

Pareja Vasseur, Julian; Prada Sanchez, Nubia Marcela; Moreno Escobar, Martha Elizabeth

## Article

# Volatilidad en opciones reales: Revisión literaria y un caso de aplicación en el sector petrolero Colombiano

Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

## Provided in Cooperation with:

Universidad Pablo de Olavide, Sevilla

*Suggested Citation:* Pareja Vasseur, Julian; Prada Sanchez, Nubia Marcela; Moreno Escobar, Martha Elizabeth (2019) : Volatilidad en opciones reales: Revisión literaria y un caso de aplicación en el sector petrolero Colombiano, Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, ISSN 1886-516X, Universidad Pablo de Olavide, Sevilla, Vol. 27, pp. 136-155,  
<https://doi.org/10.46661/revmetodoscuanteconempresa.2820>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/286158>

### Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

### Terms of use:

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

## Volatilidad en Opciones Reales: Revisión Literaria y un Caso de Aplicación en el Sector Petrolero Colombiano

PAREJA VASSEUR, JULIÁN. DBA

Departamento de Finanzas, Escuela de Economía y Finanzas

Universidad EAFIT (Colombia)

Correo electrónico: [jparejav@eafit.edu.co](mailto:jparejav@eafit.edu.co)

PRADA SÁNCHEZ, MARCELA

Maestría en Administración Financiera

Universidad EAFIT (Colombia)

Correo electrónico: [marcelapradas@gmail.com](mailto:marcelapradas@gmail.com)

MORENO ESCOBAR, MARTHA

Maestría en Administración Financiera

Universidad EAFIT (Colombia)

Correo electrónico: [marthamore2@yahoo.es](mailto:marthamore2@yahoo.es)

### RESUMEN

El objetivo del presente artículo se centra en resumir en forma exhaustiva y concisa las diferentes metodologías de estimación de la volatilidad que se han propuesto para el enfoque de opciones reales (real options approach o ROA) y brindar, además, una explicación teórica y práctica para estimar una volatilidad no sesgada e incondicional para dicha metodología. Los resultados de la investigación sugieren que la utilización de los métodos actuales genera una marcada sobreestimación de la volatilidad, lo que se transmite en última instancia en la sobrevaloración de la opción real. De esta forma se apropia el uso del método de estimación insesgado para determinar su impacto en la toma de decisiones para un proyecto real del sector de petróleo y gas en Colombia, en el que se estimó su valor estratégico por medio del uso de las opciones reales y se comparó con el resultado estático obtenido por el método de flujos de caja descontados (discounted cash flow o DCF); como resultado se encontró que se genera un valor adicional no percibido por la metodología tradicional que está acorde con la respectiva volatilidad que generó el commodity. Se propone que para futuras investigaciones se mantenga la condición de insesgamiento pero que la estimación sea condicional a través de modelos econométricos, con el fin de emular las irregularidades y las características empíricas que se presentan en las series financieras mediante la utilización, por ejemplo, un apropiado sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas, como condición necesaria para el comportamiento del precio y de la volatilidad del activo subyacente.

**Palabras claves:** valoración de empresas; flujo de caja descontado; opciones reales; volatilidad.

**Clasificación JEL:** G3; G17; G32; G39.

**MSC2010:** 62P20; 91G60; 91B99.

# Real Options Volatility: Literature Review and a Case of Application in the Colombian Oil Sector

## ABSTRACT

The aim of this paper is to summarize exhaustively and concisely, the different methodologies for estimating the volatility that has been proposed for the real options approach (ROA), and also provide a theoretical and practical explanation for estimating an unbiased volatility and unconditional for this methodology. The results of the research suggest that the use of the current methods generates a marked overestimation of the volatility, which is ultimately transmitted in the overvaluation of the real option. In this way, the application of the unbiased estimation method is used to determine its impact on decision-making for a real project in the oil and gas sector in Colombia, in which its strategic value was estimated through the use of real options, and it was compared with the static result obtained by the method of discounted cash flows (DCF); as a result it was found that, it is generated an additional value not perceived by the traditional methodology, that is consistent with the respective volatility that was generated by the commodity. It is proposed that for future research, unbiasedness condition is maintained, but that the estimate is conditional through econometric models, in order to emulate the irregularities and empirical characteristics presented in the financial series using, for example, an appropriate system of stochastic differential equations, as required condition for the performance of price, and the volatility of the underlying asset.

**Keywords:** business valuation; discounted cash flow; real options; volatility.

**JEL classification:** G3; G17; G32; G39.

**MSC2010:** 62P20; 91G60; 91B99.



## 1. Introducción

En el contexto de la valuación de activos y, de modo específico, en cuanto a la valoración de empresas y de proyectos, el método más utilizado corresponde al DCF; esta metodología, a pesar de sus múltiples fortalezas, deja de lado la variable incertidumbre y la flexibilidad operativa, que surgen como condiciones críticas al momento de realizar cualquier tipo de estimación (Mun, 2002). Con el fin de subsanar tan importante debilidad es posible encontrar, como desarrollo reciente, el método ROA, que incluye el impacto de dicha flexibilidad administrativa e incorpora, además, un elemento fundamental conocido como la volatilidad.

Estudios recientes han indicado que para aplicar en forma correcta el método ROA se hace necesaria una buena estimación de la volatilidad, puesto que permite encontrar una valoración más ajustada y acertada; en este sentido, la literatura refiere la importancia del anterior hecho, tal y como lo sugirió Trigeorgis (1990), quien concluyó que, desde los puntos de vista analítico y empírico, un incremento en este factor en un 50% podría resultar en un aumento del 40% de la opción real, mientras que Keswani y Shackleton (2006) plantearon variaciones de más de 210% en el valor de la opción real cuando la volatilidad se incrementa del 10% al 30% (Brandão, Dyer & Hahn, 2012). En consecuencia, dicho factor se convierte en uno de los principales parámetros para la estimación de la valoración por medio de ROA porque puede dar lugar a una subvaloración o una sobrevaloración de la opción.

En el anterior contexto, esta investigación se orienta a resumir de manera exhaustiva los diferentes métodos que existen para estimar la volatilidad según el método ROA, para luego demostrar de modo formal, y mediante el uso de un caso real, que existe un método que permite estimar una volatilidad insesgada, que entrega unos resultados más apropiados y acordes para valorar un activo de capital. El presente artículo se compone de cuatro secciones; en la primera se revisa de manera sucinta los conceptos básicos de los métodos DCF y ROA, en la segunda se presentan en forma exhaustiva los métodos de estimación de la volatilidad para ROA; la sección tercera refiere los fundamentos teóricos de la volatilidad insesgada e incondicional y en la cuarta sección se describe en detalle un caso real de aplicación de un proyecto del sector petrolero en Colombia; por último se presentan las conclusiones.

## 2. Conceptos básicos de valoración mediante DCF y ROA

Se reconoce, entre otros autores, como Trigeorgis (1996), Damodaran (1999) y Mun (2006), que existe una diferencia entre los diferentes métodos de valoración de empresas y el valor que se cotiza en el mercado, discrepancia que se refleja entre dicho valor y su estimado teórico. La literatura vigente indica que, desde la perspectiva de la teoría del valor, economistas como Friedrich Von Wieser y Carl Menger han tratado de aproximarse a la estimación del valor justo de un activo, pero a partir de esa premisa se establece la existencia de una diferencia entre los conceptos teóricos y su aproximación empírica; debido a lo anterior se han propuesto diferentes alternativas metodológicas para mitigar dicha diferencia, que por lo común no consideran factores clave generadores de valor, como son aquellos que tratan de estimar el fenómeno de la incertidumbre a través de la cuantificación de la volatilidad, que por lo común ha sido un tema medianamente estudiado y termina siendo relevante al momento de realizar cualquier tipo de valoración sobre un activo de capital (Dixit & Pindyck, 1994; Valencia Herrera & Gándara Martínez, 2009; Álvarez Echeverría, López Sarabia & Venegas-Martínez, 2012; Maya Ochoa & Pareja Vasseur, 2014).

En la actualidad, una de las metodologías más utilizadas para valuar todo tipo de activos es el DCF, método que ofrece un enfoque determinístico y de corto plazo y en el que el

valor de la empresa o del proyecto se establece a través de la estimación del valor presente (*present value* o PV) de los flujos futuros de dinero descontados a una tasa ajustada por riesgo que se deriva de ellos (Mun, 2002; Vidarte, 2009; Pareja Vasseur & Cadavid Pérez, 2016). Esta metodología, a pesar de su importante acogida entre la comunidad académica y los practicantes, presenta evidentes deficiencias entre las que se cuentan: (a) no contempla el valor de la flexibilidad y el riesgo en los programas de inversión, (b) subestima el valor de los activos cuando existen opciones y (c) no considera la naturaleza variable de la tasa de descuento a través del tiempo, que corresponde por lo común al costo promedio ponderado de capital (*weighted average cost of capital* o WACC), lo que puede generar la subestimación o la sobreestimación de un proyecto de inversión en particular (Mun 2002; Boyle & Guthrie, 2003; Schwartz & Trigeorgis, 2004; Smit & Trigeorgis, 2004; Hinojosa, 2012).

Como un método alternativo de valoración ante las limitaciones expuestas surgió el enfoque ROA (Myers y Turnbull, 1977), que complementa el tradicional DCF y permite incluir la flexibilidad del negocio con el fin de acercar el valor teórico estimado con respecto al que cotiza en el mercado; además, permite como elemento fundamental y diferenciador, cuantificar el riesgo y recoger información relacionada con la incertidumbre (Trigeorgis, 1996). Para estimar el valor de la opción para el método ROA existen varias técnicas, como son: el modelo de soluciones cerradas, conocido por lo general como el modelo de Black y Scholes (1973), los modelos de soluciones vía métodos numéricos, entre los que se contemplan el método de diferencias finitas y el de árboles multinomiales (Brennan & Schwartz, 1985; Cox, Ross & Rubinstein, 1979) y, por último, los modelos de solución por medio de simulación de Monte Carlo (Boyle, 1977).

Se considera que uno de los principales problemas que ha contribuido a una relativa aplicación del método ROA en las valoraciones de proyectos y de empresas refiere a su complejidad matemática en comparación con el método DCF; además, se agrega el inconveniente que surge al tener que estimar seis parámetros necesarios para calcular la opción real; uno de ellos corresponde a la volatilidad, que se considera la variable más complicada de estimar, autores como Dixit y Pindyck (1994), Trigeorgis (1996), Copeland y Antikarov (2003), Mun (2006) y Brandão, Dyer y Hahn (2005; 2012) han argumentado la dificultad de su estimación, pero también han indicado lo importante de hacerlo de manera apropiada para poder realizar una adecuada valoración. Autores como Titman y Martin (2009) expusieron que el uso de ROA puede presentar errores tales como suponer que el precio de ejercicio de la opción real es fijo, sobrestimar la flexibilidad y utilizar una volatilidad equivocada que por lo común termina siendo sesgada.

### **3. Descripción de las metodologías de estimación de la volatilidad según el enfoque ROA**

#### **Método del retorno logarítmico de flujos de caja**

En este método la volatilidad se estima mediante la utilización de flujos de caja históricos o estimados futuros y de ellos se derivan los retornos logarítmicos. Se supone que los retornos se tipifican en forma logarítmica normal (Rogers, 2002). Los retornos y la volatilidad se definen, en su orden, por las siguientes ecuaciones (Mun, 2006):

$$(1) \quad r_t = \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

$$(2) \quad \hat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}$$

Este método es fácil de implementar, pero su principal debilidad se pone de manifiesto en caso de existir un flujo de caja negativo en cualquier período, por lo que no será posible calcular la volatilidad; además, puntualizan los autores que la técnica es buena para opciones financieras, pero no es apropiada para el método ROA (Lewis & Spurlock, 2004).

### **Método del retorno normal de flujos de caja**

Se trabaja de manera similar al método anterior pero la diferencia radica en que, al momento de calcular los retornos, se supone que se tipifican normales. Para este caso los retornos se calculan así (Lewis & Spurlock, 2004):

$$(3) \quad r_t = \frac{(S_t - S_{t-1})}{S_{t-1}}$$

El cálculo de la volatilidad es el mismo presentado en la ecuación (2).

### **Método del project proxy approach (PPA)**

Este método se enfoca hacia la extracción de los datos de información histórica de los proyectos al suponer que existe un desempeño relacionado con el mercado y que los flujos de caja considerados tienen un perfil similar al proyecto por considerar (Copeland & Antikarov, 2003). Lo anterior se asimila a la volatilidad que se debe utilizar en el proyecto objeto de valoración, puesto que termina siendo considerada como aquella que proporciona la realidad del mercado.

### **Método del market asset disclaimer (MAD) o método de Copeland y Antikarov (C&A)**

En este modelo se presenta una volatilidad consolidada puesto que integra varios elementos, es decir, se considera variables aleatorias con comportamiento estocástico que afectan los flujos de caja del proyecto. Esta metodología se fundamenta en el valor presente de los flujos de caja del proyecto sin flexibilidad, como el mejor estimador insesgado del valor de mercado de dicho proyecto si se supone un activo transable en el mercado (Copeland & Antikarov, 2003). El modelo plantea realizar una simulación de Monte Carlo para el valor actual del proyecto mediante una distribución hipotética de los rendimientos de un período; para alcanzar tal fin puede acudir a herramientas computacionales como el *@Risk*® o el *Crystalball*® para modelar dicho proceso, en el que se plantea simular el valor de los flujos de efectivo futuros en dos períodos y luego se hace una relación logarítmica que se calcula mediante la siguiente ecuación (Haahtela, 2007):

$$(4) \quad z = \ln \left( \frac{PV_1 + FCF_1}{PV_0} \right)$$

Este modelo supone que  $PV_0$  es fijo, es decir, es un valor esperado y solo realiza el proceso de iteración para  $PV_1$ ; en otros términos, se calculan valores simulados de flujos descontados al presente, de forma que el único valor que se varía de la ecuación (4) es el numerador. El valor presente en cada momento y su volatilidad en su orden son:

$$(5) \quad PV_n = \sum_{t=n}^T \frac{FCF_t}{(1+WACC)^{(t-n)}}$$

$$(6) \quad \sigma = desvest(z)$$

La ecuación (4) también es posible representarla de la siguiente forma (Brandão et al., 2012):

$$(7) \quad \tilde{\gamma} = \ln\left(\frac{\tilde{V}_1}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{\sum_{t=1}^T \tilde{F}_t e^{-\mu(t-1)}}{\sum_{t=1}^T E[\tilde{F}]_t e^{-\mu t}}\right)$$

Si se parte de la condición de que  $Var(\tilde{\gamma}) = Var(\tilde{\alpha})$ , es decir que la volatilidad del proyecto es la misma que la de los flujos de caja, es correcto plantear que el enfoque de C&A bajo la condición de que el proyecto tenga un solo período, que se demuestra de la siguiente forma: definir  $F$  como los flujos de caja del proyecto con una sola fuente de incertidumbre  $S(t)$  y donde  $F(t) \rightarrow \mathbb{R}$ ; por tanto, es posible plantear que  $F(t) = S(t) - cS(t) = (1-c)S(t)$ , con  $\lambda = (1-c)$ . En consecuencia,  $F(t)$  es una función lineal de  $S(t)$  pero si se aplica el lema de Ito, el proceso que siguen los flujos de caja  $F$  corresponde a un movimiento browniano geométrico unidimensional (*geometric brownian motion* o GBM) y con los mismos parámetros para  $S(t)$ , modelado con la ecuación (Brandão et al., 2012):

$$(8) \quad dF = \alpha F dt + \sigma_s F dB_t$$

En este proceso estocástico de los flujos de caja se define que la variable para el período  $t=1$  es  $\tilde{F}_1 = F_0 e^{\tilde{\alpha}}$  y el valor esperado para el período 0 es  $E_0[\tilde{F}_1] = F_0 e^{\alpha}$ . De manera similar a lo anterior es posible calcular el valor del proyecto estocástico como  $\tilde{V}_1 = F_0 e^{\tilde{\alpha}}$  y  $V_0 = E_0[F_1] e^{-\mu} = F_0 e^{\alpha-\mu}$ , en donde los retornos esperados son:  $\tilde{\gamma} = \ln\left(\frac{\tilde{V}_1}{V_0}\right) = \ln\left(\frac{F_0 e^{\tilde{\alpha}}}{F_0 e^{\alpha-\mu}}\right) = \ln\left(\frac{F_0 e^{\tilde{\alpha}}}{F_0 e^{\alpha-\mu}}\right) = \ln\left(e^{\tilde{\alpha}-(\alpha-\mu)}\right) = \tilde{\alpha} - \alpha + \mu$ , lo que demuestra que las constantes no afectan la volatilidad, pero el principal problema es que se crea una volatilidad artificial cuando se consideran dos o más períodos (Brandão et al., 2005; 2012; Godinho, 2006).

### Método de estimaciones administrativas o realizado por expertos

En este método la volatilidad se calcula mediante diferentes escenarios, en específico “el mejor” y “el peor” de ellos, y se identifican de manera sencilla cuáles son las variables de entrada del modelo que afectan en mayor medida a la volatilidad; se debe estimar cuál es el rango en el que se mueven dichos factores con un nivel de confianza de 95% (Copeland & Antikarov, 2003).

$$(9) \quad \sigma^2 = \left(\frac{b-a}{3,3}\right)^2$$

La variable de salida se tipifica como normal estándar y si en el análisis se incluye la simulación de Monte Carlo, es posible obtener con facilidad el *proxy* de la volatilidad mediante el uso de la desviación estándar, aunque subyace el problema de sobreestimación.

### Método de activo libre de riesgo correlacionado o de *twin security*

Aquí lo que se busca es encontrar un activo libre de riesgo que este perfectamente correlacionado con el del proyecto. Según Trigeorgis (1996), este enfoque solo debería ser utilizado en una de estas tres situaciones: a) cuando existan proyectos que involucren recursos naturales, debido a la existencia de un mercado de futuros que se transan en bolsa, b) cuando se evalúa una división específica de la empresa, que encuentra una acción negociada de otra firma y que refleja el valor de su división, y c) cuando el proyecto evaluado contribuye de manera significativa al valor de mercado de la empresa; para este caso se deberán seleccionar las propias acciones de la compañía. Un problema común con el uso del precio de las acciones es que están sujetas a una reacción exagerada por parte de los inversores y a la psicología del mercado de valores, así como también a otras variables que surgen en el mercado que son totalmente irrelevantes para un proyecto determinado.

### Método de *market proxy approach* (MP) o de análisis histórico

En este método la volatilidad se obtiene con información histórica del mercado, es decir, se calculan los rendimientos de las acciones de compañías comparables que cotizan en bolsa (Copeland & Antikarov, 2003; Mun, 2002), pero muchas de ellas están apalancadas desde el punto de vista financiero, por lo que se hace necesario ajustar la volatilidad con el fin de obtener proyectos que involucren opciones reales. La volatilidad se expresa de la siguiente forma:

$$(10) \quad \sigma_{RO} = \frac{\sigma_{EQUITY}}{1 + D/E}$$

Para el cálculo de la volatilidad se aplica la metodología de precio de cierre de Bloomberg, en la que la varianza termina siendo la misma ecuación (2):

$$(11) \quad \hat{\sigma}_r^2 = \frac{1}{(T-1)\Delta t} \sum_{t=1}^T \left[ \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) - \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right) \right]^2$$
$$\hat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{1}{(T-1)\Delta t} \sum_{t=1}^T [r_t - \bar{r}]^2}$$

### Método de cálculo de la volatilidad implícita

Este método consiste en estimar la volatilidad del modelo de Black y Scholes que está implícita en los precios de mercado de las opciones financieras; en otras palabras, lo que se busca es igualar el precio teórico con el de mercado a través de un proceso de optimización iterativa (González-Echeverri, Mora-Valencia & Solano, 2015). Se parte del supuesto de que los precios de las opciones financieras consideran los flujos de caja estimados de las firmas que ellos representan como un buen estimador del valor esperado de la compañía (Lewis & Spurlock, 2004); en forma análoga, la volatilidad del proyecto termina siendo la misma de la firma. Una aproximación para la volatilidad implícita es la fórmula de Brenner y Subrahmanyam (1988), trabajada más tarde por autores como Corrado y Miller (1996):



$$(12) \quad \sigma_{iv} \sqrt{T} = \sqrt{2\pi} \frac{C}{S}$$

Para el caso de las opciones reales,  $S$  es el valor presente de los ingresos y  $C$  corresponde al valor de la firma, que se halla mediante la metodología DCF.

### Método de Herath y Park (H&P)

Este método basa su estructura en ecuaciones con dos diferencias (Herath & Park, 2002). La notación cambia con respecto al modelo C&A; mientras que para ese enfoque se utilizan  $PV_1$ ,  $PV_0$  y  $FCF_1$ , para el de H&P se emplean  $PW_1$ ,  $MV_0$  y  $A_1$ , pero corresponden a las mismas variables (Haahtela, 2007). La principal diferencia radica en que  $PW_1$  y  $MV_0$  se consideran independientes y deben ser simuladas, puesto que se generan diferencias en las secuencias aleatorias para cada una de ellas, lo que origina aun mayor nivel de sobreestimación de volatilidad con respecto al método C&A, dado que el numerador ya no permanece constante sino que también es estocástico. La ecuación a la que se recurre es la siguiente:

$$(13) \quad k_n = \ln \left( \frac{PW_n}{MV_{n-1}} \right)$$

La sobreestimación de la volatilidad para este método se demuestra de la siguiente forma: suponer que una inversión en un proyecto como un flujo de caja en cero,  $F_0$ , y una serie de flujos de caja inciertos para dos períodos con una tasa de constante de descuento  $r$ ; donde el cambio en el precio del *commoditie* sigue un GBM del tipo  $dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t$  y que los flujos están perfectamente correlacionados con el precio del *commoditie*. Se definen  $x_1$  y  $x_2$  como dos muestras de variables independientes de una distribución normal con una tasa de crecimiento promedio anual  $\alpha$  y desviación estándar  $\sigma$ ; el precio inicial es  $P_0$ , que corresponde a una constante y donde el precio del año 1 se simulará así:  $P_1 = P_0 \cdot e^{x_1}$ ; a partir de dicho valor será posible estimar el del año 2 así:  $P_2 = P_1 \cdot e^{x_2}$ . Con lo anterior se puede encontrar el flujo de caja tanto para el primer año como para el segundo:  $F_1 = Q \cdot P_1$  y  $F_2 = Q \cdot P_2$ ;  $Q \in \mathbb{R}$ ; para el flujo de caja 1 las cantidades ( $Q$ ) son 0, por lo cual:  $F_1 = 0 \cdot P_1$ ; con los flujos anteriores será posible estimar  $MV_0$  y  $PW_1$ , lo que genera las expresiones  $MV_0 = F_1 \cdot e^{-r(1-0)} + F_2 \cdot e^{-r(2-0)}$  y  $PW_1 = MV_1 + F_1 = F_1 \cdot e^{-r(1-1)} + F_2 \cdot e^{-r(2-1)}$ .

Las anteriores expresiones permiten estimar el valor de  $k_1$  en la ecuación (13), así:

$$(14) \quad \begin{aligned} k_1 &= \ln \left( \frac{PW_1}{MV_0} \right) \\ V(k_1) &= V[x_1 + x_2] + V[x_1 + x_2] \\ \sigma_{k1} &= \sqrt{(\sigma_{x_1+x_2})^2 + (\sigma_{x_1+x_2})^2} \end{aligned}$$

Con lo anterior se demuestra que la volatilidad de  $k_1$  se incrementara en forma artificial de manera significativa (Godinho, 2006).

#### 4. Estimación no sesgada de la volatilidad del proyecto

##### Método de volatilidad condicional de Brandão, Dyer y Hahn

La estimación por medio de este modelo sugiere una solución al problema de sobreestimación que ocurre en los métodos C&A y H&P. Para el cálculo de la desviación estándar se utiliza la siguiente ecuación (Brandão et al., 2005; 2012):

$$(15) \quad r = \ln \left( \frac{\tilde{V}_1}{V_0} \right) = \ln \left( \frac{\tilde{F}_1 + \sum_{t=2}^T E[\tilde{F}_t] e^{-\mu(t-1)}}{\sum_{t=1}^T E[\tilde{F}_t] e^{-\mu t}} \right)$$

Se establece que la volatilidad del proyecto a partir del período de 0 al 1 solo depende de los resultados de la incertidumbre en el período 1, debido a que ella en períodos futuros no ha sido aún resuelta. En el momento  $t=1$ , el mejor estimador imparcial de los flujos de caja  $F_2, \dots, F_n$  son sus valores esperados condicionales sobre el resultado de  $F_1$ . En general, el numerador de la ecuación (15) puede ser el valor en un período  $t$ , en cuyo caso el denominador es el valor en el período  $t-1$ ; esta especificación se conoce como el enfoque de las expectativas condicionales generalizadas (*generalized conditional expectations* o GCE). Por tanto, cuando se limita la simulación de la incertidumbre a un solo período (de 0 a 1), únicamente se generarán valores estocásticos,  $F_1 = F_0 e^\alpha$  y como la incertidumbre futura no se puede resolver aún, todos los flujos de caja posteriores serán valores esperados condicionales tales que  $F_2 = F_1 e^\alpha$ , y así en forma recursiva; la mejor estimación imparcial de  $F_2$  corresponde al valor esperado condicional de  $F_2$  dado un valor de  $F_1$ . Para demostrar lo anterior, se debe suponer que el valor de un proyecto de dos períodos en el tiempo 0,  $V_0$ , se expresa como:

$$(16) \quad V_0 = F_0 e^{\alpha-\mu} (1 + e^{\alpha-\mu})$$

Se aísla la incertidumbre en el período 1 a partir de que  $F_1 = F_0 e^\alpha$  y que  $F_2 = F_0 e^{\alpha_0} e^\alpha = F_0 e^{\alpha_0+\alpha}$  y el valor del proyecto estocástico en el tiempo 1 de  $V_1$  será igual a:

$$(17) \quad V_1 = F_1 + E_1(F_2) e^{-\mu}$$

$$V_1 = F_0 e^{\alpha_0} (1 + e^{\alpha-\mu})$$

Al sustituir (16) y (17) en (15) se encuentra que:

$$(18) \quad \tilde{\gamma} = \ln \left( \frac{F_0 e^{\alpha_0} + \sum_{t=2}^n F_0 e^{\alpha_0+(\alpha-\mu)(t-1)}}{\sum_{t=1}^n F_0 e^{(\alpha-\mu)t}} \right) = \ln \left( \frac{F_0 e^{\alpha_0} \left( 1 + \sum_{t=2}^n e^{(\alpha-\mu)(t-1)} \right)}{F_0 e^{(\alpha-\mu)} \left( 1 + \sum_{t=2}^n e^{(\alpha-\mu)(t-1)} \right)} \right)$$

El resultado de la ecuación (18) tiene como solución:  $\tilde{\gamma} = \alpha_0 - \alpha + \mu$ , dado que la adición de una constante a una variable aleatoria no hace cambiar la varianza, por lo que  $Var(\tilde{\gamma}) = Var(\alpha_0)$ , método que puede ser utilizado en proyectos con cualquier número de períodos y que contengan en su estructura un determinado *commoditie*, puesto que la varianza del proyecto  $\tilde{\gamma}$  dependerá de manera exclusiva de los retornos del activo subyacente  $\alpha_0$  (Brandão et al., 2005; 2012). En contraste, el método de C&A genera una solución de  $Var(\tilde{\gamma}) = Var(\alpha_0 + \ln[1 + e^{\alpha_1 - \mu}])$ , lo que da lugar a una estimación sesgada incrementada de la varianza real para el valor del proyecto debido a que  $\alpha_0$  y  $\ln[1 + e^{\alpha_1 - \mu}] > 0$  son independientes y, por ende,  $Var(\tilde{\gamma}) > Var(\alpha_0)$ ; de modo adicional a lo anterior, el problema se agrava para un proyecto con tres o más períodos, por lo que se espera que el error en la estimación de la volatilidad del proyecto se incremente en función de  $t$ .

Por último, vale la pena llamar la atención acerca de lo siguiente: en tanto que Godinho (2006) presentó dos formas alternativas que se acercan a la estimación no sesgada equivalente a la presentada por Brandão et al (2005; 2012), considera el autor del presente documento que esta propuesta es mucho más robusta.

A manera de discusión y de desarrollo actual, se propone en futuras investigaciones mantener la condición de insesgamiento, pero que la estimación de la volatilidad sea condicional mediante la utilización de modelos de tipo ARCH y derivaciones, con el fin de emular las irregularidades y las características empíricas que se presentan en las series financieras, de forma que se plantee a través de este proceso su equivalente apropiado de un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para modelar de manera independiente tanto el precio como la volatilidad del *commoditie*.

A manera de resumen, en la Tabla 1 se recopila de forma ordenada a partir del análisis de los autores, lo que se consideran que son las ventajas y desventajas que posee cada uno de los métodos de estimación de la volatilidad utilizados anteriormente mencionados para el enfoque ROA.

**Tabla 1. Resumen de ventajas y desventajas de los métodos de estimación de la volatilidad para ROA**

Metodología	Ventajas	Desventajas
Retorno logarítmico de flujos de caja	Fácil calculo. Se derivó su uso de la teoría de opciones financieras.	No es posible su calculo si existen flujos negativos. Existe un problema al determinar si se estima a través de una media aritmética o geométrica. Se asume que la información del proyecto es constante y no estocástica.
Retorno normal de flujos de caja	Facilidad en su cálculo. Se solucionó el problema de la estimación al poseer flujos de caja negativos.	Se mantiene el problema que la información contenida en el proyecto es constante.
Project proxy approach (PPA)	Volatilidad precisa si existe un proyecto similar.	Comúnmente no es fácil encontrar un proyecto con condiciones similares. No existen un mercado de proyectos para replicar el mismo valor de la volatilidad.
Estimaciones administrativas o realizado por expertos	Método sencillo de calcular ya que requiere solo hallar dos valores para proceder con la estimación.	Propenso a que este sesgado dada la opinión del experto. En la literatura existe poca información y aplicación de este método.
Activo libre de riesgo correlacionado	Si es posible encontrar un activo libre de riesgo que este perfectamente correlacionado con el proyecto, se supone	Se limita su utilización a determinadas situaciones. Subyace la dificultad de encontrar un

	que es el mejor estimador.	activo con las características mencionadas.
Market proxy approach (MP)	Supone que la información histórica de mercado es un buen estimador futuro para la volatilidad. La información para este método es fácil de conseguir mediante el uso de diversas plataformas como Bloomberg, Reuters, entre otras.	La heterogeneidad de la información de empresas que se relacionen con el proyecto puede generar sesgo, que se traduce en sub o sobreestimación de la volatilidad. En ocasiones es difícil encontrar empresas con características aproximadas a aquella que posee el proyecto.
Cálculo de la volatilidad implícita	Supone como ventaja que es posible ajustar la volatilidad de la opción a la que cotiza el mercado. Mediante el uso de software es fácil su estimación a partir de información que suministre el mercado a través del uso de plataformas como las mencionadas.	No todas las empresas cotizan en el mercado, por lo cual se dificulta su cálculo. Existe variabilidad en el valor de la volatilidad entre el tipo de opción (call o put), precio de ejercicio y tiempo al vencimiento.
Market asset disclaimer (MAD)	Incluye el efecto estocástico de variables aleatorias y las consolida en la variación de los flujos de caja de proyecto. Supone que el valor del proyecto sin flexibilidad es el mejor estimador de este, suponiendo que se transa en el mercado. Es útil para estimar la volatilidad cuando el proyecto posee un solo periodo.	Sobreestima la volatilidad cuando el proyecto tiene dos o más periodos. Cuando ocurre lo anterior, la volatilidad del commodity es diferente de la del proyecto.
Herath y Park (H&P)	Incluye el efecto estocástico de variables aleatorias y las consolida en la variación de los flujos de caja de proyecto.	Genera una sobreestimación mayor que la MAD o C&A, debido a que supone que toda la fórmula para estimar los rendimientos y luego derivar la estimación de la volatilidad es estocástica.
Volatilidad condicional de Brandão, Dyer y Hahn	Supera el problema de sobreestimación que posee el método MAD o C&A para proyectos con dos o más periodos. Se demuestra una técnica sencilla para aislar el flujo de caja estocástico en el primer periodo y mantiene constante lo demás, es decir, se estima su valor esperado. Se encontró que la volatilidad del commodity es igual a la del proyecto. Es el único método que asume volatilidad condicional.	Suponer que en la actualidad que el precio de un commodity sigue siempre un GBM, se considera improcedente, debido a que existen otros tipos de modelos estocásticos que modelan comportamientos diferentes como: de reversión a la media o Ornstein-Uhlenbeck, de media móvil y de media estocástica, como también modelos de difusión GARCH, entre otros, lo que supondría estimar la volatilidad condicionada y estocástica para dichos modelos.

Fuente: elaboración propia

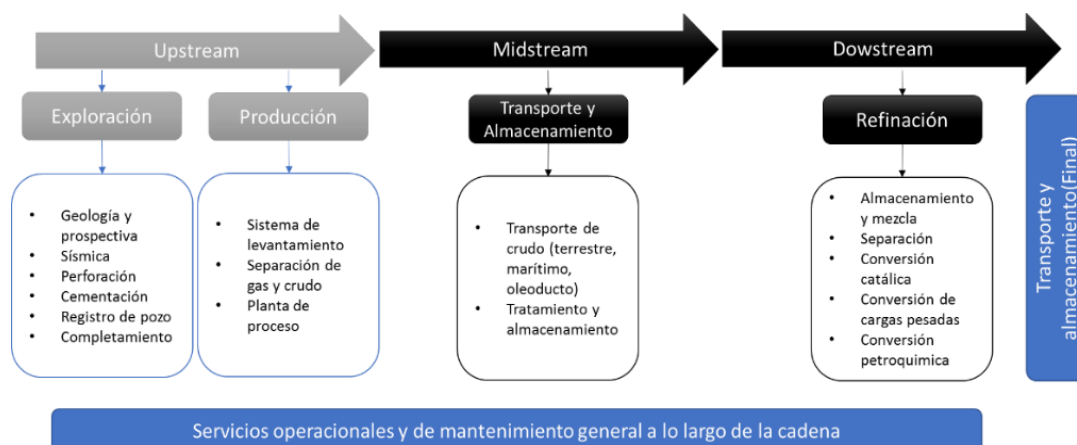
## 5. Ejemplo de aplicación de la propuesta de volatilidad no sesgada.

Desde la década de los ochenta, las fluctuaciones en las variables precio y cantidad de crudo han tenido un impacto directo en los presupuestos de inversión de las compañías petroleras, así como en el ingreso del Gobierno nacional y en las finanzas territoriales (Melo, Ramos, Parrado & Zarate, 2016). En relación con el precio internacional del petróleo, desde el año 2003 se observó un ascenso vertiginoso, que alcanzó niveles de USD100 por barril en 2008,

tendencia que se interrumpió en forma transitoria en 2009 cuando el precio se redujo a USD60 por barril debido a los efectos económicos derivados de la crisis financiera internacional. En los siguientes años, el precio del petróleo ascendió de nuevo a niveles superiores a USD90 por barril y desde mediados de 2014 se registró una caída significativa por el aumento de la oferta mundial de crudo y la reducción de la demanda de los principales compradores de materias primas. Al final de 2015, la cotización del crudo de referencias *WTI* y *Brent* se situó en USD49 y 37,28 por barril, en su orden (Melo et al., 2016). Por otra parte, los elevados precios del petróleo estimularon la producción de crudo que, con algunos altibajos, ascendió en forma gradual hasta estabilizarse alrededor de un millón de barriles diarios entre los años 2013 y 2015. Durante la segunda mitad de la década anterior y los primeros años de la actual, las labores de búsqueda de crudo aumentaron de manera significativa; por ejemplo, en el 2008 se perforaron 100 pozos y, más tarde, después de una reducción en 2009, se perforaron 126 en 2011 y 131 en 2012. La caída reciente de los precios internacionales del petróleo redujo la exploración petrolera a 24 pozos en el año 2015 (Melo et al., 2016).

### Descripción del proyecto

La compañía petrolera “X” (por efectos de confidencialidad se reserva el nombre) tiene operación en Colombia y se dedica en forma exclusiva al proceso *upstream* (ver figura 1). Para el año 2011 suscribió un contrato de exploración y producción de petróleo (EyP), por medio del cual le fue asignada un área de “Y” hectáreas de propiedad del Estado colombiano, terreno ubicado en los llanos orientales colombianos, que sirve para realizar trabajos de exploración, evaluación y explotación de petróleo, con un porcentaje de participación de 37%.



**Figura 1. Cadena de valor para la producción de hidrocarburos**

Fuente: Proexport Colombia (2011, p. 24)

En desarrollo del contrato de EyP, para ese mismo año se realizó la perforación del primer pozo (pozo 1), que presentó fallas técnicas por el incremento del corte de agua, lo que obligó a la suspensión del mismo y a dejarlo inactivo desde el año 2012. Por reglamentación de la Agencia Nacional de Hidrocarburos (ANH), la operación del campo debe ser reactivada en el año 2017 o de lo contrario se debe generar la devolución del mismo. Dada la condición anterior, se procedió a realizar un análisis geológico y geofísico del área y como resultado se pudieron definir las siguientes alternativas:

**Tabla 2. Opciones reales disponibles para el proyecto**

Opción 1	Invertir en la perforación de un pozo bilateral (pozo 2), con el que se espera reactivar la operación del pozo 1, incrementar la producción por pozo y reducir costos asociados de obra civil, tramos de pozo, materiales y tiempo
Opción 2	Ceder el campo a otro operador

Fuente: elaboración propia

De acuerdo con la naturaleza de las actividades de la compañía, se estableció que debido a que opera en la modalidad *upstream* y sus ventas se realizan por medio del marcador *Brent*, se encuentra expuesta, en lo primordial, a la volatilidad del precio de petróleo en la categoría mencionada, lo que permite justificar su uso para el caso. Por lo anterior se procedió a utilizar la volatilidad 360 diarios del *spot* Brent, recuperada del sistema de información Bloomberg (2016) al 1 de diciembre, que emula la irregularidad y la variabilidad del precio y que refleja la dinámica entre la oferta (capacidad instalada) y la demanda de hidrocarburos y sus derivados, y se procedió a utilizarla en el modelo insesgado expuesto por Brandão et al. (2005; 2012).

### Valoración del proyecto mediante DCF

La valoración del proyecto de EyP por el método tradicional DCF, bajo el WACC utilizado por la compañía, para un horizonte de tiempo de cinco años (2017-2021) y con un costo de devolución del área asignada para el año 6 (2022) de US700 mil, entregó un NPV estático negativo de 219,5 mil dólares sin incluir aun la probabilidad técnica, tal como se muestra en el anexo.

### Valoración del proyecto mediante ROA

La organización consideró que el área de exploración es estratégica y tenía una probabilidad de éxito de EyP del 68%, superior a la de otros proyectos de la compañía, que es inferior o igual al 60%, por lo que, a pesar de tener un NPV del proyecto negativo, se consideró necesario valorar el mismo por medio de la metodología ROA, de acuerdo con las siguientes condiciones:

- PV de los ingresos ascendía a 23.575,17 miles de dólares. La volatilidad del precio del petróleo que se utilizó fue de 36,7% y fue la que ofreció el proyecto. Se presenta en la siguiente tabla una comparación de volatilidades estimadas para los modelos más utilizados:

**Tabla 3. Volatilidades del proyecto**

Modelo	Modelo C&A	Modelo H&P	Godinho y Brandão
Volatilidad estimada	82,06%	183,50%	36,70%

Fuente: elaboración propia

El factor de alza para los ingresos ( $u_1$ ) fue de:  $u_1 = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,367\sqrt{1}} = 1,44$  y la probabilidad ( $p$ ) fue de :

$$p = \frac{[(1+R_f)-d]}{(u-d)} = \frac{[(1+0,0306)-0,69]}{(1,44-0,69)} = 0,45$$

- El PV de los costos de producción fue de 20.592,31 miles de dólares, con variaciones de 10% y un factor de alza ( $u_2$ ) de:  $u_2 = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,1\sqrt{1}} = 1,11$ .
- La probabilidad técnica o de éxito geológico ( $P_e$ ), que depende de la probabilidad de presencia de los siguientes cinco factores independientes: roca generadora ( $P_g$ ), roca almacenadora ( $P_a$ ), trampa ( $P_t$ ), roca de sello ( $P_s$ ) y dinámica del *play* ( $P_d$ ).

Estas probabilidades se calcularon con base en la información disponible y en el desarrollo de estudios integrales de las características geológicas, geofísicas y geoquímicas de los diferentes niveles del subsuelo del sitio en que se desea perforar.

La determinación de  $P_e$  se estimó así:  $P_e = P_g \times P_a \times P_t \times P_s \times P_d$ .

**Tabla 4. Probabilidades técnicas o de éxito geológico  $P_e$  del proyecto**

t (año)	0	1	2	3	4	5
$P_e$	0,68	0,80	0,90	0,90	0,80	0,70
Riesgo	Bajo	Muy bajo	Muy bajo	Muy bajo	Muy bajo	Bajo

Fuente: elaboración propia

A continuación se procedió aplicar el siguiente procedimiento; todas las cifras están en miles de dólares:

#### Paso 1. Construcción del árbol de decisión para el PV de los ingresos

Se construyó el árbol binomial con los respectivos nodos; por ejemplo, el PV de los ingresos en el año 1 (2017) fue:  $PV_{año1} = (PV_{año0} * u_1) = (23.575,17 * 1,44) = 34.028,35$  y  $PV_{año1} = (PV_{año0} * d_1) = (23.575,17 * 0,69) = 16.333,11$  (ver anexo).

#### Paso 2. Determinar el valor de la inversión

Se estableció que la inversión se realizaría en tres etapas, así: *drilling* por USD1.973,0, facilidades de superficie por USD885 y desmantelamiento por USD700, para un total de USD2.858 (ver anexo).

#### Paso 3. Valor de la cesión del proyecto

El valor residual (VR) del proyecto era de USD700 para el año 0 (2016), pero para los demás años se ajustó por inflación; por ejemplo:  $VR_{t=1} = VR_0 * (1 + Inflación_1) = 700 * (1 + 3,9\%) = USD 727,3$  (ver anexo).

#### Paso 4. Construcción del árbol de decisión para el PV de los costos de producción

Se supuso que todos los costos del proyecto eran estocásticos; así, por ejemplo, el PV en el año 1 (2017) fue:  $PV_{año1} = (PV_{año0} * u_2) = (20.592,3 * 1,11) = USD 22.758,0$  (ver anexo).

#### Paso 5. Construcción del árbol de decisión para el beneficio y la ganancia

Se calculó el beneficio en el período 5 afectado por la probabilidad técnica del período, así:  $Beneficio_{t=5} = (Ingreso_5 - Costo_5 - Inversión_5) * Prob.Tec_5$ ; por ejemplo, para el año 5 fue:  $Beneficio_{t=5} = (147.701,6 - 33.951,0 - 0) * 0,7 = USD 79.625,4$ .

En seguida se comparó el valor del beneficio con la opción de ceder o abandonar en el mismo período con el fin de elegir el máximo entre los dos valores, así:  $Beneficio_t > Abandono_t \Rightarrow Producir$  o  $Beneficio_t < Abandono_t \Rightarrow Abandonar$ ; para el

año 5 el resultado fue:  $Beneficio_5 > Abandono_5 \Rightarrow Producir$  debido a que  $79.625,4 > 827,4 \Rightarrow Producir$ .

Para los demás períodos se partió del beneficio calculado en el período 5 así:

$$\begin{aligned} &Max_t \left\{ \left[ \frac{BeneficioAlza_{t+1} * p + BeneficioBaja_{t+1} * q * Prob.Tec_t}{1 + R_f} \right] - Inversión_t; Abandono_t \right\} \\ &Max_4 \left\{ \left[ \frac{BeneficioAlza_5 * p + BeneficioBaja_5 * q * Prob.Tec_4}{1 + R_f} \right] - Inversión_4; Abandono_4 \right\} \\ &Max_4 \left\{ \left[ \frac{79.625,4 * 0,45 + 34.728,0 * 0,55}{1 + 3,06\%} * 0,8 \right] - 0; 803,3 \right\} = \{42.641,9; 803,3\} \Rightarrow Producir \end{aligned}$$

Por último, el beneficio del nodo 0 del árbol de decisión corresponde al NPV estratégico del proyecto, que incluye la probabilidad técnica (ver anexo).

Paso 6. Determinar el valor presente neto esperado estático

Se calculó el NPV estático en  $t=0$  afectado por la probabilidad técnica y descontado con WACC, de forma que:

$$E(NPV) = F_0 * Prob.Tec_0 + \frac{\sum_{t=1}^n F_t * Prob.Tec_t}{(1 + Wacc)^t} = 238,9$$

Paso 7. Valor de la opción de abandono

Para el caso objeto de análisis, la opción que tiene la compañía consiste en ceder el proyecto de EyP a otro operador a cambio de su valor residual, en cuanto considere que las condiciones de producción no son rentables. Por lo anterior, el valor de la opción de abandono corresponde a la diferencia entre el NPV estratégico y el NPV estático, ambos afectados por la probabilidad técnica:

$$Opcion\ Abandono = NPV_{Estratégico} - NPV_{Estático} = 982,6 - 238,9 \text{ igual a } USD\ 743,7.$$

Finalmente, se resume en la Tabla 5, el valor de la opción de abandono por tres metodologías de estimación de la volatilidad comparables, donde se puede apreciar que si se utiliza el modelo H&P, la volatilidad será del 183.5% y valor de la opción será en un 340% mayor con respecto al valor estimado por el método de Godinho y Brandao; de forma similar se encontró que, cuando se estima la variable en mención a través del método tradicional o de C&A, el valor de la opción será en 1,802.28 más valiosa que respecto al método propuesto; lo anterior permite demostrar que existe un marcado efecto de sobrevaloración de la opción debido al efecto de volatilidad artificial que se genera en los métodos C&A y H&P.

**Tabla 5. Comparativo Valor estimado de la opción de abandono por los métodos C&A, H&P y Godinho y Brandao**

Modelo	Modelo C&A	Modelo H&P	Godinho y Brandão
Opción de abandono	2,545.96	3,272.15	743.67
Sobrevaloración de la opción	1,802.28	2,528.47	-



Valor adicional en porcentaje	242.35%	340.00%	-
-------------------------------	---------	---------	---

Fuente: elaboración propia

## 6. Conclusiones

Los modelos propuestos por Godinho y Brandão et al. nacen de la necesidad de comprobar que existe una marcada sobrestimación de la volatilidad obtenida por el método utilizado con mayor frecuencia y postulado por C&A y sus desarrollos posteriores, como el método H&P, que se basan en el cálculo de la desviación estándar de los retornos del proyecto; sin embargo, estos procedimientos presentan problemas en su aplicación concernientes al cálculo de los flujos de efectivo debido a que usan flujos de caja *ex post* en lugar de valores esperados y consideran en mayor medida fuentes de posibles cambios que las existentes en el primer año del proyecto, lo que conduce a un aumento de la volatilidad y con ello a una sobrestimación del valor de opción.

Asimismo, los mismos autores establecieron que el enfoque de simulación de C&A solo es correcto para proyectos de un único período; sin embargo, cuando hay más se presenta una estimación sesgada al alza de la varianza real, error que se incrementa en función del tiempo. Para corregir esta situación, se concluye que la volatilidad del proyecto dependerá solo de los resultados de la incertidumbre para el primer período, debido a que la de los períodos futuros aún no ha sido resuelta y a que todos los flujos de efectivo para períodos posteriores serán valores esperados condicionales del primero. Además, como novedad importante se demostró que la volatilidad del proyecto será igual a la de los flujos de efectivo y a la del activo subyacente, elemento que se consideró en el caso de aplicación del presente documento.

De acuerdo con el caso de aplicación expuesto para el proyecto de EyP de crudo según la metodología de DCF, se estableció que al no contemplar el valor de la flexibilidad operativa y el riesgo se subestimó el valor del activo, al generar un NPV estático negativo. Por otra parte, con la valoración del proyecto mediante ROA se determinó la viabilidad financiera del mismo, lo que permitió su desarrollo. Se reconoció que una estimación por métodos sesgados, como el C&A y el H&P, entre otros, hubiera conducido a errores en la estimación del valor adecuado para el proyecto objeto de valoración.

## Referencias

- Álvarez Echeverría, F., López Sarabia, P., & Venegas-Martínez, F. (2012). Valuación financiera de proyectos de inversión en nuevas tecnologías con opciones reales. *Contaduría y Administración*, 57(3), 115–145. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=39523153006>
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. url: <http://www.jstor.org/stable/1831029>
- Bloomberg (2016). *Volatilidad 360 diarios del spot Brent*. Recuperado el 2 de diciembre de 2016, de: <https://www.bloomberg.com/>
- Boyle, P. P. (1977). Options: a Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4(3), 323–338. doi: 10.1016/0304-405X(77)90005-8
- Boyle, G. W., & Guthrie, G. A. (2003). Investment, uncertainty, and liquidity. *The Journal of Finance*, 58(5), 2143–2166. url: <http://www.jstor.org/stable/3648186>
- Brandão, L. E., Dyer, J. S., & Hahn, W. J. (2005). Response to comments on Brandão et al. (2005). *Decision Analysis*, 2(2), 103–109. doi: 10.1287/deca.1050.0042

- Brandão, L. E., Dyer, J. S., & Hahn, W. J. (2012). Volatility estimation for stochastic project value models. *European Journal of Operational Research*, 220 (3), 642–648. doi: 10.1016/j.ejor.2012.01.059
- Brennan, M. J., & Schwartz, E. S. (1985). Evaluating natural resource investments. *The Journal of Business*, 58(2), 135–157. doi: 10.1086/296288
- Brenner, M., & Subrahmanyam, M. G. (1988). A simple formula to compute the implied standard deviation. *Financial Analysts Journal*, 44(5), 80–83. url: <http://www.jstor.org/stable/44791>
- Copeland, T., & Antikarov, V. (2003). *Real options: a practitioner's guide, new edition*. Nueva York, NY: Cengage Learning.
- Corrado, C. J., & Miller, Jr., T. W. (1996). A note on a simple, accurate formula to compute implied standard deviations. *Journal of Banking & Finance*, 20(3), 595–603. doi: 10.1016/0378-4266(95)00014-3
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229–263. doi: 10.1016/0304-405X(79)90015-1
- Damodaran, A. (1999). *New York University, Faculty digital archive*. Nueva York, NY: New York University, Stern School of Business, Finance Working Papers. Recuperado de [https://archive.nyu.edu/handle/2451/26918?mode=full&submit\\_simple>Show+full+item+record](https://archive.nyu.edu/handle/2451/26918?mode=full&submit_simple>Show+full+item+record)
- Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Godinho, P. M. C. (2006). Monte Carlo estimation of project volatility for real options analysis. *Journal of Applied Finance*, 16(1), 15–30. Recuperado el 10 de noviembre de 2016, de: <http://papers.ssrn.com/sol3/>
- González-Echeverri, G., Mora-Valencia, A., & Solano, J. (2015). Opciones reales aplicadas en redes integradas de servicios de salud empleando diferentes métodos de estimación de la volatilidad. *Estudios Gerenciales*, 31(136), 287–298. doi: 10.1016/j.estger.2015.03.004
- Haahtela, T. J. (2007). Separating ambiguity and volatility in cash flow simulation based volatility estimation. *SSRN Electronic Journal*, 968226, 1–20. doi: 10.2139/ssrn.968226
- Herath, H. S. B., & Park, C. S. (2002). Multi-stage capital investment opportunities as compound real options. *The Engineering Economist: A Journal Devoted to the Problems of Capital Investment*, 47(1), 1–27. doi: 10.1080/00137910208965021
- Hinojosa, S. A. (2012). *Opciones reales y evaluación de proyectos de infraestructura pública: un eslabón que falta*. Santiago de Chile: IKONS ATN. Recuperado el 10 de noviembre de 2016, de: [http://www.cepal.org/ilpes/noticias/paginas/7/53027/SERGIO\\_HINOJOSA\\_Opc\\_Reales\\_EPIP.pdf](http://www.cepal.org/ilpes/noticias/paginas/7/53027/SERGIO_HINOJOSA_Opc_Reales_EPIP.pdf)
- Keswani, A., & Schackleton, M. B. (2006). How real option disinvestment flexibility augments project NPV. *European Journal of Operational Research*, 168(1), 240–252. doi: 10.1016/j.ejor.2004.02.028
- Lewis, N., & Spurlock, D. (2004). *Volatility estimation of forecasted project returns for real options analysis*. American Society for Engineering Management 2004 National Conference. Recuperado de <https://scholarworks.bridgeport.edu/xmlui/handle/123456789/772>
- Maya Ochoa, C., & Pareja Vasseur, J. (2014). Valoración de opciones reales a través de equivalentes de certeza. *Ecos de Economía*, 18(39), 49-71.
- Melo, L. A., Ramos, J. E., Parrado, L. M., & Zarate, H. M. (2016). Bonanzas y crisis de la actividad petrolera y su efecto sobre la economía colombiana. *Borradores de Economía*, 961. Recuperado de <http://www.banrep.gov.co/es/borrador-961>
- Mun, J. (2002). *Real options analysis tools and techniques for valuing strategic investments and decisions*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Mun, J. (2006). *Real options analysis: tools and techniques for valuing strategic investment and decisions*, 2ª ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

- Myers, S. C., & Turnbull, S. M. (1977). Capital budgeting and the capital asset pricing model: good news and bad news. *Journal of Finance*, 32(2), 321–333. doi: 10.2307/2326764
- Pareja Vasseur, J., & Cadavid Pérez, C. (2016). Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: equivalentes de certeza y función de utilidad. *Contaduría y Administración*, 61(4), 794–814. doi: 10.1016/j.cya.2016.06.004
- Proexport Colombia (2011, septiembre). *Bienes y servicios petroleros*. Bogotá: Proexport Colombia, Vicepresidencia de Inversión Extranjera. Recuperado el 29 de enero de 2017, de: <http://www.inviertaencolombia.com.co/Adjuntos/Bienes%20y%20Servicios%20Petroleros.pdf>
- Rogers, J. (2002). Data analysis. En J. Rogers, *Strategy, value and risk: the real options approach. Reconciling innovation, strategy and value management* (pp. 64–73). Nueva York, NY: Palgrave. Recuperado de <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.453.7608&rep=rep1&type=pdf>
- Schwartz, E., & Trigeorgis, L. (Eds.). (2004). *Real options and investment under uncertainty: classical readings and recent contributions*. Londres, Reino Unido: The MIT Press.
- Smit, H. T. J., & Trigeorgis, L. (2004). *Strategic investment. Real options and games*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Titman, S., y Martin, J. D. (2009). *Valoración. El arte y la ciencia de las decisiones de inversión corporativa*. Madrid: Pearson Educación.
- Trigeorgis, L. (1990). A real options application in natural resource investments. *Advances in Futures and Options Research*, 4, 153–164.
- Trigeorgis, L. (1996). *Real options, managerial flexibility and strategy in resources allocation*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Valencia Herrera, H., & Gándara Martínez, E. E. (2009). Relación entre incertidumbre e inversión en México, enfoque de opciones reales. *Revista de Administración, Finanzas y Economía*, 3(2), 74–90. Recuperado de <http://alejandria.ccm.itesm.mx/egap/documentos/2009V3A11Valencia-Gandara.pdf>
- Vidarte, J. J. (2009). El flujo de caja descontado como la mejor metodología en la determinación del valor de una empresa. *Revista Gestión y Desarrollo*, 6, 103–110. Recuperado de [https://www.usbcali.edu.co/sites/default/files/flujodecaja\\_josevidarte.pdf](https://www.usbcali.edu.co/sites/default/files/flujodecaja_josevidarte.pdf)

## Anexo. Resultados del caso de aplicación

Resultados de la valoración del proyecto por DCF

Año	Ingresos	Regalías	Costos	Otros gastos	Impuestos	Capex	FCF
0						1.973,0	(1.973,0)
1	3.170,1	253,6	2.042,9	14,6	335,0	885,0	(361,1)
2	10.925,2	874,0	6.130,7	51,5	1.547,6		2.321,4
3	6.743,3	539,5	4.772,1	32,7	587,6		811,5
4	5.351,5	428,1	4.965,0	24,3	-		(65,9)
5	3.805,1	304,4	3.531,8	17,6	-	-	(48,7)
6						700,0	(700,0)
Total	29.995,3	2.399,6	21.442,5	140,7	2.470,2	3.558,0	(15,8)
						NPV	(219,5)

Paso 1. Árbol de decisión del valor presente de ingresos

0	1	2	3	4	5
					147.701,6
				102.329,1	
			70.895		70.895
		49.116		49.116	
	34.028,4		34.028		34.028
23.575,17		23.575		23.575	
	16.333,1		16.333		16.333
		11.316		11.316	
			7.840		7.840
				5.431	
					3.763

Paso 2. Determinación del valor de la inversión

t (año)	0	1	2	3	4	5
Inversión	1.973	885	0	0	0	0

Paso 3. Valor de la cesión del proyecto

t (año)	0	1	2	3	4	5
Abandono	700,0	727,3	749,8	776,8	803,3	827,4

Paso 4. Construcción del árbol de decisión para el PV de los costos de producción

0	1	2	3	4	5
					33.951,0
				30.720,1	
			27.797		21.283
		25.152		19.258	
	22.758		17.425		13.342
20.592		15.767		12.072	
	14.267		10.924		8.364
		9.884		7.568	
			6.848		5.243
				4.744	
					3.287

Paso 5. Construcción del árbol de decisión para el beneficio y la ganancia

0	1	2	3	4	5
					79.625,4
				42.641,9	Producir
			25.554	Producir	34.728,0
		15.216	Producir	18.314	Producir
	7.105	Producir	10.771	Producir	14.480
983	Producir	6.266	Producir	7.440	Producir
Producir	2.331	Producir	4.233	Producir	5.578
	Producir	2.406	Producir	2.725	Producir
		Producir	1.545	Producir	1.818
			Producir	988	Producir
				Producir	827
					Abandonar