

Mármol, Maite; Gutierrez Viñuela, Emilio

Article

Reaseguro y reparto de dividendos como herramientas de control de la solvencia en una carteras de seguros no vida: Análisis desde la teoría colectiva del riesgo

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Provided in Cooperation with:

Universidad Pablo de Olavide, Sevilla

Suggested Citation: Mármol, Maite; Gutierrez Viñuela, Emilio (2019) : Reaseguro y reparto de dividendos como herramientas de control de la solvencia en una carteras de seguros no vida: Análisis desde la teoría colectiva del riesgo, Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, ISSN 1886-516X, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, Vol. 27, pp. 188-206,
<https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.2977>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/286161>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Reaseguro y Reparto de Dividendos como Herramientas de Control de la Solvencia en una Carteras de Seguros No Vida: Análisis desde la Teoría Colectiva del Riesgo

MÁRMOL JIMÉNEZ, MAITE

Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Facultad de
Economía y Empresa

Universidad de Barcelona (España)

Correo electrónico: mmarmol@ub.edu

GUTIÉRREZ VIÑUELA, EMILIO

Departamento de Gestión de Renta Variable

Grupo Catalana Occidente (España)

Correo electrónico: emilio.gutierrez@catalanaoccidente.com

RESUMEN

El objeto de estudio del presente trabajo es el análisis del nivel de las reservas en una cartera de seguros no vida. El acercamiento a esta herramienta como indicativo de la solvencia de la cartera nos plantea una disyuntiva inicial entre la seguridad necesaria para poder responder a los siniestros acaecidos y el problema que genera a nivel financiero el hecho de inmovilizar reservas. Nos enfrentamos por tanto a la disyuntiva seguridad-rentabilidad. Como elemento equilibrador, el gestor de la cartera puede plantearse el uso de políticas de reparto de dividendos o políticas de reaseguro que se apliquen o modifiquen en el momento en que las reservas alcancen un determinado nivel. Analizando el problema desde las hipótesis clásicas del proceso de riesgo, nos planteamos en este trabajo la probabilidad de que las reservas alcancen ese nivel predeterminado, momento en el que el gestor podrá replantearse sus políticas. Esta probabilidad se obtiene para un caso general en el que los tiempos de interocurrencia y la cuantía individual del siniestro se modelizan con distribuciones Erlang. Finalmente se presentan ejemplos y resultados numéricos que pueden ayudar a entender el comportamiento de dicha probabilidad.

Palabras claves: cartera de seguros no vida; reservas; dividendos; reaseguro; probabilidad de alcanzar la barrera; distribución Erlang.

Clasificación JEL: G22; M10; C02; C63.

MSC2010: 91B30; 62P05; 34M03.

Reinsurance and Distribution of Dividends as Solvency Control Tools in a Non-Life Insurance Portfolio: Analysis from the Collective Risk Theory

ABSTRACT

The object of study of this paper is the analysis of the level of reserves in a non-life insurance portfolio. The approach to this tool as an indicator of the solvency of the portfolio poses an initial dilemma between the security necessary to be able to respond to the losses that have occurred and the problem generated financially by the fact of immobilizing reserves. We face therefore the disjunctive security-profitability. As a balancing element, the portfolio manager may consider the use of dividend distribution policies or reinsurance policies that are applied or modified at the time the reserves reach a certain level. Analyzing the problem from the classical hypotheses of the risk process, we consider in this work the probability that the reserves reach that predetermined level, at which time the manager may rethink his policies. This probability is obtained for a general case in which the inter-accident times and the individual amount of the loss are modeled with Erlang distributions. Finally, we present examples and numerical results that can help to understand the behavior of this probability.

Keywords: non-life insurance portfolio; reserves; dividends; reinsurance; probability of reaching the barrier; Erlang distribution.

JEL classification: G22; M10; C02; C63.

MSC2010: 91B30; 62P05; 34M03.



1. Seguridad vs. rentabilidad

En este trabajo centramos nuestro análisis en el estudio del nivel de las reservas de una compañía de seguros no vida. Estas entidades se dedican a cubrir los riesgos (siniestros) generados por las pólizas que forman su cartera, ofreciendo, por tanto, unas prestaciones de carácter aleatorio debido al carácter imprevisible de la siniestralidad.

Esta aleatoriedad y las fluctuaciones intrínsecas de la siniestralidad obligan a la realización de estudios estadístico-actuariales que garanticen el cumplimiento de las obligaciones asumidas por el asegurador. Es necesario, por tanto, un acercamiento matemático-estadístico a los diferentes elementos que determinan el nivel de las reservas de la compañía. Este análisis permite afrontar el estudio del nivel de las reservas, análisis imprescindible para tratar un tema fundamental como es el de la solvencia de la cartera.

Por tanto, lo que nos planteamos es la capacidad de la entidad de riesgo para hacer frente a las obligaciones adquiridas, capacidad que puede verse afectada por, entre otros, las fluctuaciones de la siniestralidad entorno a su valor medio. Cubrir esas desviaciones obliga a la creación de exigencias financieras. Y es precisamente en la creación de esas exigencias financieras donde el asegurador se enfrenta a la siguiente disyuntiva: Mantener un nivel de reservas suficiente para poder hacer frente con garantía a los compromisos aleatorios que se ha comprometido a cubrir es una necesidad de la entidad gestora de la cartera de riesgos, pero la tenencia de un nivel excesivamente alto que proporcione seguridad a la compañía puede provocar problemas de financiación, ya que la compañía estaría perdiendo la posibilidad de utilizar esos recursos para obtener una mayor rentabilidad o bien para repartir dividendos a sus accionistas.

Así, un nivel de reservas elevado proporciona a los asegurados la tranquilidad de percibir las prestaciones acordadas. Aunque, evidentemente, esa seguridad se consigue a cambio de un incremento en los costos de capital, lo que reduce los beneficios de inversión de los accionistas y puede conllevar un riesgo de incremento de la prima en los asegurados. Surge así una disyuntiva para el gestor de la cartera: el del equilibrio entre seguridad y coste de capital.

Las herramientas de las que dispone el gestor para intentar encontrar ese equilibrio son diversas, entre ellas, la introducción de políticas de reaseguro que busquen disminuir el efecto de las fluctuaciones de siniestralidad respecto a la media y por tanto busquen mejorar la capacidad de respuesta de la aseguradora, y, por otro lado, políticas de reparto de dividendos que busquen contentar a los accionistas ante unos niveles de reserva excesivamente altas. Es en este contexto es en el que situamos el presente trabajo, cuyo objetivo fundamental es analizar la probabilidad de que las reservas de la compañía alcancen un determinado nivel de las reservas. Denotamos esa probabilidad como:

$$\chi(u, b)$$

Es en ese momento en el que se considera que las reservas cubren las obligaciones contraídas, y el gestor puede replantearse su política de reaseguro, o considerar que un nivel de respuesta a las obligaciones contraídas está suficientemente cubierto y puede plantearse el reparto de dividendos.

El enfoque que se utiliza en este trabajo para analizar el nivel de las reservas es el de los modelos colectivos del riesgo. El trabajo se distribuye de la siguiente forma: en el apartado 2 presentamos las hipótesis básicas de la teoría colectiva del riesgo. En los apartados 3 y 4, una

vez contextualizado el problema, presentamos la obtención y solución de la probabilidad de que el nivel de las reservas, partiendo de un nivel inicial u , alcance un nivel predeterminado b asumiendo distribuciones Erlang para la ocurrencia y la cuantía de los siniestros, incluyéndose resultados numéricos. Finalmente en el apartado 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Hipótesis básicas del modelo

El modelo clásico de la teoría del riesgo, (Gerber, 1979, Panjer et al., 1992, Kaas et al., 2008), analiza la evolución de las reservas en una cartera de seguros no vida. Este enfoque analiza la variación de las reservas libres de la compañía calculadas como el capital inicial incrementado por el cobro de primas a los asegurados y cuyos gastos vienen determinados por el pago de los siniestros acaecidos.

En este modelo, $R(t)$ indica el nivel de las reservas en un momento $t \in (0, \infty)$ y se define como $R(t) = u + ct - S(t)$, siendo $u = R(0) = 0$ el nivel inicial de las reservas, $S(t)$ la siniestralidad agregada hasta el momento t , y c la prima instantánea percibida. La siniestralidad agregada se define como:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

donde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ indica el proceso del número de siniestros que determina el número de siniestros ocurridos hasta el momento t y las variables $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ son las cuantías individuales del siniestro, variables idéntica e independientemente distribuidas con función de densidad $f(x)$ y función de distribución $F(x)$, siendo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ independiente de $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Definimos los tiempos de interocurrencia como $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, variables idéntica e independientemente distribuidas, con función densidad $g(t)$, siendo T_1 el tiempo transcurrido hasta el primer siniestro, representando $T_i, i > 1$ el tiempo de interocurrencia entre el siniestro $i-1$ y el siniestro i -ésimo. La prima instantánea c se calcula añadiendo un recargo de seguridad, de tal forma que $c \cdot E[T_i] > E[X]$.

Se define el momento de ruina, τ , como el primer momento en que el nivel de las reservas toma valores negativos, $\tau = \min\{t \geq 0 / R(t) < 0\}$ con $\tau = \infty$ si $R(t) \geq 0$, siendo el déficit de ruina, si ésta ocurre, $Y = |R(T^+)|$ y reservas justo antes del momento de ruina, $R(T^-)$.

La probabilidad de ruina última $\Psi(u)$ se define como,

$$\psi(u) = P[\tau < \infty, R(0) = u] = E\{I(\tau < \infty), R(0) = u\}$$

Donde $I(A) = 1$ si A ocurre e $I(A) = 0$ en caso contrario.

En la **Figura 1** se representa gráficamente una posible trayectoria de las reservas bajo las hipótesis recogidas anteriormente.

Como hemos comentado en la introducción, el gestor de la cartera de seguros no vida puede optar por incluir políticas de reparto de dividendos y políticas de reaseguro. Obviamente, la introducción de estas políticas modifica el proceso de las reservas definido en

el modelo clásico de las reservas. Comentamos a continuación estas modificaciones que, sin duda, acercan el modelo a la realidad de la gestión de la cartera.

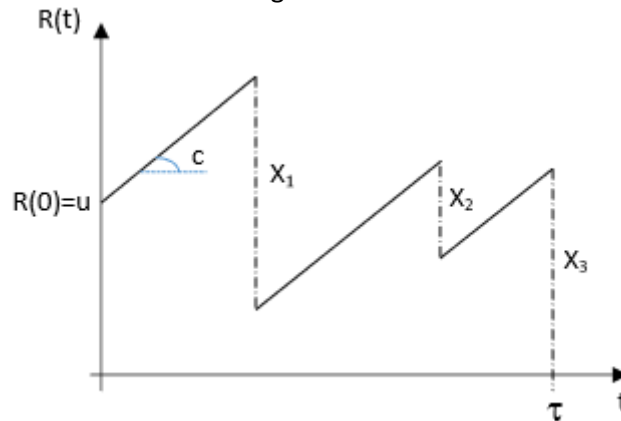


Figura 1: Posible trayectoria de las reservas bajo las hipótesis de la teoría del riesgo.

- **Introducción de políticas de reparto de dividendos:** La base técnica para proponer el reparto en forma de dividendos de una parte de las reservas libres nace de la crítica de De Finetti, 1957. En ella se afirma que bajo las hipótesis clásicas del proceso de riesgo, si el recargo de seguridad es positivo, el nivel de las reservas de aquellas trayectorias que no se arruinan, tiende a infinito cuando t tiende a infinito con probabilidad 1. Así, las políticas de reparto de dividendos aparecen como una forma de controlar un crecimiento ilimitado de las reservas y el consiguiente coste de capital que eso conlleva. Matemáticamente, el control sobre el nivel de las reservas se realiza mediante la introducción de barreras de dividendos que, formalmente, se representan como $b(t)$. La barrera indica el nivel máximo de reservas que la gestora de la cartera considera que debe mantener en cada momento t . Así, cuando el nivel de las reservas alcanza la barrera, una parte o la totalidad de los ingresos por primas se reparten en forma de dividendos.

En la literatura actuarial encontramos barreras de dividendos que pueden tomar diferentes formas (constantes, lineales o parabólicas).

Si asumimos una barrera de dividendos constante, es decir $b(t) = b$, la política a aplicar implicaría que cada vez que el nivel de las reservas alcance un nivel predeterminado b las primas ingresadas se reparten en forma de dividendos hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. En la **Figura 2** se recoge una posible trayectoria de las reservas con una barrera de dividendos constante.

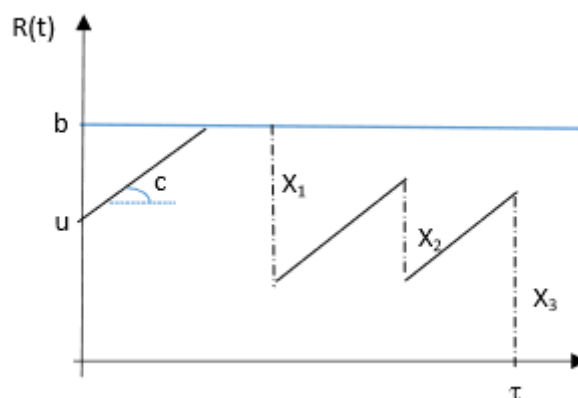


Figura 2: Posible trayectoria de las reservas con una barrera de dividendos constante.

- **Introducción de políticas de reaseguro:** Como herramienta de gestión de la cartera de seguros no vida también existe la posibilidad de que la aseguradora ceda parte de los riesgos contraídos a una reaseguradora a cambio del pago de prima de reaseguro, es decir a cambio de una cesión a la reaseguradora de las primas ingresadas. En el mercado podemos encontrar diferentes tipos de reaseguro. Si optamos por un reaseguro cuota aparte, o reaseguro proporcional, la idea es que la compañía aseguradora cede un porcentaje fijo, $(1 - k)\%$, de la cuantía del siniestro, es decir retiene un porcentaje $k\%$ del siniestro, kX . A cambio paga a la reaseguradora un porcentaje $(1 - k)\%$ de la prima recibida. Por tanto, retiene un porcentaje k de la prima, kc .

En concreto, si introducimos una política de reaseguro proporcional de umbral (Castañer et al. (2010,2012)), la idea es que la cesión de riesgos a la reaseguradora se produce con un porcentaje de retención distinto dependiendo de si el nivel de las reservas es mayor o menor que el nivel prefijado b . Así, el porcentaje de retención será k_1 si las reservas son menores que b , y el porcentaje de retención será k_2 cuando el nivel de las reservas sea mayor que b . En la **Figura 3** se observa la modificación que sufre el proceso de las reservas con la introducción de una política de reaseguro proporcional de umbral,

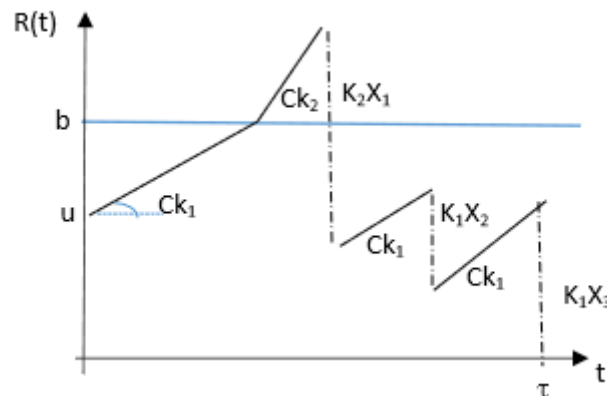


Figura 3: Trayectoria de las reservas con una política de reaseguro proporcional de umbral.

En ambas modificaciones del modelo clásico, el punto que determina el momento en que se inicia la introducción de políticas de dividendos o de cambio de nivel de retención del reaseguro es aquel en que las reservas alcanzan el nivel de la barrera b . Cobra por tanto una especial importancia la probabilidad de que, partiendo de un nivel inicial de las reservas u , y dado un nivel prefijado b , las reservas de la compañía alcancen ese valor sin que la ruina haya ocurrido previamente, es decir antes del momento de ruina. Esa probabilidad se representa como $\chi(u, b)$.

Así, $\chi(u, b)$ nos medirá la probabilidad de que si asumimos una barrera de dividendos constante se repartan dividendos, y si asumimos reaseguro proporcional de umbral, representará la probabilidad de que el porcentaje de retención varíe. Es precisamente en el cálculo y análisis de esta probabilidad $\chi(u, b)$ en la que centramos el trabajo.

La probabilidad complementaria se denomina $\varepsilon(u, b)$ definida por tanto como la probabilidad de que la ruina ocurra sin que las reservas hayan alcanzado previamente el nivel b . Los primeros análisis sobre esta probabilidad los podemos encontrar en Gerber (1987) o Dickson (1992).

3. Cálculo de $\chi(u, b)$

Una vez planteado el marco teórico del trabajo y nuestro objetivo, nos enfrentamos al cálculo de la probabilidad definida en el apartado anterior, $\chi(u, b)$. Obviamente, como primer paso, debemos asumir una distribución que modelice los tiempos de interocurrencia $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$. En este trabajo asumiremos que se distribuyen según una distribución *Erlang* (k, λ) , es decir, $T_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$, siendo su función de densidad:

$$g(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}.$$

La distribución Erlang es una distribución ampliamente utilizada en la Teoría de Colas para modelizar el tiempo de espera entre dos sucesos consecutivos, y por su clara similitud, es una distribución que en los últimos años ha sido muy utilizada en los modelos de teoría de la ruina para describir $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$.

En la **Figura 4** se han graficado diferentes distribuciones *Erlang* (k, λ) con la misma media. Recordemos que la media de una *Erlang* (k, λ) es $E(T_i) = \frac{\lambda}{k}$, por tanto, para obtener medias iguales imponemos que $\lambda = k$. Podemos observar que a mayor es el valor del parámetro de forma k , mayor es el apuntamiento de la distribución.

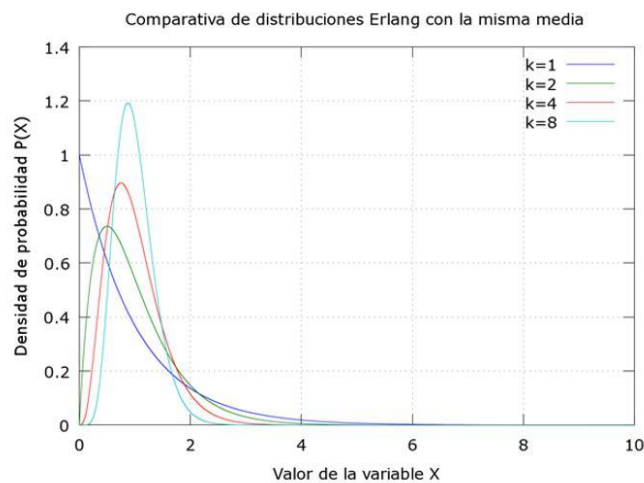


Figura 4: Gráfica de distribuciones *Erlang* (k, λ) con $\lambda = k$.

En Dickson, 1998, encontramos la expresión de partida que nos permitirá calcular $\chi(u, b)$:

$$\chi(u, b) = \int_0^{t^*} \int_0^{u+ct} g(t) \chi(u+ct-x, b) dF(x) dt + \int_{t^*}^{\infty} g(t) dt. \quad (1)$$

La expresión se basa en diferenciar si el momento de ocurrencia del primer siniestro ocurre antes o después del momento t^* , siendo $t^* = \frac{b-u}{c}$, el primer momento en el que el

proceso de reserva alcanzaría un nivel predeterminado b en el supuesto de que no ocurriese el supuesto.

Si asumimos que $T_i \sim Erlang(k, \lambda)$ sustituyendo su función de densidad $g(t)$ en (1), y realizando el cambio de variable $s = u + ct$, se obtiene

$$\begin{aligned} \chi(u, b) = & \frac{1}{c} \int_u^b \frac{\left(\frac{s-u}{c}\right)^{k-1} \lambda^k e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}}{(k-1)!} \int_0^s \chi(s-x, b) dF(x) ds + \\ & + \frac{1}{c} \int_b^\infty \frac{\left(\frac{s-u}{c}\right)^{k-1} \lambda^k e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}}{(k-1)!} ds \end{aligned} \quad (2)$$

Para poder determinar el valor de $\chi(u, b)$ necesitamos obtener en primer lugar una ecuación siniestro, podremos obtener la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) en $\chi(u, b)$.

Para ello, tenemos que derivar de forma sucesiva la expresión (2) para eliminar los sumandos integrales. Para facilitar ese proceso derivativo, obtendremos a continuación, mediante un proceso recursivo, una expresión para la derivada n -ésima de la función de densidad *Erlang* (k, λ). En el **Lema 1** recogemos la obtención de esa derivada, a la que denominamos

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n}$$

Lema 1. Sea $g(t)$ una distribución *Erlang* (k, λ), con función de densidad $g(t) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}$. entonces

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} = \frac{\lambda}{(k-1)!} \prod_{i=1}^n (k-i) \cdot t^{k-n-1} \cdot e^{-\lambda t} - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^i}{i!} \frac{d^{n-i} g(t)}{dt^{n-i}} \prod_{j=0}^{i-1} (n-j).$$

En aras de simplificar nomenclatura denotamos $F_n \left(g, \frac{dg(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} g(t)}{dt^{n-1}} \right)$ a la ecuación diferencial ordinaria para $g(t)$ que aparece en la expresión previa,

$$F_n \left(g, \frac{dg(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} g(t)}{dt^{n-1}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda^i}{i!} \frac{d^{n-i} g(t)}{dt^{n-i}} \prod_{j=0}^{i-1} (n-j).$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n}$$

Así, derivando sucesivamente la expresión (2), y utilizando la expresión genérica obtenida en el Lema 1, se obtiene una ecuación integro diferencial para $\chi(u, b)$ que se recoge en el Teorema 1.

Teorema 1: La ecuación integro diferencial para $\chi(u, b)$ en un proceso de reservas en el que se asume que $T_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ es,

$$A_k = (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} I(u), \quad (3)$$

siendo,

$$A_0 = c \cdot \chi(u, b)$$

$$A_k = A'_{k-1} - \frac{\lambda}{c} A_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

$$I(u) = \int_0^u \chi(u-x, b) dF(x)$$

El Teorema 1 nos permite obtener las ecuaciones integro diferenciales para $\chi(u, b)$ al asumir que $T_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$. En la Tabla 1, a nivel de ejemplo, se obtienen las ecuaciones integro-diferenciales para diferentes valores del parámetro k . En aras de simplificar las expresiones, $\chi(u, b) = \chi$.

$A_k = (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} I(u)$		
k	A_k	$(-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} I(u)$
1	$c \cdot \chi' - \lambda \cdot \chi$	$-\lambda I(u)$
2	$c \cdot \chi'' - 2 \cdot \lambda \cdot \chi' + \frac{\lambda^2}{c} \cdot \chi$	$\frac{\lambda^2}{c} I(u)$
3	$c \cdot \chi''' - 3 \cdot \lambda \cdot \chi'' + \frac{3\lambda^2}{c} \cdot \chi' - \frac{\lambda^3}{c^2} \cdot \chi$	$-\frac{\lambda^3}{c^2} I(u)$
4	$c \cdot \chi'''' - 4 \cdot \lambda \cdot \chi''' + \frac{6\lambda^2}{c} \cdot \chi'' - \frac{4\lambda^3}{c^2} \cdot \chi' + \frac{\lambda^4}{c^3} \cdot \chi$	$\frac{\lambda^4}{c^3} I(u)$
5	$c \cdot \chi''''' - 5 \cdot \lambda \cdot \chi'''' + \frac{10\lambda^2}{c} \cdot \chi''' - \frac{10\lambda^3}{c^2} \cdot \chi'' + \frac{5\lambda^4}{c^3} \cdot \chi' - \frac{\lambda^5}{c^4} \cdot \chi$	$-\frac{\lambda^5}{c^4} I(u)$

Tabla 1. Ecuaciones integro-diferenciales para $\chi(u, b)$ si $T_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ siendo $k = 1, 2, \dots, 5$

Como podemos observar en las ecuaciones integro diferenciales previas, encontramos el elemento integral:

$$I(u) = \int_0^u \chi(u-x, b) dF(x)$$

Para obtener una ecuación diferencial ordinaria para $\chi(u, b)$ que podamos resolver, debemos asumir una distribución que modelice la cuantía individual de siniestro, es decir $F(x)$, y posteriormente iniciar un proceso de derivación sucesiva (cuyo orden dependerá de la distribución $F(x)$ asumida) para poder eliminar $I(u)$.

A nivel de ejemplo, asumimos a continuación que los tiempos de interocurrencia se distribuyen según una *Erlang* (k, λ) y la **cuantía individual del siniestro se distribuye según una exponencial**¹, es decir asumimos que $f(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x}$. Sustituyendo $f(x)$ en $I(u)$, se obtiene $I(u) = \int_0^u \chi(u-x, b) \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x} dx$, y derivando,

$$I'(u) = \alpha \chi(u, b) - \alpha I(u). \quad (4)$$

Derivando (3) y sustituyendo (4), se obtiene:

$$\begin{aligned} A'_k &= (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} I'(u) = \\ &= (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} (\alpha \chi(u, b) - \alpha I(u)) = \\ &= (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} \alpha \chi(u, b) - \alpha (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} I(u) = \\ &= (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} \alpha \chi(u, b) - \alpha A_k \end{aligned}$$

Y reescribiendo,

$$A'_k + \alpha A_k - (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} \alpha \chi(u, b) = 0$$

Hemos obtenido, por tanto, la EDO que nos permitirá obtener $\chi(u, b)$ al asumir que la cuantía individual del siniestro sigue una distribución exponencial.

En el siguiente apartado, en aras de una mayor generalización de los resultados, nos planteamos la obtención de la ecuación diferencial ordinaria si los tiempos de interocurrencia se distribuyen según una *Erlang* (k, λ) y la cuantía individual del siniestro se modeliza según una *Erlang* (n, γ). En el ejemplo anterior en el que asumimos que $f(x)$ se distribuye según una exponencial, es decir según una *Erlang* de parámetro 1, hemos derivado una vez para obtener la EDO correspondiente. Al generalizar el orden de la distribución *Erlang* asumida para representar la cuantía, tendremos que derivar n veces para obtener la EDO correspondiente.

3.1. Cuantía individual del siniestro *Erlang* (n, γ).

En este apartado vamos a generalizar la obtención de la ecuación diferencial ordinaria que nos permitirá hallar $\chi(u, b)$ si asumimos que los tiempos de interocurrencia se distribuyen según

¹ Recordemos que una distribución exponencial de parámetro α es una *Erlang* (1, α).

una *Erlang* (k, λ) y la cuantía individual del siniestro se distribuye según una *Erlang* (n, γ) , es decir si,

$$f(x) = \frac{\gamma^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\gamma x}.$$

Podemos obtener la EDO para $\chi(u, b)$ bajo estas hipótesis aplicando el **Lemma 1** obtenido en Claramunt et al. (2005). Presentamos la solución en el **Teorema 2**.

Teorema 2: La ecuación diferencial ordinaria (EDO) para $\chi(u, b)$ en un proceso de reservas en el que se asume que el tiempo de ocurrencia se distribuye según una *Erlang* (k, λ) y la cuantía individual del siniestro se distribuye según una *Erlang* (n, γ) es,

$$A_k^n = (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k \gamma^n}{c^{k-1}} \chi(u, b) - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} A_k^i(u) \gamma^{n-i}, \quad (5)$$

siendo

$$A_k^i = (-1)^{k-2} \frac{\lambda^k}{c^{k-1}} I(u).$$

A continuación, presentamos dos ejemplos que permiten clarificar las expresiones previamente obtenidas:

Ejemplo 1: Asumimos que el tiempo de interocurrencia se distribuye según una *Erlang* ($2, \lambda$) y la cuantía individual del siniestro se distribuye según una *Erlang* ($2, \gamma$) , es decir $k = n = 2$. A partir de (5) obtenemos,

$$A_2^2 = \frac{\lambda^2 \gamma^2}{c} \chi(u, b) - \sum_{i=0}^1 \binom{2}{i} A_2^i(u) \gamma^{2-i}.$$

Y desarrollando,

$$c^2 \frac{\partial^4 \chi(u, b)}{\partial u^4} + (2\gamma c^2 - 2\lambda c) \frac{\partial^3 \chi(u, b)}{\partial u^3} + (\gamma^2 c^2 - 4\lambda \gamma c + \lambda^2) \frac{\partial^2 \chi(u, b)}{\partial u^2} + (2\gamma \lambda^2 - 2\lambda \gamma^2 c) \frac{\partial \chi(u, b)}{\partial u} = 0. \quad (6)$$

Ejemplo 2: Asumimos que el tiempo de interocurrencia se distribuye según una *Erlang* ($1, \lambda$) y la cuantía individual del siniestro se distribuye según una *Erlang* ($3, \gamma$) , es decir $k = 1$ y $n = 3$. A partir de (5) obtenemos,

$$A_1^3 = \lambda \gamma^3 \chi(u, b) - \sum_{i=0}^2 \binom{3}{i} A_1^i(u) \gamma^{3-i}.$$

Y desarrollando,

$$c \frac{\partial^4 \chi(u, b)}{\partial u^4} + (3\gamma c - \lambda) \frac{\partial^3 \chi(u, b)}{\partial u^3} + (3\gamma^2 c - 3\lambda \gamma) \frac{\partial^2 \chi(u, b)}{\partial u^2} + (\gamma^3 c - 3\lambda \gamma^2) \frac{\partial \chi(u, b)}{\partial u} = 0. \quad (7)$$

En los ejemplos anteriores podemos observar que el grado de la EDO obtenida es $n + k$.

4. Resolución de la E.D.O. obtenida para el cálculo de $\chi(u, b)$.

El proceso de resolución de la ecuación diferencial ordinaria obtenida en (5) es una tarea ardua debido a la complejidad de generalizar la tipología de las raíces obtenidas de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial ordinaria. Recordamos que la estructura de solución de la ecuación diferencial ordinaria depende de las raíces obtenidas asociadas al polinomio característico. Así, en función de si son reales simples, reales múltiples o complejas, la forma que tendrá la función para la que hemos calculado la EDO será diferente. Obviamente este hecho complica la obtención de una estructura de solución general para el caso analizado en Este trabajo, es decir, para interocurrencia de los siniestros *Erlang* (k, λ) y cuantía individual del siniestro *Erlang* (n, γ).

Claramunt et al. (2005) encontraron una solución recursiva para la EDO asumiendo que los tiempos de interocurrencia se distribuían según *Erlang* ($2, \lambda$), y la cuantía individual del siniestro según una *Erlang* (n, γ), es decir, para un caso particular de la generalización presentada en el presente trabajo. Dichas soluciones se encontraron bajo el supuesto de que las raíces de las ecuaciones diferenciales ordinarias eran reales. No obstante, a mayor es el grado de la ecuación diferencial ordinaria, y por tanto el grado del polinomio característico asociado, más difícil es la consistencia de esta suposición, ya que, en la descomposición polinómica en raíces, a mayor sea el grado del polinomio, más probable es la existencia de raíces complejas². Recordemos que el orden de la EDO obtenida depende del primer parámetro de las distribuciones Erlang asumidas, en concreto, en el caso objeto de estudio en este trabajo, el orden es $(n + k)$.

Debido a la complejidad de resolución de la ecuación diferencial ordinaria general obtenida en este trabajo por la problemática anteriormente descrita respecto a la naturaleza de las raíces, hemos optado por la realización de simulaciones que nos permitan obtener resultados para la variable objeto de estudio, $\chi(u, b)$. La simulación se ha realizado mediante scripts en lenguaje R y Matlab.

Así, como primer paso, hemos optado por trabajar con el modelo analizado en Claramunt et al. (2005), $T_i \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$ y $X_i \sim \text{Erlang}(n, \gamma)$, previamente descrito, para el que los autores encontraron una solución analítica asumiendo raíces reales para el polinomio característico. De esta forma podemos analizar el error que la simulación que realizaremos genera respecto a la solución exacta. Posteriormente, y una vez comentada la idoneidad de los programas de simulación utilizados, obtendremos resultados para el caso general analizado, es decir para $T_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ y $X_i \sim \text{Erlang}(n, \gamma)$.

² **Observación:** La descomposición de un polinomio es $P(z) = \prod_{i=1}^n (z - b_i) = (z - b_1) \cdot (z - b_2) \cdot \dots \cdot (z - b_n)$. Supongamos que β es la densidad de probabilidad $\left(\beta = \frac{1}{2\pi r}\right)$ de que un número con módulo r sobre el plano complejo sea raíz de un polinomio, la probabilidad de que la raíz de un polinomio sea real sería de: $p(\text{real}) = 2 \cdot dl \cdot \beta = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot dr) \cdot \beta = 4 \cdot \pi \cdot \beta \cdot dr$. Si se aproxima dr por una longitud sumamente pequeña de r (módulo del número sobre el plano complejo), vemos como mayor sea el número, la fracción $\frac{dr}{r}$ va disminuyendo a proporción de que él módulo aumenta, por lo cual cuan mayor sean las raíces, menor probabilidad de que éstas sean reales (o contenga alguna real). Asimismo, la probabilidad va disminuyendo a medida del grado del polinomio, ya que las raíces van multiplicando $(n - 1)$ veces, por lo que la consistencia de que la suposición de que las raíces sean reales decrece muy rápidamente.

Modelo $T_i \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$ y $X_i \sim \text{Erlang}(n, \gamma)$: vamos a plantear la solución de la EDO (6) resultante de asumir que el tiempo de interocurrencia se distribuye según una *Erlang* $(2, \lambda)$ y la cuantía individual del siniestro se distribuye según una *Erlang* (n, γ) . El valor de la prima instantánea c lo obtenemos asumiendo un recargo de seguridad positivo, es decir, $c \cdot E(T_i) > E(X)$. Recordando que la esperanza de una distribución *Erlang* (a, b) es $\frac{a}{b}$, debe cumplirse que $c \cdot \frac{2}{\lambda} > \frac{2}{\gamma}$. En concreto, si asumimos que $\lambda = \gamma = 2$, fijamos $c = 1.1$.

Bajo esta hipótesis podemos escribir (6) cómo:

$$1.1^2 \frac{\partial^4 \chi(u, b)}{\partial u^4} + 0.44 \frac{\partial^3 \chi(u, b)}{\partial u^3} + 8.76 \frac{\partial^2 \chi(u, b)}{\partial u^2} - 1.6 \frac{\partial \chi(u, b)}{\partial u} = 0,$$

siendo el polinomio característico asociado $1.1^2 \cdot r^4 + 0.44 \cdot r^3 + 8.76 \cdot r^2 - 1.6 \cdot r = 0$, del que se obtienen las raíces $r_i, i = 1, 2, 3, 4$ que toman valores $\{0, -2.7892, 2.6074, -0.1818\}$, En este caso las raíces son reales simples siendo, por tanto, la solución del tipo $\chi(u, b) = \sum_{i=1}^4 C_i \cdot e^{-r_i \cdot u}$.

En primer lugar, usando las condiciones de contorno descritas por Claramunt et al. (2005), obtenemos la solución exacta de $\chi(u, b)$ para diferentes valores de u y b .

En la **Tabla 2**, y con la finalidad de analizar y entender el comportamiento de la probabilidad $\chi(u, b)$, se incluyen resultados para diferentes valores de u (reservas iniciales) y b (nivel de la barrera).

u/b	0	1	2	3	...	6	7	8	9	10	11	12	...	15
0	1	0.5802	0.3694	0.2805	...	0.1858	0.1725	0.1627	0.1554	0.1498	0.1454	0.1419	...	0.1351
1	1	1	0.7600	0.5828	...	0.3863	0.3585	0.3383	0.3230	0.3113	0.3022	0.2950	...	0.2809
2	1	1	1	0.8472	...	0.5650	0.5244	0.4947	0.4725	0.4537	0.4420	0.4315	...	0.4109
3	1	1	1	1	...	0.7146	0.6633	0.6258	0.5976	0.5760	0.5592	0.5458	...	0.5197
...
6	1	1	1	1	...	1	0.9546	0.9022	0.8617	0.8305	0.8062	0.7867	...	0.7494
7	1	1	1	1	...	1	1	0.9643	0.9221	0.8889	0.8628	0.8422	...	0.8020
8	1	1	1	1	...	1	1	1	0.9716	0.9374	0.9100	0.8883	...	0.8456
9	1	0.9711	0.9493	0.9268	...	0.8824
10	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	0.9815	0.9588	...	0.9129
11	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	0.9849	...	0.9384
12	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...	0.9596
...
15	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...	1

Tabla 2. Valores de $\chi(u, b)$ si $Erlang(2, \lambda)$ y $X_i \sim Erlang(n, \gamma)$.

Tal y como puede observarse en la **Tabla 2** a medida que aumenta el nivel de reservas iniciales, u , para una barrera b determinada, la probabilidad de que el proceso de reservas llegue a dicha barrera sin que se haya producido la ruina, $\chi(u, b)$ aumenta; mientras que para un nivel fijado de u , a mayor es el nivel de la barrera b , menor es la probabilidad de alcanzar la barrera sin que el proceso se arruine previamente. Lógicamente para valores donde la reserva inicial es igual o superior a la barrera, $\chi(u, b)$ es igual a la unidad.

A continuación, y para contrastar el programa de simulación que usaremos en siguientes apartados para obtener resultados de $\chi(u, b)$ para grados superiores de la distribución Erlang, simulamos el proceso en este caso particular.

En concreto, realizamos la simulación para $b = 10$ y diferentes valores de u . Las probabilidades obtenidas se recogen en la **Tabla 3** conjuntamente con los resultados teóricos calculados con el proceso recursivo de Claramunt et al. (2005). Incluimos también el error relativo entre el resultado teórico y el simulado como medida de la validez del proceso simulado.

u	$\chi(u, b)$ teórica	$\chi(u, b)$ simulada	Error relativo
0	0.1498	0.1455	-2,87%
1	0.3113	0.3112	-0,03%
2	0.4537	0.4501	-0,79%
3	0.5760	0.5582	-3,09%
4	0.6766	0.6606	-2,36%
5	0.7605	0.7382	-2,93%
6	0.8305	0.8210	-1,14%
7	0.8889	0.8573	-3,55%
8	0.9374	0.9177	-2,10%
9	0.9711	0.9568	-1,47%
10	1	1	0,00%

Tabla 3. $\chi(u, b)$ si Erlang (2, 2) y $X_i \sim \text{Erlang}(2, 2)$ si $b = 10$.

Puede observarse que los errores relativos están acotados entre [-3.55%, -0.03%]. (Dichas simulaciones han sido realizadas con 2103 pasos de camino aleatorio y 2104 iteraciones). Intuimos que los errores se deben a un problema computacional, de ahí que presentemos a continuación la **Tabla 4** para comprobar que el número de iteraciones altera los resultados.

En la tabla, $\chi' = 10^2 \chi$, donde el subíndice indica la cantidad de iteraciones con la que se ha calculado. Para cada simulación se ha utilizado 2103 pasos de camino aleatorio. Asimismo, cada simulación se ha repetido 5 veces con el objetivo de medir la dispersión de los resultados simulados, en forma de desviación estándar. En dicha tabla se puede observar

como a medida que el número de iteraciones (repeticiones del experimento o proceso) aumenta, el resultado tiende con mayor precisión y con menor dispersión (desviación estándar) al valor teórico. Por tanto, podemos concluir que el error obtenido al aplicar el proceso de simulación el proceso de simulación se debe a los problemas computacionales comentados.

(u, b)	χ'_T teórica	$\chi'_{2 \cdot 10^3}$	$\chi'_{5 \cdot 10^3}$	$\chi'_{1 \cdot 10^4}$	$\chi'_{1 \cdot 10^5}$
(0,50)	12.68	12.14 ± 0.78	12.90 ± 0.64	12.72 ± 0.27	12.67 ± 0.03
(0,10)	14.98	14.82 ± 0.99	14.84 ± 0.45	14.95 ± 0.35	14.90 ± 0.04
(1,8)	33.83	31.74 ± 1.18	32.86 ± 0.97	33.25 ± 0.55	33.80 ± 0.23
(6,6)	100.00	100.00 ± 0.00	100.00 ± 0.00	100.00 ± 0.00	100.00 ± 0.00

Tabla 4. Resultados simulados y teóricos de $10^2 \cdot \chi(u, b)$ si $Erlang(2, 2)$ y $X_i \sim Erlang(2, 2)$.

Modelo $T_i \sim Erlang(k, \lambda)$ y $X_i \sim Erlang(n, \gamma)$ Recordamos que cuando trabajamos con distribuciones Erlangs con parámetros elevados no podemos asegurar la existencia de raíces reales para el polinomio característico asociado a la EDO, y por tanto, el proceso de generalizar soluciones es muy complejo. A continuación, y una vez comprobado que el proceso de simulación ajusta bien, presentamos en la **Tabla 5** los resultados obtenidos por simulación para distribuciones Erlangs con parámetros elevados.

$\chi(u, b)$ para $T_i \sim Erlang(\gamma, \gamma)$ y $X \sim Erlang(5, 5)$ para $b=10$					
u	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\gamma=10$	$\gamma=100$
0	0.1112	0.1364	0.2075	0.2310	0.2912
3	0.5080	0.6362	0.8204	0.8742	0.9393
5	0.6851	0.8050	0.9277	0.9765	0.9927
7	0.8123	0.9072	0.9611	0.9891	0.9975
9	0.9365	0.9813	0.9933	0.9992	0.9998
$\chi(u, b)$ para $T_i \sim Erlang(\gamma, \gamma)$ y $X \sim Erlang(10, 10)$ para $b=10$					
u	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\gamma=10$	$\gamma=100$
0	0.1108	0.1438	0.2119	0.2701	0.3639
3	0.5498	0.6754	0.8857	0.9482	0.9997
5	0.7061	0.8425	0.9684	0.9908	1.000
7	0.8246	0.9330	0.9884	0.9997	1.000
9	0.9454	0.9792	0.9995	1.000	1.000
$\chi(u, b)$ para $T_i \sim Erlang(\gamma, \gamma)$ y $X \sim Erlang(100, 100)$ para $b=10$					
u	$\gamma=1$	$\gamma=2$	$\gamma=5$	$\gamma=10$	$\gamma=100$
0	0.1217	0.1658	0.2128	0.3003	1.000
3	0.5462	0.7458	0.9445	0.9937	1.000
5	0.7220	0.8580	0.9993	1.000	1.000
7	0.8476	0.9566	1.000	1.000	1.000
9	0.9327	0.9837	1.000	1.000	1.000

Tabla 5: $\chi(u, b)$ para $b=10$.

Podemos observar que a mayor es el grado de la distribución Erlang que modeliza la cuantía individual del siniestro (bajo la media unitaria), mayor es el valor de $\chi(u, b)$. Éste hecho es perfectamente lógico, ya que si hacemos tender el grado de la distribución Erlang a infinito, obtenemos una distribución delta de Dirac³³, por lo que el proceso de reservas obtenido dependerá exclusivamente del tiempo de interocurrencia. Aproximadamente, si como hemos supuesto en el presente trabajo, la prima instantánea es $c = 1.1$, es decir, si asumimos que el recargo de seguridad es de un 10%, la probabilidad del proceso será el del cuantil equivalente 1.1 de la Erlang del tiempo de interocurrencia. Si imaginásemos que ambas distribuciones de probabilidad (las Erlangs que modelizan interocurrencia y cuantía) son deltas de Dirac lo que obtendremos será un proceso numerario tal que para cada salto suma 0.1 unidades monetarias, sin varianza alguna, por lo que el proceso es perfectamente creciente, siendo $\chi(u, b) = 1$.

Probabilidad de supervivencia

Una vez obtenida la probabilidad $\chi(u, b)$, nos planteamos el cálculo de la probabilidad de supervivencia $\varphi(u)$ definida como la probabilidad complementaria de la probabilidad de ruina última, $\Psi(u)$, es decir como la probabilidad de que el proceso de las reservas no tome valores negativos.

Esta probabilidad de supervivencia puede obtenerse a partir de $\chi(u, b)$ haciendo que el valor de la barrera b tienda a infinito,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \chi(u, b) = \varphi(u).$$

Si $\chi(u, b)$ indica la probabilidad de que el nivel de las reservas alcance la barrera sin que la ruina haya ocurrido previamente, al hacer tender b a infinito, estamos calculando la probabilidad de que el proceso no se arruine nunca, por tanto la probabilidad de supervivencia.

Para obtener resultados se ha utilizado el script comentado previamente. Para simular una barrea infinita, se ha utilizado $b = 100$, y las simulaciones se han realizado con 2.10^4 simulaciones y 5.10^3 pasos de camino aleatorio, para que los resultados fueran consistentes. Los resultados obtenidos se recogen en la **Tabla 6**.

³ **Delta de Dirac o función impulso:** distribución muy conocida en física e ingeniería. La función de densidad de probabilidad de una delta de Dirac se define como:

$$\delta\left(t - \frac{k}{\lambda}\right) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = \frac{k}{\lambda} \\ 0 & \text{si } t \neq \frac{k}{\lambda} \end{cases}$$

Si se realiza el siguiente límite puede encontrarse la siguiente igualdad:

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow \infty}} g(t, k, \lambda) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow \infty}} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t} = \delta\left(t - \frac{k}{\lambda}\right)$$

Donde $\delta\left(t - \frac{k}{\lambda}\right)$ se refiere a una Delta de Dirac con media $\frac{k}{\lambda}$. Esta igualdad se basa en que la asimetría sigue $\frac{2}{\sqrt{k}}$ por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{k}} = 0$ y la curtosis $\frac{6}{k}$ por lo que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6}{k} = 0$, lo que implica que valores infinitos de k y λ , la función de densidad de probabilidad es infinitamente apuntada y perfecta simétrica. Esas dos condiciones solo lo puede cumplir la función de densidad delta de Dirac (Jessop, 2011).

u $b = \infty$	$n=1$ $\gamma=1$	$n=2$ $\gamma=1$	$n=1$ $\gamma=2$	$n=2$ $\gamma=2$	$n=2$ $\gamma=4$	$n=4$ $\gamma=2$	$n=4$ $\gamma=4$	$n=1$ $\gamma=10$
0	0.0923	0.1165	0.0935	0.1315	0.133	0.1308	0.1773	0.1565
1	0.1916	0.2158	0.2592	0.2920	0.3385	0.3112	0.4065	0.2905
2	0.2574	0.3130	0.3531	0.4395	0.4935	0.4576	0.5927	0.4021
3	0.3096	0.39175	0.4205	0.573	0.6255	0.5668	0.7155	0.4787
4	0.3803	0.4488	0.4888	0.6675	0.7305	0.6720	0.8025	0.5873
5	0.4196	0.5228	0.5523	0.6975	0.7995	0.7426	0.8795	0.6240
6	0.4640	0.5663	0.5947	0.7220	0.8415	0.7930	0.8925	0.6783
7	0.5127	0.61925	0.6642	0.8400	0.8815	0.8390	0.9325	0.7322
8	0.5555	0.6520	0.7135	0.8646	0.911	0.8776	0.9522	0.7716
9	0.5892	0.6967	0.7030	0.8965	0.932	0.8946	0.9745	0.8173
10	0.622	0.7050	0.7852	0.9121	0.946	0.9290	0.9763	0.8440
u $b = \infty$	$n=10$ $\gamma=1$	$n=10$ $\gamma=10$	$n=1$ $\gamma=100$	$n=100$ $\gamma=1$	$n=100$ $\gamma=20$	$n=20$ $\gamma=100$	$n=100$ $\gamma=100$	$n=10^4$ $\gamma=10^4$
0	0.1010	0.277	0.1780	0.0906	0.4277	0.4682	0.6475	1.000
1	0.2163	0.6885	0.3210	0.2136	0.9579	0.966	1.000	1.000
2	0.3154	0.873	0.4052	0.3515	1.000	1.000	1.000	1.000
3	0.4344	0.954	0.5095	0.4627	1.000	1.000	1.000	1.000
4	0.5175	0.976	0.5844	0.5510	1.000	1.000	1.000	1.000
5	0.5905	0.9978	0.6560	0.6410	1.000	1.000	1.000	1.000
6	0.6867	0.9975	0.7068	0.7002	1.000	1.000	1.000	1.000
7	0.7149	0.9995	0.7651	0.7453	1.000	1.000	1.000	1.000
8	0.7677	0.999	0.7985	0.7891	1.000	1.000	1.000	1.000
9	0.8021	1.000	0.8325	0.8296	1.000	1.000	1.000	1.000
10	0.8374	1.000	0.8546	0.8462	1.000	1.000	1.000	1.000

Tabla 6: $\chi(u, \infty) = \varphi(u)$ para $T_i \sim \text{Erlang}(\gamma, \gamma)$ y $X_i \sim \text{Erlang}(n, n)$.

En la **Figura 5** podemos observar que a medida que n y γ aumentan, la función de distribución de probabilidad toma formas más simétricas y más apuntadas. Esta es la razón de que en las tablas anteriores para simulaciones de parámetros altos, las probabilidades de $\chi(u, \infty)$, es decir la probabilidad de supervivencia, van creciendo a medida que n y γ (de la cuantía y/o del tiempo) aumentan. La causa es que la dispersión, tanto del tiempo de interocurrencia como el de la cuantía, disminuye, por lo que el recargo de seguridad de la prima cubre dicha dispersión en mayor número de simulaciones o procesos, lo que genera que la probabilidad aumente.

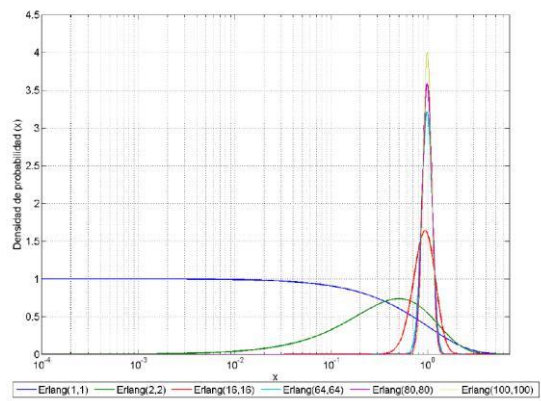


Figura 5: Representación de distribuciones Erlang con valor esperado unitario.

5. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido el estudio de la probabilidad $\chi(u, b)$ bajo la hipótesis de que tanto la cuantía individual de siniestro como el tiempo de interocurrencia de los siniestros se distribuyen bajo distribuciones Erlang. La importancia de $\chi(u, b)$ radica en que nos permite obtener la probabilidad de que en una cartera de seguros no vida se introduzcan políticas de reparto de dividendos o de reaseguro como medidas de control de la solvencia.

Hemos presentado la obtención de la ecuación diferencial ordinaria bajo esa hipótesis, siendo conscientes de la problemática que conlleva el hecho de que a mayor es el grado de la Erlang que asumimos en el modelo, menos consistente es la hipótesis de que las raíces asociadas al polinomio característico son reales, lo que, obviamente, dificulta la generalización de las condiciones de contorno necesarias para encontrar una solución analítica.

En Claramunt et al. (2005) se obtuvieron esas condiciones asumiendo que los tiempos de interocurrencia se distribuyen según una $T_i \sim Erlang(2, \lambda)$ y la cuantía individual del siniestro sigue una $X_i \sim Erlang(n, \gamma)$. Y es precisamente ese caso concreto, para el que podemos obtener resultados analíticos, el que utilizamos para saber si la simulación realizada mediante scripts en Matlab y en R es fiable. Para clarificar este punto hemos presentado ejemplos numéricos y analizado las diferencias halladas entre el modelo teórico y el simulado.

BIBLIOGRAFÍA

Castañer, A.; Claramunt, M.M.; Mármol, M. (2010). Deficit at ruin with threshold proportional reinsurance. Insurance Markets and Companies: Analyses and Actuarial Computations, 1(1), pp. 38 - 44 .

Castañer, A.; Claramunt, M.M.; Mármol, M. (2012). Ruin probability and time of ruin with a proportional reinsurance threshold strategy. *TOP*, 20(3), pp. 614 - 638 .

Claramunt, M.M., Mármol, M., Lacayo, R. (2005). On the probability of reaching a barrier in an Erlang(2) risk process. *R. Statistics and Operations Research Transactions (SORT)*. Vol. 29, no 2.

De Finetti, B., (1957). Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. In: *Transactions of the XVth international congress of actuaries*, Vol 2, 433-443.

Dickson D.C.M. (1992) On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics* 11, 191–207.

Dickson, D.C.M, Hipp, C. (1998). Ruin probabilities for Erlang(2) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22, 251-262.

Gerber, H. U., Goovaerts, M. J. and Kaas, R. (1987) On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin* 17, 151– 163.

Gerber, H.U. (1979). An introduction to mathematical risk theory. S.S. Huebner Foundation. University of Pennsylvania, Philadelphia.

Jessop. R. (2011). Stability and Hopf Bifurcation Analysis of Hopfield Neural Networks with a General Distribution of Delays. *UWSpace*. <http://hdl.handle.net/10012/6403>.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M (2008). *Modern Actuarial Risk Theory Using R*. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg.

Panjer, H., Willmot, G.E. (1992). *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries.