

Vargas-Sánchez, Jhon Jairo; Causado, Edwin; Mercado, Hugo

Article

Estimadores Bayesianos de distribuciones Weibull aplicados a un modelo de líneas de espera G/G/s

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Provided in Cooperation with:

Universidad Pablo de Olavide, Sevilla

Suggested Citation: Vargas-Sánchez, Jhon Jairo; Causado, Edwin; Mercado, Hugo (2020) : Estimadores Bayesianos de distribuciones Weibull aplicados a un modelo de líneas de espera G/G/s, Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, ISSN 1886-516X, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, Vol. 30, pp. 142-162,
<https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.2971>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/286209>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



UNIVERSIDAD
PABLO DE OLAVIDE
SEVILLA



REVISTA DE MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA
ECONOMÍA Y LA EMPRESA (30). Páginas 142-162.
Diciembre de 2020. ISSN: 1886-516X. D.L.: SE-2927-06.
www.upo.es/revistas/index.php/RevMetCuant/article/view/2971

Estimadores Bayesianos de distribuciones Weibull aplicados a un modelo de líneas de espera G/G/s

VARGAS-SÁNCHEZ, JHON JAIRO

Facultad de Ingeniería, Ingeniería Industrial
Universidad del Magdalena, Santa Marta (Colombia)
Correo electrónico: jvargass@unimagdalena.edu.co

CAUSADO, EDWIN

Facultad de Ingeniería, Ingeniería Industrial
Universidad del Magdalena, Santa Marta (Colombia)
Correo electrónico: ecausado@unimagdalena.edu.co

MERCADO, HUGO

Facultad de Ingeniería, Ingeniería Industrial
Universidad del Magdalena, Santa Marta (Colombia)
Correo electrónico: hmercado@unimagdalena.edu.co

RESUMEN

Se ha estudiado en la literatura la aproximación de los modelos G/G/s a partir de modelos markovianos M/M/s. Un estudio de un modelo de colas se presenta en el presente artículo usando tiempos de llegadas y servicios Weibull distribuidos cuya estimación de parámetros se realizó con el método Bayesiano cadena de Markov Monte Carlo, específicamente el muestreador de Gibbs. La aproximación de este modelo de líneas de espera es evaluada mediante simulación. Esta metodología se aplicó al caso de repartición de refrigerios en la Universidad del Magdalena en Santa Marta, Colombia. Los resultados muestran la utilidad y potencia para calcular indicadores de un sistema de colas cuando los tiempos entre llegadas y de atención se distribuyen como una Weibull.

Palabras clave: sistemas de colas, cadenas de Markov Monte Carlo, distribución Weibull, estimación bayesiana.

Clasificación JEL: C11; C13.

MSC2010: 60J20.

Artículo recibido el 10 de febrero de 2018 y aceptado el 26 de junio de 2019.

Bayesian estimators of Weibull distributions applied to a model of waiting lines G/G/s

ABSTRACT

The approximation of G/G/s models from Markov models M/M/s has been studied in the literature. The study of a queue model is detailed in the present article, using times of arrivals and time service distributed by Weibull whose estimation of parameters was performed with the Bayesian method Monte Carlo Markov chain, specifically the Gibbs sampler. The approximations of this model of waiting lines is evaluated by simulation. This methodology was applied to the case of delivery of refreshments to students of the University of Magdalena in Santa Marta, Colombia. The results show the utility and power to calculate indicators of a queue system when both, the arrival and attention times, are distributed as a Weibull.

Keywords: queue system, Monte Carlo Markov chain, Weibull distribution, bayesian estimation.

JEL classification: C11; C13.

MSC2010: 60J20.



1. Introducción.

Un modelo M/M/s es un tipo específico de modelos de líneas de espera. Según la notación de Kendal, las llegadas son exponencialmente distribuidas con media $1/\lambda$ y posee s servidores. Aplicaciones recientes de modelos M/M/s se pueden ver en Guerouahane, Aissani, Farhi y Bouallouche-Medjkoune (2017) en tráfico de carreteras, en Liu y Yu (2016) con sus comportamientos aleatorios externos que afectan la capacidad en el servidor. Investigaciones que usan otra filosofía de colas se observa en Alfa y He (2017) con un modelo $PH/PH/k$ donde el cliente puede encontrar múltiples servidores disponibles y se tiene la capacidad de elegir el de mejor índice de atención. Las ecuaciones de modelos de colas se han desarrollado teniendo en cuenta como base la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial. Pero una dificultad se presenta cuando los tiempos de llegada y de servicios no se comportan de esta manera, pues no se pueden desarrollar analíticamente las ecuaciones de estado para modelos con distribuciones generales G/G/s (Hanschke, 2006). Por ejemplo, en los sistemas de comunicaciones, específicamente en tráfico en conexiones a Internet se trabajan con las llamadas distribuciones de cola larga (Paxon & Floyd, 1995) y (Ausín, Lillo, Ruggeri, & Wiper, 1998). Pero esas medidas de las distribuciones, como se afirma en (Ausín, Wiper, & Lillo, 2008), son usualmente descritas con distribuciones como la Pareto y la Weibull, desafortunadamente los sistemas de colas con tiempo de llegada y servicio con estas características son muy difíciles de analizar debido a la no existencia de sus momentos o de ajuste de las transformaciones de Laplace con expresiones explícitas (detalles en Abate, Choudhury & Whitt, 1994). Para dar solución a dicho problema, han surgido aproximaciones como la de Allen (1990) y Kraemer y Langenbatch-Belz (1976). Una aproximación más reciente es propuesta en Hanschke (2006), basándose en una técnica de clasificación de los retardos en tres partes, tiempo de lote (en inglés *Batching time*), tiempo de llegada y tiempo de servicio; asumiendo que hay un área de despacho inmediatamente después de la cola de llegadas y antes de entrar al servicio. En el presente artículo se usó una de estas aproximaciones, pues en el sistema real se observaron tiempos de llegadas y servicios que deberían ser modelados con una distribución distinta a la exponencial y se encontró que la distribución Weibull fue una buena alternativa.

Existe poca evidencia en la literatura del uso de la distribución Weibull para tiempos de llegada y servicio, pues las más consideradas son Erlang y Gamma. Sin embargo en (Chaudhry & Kim, 2016) se plantea una solución a un sistema $GI^X/Geom/1$ cuyos tiempos de llegada y servicios son discretos, pero dicha solución es encontrada con un patrón lognormal y Weibull. Otro uso de la distribución Weibull es presentado en (Ausín, Wiper, & Lillo, 2008), pero la aplicación de esta distribución se enmarca en los resultados de la solución de un sistema Coxian/Coxian/1, donde las distribuciones de llegada y servicio son aproximaciones del uso de una familia de distribuciones Coxian, pero su planteamiento original no era incluir tiempos Weibull distribuidos. En el presente artículo se presenta una propuesta que contribuye al tratamiento de sistemas G/G/s cuando las respectivas G's son distribuciones Weibull.

Aparte de las distribuciones de probabilidad de los tiempos, en el presente trabajo se considera la estimación Bayesiana de los parámetros de las mismas. Se puede decir que las inquietudes por la modelación de las líneas de espera a partir de estimaciones Bayesianas se produce antes y al comienzo de la anterior década con Armero y Bayarri (Bayesian prediction in m/m/1 queues, 1994), Armero y Bayarri (1997), Armero y Conesa (2000), Wiper (1998) y Ausín, Lillo, Ruggeri y Wiper (2003). En Wiper (1998) se realizan estimaciones Bayesianas para los modelos Er/M/1 y Er/M/c donde los tiempos de llegada son Erlang y los de servicios exponenciales. En Ausín, Wiper y Lillo (2004) se hace inferencia Bayesiana para modelos M/G/1, donde en las distribuciones generales se tratan una clase de mixturas Erlang. En Ausín, Wiper y Lillo (2008) se amplía el trabajo anterior a modelos GI/G/1. Es común que en estas investigaciones de estimación Bayesiana se emplee el método de cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC por sus siglas en inglés). El uso y la potencia de la estimación Bayesiana se empleará en el presente artículo integrado a una aproximación de modelo de colas debido a que los tiempos no son de naturaleza exponencial. El uso de la simulación permitirá validar la metodología empleada.

El resto del artículo se estructura de la siguiente forma. En la sección 2 se revisan los conceptos de teoría de colas, modelos $M/M/1$, $G/G/s$ y sus aproximaciones. En la sección 3 los conceptos de estimación Bayesiana utilizados. En sección 4 los resultados de aplicación a un caso real de la Universidad del Magdalena, Santa Marta, Colombia. En la sección 5 las conclusiones.

2. Análisis teórico.

2.1. Modelos de líneas de espera.

El modelo de colas básico, el $M/M/1$ nace de algunos supuestos, propiedades y teoría Estadística. Por ejemplo, se sabe que la distribución exponencial carece de memoria ya que la probabilidad de que ocurra una llegada en un tiempo mayor a $t + \Delta t$ no depende del valor de t dado en la anterior llegada. Esto se expresa matemáticamente como:

$$P\{T > t + \Delta t | T > t\} = \frac{P\{T > t \cap T > t + \Delta t\}}{P\{T > t\}} = e^{-\lambda \Delta t} = P\{T > \Delta t\},$$

donde λ es la tasa de llegadas. Las probabilidades de estado estable y los procesos de nacimiento y muerte son los otros referentes teóricos para construir las ecuaciones de desempeño (Wiston, 2008). Sea $P_{ij}(t)$ la probabilidad de pasar del estado i al estado j en un período t , también se puede pensar en $P_{ij}(t + \Delta t)$ con la misma interpretación.

Llegar al estado j en un tiempo $t + \Delta t$ partiendo del estado i es porque hasta el tiempo t se llegó al estado k y luego en $t + \Delta t$ pasó al estado j . Considérese el estado k como $j - 1$, $j + 1$, j o cualquier otro estado que matemáticamente se expresa con estas 4 probabilidades:

- $P_{i,j-1}(t) [\lambda_{j-1} \Delta t + o(\Delta t)]$ es la probabilidad que haya un nacimiento
- $P_{i,j+1}(t) [\mu_{j+1} \Delta t + o(\Delta t)]$ es la probabilidad de haya una muerte
- $P_{i,j}(t) [1 - \lambda_j \Delta t - \mu_j \Delta t - 2o(\Delta t)]$ es la probabilidad de que no haya ni nacimiento ni muerte
- $o(\Delta t)$ la de cualquier otro estado,

donde la función $o(\Delta t)$ nace de la expansión en serie de Taylor de $e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Sumando las cuatro probabilidades anteriores, pasando el término $P_{ij}(t)$ a restar, luego dividir en ambos lados por Δt , calculando límite 1 cuando Δt tiende a cero y considerando las probabilidades de estado estable se llega a la ecuación (1):

$$\lambda_{j-1} P_{i,j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{i,j+1}(t) - P_{ij}(t) \mu_j - P_{ij}(t) \lambda_j = 0 \quad (1)$$

De la ecuación (1) se desprenden las ecuaciones de desempeño de un sistema de líneas de espera $M/M/1$; el supuesto clave es que cuando t es muy grande, el sistema ha alcanzado el estado estable y las probabilidades P_{ij} se cambian por π_j , ya que no importa de qué estado partió el sistema (Wiston, 2008). Basado en las anteriores explicaciones y usando la siguiente notación se presentan las ecuaciones de estado estable (2) a (7).

- λ = número de llegadas al sistema por unidad de tiempo
- μ = número de clientes atendidos por unidad de tiempo
- L = número promedio de clientes presentes en el sistema de colas
- L_q = número promedio de clientes formados en la cola

- L_s = número promedio de clientes en servicio
- W = tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema
- W_q = tiempo promedio que un cliente pasa en la cola
- W_s tiempo promedio que un cliente pasa en el servicio
- ρ = intensidad de tráfico

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (1)$$

$$L = \lambda W \quad (2)$$

$$L_q = \lambda W_q \quad (3)$$

$$L_s = \lambda W_s \quad (4)$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (5)$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (6)$$

2.1.1. Modelos M/M/s

Siendo s el número de servidores y π_0 la probabilidad de estado estable de que hayan cero clientes en el sistema, las ecuaciones (8) a (13) muestran las medidas de desempeño de un sistema de colas M/M/s.

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^i}{i!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}} \quad (7)$$

$$P(j \geq s) = \frac{(s\rho)^s \pi_0}{s!(1-\rho)} \quad (8)$$

$$L_q = \frac{P(j \geq s)\rho}{1-\rho} \quad (9)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda} \quad (10)$$

$$L = L_q + L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (11)$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{P(j \geq s)}{s\mu - \lambda} + \frac{1}{\mu} \quad (12)$$

2.1.2. Modelos G /G/ s

Para un sistema G /G/ s la condición de estabilidad es:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1 \quad (13)$$

Una aproximación para calcular las medidas de desempeño es la de Allen-Cunneen que establece que:

$$W_q \approx W_{q,M/M/s} \left(\frac{C_a^2 + C_s^2}{2} \right), \quad (14)$$

donde $W_{q,M/M/s}$ es el tiempo de espera promedio en la cola en el sistema M/M/S, C_a^2 es el cuadrado del coeficiente de variación de las llegadas y C_s^2 es el cuadrado del coeficiente de variación del servicio. Con esta aproximación se pueden calcular las otras medidas de desempeño.

2.2. Estimación Bayesiana de parámetros.

Se usó estimación Bayesiana de parámetros a través del método cadenas de Markov de Monte Carlo (MCMC por sus siglas en inglés, Markov Chain Monte Carlo). Hay dos métodos tradicionales que han sido utilizados en simulaciones Monte Carlo: el muestreo por relevancia (conocido en inglés como importance sampling) y el muestreo por aceptación y rechazo. Este último se aplicó en la estimación de parámetros de los tiempos Weibull. Métodos MCMC, entre otros, están el algoritmo Metrópolis y el muestreador de Gibbs. Este último también se aplicó en la estimación de parámetros. En las siguientes subsecciones se explica el muestreo por rechazo y el muestreador de Gibbs.

2.2.1. Muestreo por aceptación y rechazo

Si se desea muestrear de una distribución univariada con densidad $p(\theta)$ que no es reconocible, se puede usar la densidad de distribución de su Kernel, denótese éste por $p_*(\theta)$, con $p_*(\theta) \propto p(\theta)$. La posterior a veces es irreconocible, pero esta es proporcional a la a priori multiplicada por la verosimilitud. Para muestrear de $p(\theta)$, el método muestreo de aceptación y rechazo usa otra densidad que es fácilmente muestreable, denotada por $q(\theta)$, para la que se puede encontrar una constante M tal que $p_*(\theta) \leq Mq(\theta)$ para todo θ . La función $Mq(\theta)$ es llamada la sobre envolvente del Kernel, idealmente que esté tan como sea posible a $p_*(\theta)$. Para muestrear $p(\cdot)$, se empieza muestreando $\theta \sim q(\cdot)$ y se genera $U \sim U[0, 1]$. Este valor de θ ó es aceptado como una muestra de $p(\cdot)$ o es rechazado y se empieza de nuevo. La variable aleatoria uniforme U determina si θ es aceptado o rechazado. En Christensen, Wesley, Branscum y Timothy (2011), para un θ dado, $Mq(\theta)U \sim U[0, Mq(\theta)]$. Se acepta el θ muestreado si $Mq(\theta)U < p_*(\theta)$ y se rechaza de otra forma. Son rechazados los valores de $Mq(\theta)U$ entre la sobre envolvente y la Kernel. La probabilidad de rechazo es pequeña si el área entre la envolvente y $p_*(\theta)$ es pequeña.

2.2.2. Muestreador de Gibbs

La idea de una cadena de Markov Monte Carlo (MCMC) es definir una secuencia de vectores aleatorios $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \dots$ en la que la distribución de θ^k cercana al comienzo de la secuencia puede ser casi cualquier cosa pero a la larga las distribuciones se estabilizan hacia la distribución posterior (Christensen, Wesley, Branscum, & Timothy, 2011). MCMC se usa para muestrear de la distribución conjunta posterior. El muestreador de Gibbs es un método de construcción de cadena de Markov

cuando se puede aislar la distribución condicional de cada parámetro dados todos los otros parámetros.

Para ilustrar el método, supóngase que se tiene un vector de parámetros a estimar $\theta^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \theta_3^k)$, entonces se construye la cadena para posterior $p(\theta|y) = p(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, luego el muestreador de Gibbs está basado en muestrear las distribuciones condicionales determinadas por la posterior, esto es:

$$P_{1|23}(\theta_1|\theta_2, \theta_3); P_{2|13}(\theta_2|\theta_1, \theta_3); P_{3|12}(\theta_3|\theta_1, \theta_2)$$

Para definir la cadena de Markov, primero se muestrea θ^1 de la distribución inicial $q(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \equiv q_1(\theta)$. Esto puede ser un punto de distribución, o un valor inicial, o una selección aleatoria. De hecho en Christensen, Wesley, Branscum y Timothy (2011) se recomienda que puede ser conveniente tener tres bloques independientes así $\theta^1 = (\theta_1^1, \theta_2^1, \theta_3^1)$ como:

$$\theta_1^1 \sim q_1(\theta_1); \theta_2^1 \sim q_2(\theta_2); \theta_3^1 \sim q_3(\theta_3)$$

El segundo paso de la cadena es definir a θ^2 en tres fases, la primera

$$\theta_1^2 | \theta_2^1, \theta_3^1 \sim p_{1|23}(\theta_1 | \theta_2^1, \theta_3^1)$$

segunda

$$\theta_2^2 | \theta_1^2, \theta_3^1 \sim p_{2|13}(\theta_2 | \theta_1^2, \theta_3^1)$$

y tercera

$$\theta_3^2 | \theta_1^2, \theta_2^2 \sim p_{3|12}(\theta_3 | \theta_1^2, \theta_2^2)$$

Ahora generalizando, se muestrea $\theta^k = (\theta_1^k, \theta_2^k, \theta_3^k)$ como

$$\theta_1^k | \theta_2^{k-1}, \theta_3^{k-1} \sim p_{1|23}(\theta_1 | \theta_2^{k-1}, \theta_3^{k-1})$$

$$\theta_2^k | \theta_1^k, \theta_3^{k-1} \sim p_{2|13}(\theta_2 | \theta_1^k, \theta_3^{k-1})$$

$$\theta_3^k | \theta_1^k, \theta_2^k \sim p_{3|12}(\theta_3 | \theta_1^k, \theta_2^k)$$

La aplicación del muestreador de Gibbs con los pasos anteriores aplicados a estimación de parámetros de la distribución Weibull se da la siguiente forma.

Sea

$$y_i \sim Weib(\alpha, \lambda) \tag{15}$$

La función de densidad de probabilidad y la acumulada están dadas por las ecuaciones (17) y (18) respectivamente:

$$f(y_i | \alpha, \lambda) = \lambda \alpha y_i^{\alpha-1} e^{-\lambda y_i^\alpha}, y_i > 0 \tag{16}$$

$$F(y_i|\alpha, \lambda) = 1 - e^{-\lambda y_i^\alpha}, y_i > 0 \quad (17)$$

La función de verosimilitud es:

$$L(\alpha, \lambda) \propto \prod_{i=1}^n \lambda \alpha y_i^{\alpha-1} e^{-\lambda y_i^\alpha} = \lambda^n \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{\alpha-1} \exp \left(-\lambda \sum_{i=1}^n y_i^\alpha \right) \quad (18)$$

Una selección de la distribución a priori es $\lambda \sim \text{Gamma}(a, b)$, α independiente de λ con densidad a priori $p_O(\alpha)$, entonces la a priori conjunta será

$$p(\alpha, \lambda) \propto p_O(\alpha) \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda b}, \quad (19)$$

y la densidad de la a posteriori

$$p(\alpha, \lambda|y) \propto \lambda^n \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{\alpha-1} \exp \left(-\lambda \sum_{i=1}^n y_i^\alpha \right) p_O(\alpha) \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda b} \quad (20)$$

que a su vez es

$$\propto \lambda^{\alpha+n-1} \exp \left[-\lambda \left(b + \sum_{i=1}^n y_i^\alpha \right) \right] \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^\alpha p_O(\alpha) \quad (21)$$

La densidad condicional para $\lambda|\alpha, y$ es:

$$p(\lambda|\alpha, y) \propto \lambda^{\alpha+n-1} \exp \left[-\lambda \left(b + \sum_{i=1}^n y_i^\alpha \right) \right], \quad (22)$$

luego

$$\lambda|\alpha, y \sim \text{Gamma} \left(a + n, b + \sum_{i=1}^n y_i^\alpha \right) \quad (23)$$

La densidad condicional para $\alpha|\lambda, y$ es:

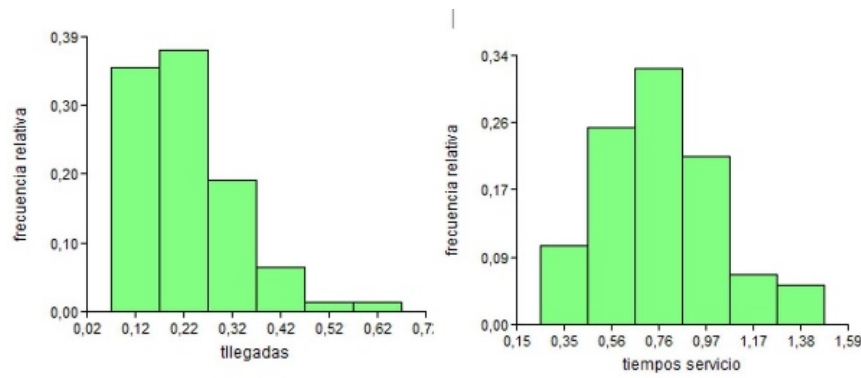
$$p(\alpha|\lambda, y) \propto \alpha^n \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^\alpha \exp \left(-\lambda \sum_{i=1}^n y_i^\alpha \right) p_O(\alpha). \quad (24)$$

No se conoce de ninguna opción para $p_O(\alpha)$ que haga la posterior conjunta reconocible. Pero en Christensen, Wesley, Branscum y Timothy (2011) recomiendan usar el muestreo de una distribución desconocida usando el muestreo por aceptación y rechazo, teniendo en cuenta que la full condicional es log cóncava siempre y cuando $p_O(\alpha)$ sea log cóncava.

3. Resultados.

En esta sección se presenta la aplicación de caso real en la Universidad del Magdalena en Santa Marta (Colombia) de un modelo $G/G/s$ con sus respectivas estimaciones de parámetros de distribuciones Weibull en las llegadas y servicio mediante MCMC. También se presenta la validación de los resultados mediante simulación. La Universidad del Magdalena a través de la unidad de Bienestar Universitario, reparte refrigerios a estudiantes. Se han tomado 80 datos aleatorios de tiempos de llegada de estudiantes a la cola para reclamar su refrigerio y 80 datos aleatorios de tiempo de servicio en la entrega de los refrigerios. La Figura 1 muestra los respectivos histogramas de tiempos de llegadas y de servicio donde es evidente que una distribución exponencial no es conveniente para modelar estos tiempos.

Figura 1. Histogramas de frecuencias para tiempo de llegadas y de servicio.



Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 1 muestra las medidas descriptivas de la muestra aleatoria de los tiempos tomados en el sistema de repartición de refrigerios en la Universidad del Magdalena. En esta Tabla LI y LS son los límites inferior y superior al 95% respectivamente, están calculados por estimación paramétrica gracias al tamaño de la muestra haciendo uso del teorema del límite central; D.E es la desviación estándar; la varianza es la muestral (calculada con $n - 1$) y CV es el coeficiente de variación.

Tabla 1. Estadísticas básicas de la muestra aleatoria de los tiempos.

Variable	n	Media	$LI(95\%)$	$LS(95\%)$	D.E	Varianza	CV^2	Mediana
$t_{llegada}$	80	0.2313	0.2075	0.2550	0.1068	0.0114	0.2133	0.2083
$t_{servicio}$	80	0.7531	0.6947	0.8116	0.2626	0.0690	0.1216	0.7583

Fuente: Elaboración propia.

3.1. Inferencia sobre tiempos de llegadas.

Para realizar inferencias sobre el tiempo de llegada se hizo un tratamiento sobre la información a priori basado en Christensen, Wesley, Branscum y Timothy (2011) y luego se hicieron las inferencias sobre los parámetros α y λ .

3.1.1. Información a priori

La acumulada de la Weibull está dada por la ecuación (18) y la mediana ocurre cuando la probabilidad acumulada es 0.5, así que se tiene que $0.5 = e^{-\lambda y^\alpha}$ lo que lleva a que

$$y = (\ln(2)/\lambda)^{1/\alpha} \quad (25)$$

Dado que no se conoce la información de α , en el presente artículo se trabajó como información a priori $\alpha = 1$ con muy buenos resultados en el ajuste de la distribución, como se puede apreciar más adelante en la validación de la presente sección. Es de recordar que de todas maneras el proceso del muestreador de Gibbs en MCMC conducirá a valores estables de α . En el caso de los refrigerios la variable es el tiempo, así que en la ecuación (26) se cambiará y por t , en ese orden de ideas se tiene la siguiente ecuación para un tiempo t .

$$t = \ln(2) / \lambda \quad (26)$$

La ecuación (27) es una aproximación de la mediana, que será buena mientras α sea cercano a 1. Un tiempo a priori t_0 está dado entonces por $t_0 = \ln(2)/\lambda$. Para establecer un tiempo a priori t_0 se ha tomado como base lo que en [19] llaman “our best guess” que traduce algo muy similar a “nuestra mejor conjetura”. Dicha conjetura se estableció del histograma dado en la Figura 1, como 0.22 minutos, que llevándolo a la ecuación (27) se tiene que $\lambda_0 \equiv \ln(2)/t_0$ lo que conduce a que $\lambda_0 = 3.15$. Ahora bien, de acuerdo con la sección anterior y con la ecuación (24) se ha dicho de que λ sigue una distribución Gamma y que una selección a priori sería una $Gamma \sim (a, b)$ cuya moda es $(a - 1)/b$ que se expresa como:

$$\lambda_0 = (a - 1)/b \quad (27)$$

Resolviendo ecuación (28) se tiene:

$$a = 1 + \lambda_0 b = 1 + 3.15b \quad (28)$$

De acuerdo a lo que se ha observado se puede afirmar, como información a priori, que se tiene un 95% de seguridad de que el tiempo de llegadas t es menor a $u = 0.6$ minutos que se expresa como $Pr(t \leq u) = 0.95$ y usando ecuación (27) se tiene que:

$$0.95 = Pr\left(\frac{0.693}{\lambda} \leq u\right) \quad (29)$$

$$Pr\left(\lambda \geq \frac{0.693}{0.6}\right) = 0.95$$

$$Pr(\lambda \geq 1.155) = 0.95. \quad (30)$$

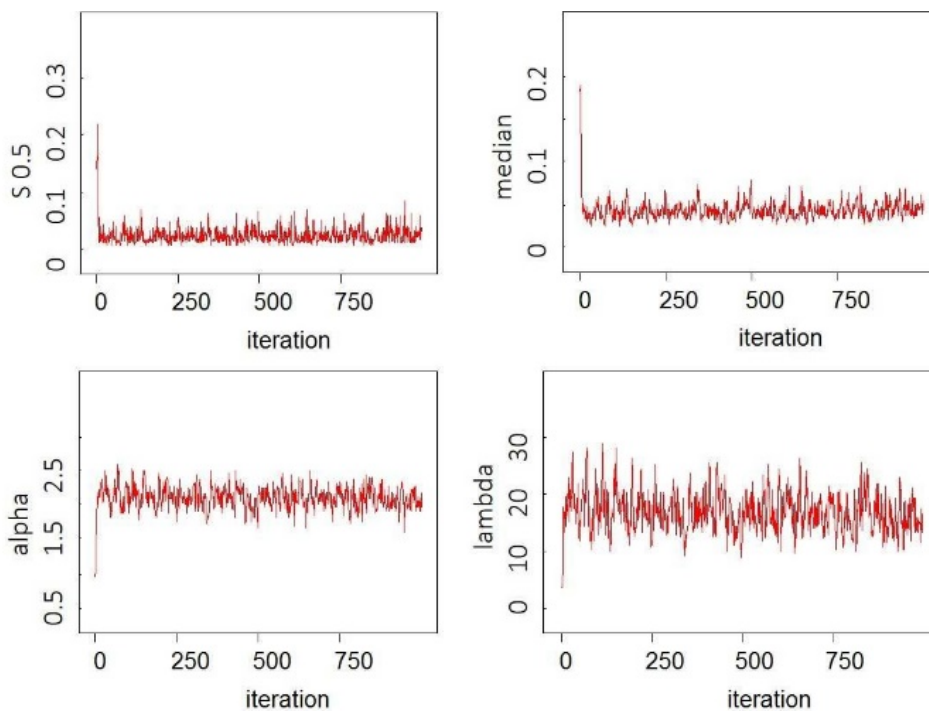
Dado que en su información a priori $\lambda \sim Gamma(a, b)$ y dado que la ecuación (29) relaciona valores a y b , entonces los valores que hacen que la ecuación (31) se cumpla son $a=2.213$ y $b=0.385$.

Con el anterior procedimiento se obtuvo la distribución a priori para la variación aleatoria λ que se usará para el muestreador de Gibbs. Como a priori para α se usó *Gamma*(1, 1), basado en la explicación del método de aceptación y rechazo y logrando buenos resultados como se aprecia en la subsección validación de la presente sección.

3.1.2. Inferencia sobre los parámetros

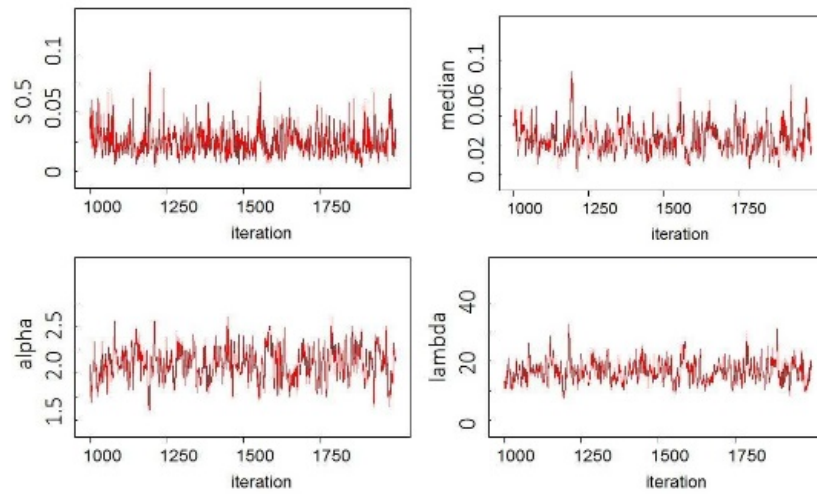
Usando el software Winbugs (Lunn, Thomas, Best & Spiegel, 2000), se hicieron inferencias sobre los parámetros α y λ además de inferir la mediana y alguna probabilidad de interés, en este caso se indagó sobre la probabilidad de que el tiempo de llegada fuera mayor a 0.5 que se denota por $S_{0.5}$ por su analogía con el análisis de supervivencia. El programa usa las a priori mencionadas en anterior subsección y realiza iteraciones según el muestreador de Gibbs para completar la cadena de Markov por el método Monte Carlo MCMC. La Figura 2 muestra la historia de las cadenas de Markov para $S_{0.5}$, mediana, α y λ haciendo 1000 iteraciones. Al parecer muestra cierta estabilidad en los parámetros. Sin embargo, se exploraron más iteraciones muestreando 2000 de ellas, lo que se puede observar en la historia de la cadena de Markov de la Figura 3. Se realizaron nuevas iteraciones buscando estabilizar aún más los parámetros, llegando a 20000 iteraciones (ver Figura 4).

Figura 2. Cadenas de Markov, 1000 iteraciones, al estimar parámetros en tiempo de llegada.



Fuente: Elaboración propia.

Figure 3. Cadenas de Markov, 2000 iteraciones, al estimar parámetros en tiempos de llegada.



Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar mediante los autocorrelogramas de la Figura 5 que la última cadena obtenida en Figura 4 se estabiliza, ya que la función de autocorrelación cae rápidamente a valores de cero, lo que da cuenta de correlaciones adyacentes.

En la Tabla 2 se presentan las estadísticas básicas de estimación dadas las 20000 iteraciones en las cadenas de Markov y dada la estabilidad observada en ellas. En la Figura 6 se presentan las gráficas de densidad de probabilidad de los parámetros estimados.

Tabla 2. Estadísticas básicas en la estimación de parámetros en tiempo de llegada.

	Media	D.E	CM_{error}	Percentil2.5	Mediana	Percentil97.5	Inicio	Muestra
S0.5	0.02406	0.01142	1.314E-4	0.00789	0.02208	0.05167	1001	20000
α	2.1	0.158	0.00244	1.795	2.098	2.419	1001	20000
λ	16.66	3.387	0.05114	10.9	16.34	24.25	1001	20000
Mediana	0.04335	0.00888	1.337E-4	0.02859	0.04243	0.0636	1001	20000

Fuente: Elaboración propia.

3.2. Inferencias sobre tiempos de servicio.

Un procedimiento igual a la estimación de los tiempos de llegada se aplicó para los tiempos de servicio. Del histograma en la Figura 1 se obtuvo el “best guess” como $t_0 = 0.72$ minutos. Basados en la ecuación (27) se tiene que:

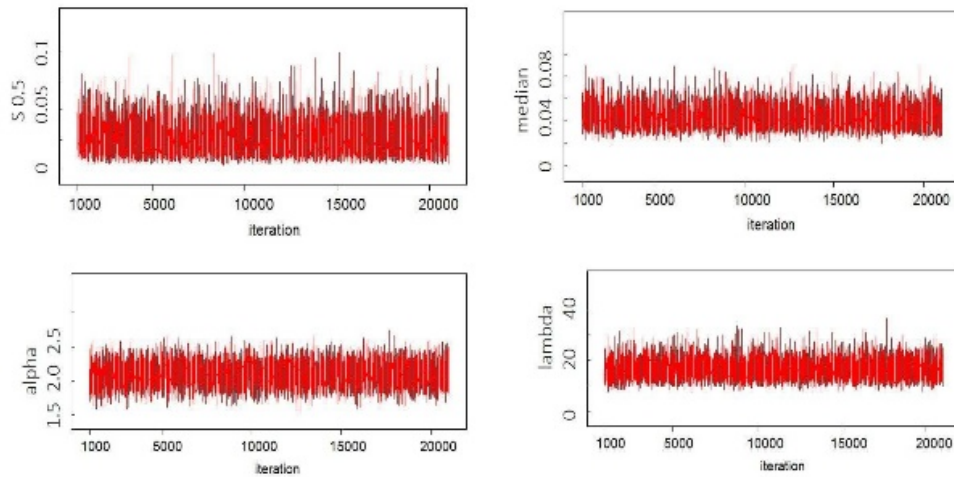
$$\lambda_0 \equiv \ln(2)/t_0$$

$$\lambda_0 = 0.912$$

La $Gamma(a, b)$ a priori tiene moda según ecuación (28) que resolviendo:

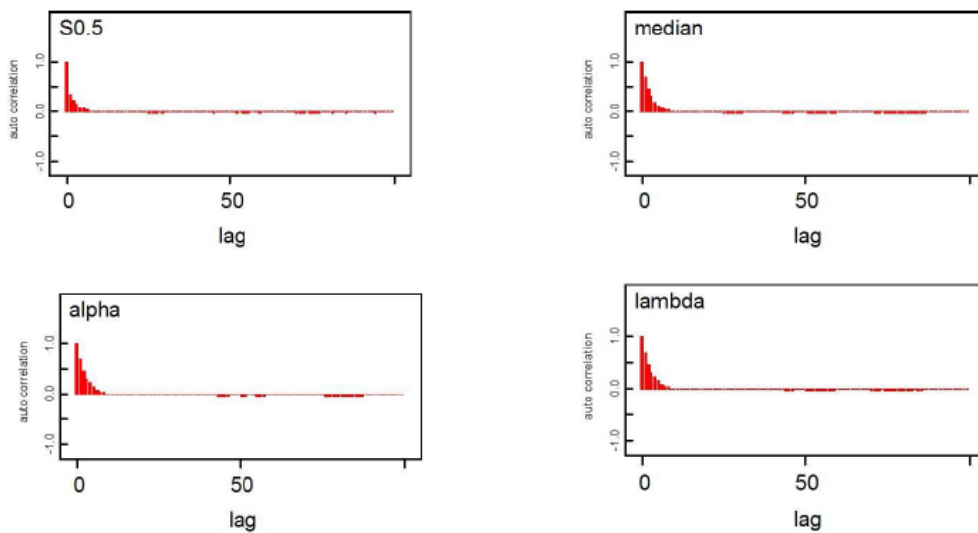
$$a = 1 + \lambda_0 b = 1 + 0.912b$$

Figura 4. Cadenas de Markov, 20000 iteraciones, al estimar parámetros en tiempo de llegada.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 5. Autocorrelogramas de las cadenas de Markov para parámetros en tiempo de llegada.



Fuente: Elaboración propia.

Se tiene un 95% de seguridad de que el tiempo de llegadas t es menor a $u = 2$ minutos que se expresa como $P r(t \leq u) = 0.95$. Ahora se tiene que aplicando ecuación (30):

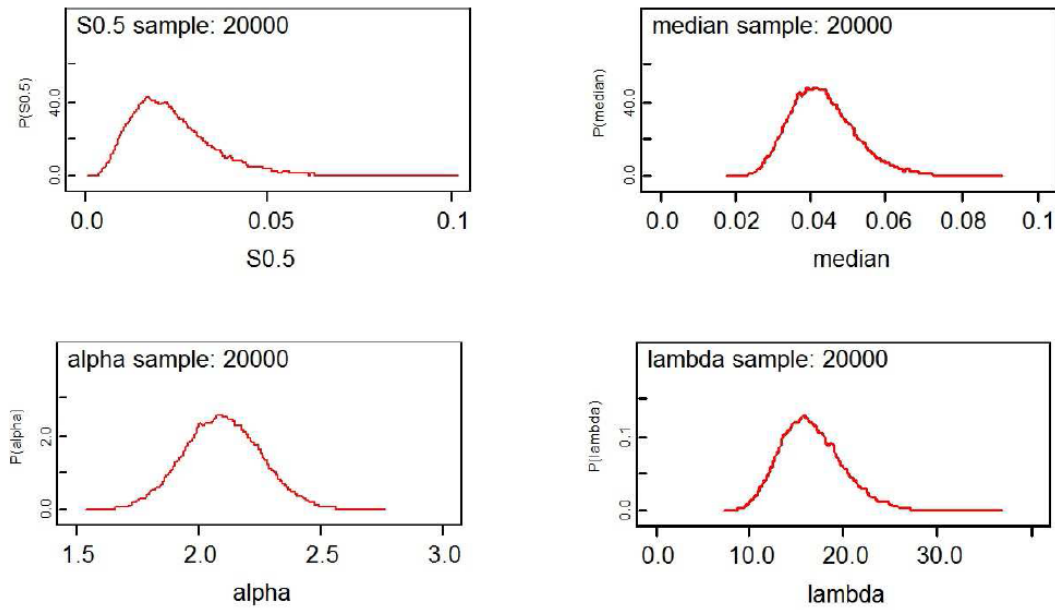
$$Pr\left(\lambda \geq \frac{0.693}{2}\right) = 0.95$$

$$Pr(\lambda \geq 0.346) = 0.95$$

Los valores que hacen que la última expresión se cumpla son $a = 2.45$ y $b = 1.59$.

Las Figuras 7 y 8 muestran cadenas de Markov con 1000 y 21000 iteraciones respectivamente.

Figura 6. Gráfica de densidad de probabilidad de los diferentes parámetros en las llegadas.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 3. Estadísticas básicas en la estimación de parámetros tiempos de servicio.

	Media	D.E	CM_{error}	Percentil2.5	Mediana	Percentil97.5	Inicio	Muestra
$S_{1.5}$	0.00399	0.00375	2.508E-5	3.608E-4	0.00288	0.014	1001	21000
α	3.064	0.2606	0.00179	2.571	3.059	3.586	1001	21000
λ	1.697	0.1886	0.001196	1.349	1.689	2.087	1001	21000
Mediana	0.4136	0.04653	2.943E-4	0.3322	0.4103	0.5142	1001	21000

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 10 se aprecian los autocorrelogramas de las cadenas en la estimación de parámetros para tiempos de servicio, mostrando caídas muy rápidas en la autocorrelación, lo que indica una fuerte estabilidad de la cadena MCMC dada en la Figura 8. La Figura 9 muestra las densidades de probabilidad de los parámetros estimados.

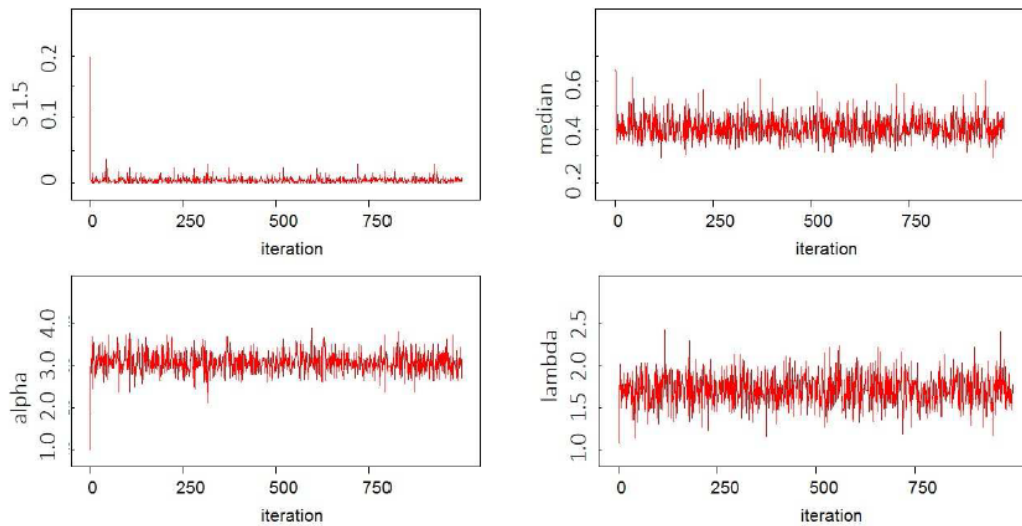
3.3. Medidas de desempeño.

El valor esperado de la distribución Weibull se puede apreciar en la ecuación (32).

$$E(y) = \Gamma\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha}\right) / \lambda \quad (31)$$

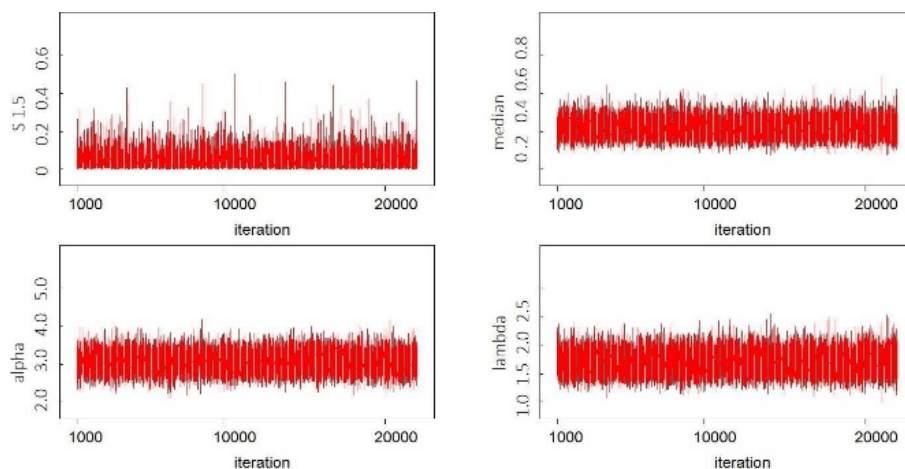
Una vez conseguidos los valores esperados del tiempo de llegada y tiempo de servicio, se usan sus inversos para establecer tasa de llegada y tasa de servicio, y así obtener la intensidad de tráfico de acuerdo con ecuación (2). Según Tablas 2 y 3, $t_{llegadas} \sim Weibull(2.1, 16.66)$ y $t_{servicio} \sim Weibull(3.064, 1.697)$. Con estos valores de los parámetros es posible calcular, valor esperado $E(t)$, varianza $Var(t)$, coeficiente cuadrado de variación $(Cv)^2$ y las tasas de llegada y servicios respectivamente medidas en personas/minuto. Estos resultados son mostrados en la Tabla 4.

Figura 7. Cadenas de Markov, 1000 iteraciones, al estimar parámetros en tiempo de servicio.



Fuente: Elaboración propia.

Figura 8. Cadenas de Markov, 21000 iteraciones, al estimar parámetros en tiempo de servicio.

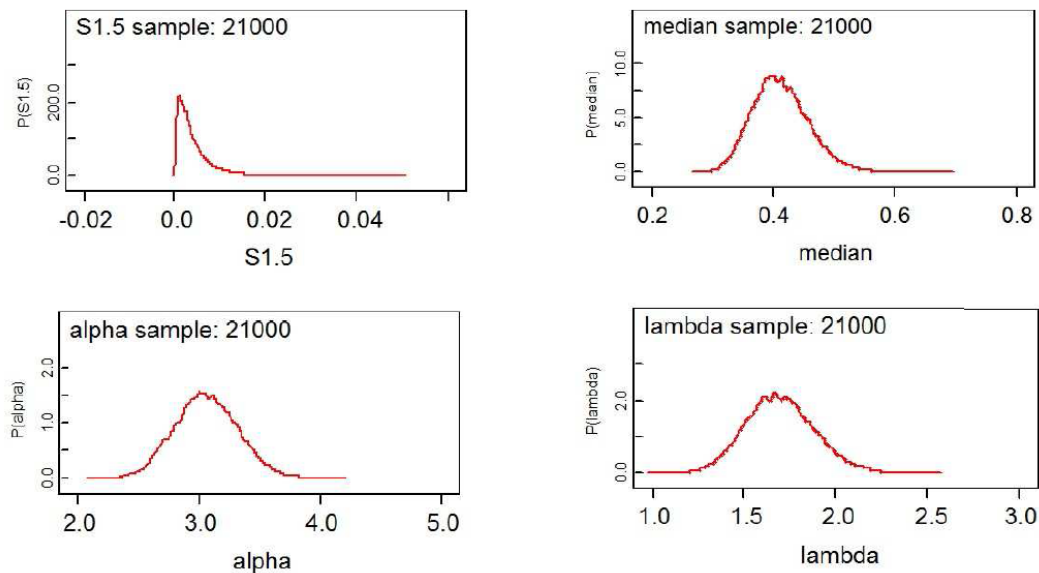


Fuente: Elaboración propia.

Según la Tabla 4 la intensidad de tráfico $\rho = \frac{4.3098}{1.3295} = 3.241$ cuyo valor representa una amplificación de clientes en la cola y, por tanto, no hay una distribución estable. Para poder aplicar las ecuaciones de colas (8) a (13) es importante que $\rho < 1$ tal como lo establece ecuación (14). Se usó el supuesto de proyectar 4 servidores para estabilizar el sistema y poder calcular las ecuaciones de desempeño. Así como ahora $\rho = \frac{4.3098}{4 \times 1.3295} = 0.8103$ que representa un sistema estable. Con esta proyección de 4 servidores y una vez hechas las estimaciones necesarias se procede a establecer las respectivas medidas de desempeño del sistema de colas en la entrega de refrigerios de la Universidad del Magdalena para un sistema G/G/s, con G siendo una *Weibull*(α, λ) y $s = 4$.

La Tabla 5 muestra los cálculos efectuados a partir de las ecuaciones (8) a (13) y las estimaciones mostradas en las Tablas 2 y 3. Según Tabla 5, con 4 servidores, un estudiante pasaría en promedio en el sistema 0.8672 minutos y en la cola 0.1151 minutos y el tamaño de la cola crecería en promedio 3.7379 estudiantes cada minuto.

Figura 9. Gráfica de densidad de probabilidad de los diferentes parámetros en el servicio.



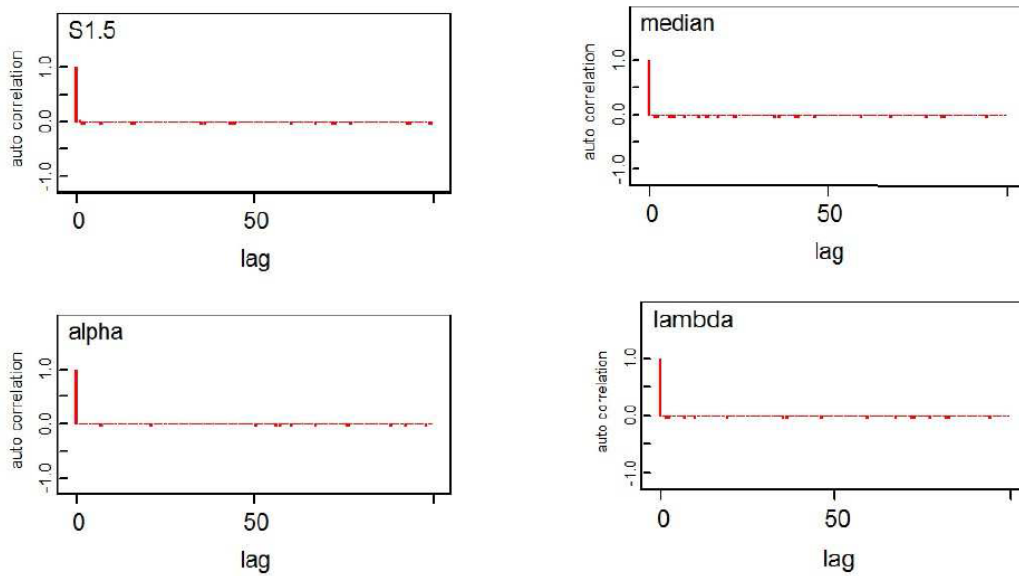
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4. Resultados de distribuciones de probabilidad a partir de la inferencia Bayesiana.

	α	λ	$E(t)$	$Var(t)$	$(Cv)^2$	Tasa
$t_{llegada} \sim Weibull(\alpha, \lambda)$	2.1	16.66	0.2330	0.0134	0.2502	4.3098
$t_{servicio} \sim Weibull(\alpha, \lambda)$	3.064	1.697	0.7521	0.0719	0.1271	1.3295

Fuente: Elaboración propia.

Figura 10. Autocorrelogramas de cadenas de Markov para parámetros en el tiempo de servicio.



Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Medidas de desempeño sistema de refrigerios proyectando 4 servidores.

	π_0	$P(j \geq s)$	L_q	W_q	L	W
M/M/s	0.0253	0.6152	2.6297	0.6101	5.8713	1.3622
G/G/s			0.4963	0.1151	3.7379	0.8672

Fuente: Elaboración propia.

3.4. Validación.

En esta parte se validarán los resultados encontrados en las estimaciones bayesianas y la aproximación del sistema $G/G/s$, ya que esta última se hizo mediante la fórmula de Allen-Cunneen.

La primera validación consiste en revisar las estadísticas básicas de la muestra con las que resultan de la estimación. Si se compara los resultados de la Tabla 1 con los de la Tabla 4 se nota un parecido importante en ellos. Además, nótese que en esta última tabla el valor esperado se encuentra dentro del intervalo de confianza calculado en la Tabla 1.

La segunda parte de la validación se realizó a través de una simulación hecha en el software Promodel. Los tiempos de llegada, que en Promodel se llaman arribos, se introdujeron con una distribución Weibull con los parámetros estimados en la Tabla 2 y el tiempo de procesamiento se introdujo con otra Weibull con las estimaciones ilustradas en Tabla 3. Se realizaron cuatro simulaciones, las primeras dos con 4 y 5 servidores y las otras dos con 1 y 2 servidores respectivamente. La razón de estas cuatro simulaciones es que con 4 y 5 servidores el sistema es estable y permite analizar las ecuaciones de desempeño, pero con 1 y 2 servidores no es posible calcular las medidas de desempeño

dadas en ecuaciones (8) a (13) (ver ecuación (14)), pero es interesante evaluar qué pasa con el caso de un servidor, pues al momento de la toma de datos esta era la realidad. En todas las simulaciones se hicieron 40 réplicas y se programó una variable que determinara el tiempo en la cola (equivalente a W_q) y el tiempo de ciclo (equivalente a W). Se espera que los valores arrojados por la simulación se parezcan a los valores de las medidas de desempeño de la Tabla 5. Se observó que la aproximación de Allen-Cunnen no es muy precisa para este caso, entonces para esta aplicación empírica se tanteó un factor de corrección en el promedio de los cuadrados de coeficientes de variación. Este factor de corrección lo denotamos por τ , y éste se multiplica por $\frac{C_a^2 + C_s^2}{2}$. En la Tabla 6 se presentan los intervalos de confianza de las medidas de desempeño de una simulación en Promodel comparadas con las medidas de desempeño calculadas mediante aproximación Allen-Cunnen con la respectiva corrección propuesta en el presente artículo $\frac{C_a^2 + C_s^2}{2} \tau$. En la parte izquierda de la Tabla se han calculado algunas medidas de desempeño para 4 y 5 servidores obtenidas en la simulación y los intervalos de confianza al 95%. En la parte derecha de la Tabla 6 las mismas medidas de desempeño pero calculadas a partir de fórmulas para sistema $G/G/s$, aproximación de Allen-Cunnen y corrección mediante nuestro factor τ , donde la distribución de los tiempos de llegadas y salidas son Weibull con parámetros estimados mediante estimación Bayesiana (Tablas 2 y 3).

Se puede observar en la Tabla 6 que para 4 servidores el factor de corrección τ que hace que todas sus medidas de desempeño de esta Tabla caigan en el intervalo de confianza establecido por la simulación es $\tau = 0.7$. Para el caso de 5 servidores el factor de corrección τ que hace que todas sus medidas de desempeño, de esta Tabla, caigan en el intervalo de confianza establecido por la simulación es $\tau = 0.4$. En ese orden de ideas la metodología propuesta establece que con 4 servidores, en promedio, una persona pasaría 0.8327 minutos en el sistema, 0.0806 en cola y el número de personas presentes en el sistema sería 3.589 estudiantes por minuto. Se encontró que $\tau = 0.4$ para un sistema de 5 servidores, en promedio, pasaría 0.7637 minutos en el sistema, 0.0115 en cola y el número de personas presentes en el sistema sería 3.2914 estudiantes por minuto.

Tabla 6. Comparaciones de medidas de desempeño.

	Simulación				Aproximación de estimadores Bayesianos						
	Media	E.E	LI(95%)	LS(95%)	$\tau = 1$	$\tau = 0.9$	$\tau = 0.8$	$\tau = 0.7$	$\tau = 0.6$	$\tau = 0.5$	$\tau = 0.4$
W con $s = 4$	0.833	0.0066	0.8196	0.8463	0.8672	0.8557	0.8442	0.8327	0.8212	0.8097	0.7981
W_q con $s = 4$	0.0813	0.0047	0.071	0.0907	0.1151	0.1036	0.0921	0.0806	0.069	0.0575	0.046
L con $s = 4$	3.85	0.228	3.3888	4.3112	3.7379	3.6882	3.6386	3.589	3.5393	3.4897	3.4401
W con $s = 5$	0.7597	0.0032	0.7533	0.7662	0.781	0.7781	0.7752	0.7723	0.7694	0.7695	0.7637
W_q con $s = 5$	0.0109	0.0008	0.0092	0.0126	0.0289	0.026	0.0231	0.0202	0.0173	0.0144	0.0115
L con $s = 5$	3.075	0.2303	2.6091	3.5309	3.3663	3.3586	3.3413	3.3289	3.3164	3.3039	3.2914

Fuente: Elaboración propia.

Se ha hecho la simulación para el caso de un servidor, que era el caso real a la toma de datos, y se encontró que el sistema era inestable porque suponiendo tiempo infinito, la cola crecería indefinidamente. El caso real es que se atienden una cantidad de estudiantes y la cola se va evacuando al ritmo de un servidor. Pero se quiso entrar en más detalle de qué era lo que sucedía y por simulación se estableció una entrada de 200 estudiantes a la cola y se observó que en promedio un estudiante pasa 51.8 minutos haciendo cola antes de recibir su refrigerio, porque el tiempo de recibir su refrigerio en promedio es 0.7528 minutos. Se hicieron simulaciones con 1 y 2 servidores y se observó el sistema atendiendo 200, 300, 400 y 500 estudiantes, los resultados se muestran en la Tabla 7, en esta se pueden

apreciar las medidas de desempeño calculadas por simulación donde N es el número de estudiantes que entran al sistema y “ T para atender N (HR)” es el tiempo en horas que toma el sistema para atender esos N estudiantes.

Tabla7. Simulación para 1 y 2 servidores.

N	s	W	W_q	W_s	T para atender N (HR)
200	1	52.5553	51.8025	0.7528	2.51
300	1	78.9225	78.169	0.7535	3.77
400	1	104.34	103.592	0.748	5.02
500	1	130.9542	130.201	0.7532	6.28
200	2	15.1033	14.3527	0.7506	1.2
300	2	22.024	21.274	0.75	1.88
400	2	29.18	28.4302	0.7498	2.51
500	2	36.2258	35.4755	0.7503	3.13

Fuente: Elaboración propia.

4. Conclusiones.

El propósito de este artículo fue proponer una metodología para modelar un sistema de colas $G/G/s$ donde G se distribuye como una Weibull en las llegadas y en el servicio. La metodología implica estimar los parámetros de las distribuciones por método de simulación de Estadística Bayesiana MCMC, específicamente el muestreador de Gibbs. Se ha encontrado que la aproximación de Allen-Cunneen no es del todo efectiva para las distribuciones Weibull, pero se aplica un factor de corrección que aproximó el sistema de colas adaptado a la repartición de refrigerios de la Universidad del Magdalena. Esta metodología presentada permitirá calcular medidas de desempeño de sistemas de colas cuando las llegadas y el servicio se comportan como una Weibull, incluso cuando se comportan de manera exponencial, ya que esta es un caso particular de la anterior.

Se encontraron cifras que permiten dar cuenta del desempeño actual del sistema de repartición de refrigerios en la Universidad del Magdalena, lo que apoya la toma de decisiones con mejor criterio.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad del Magdalena por la financiación del proyecto sobre teoría de líneas de espera. Los autores dan créditos a las Ingenieras Industriales de la Universidad del Magdalena Miggles Dayanna Manjarrés Ballestas y Linda Lucia Caicedo Vega por la toma de las muestras aleatorias.

Referencias

- Abate, J., Choudhury, G., & Whitt, W. (1994). Waiting-time tail probabilities in queues with long-tail service-time distributions. *Queueing Systems*, 16, 311-338.
- Alfa, A.S., & He, Q.-M. (2017). Point of queue size change analysis of the ph/ph/k system with heterogeneous servers. *Operations Research Letters*, 45, 581-584.
- Allen, A.O. (1990). *Probability, Statistics, and Queuing Theory with Computer Science Applications* (2 ed.). San Diego: Academic Press.
- Armero, C., & Bayarri, M. (1997). A bayesian analysis of a queueing system with unlimited service. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 58, 241-261. DOI:10.1016/S0378-3758(96)00086-9.
- Armero, C., & Bayyarrri, M. (1994). Bayesian prediction in m/m/1 queues. *Queueing Systems*, 15, 401-417.
- Armero, C., & Conesa, D. (2000). Prediction in markovian bulk arrival queues. *Queueing Systems*, 34, 327-350.
- Ausín, M., Lillo, R., Ruggeri, F., & Wiper, M. (1998). Heavy-tailed probability. En R. Adler, R. Feldman, & M. Taqqu, *A Practical Guide to Heavy Tails*. New York: Chapman Hall.
- Ausín, M., Lillo, R., Ruggeri, F., & Wiper, M. (2003). Bayesian modelling of hospital bed occupancy times using a mixed generalized Erlang distribution. En J. M. Bernardo, M. J. Bayarri, J. O. Berger, A. P. Dawid, D. Heckerman, A. F. Smith, & M. West, *Bayesian Statistics* (Vol. 7). Oxford: Oxford University Press.
- Ausín, M., Wiper, M. P., & Lillo, R. E. (2008). Bayesian prediction of the transient behaviour and busy period in short- and long-tailed gi/g/1 queueing systems. *Computational Statistics Data Analysis*, 52, 1615-1635. DOI: 10.1016/j.csda.2007.05.009
- Ausín, M., Wiper, M., & Lillo, R. (2004). Bayesian estimation for the m/g/1 queue using a phase type approximation. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 118, 83-101. DOI:10.1016/S0378-3758(02)00398-1.
- Chaudhry, M.L., & Kim, J.J. (2016). Analytically simple and computationally efficient solution to gix/geom/1 queues involving heavy-tailed distributions. *Operations Research Letters*, 44, 655-657. DOI: 10.1016/j.orl.2016.07.012.
- Christensen, R., Wesley, J., Branscum, A., & Timothy, E. (2011). *Bayesian Ideas and data analysis: An introduction for Scientists and Staticicians*. Boca Raton: CRC Press.
- Guerouahane, N., Aissani, D., Farhi, N., & Bouallouche-Medjkoune, L. (2017). M/g/c/c state dependent queueing model for a road traffic system of two sections in tandem. *Computers Operations Research*, 87, 98-106. DOI:10.1016/j.cor.2017.05.017.
- Hanschke, T. (2006). Approximations for the mean queue length of the gix/g(b,b)/c queue. *Operations Research Letters*, 34, 205-213. DOI:10.1016/j.orl.2005.01.011.

- Kraemer, W., & Langenbanch, B. (1976). Approximate formulae for the delay in the queuing system $g/g/1$. *Proceedings of the eighth international teletraffic congress* (págs. 235.1-235.8). Melbourne: Journal of Econometrics.
- Liu, Z., & Yu, S. (2016). The $m/m/c$ queueing system in a random environment. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 436, 556-567.
- Lunn, D., Thomas, A., Best, N., & Spiegelhalter, D. (2000). Winbugs a bayesian modelling framework: concepts, structure, and extensibility. *Statistical and Computing*, 10(4), 325-337. DOI:10.1023/A:1008929526011.
- Paxon, V., & Floyd, S. (1995). Wide-area traffic: the failure of poisson modeling. *IEEE Trans. Networking*, 3, 226-244.
- Wiper, M. (1998). Bayesian analysis of $er/m/1$ and $er/m/c$ queues. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 69, 65-79.
- Wiston, L. (2008). *Investigación de operaciones*. México: Cengage Learning.