	6.54 E-5 (1)	7.03 E-5 (2)	12.84 E-5 (5)
Ranking	65	53	42	25	28	39

sind negativ. Das naive Modell ist in zehn Fällen das schlechteste Modell. Mit Ausnahme von BASF, bei der das naive Modell die mit Abstand geringste Abweichung besitzt, sind das EGARCH, ARCH und Markov-Mischungsmodell jeweils besser.

Beim Ranking ergibt sich die gleiche Reihenfolge wie bei der Betrachtung des mittleren Fehlers über einen Prognosezeitraum von $k = 10$: Am besten schneidet das GARCH-t Modell mit 25 vor dem EGARCH Modell mit 28 ab. Danach folgen das Markov-Mischungsmodell mit 39, das GARCH Modell mit 42 und das ARCH Modell mit 53. Das schlechteste Ergebnis liefert das naive Modell mit 65.

Bei der Untersuchung der mittlern quadratischen Fehler aus Tabelle 13 erhält man ein überraschendes Ergebnis: Beim Ranking liegt das ARCH Modell mit 25 vor dem EGARCH Modell mit 26 sowie dem GARCH-t Modell mit 43. Gleichauf liegt das naive Modell mit ebenfalls 43. Wie schon bei der Durchschnittsbetrachtung über 10 Prognosewerte schneiden das GARCH mit 55 und das Markov-Mischungsmodell mit 60 schlechter als das naive Modell ab. Sie liefern in nur fünf (GARCH) bzw. vier (Markov) Fällen einen geringeren quadratischen Fehler als das naive Modell.

Zusammenfassend läßt sich festhalten:

- Im Hinblick auf den mittleren Fehler sind die fünf dynamischen Modelle besser als naive Modell. Hierbei sind im besonderen das GARCH-t, das EGARCH und das Markov-Mischungsmodell hervorzuheben.

Tabelle 13: Mittlere quadratische Fehler der Volatilitätsprognosen für $\tau + 1$

Name	naive	ARCH	GARCH	GARCH-t	EGARCH	Markov
DAX	1.96 E-4 (3)	1.71 E-4 (1)	2.49 E-4 (6)	1.97 E-4 (4)	1.93 E-4 (2)	2.26 E-4 (5)
BAS	4.27 E-4 (2)	4.26 E-4 (1)	4.28 E-4 (3)	4.29 E-4 (4)	4.29 E-4 (5)	4.40 E-4 (6)
BMW	4.94 E-4 (3)	4.87 E-4 (2)	5.22 E-4 (5)	5.21 E-4 (4)	5.30 E-4 (6)	4.39 E-4 (1)
DAI	3.95 E-4 (5)	3.78 E-4 (2)	3.87 E-4 (4)	3.79 E-4 (3)	3.75 E-4 (1)	4.03 E-4 (6)
BAY	2.69 E-4 (3)	2.68 E-4 (2)	2.74 E-4 (5)	2.73 E-4 (4)	2.67 E-4 (1)	2.86 E-4 (6)
KAR	3.13 E-4 (3)	3.08 E-4 (1)	3.48 E-4 (5)	3.10 E-4 (2)	3.24 E-4 (4)	3.78 E-4 (6)
MMW	3.40 E-4 (4)	3.11 E-4 (2)	3.18 E-4 (3)	3.41 E-4 (5)	2.99 E-4 (1)	4.15 E-4 (6)
SIE	2.09 E-4 (6)	1.98 E-4 (3)	1.99 E-4 (4)	1.82 E-4 (2)	1.76 E-4 (1)	2.03 E-4 (5)
THY	5.68 E-4 (6)	5.62 E-4 (2)	5.67 E-4 (5)	5.65 E-4 (4)	5.52 E-4 (1)	5.63 E-4 (3)
CBR	3.99 E-4 (2)	3.99 E-4 (3)	4.22 E-4 (6)	4.14 E-4 (5)	3.93 E-4 (1)	4.05 E-4 (4)
DBK	2.21 E-4 (5)	2.03 E-4 (3)	2.08 E-4 (4)	1.91 E-4 (2)	1.84 E-4 (1)	2.31 E-4 (6)
ALV	2.98 E-4 (1)	3.01 E-4 (3)	3.30 E-4 (5)	3.16 E-4 (4)	3.00 E-4 (2)	3.82 E-4 (6)
Ranking	43	25	55	43	26	60

- Bei Betrachtung des mittleren *quadratischen* Fehlers ergibt sich ein anderes Bild: das GARCH Modell und das Markov-Mischungsmodell schneiden schlechter ab als das naive Modell.
- Untersucht man die mittleren Fehler der Prognosen für $\tau + 1$, so sind die dynamischen Modelle dem naiven Modell weiterhin überlegen, jedoch in etwas abgeschwächter Form.
- Zieht man als Selektionskriterium die mittleren quadratischen Fehler der Prognosen für $\tau + 1$ heran, so sind nur das EGARCH und das ARCH Modell dem naiven Modell überlegen. Allerdings ist das ARCH Modell beim mittleren Fehler für $\tau + 1$ das schlechteste der dynamischen Modelle.
- Das EGARCH Modell stellt sich als das beste der sechs betrachteten Modelle dar. Es ist in 37 von 48 Möglichkeiten⁷⁵ das beste oder zweitbeste Modell und dem naiven Modell nur sechs mal unterlegen. Das GARCH-t Modell schneidet bei der Betrachtung von Prognosen über mehrere Perioden sehr gut ab, bei der Untersuchung von Prognosen für die darauffolgende Periode ist die Performance im Hinblick auf den mittleren quadratischen Fehler nur durchschnittlich.

⁷⁵4 Kriterien · 12 Renditereihen.

6 Zusammenfassung

Ziel dieser Untersuchung war es zu zeigen, auf welche Weise man neuere ökonometrische Verfahren einsetzen kann, um Volatilitäten auf Aktienmärkten zu modellieren und zu prognostizieren. Hierzu wurden insbesondere die Klasse der ARCH Modelle und das Markov-Mischungsmodell herangezogen. Die Nichtstationarität der Varianzen bei Verwendung des GARCH Modells, die gravierende methodische und schätztechnische Probleme aufwirft, tritt bei Aktienkursen nicht so häufig auf wie bei Wechselkursen und kann außerdem durch Verwendung des EGARCH Modells umgangen werden. Mittels des EGARCH(1,1) Modells wurde gezeigt, daß der *Leverage Effect* auch am deutschen Aktienmarkt signifikant ist.

Weiterhin hat sich beim Vergleich der Prognosegüte der verschiedenen Modelle gezeigt, daß das EGARCH(1,1) Modell dem naiven (historischen) Volatilitätsschätzer überlegen ist. Es wäre interessant zu untersuchen, inwieweit eine weitergehende Parametrisierung des EGARCH Modells zu einer weiteren Verbesserung der Prognosegüte führt. Das Markov-Mischungsmodell, das bei Wechselkursen sehr gute Ergebnisse geliefert hat⁷⁶, schneidet bei den verwendeten Aktienkursen schlecht ab.

Einen Ansatzpunkt für weitere Untersuchungen stellt die Frage dar, ob sich mit Volatilitätsprognosen mittels geeigneter Optionsstrategien signifikante Gewinne erzielen lassen. Erste Studien in diesem Bereich führten zu vielversprechenden Ergebnissen⁷⁷.

Das von Crouhy/Rockinger [15] entwickelte HGARCH (Hysteresis GARCH) Modell, das u.a. das GARCH und EGARCH Modell als Spezialfälle beinhaltet, stellt aufgrund seiner flexiblen Anwendungsmöglichkeiten eine interessante Basis für weitere Entwicklungen dar. Ob sich mit diesem Modell, evtl. unter der Einbeziehung von exogenen Faktoren wie z. B. dem Handelsumsatz, bessere Volatilitätsprognosen erzielen lassen, muß nachfolgenden Studien überlassen werden.

⁷⁶Vgl. Kaehler [36].

⁷⁷Vgl. Noh/Engle/Kane [48] und Engle/Kane/Noh [23].

Literatur

- [1] Akgiray, Vedat: *Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts*, Journal of Business, Vol. 62, No. 1, 1989, S. 55–80.
- [2] Akgiray, Vedat / Booth, G. Geoffrey / Loistl, Otto: *Statistical Models of German Stock Returns*, Journal of Economics, Vol. 50, No. 1, 1989, S. 17–33.
- [3] Akgiray, Vedat / Booth, G. Geoffrey / Loistl, Otto: *German Stock Market's Resiliency to World-Wide Panics*, Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 59.Jg, Nr. 9, 1989, S. 968–978.
- [4] Bauer, Rob M.M.J. / Nieuwland, Frederick G.M.C. / Verschoor, Willem F.C.: *GARCH and Trading Volume: Components or Substitutes?*, unveröffentlichtes Manuskript, 1994.
- [5] Baum, Leonard E. / Petrie, Ted / Soules, George / Weiss, Norman: *A Maximization Technique Occuring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, No. 1, 1970, S. 164–171.
- [6] Berndt, E.K. / Hall, B.H. / Hall, R.E. / Hausman, J.A.: *Estimation and Inference in Nonlinear Structural Models*, Annals of Economic and Social Measurement, Vol. 3/4, 1974, S. 653–665.
- [7] Black, Fischer: *Studies of Stock Price Volatility Changes*, Proceedings from the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 1976, S. 177–181.
- [8] Bollerslev, Tim: *General Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics, Vol. 31, 1986, S. 307–327.
- [9] Bollerslev, Tim: *A Conditional Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics, Vol. 69, 1987, S. 542–547.
- [10] Bollerslev, Tim / Chou, Ray Y. / Kroner, Kenneth F.: *ARCH Modeling in Finance — A Review of the Theory and Empirical Evidence*, Journal of Econometrics, Vol. 52, 1992, S. 5–59.
- [11] Bollerslev, Tim / Engle, Robert F. / Nelson, Daniel B.: *ARCH Models*, University of California, San Diego, Department of Economics, Discussion Paper 93–49, November 1993.
- [12] Bowman, K.O. / Shenton, L.R.: *Moment ($\sqrt{b_1}, b_2$) Techniques*, in: D'Agostino, Ralph B. / Stephens, Michael A. (Hrsg.): *GOODNESS-OF-FIT TECHNIQUES*, Marcel Dekker, New York, 1986, S. 279–329.
- [13] Brock, William / Lakonishok, Josef / LeBaron, Blake: *Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns*, Journal of Finance, Vol. 47, No. 5, 1992, S. 1731–1764.

- [14] **Christie, Andrew A.:** *The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects*, Journal of Financial Economics, Vol. 10, 1982, S. 407–432.
- [15] **Crouhy, Michel / Rockinger, G. Michael:** *Asymmetric Conditional Heteroscedastic Processes with Hysteresis Effects*, unveröffentlichtes Manuskript, HEC - School of Management, 1993.
- [16] **D'Agostino, Ralph B.:** *Tests for the Normal Distribution*, in: **D'Agostino, Ralph B. / Stephens, Michael A.:** *GOODNESS-OF-FIT TECHNIQUES*, Marcel Dekker, New York, 1986, S. 367–419.
- [17] **Diebold, Francis X.:** *EMPIRICAL MODELING OF EXCHANGE RATE DYNAMICS*, Springer, Berlin, 1988.
- [18] **Engel, Charles / Hamilton, James D.:** *Long Swings in the Dollar: Are They in the Data and Do Markets Know It?*, American Economic Review, Vol. 80, No. 4, 1990, S. 689–713.
- [19] **Engle, Robert F.:** *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, Vol. 50, No. 4, 1982, S. 987–1007.
- [20] **Engle, Robert F.:** *Statistical Models for Financial Volatility*, Financial Analysts Journal, Vol. 49, No. 1, 1993, S. 72–78.
- [21] **Engle, Robert F. / Bollerslev, Tim:** *Modelling the Persistence of Conditional Variances*, Econometric Reviews, Vol. 5, No. 1, 1986, S. 1–50.
- [22] **Engle, Robert F. / Ng, Victor, K.:** *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility*, Journal of Finance, Vol. 48, 1993, No. 5, S. 1749–1778.
- [23] **Engle, Robert F. / Kane, Alex / Noh, Jaesun:** *Index-Option Pricing With Stochastic Volatility and the Value of Accurate Variance Forecasts*, University of California, San Diego, Department of Economics, Discussion Paper 93–43, 1993.
- [24] **Fahrmeir, Ludwig / Kaufmann, Heinz Leopold / Ost, Friedemann:** *STOCHASTISCHE PROZESSE: EINE EINFÜHRUNG IN THEORIE UND ANWENDUNGEN*, Hanser, München, 1981.
- [25] **Fama, Eugene F.:** *The Behavior of Stock Market Returns*, Journal of Business, Vol. 38, 1965, S. 34–105.
- [26] **Fornari, Fabio:** *Estimating Variability in the Italian Stock Market: An ARCH Approach*, Open Economies Review, Vol. 4, 1993, S. 403–423.
- [27] **French, Kenneth R. / Schwert, G. William / Stambaugh, Robert F.:** *Expected Stock Returns and Volatility*, Journal of Financial Economics, Vol. 19, 1987, S. 3–29.
- [28] **Funke, Michael:** *The Message in Daily West German Stock Prices: Empirical Evidence Using GARCH*, Discussion Paper No. 04–92, Centre for Economic Forecasting, London Business School, 1992.

- [29] **Geyer, Alois:** INFORMATION, ERWARTUNG UND RISIKO — ASPEKTE DER VERTEILUNG, ABHÄNGIGKEIT UND VARIANZ VON FINANZWIRTSCHAFTLICHEN ZEITREIHEN, VVF, München, 1992.
- [30] **Grünbichler, Andreas / Schwartz, Eduardo S.:** *The Volatility of the German and Swiss Equity Markets*, Finanzmarkt und Portfoliomanagement, 7.Jg, Nr. 2, 1993, S. 205–215.
- [31] **Hamilton, James D.:** *Rational-Expectations Econometric Analysis of Changes in Regime*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 12, 1988, S. 385–423.
- [32] **Hamilton, James D.:** *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle*, Econometrica, Vol. 57, No. 2, 1989, S. 357–384.
- [33] **Hamilton, James D.:** *Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime*, Journal of Econometrics, Vol. 45, 1990, S. 39–70.
- [34] **Hamilton, James D.:** *Estimation, Inference, and Forecasting of Time Series Subject to Changes in Regime*, Department of Economics, University of Virginia, Charlottesville, 1991.
- [35] **Johnson, Norman L. / Kotz, Samuel:** DISTRIBUTIONS IN STATISTICS — CONTINUOUS UNIVARIATE DISTRIBUTIONS 1, Wiley & Sons, New York, 1970.
- [36] **Kaehler, Jürgen:** *Forecasting Volatility and Option Pricing for Exchange-Rate Dynamics: A Comparison of Models*, Discussion Paper No. 93–19, Zentrum für Europäische Wirtschaftsforschung, Mannheim, 1993.
- [37] **Korn, Olaf:** *Eine Analyse der Volatilität des Deutschen Aktienindex (DAX) mit Bayesischen ARCH- und Switching-Modellen*, Teilbericht zum Projekt E-09: Volatilitätsmessung in Finanzmärkten, Universität Basel, WWZ, September 1993.
- [38] **Krämer, Walter / Runde, Ralf:** *Die Autokorrelation von Aktienkursen*, Forschungsbericht 90/10, Fachbereich Statistik, Universität Dortmund, 1990.
- [39] **Krämer, Walter / Runde, Ralf:** *Testing for Autocorrelation among Common Stock Returns*, Statistical Papers, Vol. 32, 1991, S. 311–320.
- [40] **Krämer, Walter / Runde, Ralf:** *Some Pitfalls in Using Empirical Autocorrelations to Test for Zero Correlation among Common Stock Returns*, in: **Kaehler, Jürgen / Kugler, Peter (Hrsg.):** ECONOMETRIC ANALYSIS OF FINANCIAL MARKETS, Physica, Heidelberg, 1994.
- [41] **Kuwahara, Hiroto / Marsh, Terry A.:** *The Pricing of Japanese Equity Warrants*, Management Science, Vol. 38, No. 11, 1992, S. 1610–1641.
- [42] **Lamoureux, Christopher G. / Lastrapes, William D.:** *Heteroscedasticity in Stock Return Data: Volume versus GARCH Effects*, Journal of Finance, Vol.45, 1990, S. 221–229.

- [43] **Lindgren, Georg:** *Markov Regime Models for Mixed Distributions and Switching Regressions*, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 5, 1978, S. 81-91.
- [44] **Ljung, Greta / Box, George E.P.:** *On a Measure of Lack of Fit in Time-Series Models*, Biometrika, Vol. 65, S. 297-303.
- [45] **Mandelbrot, Benoit:** *The Variation of Certain Speculative Prices*, Journal of Business, Vol. 36, 1963, S. 394-419.
- [46] **Milhoj, Anders:** *The Moment Structure of ARCH Processes*, Scandinavian Journal of Statistics, Vol. 12, 1985, S. 281-292.
- [47] **Nelson, Daniel B.:** *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, Econometrica, Vol. 59, No. 2, 1991, S. 347-370.
- [48] **Noh, Jaesun / Engle, Robert F. / Kane, Alex:** *A Test of Efficiency for the S&P 500 Index Option Market Using Variance Forecasts*, University of California, San Diego, Department of Economics, Discussion Paper 93-32, 1993.
- [49] **Pagan, Adrian R. / Schwert, G. William:** *Alternative Models for Conditional Stock Volatility*, Journal of Econometrics, Vol. 45, 1990, S. 267-290.
- [50] **Poon, Ser-Huang / Taylor, Stephen J.:** *Stock Returns and Volatility: An Empirical Study of the UK Stock Market*, Journal of Banking and Finance, Vol. 16, 1992, S. 37-59.
- [51] **Schlag, Christian:** *Return Variances of Selected German Stocks: An Application of ARCH and GARCH Processes*, Statistical Papers, Vol. 32, 1991, S. 353-361.
- [52] **Taylor, Stephen J.:** *MODELLING FINANCIAL TIME SERIES*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [53] **Taylor, Stephen J.:** *Modeling Stochastic Volatility*, Discussion Paper, Department of Accounting and Finance, Lancaster University, 1991.
- [54] **Turner, Christopher M. / Startz, Richard / Nelson, Charles R.:** *A Markov Model of Heteroskedasticity, Risk, and Learning in the Stock Market*, Journal of Financial Economics, Vol. 25, 1989, S. 3-22.
- [55] **Van Norden, Simon / Schaller, Huntley:** *The Predictability of Stock Market Returns: Evidence From the Toronto Stock Exchange*, unveröffentlichtes Manuskript, 1991.
- [56] **Van Norden, Simon / Schaller, Huntley:** *Speculative Behaviour, Regime Switching and Stock Market Fundamentals*, Working Paper 93-2, Bank of Canada, 1993.
- [57] **Van Norden, Simon / Schaller, Huntley:** *Regime Switching in Stock Market Returns*, unveröffentlichtes Manuskript, 1993.
- [58] **Weiss, Andrew A.:** *ARMA Models with ARCH Errors*, Journal of Time Series Analysis, Vol. 5, No. 2, 1984, S. 129-143.