ECONSTOR
Make Your Publications Visible.

A Service of
ZBW
Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft
Leibniz Information Centre for Economics

Knobloch, Ralf

Research Report

Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes

Forschung am ivwKöln, No. 2/2021

Provided in Cooperation with:
Technische Hochschule Köln – University of Applied Sciences, Institute for Insurance Studies

Suggested Citation: Knobloch, Ralf (2021) : Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes, Forschung am ivwKöln, No. 2/2021, Technische Hochschule Köln, Institut für Versicherungswesen (ivwKöln), Köln, https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos4-9286

This Version is available at:
https://hdl.handle.net/10419/229910

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

WWW.ECONSTOR.EU

Mitglied der Leibniz-Gemeinschaft

Forschung am ivwKöln
Band 2/2021

Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes

Ralf Knobloch

ivwKöln
Institut für Versicherungswesen

Fakultät für Wirtschafts-
und Rechtswissenschaften

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Forschung am **ivw**Köln, Band 2/2021

Ralf Knobloch

Forschungsstelle FaRis

Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes

---

Zusammenfassung

In den Wirtschaftswissenschaften werden Risiken häufig mit dichotomen Zufallsvariablen modelliert. In der vorliegenden Arbeit wird an Fallbeispielen untersucht, unter welchen Bedingungen für das Gesamtrisiko eines inhomogenen Portfolios von stochastisch unabhängigen dichotomen Risiken näherungsweise von einer Normalverteilung ausgegangen werden kann. Die Normalverteilung ergibt sich aus dem zentralen Grenzwert. Die Approximation mit der Normalverteilung wird dabei auch mit der Näherung durch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung verglichen.

Abstract

In economics, risks are often modeled with dichotomous random variables. In the present work, case studies are used to examine the conditions under which a normal distribution can approximately be assumed for the overall risk of an inhomogeneous portfolio of stochastic independent dichotomous risks. The normal distribution is a result of the central limit theorem. The approximation with the normal distribution is also compared to the approximation using a compound Poisson-distribution.

Schlagwörter:

Dichotome Zufallsvariable, zentraler Grenzwertsatz, zusammengesetzte Poisson-Verteilung

Keywords:

dichotomous random variable, central limit theorem, compound Poisson distribution

Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG 2
2. DAS MODELL 4
3. DER HOMOGENE FALL 5
4. DER INHOMOGENE FALL 6
5. FALLBEISPIEL 1: TEST AUF NORMALVERTEILUNG 8
6. APPROXIMATION MIT EINER ZUSAMMENGESETZTEN POISSON-VERTEILUNG 23
7. FALLBEISPIEL 2: NORMALVERTEILUNG VS. ZUSAMMENGESETZTE POISSON-VERTEILUNG 26
8. BETRIEBSWIRTSCHAFTLICHE ANWENDUNGSGEBIETE 30
9. FAZIT 32

LITERATURVERZEICHNIS 33

1. Einleitung

Im quantitativen Risikomanagement werden betriebswirtschaftliche Risiken mithilfe von wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen modelliert, analysiert und zusammengefasst. Die einfachsten dabei verwendeten Modelle sind dichotome bzw. zweiwertige Zufallsvariablen. Eine dichotome Zufallsvariable steht in diesem Zusammenhang für ein Risiko mit zwei möglichen Ausgängen: Ein Ausgang modelliert den Eintritt eines Schadens mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit und einer festen Schadenhöhe. Der andere mögliche Ausgang steht für den Nichteintritt des Schadens. Formal bedeutet dies für die verwendete Zufallsvariable X:

$$X = \begin{cases} S & , \quad p \\ 0 & , \quad 1-p \end{cases}$$

Dabei steht $S > 0$ für die Schadenhöhe und p für die Eintrittswahrscheinlichkeit.

Dichotome Modelle werden z.B. bei Banken im Kreditmanagement zur Quantifizierung des jährlichen Kreditausfallrisikos verwendet. Die Eintrittswahrscheinlichkeit p ergibt sich dabei als jährliche Ausfallwahrscheinlichkeit und die Schadenhöhe S als der mit dem Ausfall eines Kredits verbundene Verlust des Kreditgebers. Eine weitere wichtige Anwendung findet sich in der Personenversicherungsmathematik. Sowohl in der betrieblichen Altersversorgung (bAV) als auch bei Lebensversicherungen kann mit dem Tod einer Person eine Auszahlung an die Hinterbliebenen verbunden sein. Im zweiwertigen Modell steht dann S für den auszuzahlenden Betrag und p für die jährliche Strebewahrscheinlichkeit einer Person. Eine ähnliche Modellierung ergibt sich für das Invaliditätsrisiko in der bAV bzw. bei Berufsunfähigkeitsversicherungen. Aber nicht nur bei Banken und Versicherungen, sondern auch bei einer Vielzahl anderen Unternehmen werden Risiken mit dichotomen Zufallsvariablen im Rahmen des quantitativen Risikomanagements modelliert.

Für ein einzelnes dichotomes Risiko bzw. für eine einzelne zweiwertige Zufallsvariable ist die Bestimmung der stochastischen Kennzahlen (z.B. Erwartungswert, Standardabweichung und Value at Risk) sehr einfach. Bei einem Portfolio von dichotomen Risiken ist zwischen dem homogenen und dem inhomogenen Fall zu unterscheiden. Homogen bedeutet, dass für alle Risiken die Eintrittswahrscheinlichkeit und die Schadenhöhe identisch sind. Liegt ein homogenes Portfolio von dichotome Risiken vor, so kann das Gesamtrisiko des Portfolios mithilfe der der Binomialverteilung bzw. näherungsweise mithilfe des Satzes von Laplace und De Moivre, d.h. einem Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes, quantifiziert werden. Dabei muss neben der Homogenität der Zufallsvariablen auch deren stochastische Unabhängigkeit vorausgesetzt werden.

Im Allgemeinen sind die Portfolios in der Praxis aber inhomogen. Die dabei benötigten Modelle und Berechnungsmethoden sind komplexer als im homogenen Fall. Der vorliegende Artikel geht der Frage nach, unter welchen Voraussetzungen im inhomogenen Fall der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann. Dabei wird

weiterhin von stochastisch unabhängigen Risiken bzw. Zufallsvariablen ausgegangen und auf den zentralen Grenzwertsatz in der Variante mit der Lyapunov-Bedingung zurückgegriffen (vgl. [4] S.154ff und [5] S.201ff). Im Anschluss an den theoretischen Teil wird in einem Fallbeispiel aufgezeigt, wie die Normalverteilungsannahme mit den Methoden der schließenden Statistik überprüft werden kann. Dazu wird ein Datensatz zufällig erzeugt und analysiert. Von besonderem Interesse ist dabei die Anzahl der Risiken, ab der von einer Normalverteilung ausgegangen werden kann. In einem zweiten Fallbeispiel wird der Unterschied zur Approximation der Verteilung des Gesamtrisikos mit einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung aufgezeigt.

2. Das Modell

Es sei eine Folge zweiwertiger, stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen wie folgt gegeben:

$$X_i = \begin{cases} S_i & , \quad p_i \\ 0 & , \quad 1 - p_i \end{cases},$$

mit $S_i \in (0, \infty)$ und $p_i \in (0,1)$ für alle $i = 1,2, \dots$.

Ferner sei für $n \in IN$

$$Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Modelliert X_i das i-te Risiko, so steht S_i für den damit verbundenen festen Schadenbetrag und p_i für die zugehörige Eintrittswahrscheinlichkeit. Die Zufallsvariable Z_n misst dann den Gesamtschaden der ersten n Risiken. Im Mittelpunkt des Interesses stehen die Lage-, Streuungs- und Risikomaße der Zufallsvariablen Z_n.

Zur Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes mit Lyapunov-Bedingung wird Folgendes vorausgesetzt:

1. $\inf\limits_{i \in IN} p_i > 0$ und $\sup\limits_{i \in IN} p_i < 1$
2. $\inf\limits_{i \in IN} S_i > 0$ und $\sup\limits_{i \in IN} S_i < \infty$

3. Der homogene Fall

Sind alle Schadenbeträge und alle Eintrittswahrscheinlichkeiten identisch, d.h.

$$S_1 = S_2 = \cdots = S \text{ und } p_1 = p_2 = \cdots = p,$$

so bezeichnen wir dies als den homogenen Fall.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Zufallsvariable

$$Y_n = \frac{Z_n}{S}$$

wegen der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ binomialverteilt mit den Parametern n und p, wobei n für die Anzahl der Versuche und p für die Erfolgswahrscheinlichkeit steht. Die wichtigsten stochastischen Kennzahlen Erwartungswert, Standardabweichung, Value at Risk und Expected Shortfall berechnen sich dann für die Zufallsvariable Z_n, in dem man die entsprechenden Werte der Zufallsvariablen Y_n mit der reellen Zahl S multipliziert. Die Varianz von Z_n erhält man durch die Multiplikation der Varianz von Y_n mit S^2.

Gemäß dem Satz von Laplace und De Moivre konvergiert

$$\frac{Y_n - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

für $n \to \infty$ in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung. Daher kann für große n die Zufallsvariable Y_n näherungsweise als normalverteilt mit Erwartungswert $n \cdot p$ und Standardabweichung $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ angenommen werden. Je näher p am Wert $0{,}5$ liegt, desto besser ist die Approximation. Zur Verbesserung der Approximation kann bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten der Korrekturterm "$0{,}5$" wie folgt berücksichtigt:

$$P(Y_n \leq y) \approx \mathrm{F}\left(\frac{y + 0{,}5 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$$

Dabei sei F die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Eine oft verwendete Faustregel geht davon aus, dass die Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung unter der Voraussetzung

$$n \cdot p \geq 10 \text{ und } n \cdot (1-p) \geq 10$$

hinreichend gut ist. (vgl. [7] S.260ff)

4. Der inhomogene Fall

Wir betrachten jetzt den inhomogenen Fall, d.h. die Schadenbeträge und die Eintrittswahrscheinlichkeiten sind nicht identisch. Die stochastische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots, X_n$ wird zwar weiter vorausgesetzt, dennoch kann keine Verteilung für die Zufallsvariable Z_n in Form einer konkreten Verteilungsfunktion angegeben werden. Dies liegt u.a. daran, dass es bei n dichotomen Risiken 2^n mögliche Ergebnisse gibt.

Aber mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes kann die Verteilung von Z approximativ als normalverteilt angenommen werden. Man benötigt dazu den folgenden zentralen Grenzwertsatz mit Lyapunov-Bedingung (vgl. [4] S. 159 und [5] S.206f):

Satz:

Es seien $T_1, T_2, T_3, \dots$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, es sei

$$U_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$$

mit

1. $E(|T_i|) < \infty$ für $i \in IN$
2. $0 < Var(T_i) < \infty$ für $i \in IN$
3. Lyapunov-Bedingung: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(s_n)^{2+\delta}} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left(|T_i - E(T_i)|^{2+\delta}\right) = 0 \ ,$$

wobei

$$s_n := \sqrt{Var(T_1) + Var(T_2) + \dots + Var(T_n)} \ .$$

Dann konvergiert

$$\frac{U_n - E(U_n)}{s_n}$$

für $n \to \infty$ in Verteilung gegen die Standardnormalverteilung.

Beweis: [4] S.159 und [5] S.206f □

Zur Anwendung dieses Satzes auf unser Modell mit den Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots$ und Summen $Z_1, Z_2, \dots$ müssen die Bedingungen in Ziffer 1 bis 3 überprüft werden:

1. Sei $i \in IN$: $E(|X_i|) = S_i \cdot p_i + 0 \cdot (1 - p_i) = S_i \cdot p_i < \infty$
2. Sei $i \in IN$: $Var(X_i) = {S_i}^2 \cdot p_i + 0^2 \cdot (1 - p_i) - (S_i \cdot p_i)^2 = {S_i}^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$

   Wegen $S_i \in (0, \infty)$ und $p_i \in (0,1)$ folgt $0 < Var(X_i) < \infty$ für $i \in IN$

3. Sei $n \in IN$ und $\delta > 0$:

$$s_n{}^2 = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) = \sum_{i=1}^{n} S_i{}^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

$$\geq n \cdot \left(\inf_{i \in IN} S_i\right)^2 \cdot \inf_{i \in IN} p_i \cdot \left(1 - \sup_{i \in IN} p_i\right) =: n \cdot c_1$$

Mit den Annahmen aus Abschnitt 2 gilt: $0 < c_1 < \infty$. Daraus folgt:

$$s_n{}^{2+\delta} \geq n^{1+\frac{\delta}{2}} \cdot c_1{}^{1+\frac{\delta}{2}} > 0$$

Ferner gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - E(X_i)|^{2+\delta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[|S_i - S_i \cdot p_i|^{2+\delta} \cdot p_i + |0 - S_i \cdot p_i|^{2+\delta} \cdot (1 - p_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[S_i{}^{2+\delta} \cdot (1 - p_i)^{2+\delta} \cdot p_i + S_i{}^{2+\delta} \cdot p_i{}^{2+\delta} \cdot (1 - p_i)\right] =$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left[S_i{}^{2+\delta} + S_i{}^{2+\delta}\right] \leq 2 \cdot n \cdot \sup_{i \in IN} S_i =: n \cdot c_2$$

Mit den Annahmen aus Abschnitt 2 ergibt sich: $0 < c_2 < \infty$.

Insgesamt folgt daraus:

$$0 \leq \frac{1}{(s_n)^{2+\delta}} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left(|X_i - E(X_i)|^{2+\delta}\right) \leq \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}} \cdot c_1{}^{1+\frac{\delta}{2}}} \cdot n \cdot c_2 = \frac{c_2}{c_1{}^{1+\frac{\delta}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\delta}{2}}} \ .$$

Da der rechte Term für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, ist die Bedingung in Ziffer 3 ebenfalls erfüllt.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass für große n die Zufallsvariable Z_n als normalverteilt mit Erwartungswert

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot p_i$$

und Standardabweichung

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i{}^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i)}$$

angenommen werden kann. Die Risikomaße Value at Risk und Expected Shortfall ergeben sich dann näherungsweise mit den für die Normalverteilung üblichen Formeln.

5. Fallbeispiel 1: Test auf Normalverteilung

Im Folgenden wird als Anwendung der Testtheorie untersucht, ob man bei einem konkreten Beispiel für die Summe von zweiwertigen Zufallsvariablen von einer Normalverteilung ausgehen kann. Dazu wird zunächst ein fiktives Portfolio von 5.000 dichotomen Risiken anhand konkreter Vorgaben aufgebaut. Anschließend wird das Schicksal dieses Risikoportfolios im Rahmen einer Monte-Carlo-Simulation 10.000-mal „ausgewürfelt“ und der dabei entstandene Datensatz mit der (statistischen) Variablen Gesamtschaden auf Normalverteilung getestet bzw. das Q-Q-Diagramm analysiert. Die Ergebnisse gelten dann allerdings nur für das konkrete Beispiel, eine Allgemeingültigkeit kann daraus nicht ableitet werden. Aber das vorgestellte Methodik kann auch bei anderen Parameterkonstellation zur Analyse eingesetzt werden. Dabei hängt die Qualität der Ergebnisse auch von der Qualität des verwendeten Zufallsgenerators ab.

Portfolio

Mithilfe von Zufallszahlen werden für $n = 5.000$ dichotome Risiken sowohl der Schadenbetrag als auch die Eintrittswahrscheinlichkeiten zufällig festgelegt. Der Schadenbetrag gemessen in Geldeinheiten wird dabei als gleichverteilt im Intervall $[100{,}1.000]$ angesetzt, die Eintrittswahrscheinlichkeit gemessen in Prozent als gleichverteilt im Intervall $[1{,}50]$. Da der Zufallsgenerator eine Folge von auf [0,1] gleichverteilten stochastisch unabhängigen (Pseudo-)Zufallszahlen erzeugt, wird zunächst insbesondere angenommen, dass der Schadenbetrag und die Eintrittswahrscheinlichkeit unkorreliert sind.

Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation erfolgt softwareseitig mithilfe von Delphi (Embarcadero). Für die 5.000 dichotomen Risiken werden $m = 10.000$ Simulationsläufe durchgeführt und dabei der Gesamtschaden in jedem Simulationslauf ermittelt. Zur Analyse wird nicht nur der Gesamtschaden aller Risiken, sondern auch der Gesamtschaden der jeweils $10, 50, 100, 200, 500$ und 1.000 ersten Risiken erfasst, so dass sieben Datensätze jeweils vom Umfang von 10.000 Einzelwerten als Output der Simulation zur Verfügung stehen.

Analyse von Kennzahlen

Als Kennzahlen stehen bei der Analyse der Erwartungswert, die Standardabweichung sowie die Risikomaße Value at Risk (Niveau 1% und 5%) und Expected Shortfall (Niveau 1% und 5%) des Gesamtschadens Z_n im Mittelpunkt des Interesses. Bei allen sieben Datensätzen werden dabei die geschätzten Werte mit den theoretischen Werten verglichen und die Abweichung in Prozent ermittelt. Die Schätzung des Erwartungswertes und der Standardabweichung erfolgt mit den üblichen Schätzern. Dabei wird für die Varianz der erwartungstreue Schätzer mit den Nenner $m - 1$ verwendet. Die Schätzung der Risikomaße erfolgt auf Basis der 1% bzw. 5% höchsten Werte für den Gesamtschaden. Der theoretische Erwartungswert und die theoretische

Standardabweichung ergeben sich durch Anwendung des zentralen Grenzwertesatzes gemäß Abschnitt 4. Da approximativ von einem normalverteilten Gesamtschaden Z_n ausgegangen wird, werden die theoretischen Risikomaße mit den entsprechenden Formeln wie folgt ermittelt:

$$VaR_{5\%} = \mu + 1{,}6449 \cdot \sigma$$

$$VaR_{1\%} = \mu + 2{,}3263 \cdot \sigma$$

$$ES_{5\%} = \mu + 2{,}0626 \cdot \sigma$$

$$ES_{1\%} = \mu + 2{,}6655 \cdot \sigma$$

($\mu =$ Erwartungswert, $\sigma =$ Standardabweichung, $VaR =$ Value at Risk, $ES =$ Expected Shortfall)

Statistische Tests und Q-Q-Diagramm

Zur Überprüfung der Normalverteilungshypothese gibt es diverse nichtparametrische Tests. Im vorliegenden Fallbeispiel werden sowohl der Kolmogorov-Smirnov-Test (vgl. [7] S.401ff) und als auch der Anderson-Darling-Test (vgl. [8]) angewendet. Die Nullhypothese wird bei beiden Tests wie folgt formuliert:

„Die Zufallsvariable Z_n ist normalverteilt mit Erwartungswert $\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot p_i$ und Standardabweichung $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {S_i}^2 \cdot p_i \cdot (1 - p_i)}$.“

Als Signifikanzniveau wird dabei jeweils $\alpha = 5\%$ angesetzt. Der Kolmogorov-Smirnov-Test wird mithilfe des Software-Pakets SPSS durchgeführt. Dieser Test basiert auf der Abstandsmessung von theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion mithilfe der Supremums-Metrik. Der Anderson-Darling-Test ist in SPSS nicht implementiert, d.h. die Teststatistik muss für alle sieben Datensätze auf Basis der Einzelwerte ermittelt werden. Die Teststatistik des Anderson-Darling-Testes A^2 ergibt sich durch folgende Berechnung:

$$A^2 = -m - \sum_{i=1}^{m} \frac{2i-1}{m} \cdot \left[ln\left(F\left(\frac{Z_{(i)} - \mu}{\sigma}\right)\right) + ln\left(1 - F\left(\frac{Z_{(m+1-i)} - \mu}{\sigma}\right)\right)\right]$$

Dabei ist $z_{(i)}$, $i = 1,2, \dots, m$, der aufsteigend sortierte Datensatz, μ und σ die Parameter aus der Nullhypothese sowie F die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (vgl. [8] S.3). Bei dem gewählten Signifikanzniveau ($\alpha = 5\%$) wird die Normalverteilungshypothese abgelehnt, wenn der Wert der Teststatistik über $2{,}492$ liegt (vgl. [8] S.16).

Es ist zu beachten, dass z.B. der Kolmogorov-Smirnov-Test und auch seine Erweiterung der Lilliefors-Test bei größeren Stichprobenumfängen versagen können. Dies wird i.d.R. durch Ausreißer verursacht, die die Abstandmessung zwischen theoretischer und empirischer Verteilungsfunktion stark beeinflussen können (vgl. [1] S.53). Daher werden im vorliegenden Beispiel zusätzlich die mit SPSS erzeugten Q-

Q-Diagramme als Visualisierung in die Analyse einbezogen. Bei einem Q-Q-Diagramm werden den geordneten empirischen Daten die zugehörigen theoretischen Quantile der Normalverteilung gemäß Nullhypothese gegenübergestellt. Liegen die Punkte nahe bei oder auf der Winkelhalbierenden, so spricht dies für die Normalverteilungshypothese (vgl. [1] S.63ff und [7] S.218ff). Dabei ist bei SPSS zu beachten, dass die die theoretischen Quantile noch standardisiert werden, so dass zwar auf der horizontalen Achse der Bereich der beobachteten Werte angezeigt wird, aber auf der vertikalen Achse ein Bereich um den Wert 0. Ferner verwendet SPSS bei den Q-Q-Diagrammen für den Erwartungswert und die Standardabweichung standardmäßig die empirischen Werte. Da aber für die beiden Kennzahlen Erwartungswert und Standardabweichung im vorliegenden Beispiel aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen die Abweichung der empirischen Werte von den theoretischen Werten sehr gering ist, ist bei Verwendung der theoretischen Werte eine grundlegende Änderung der Q-Q-Diagramme nicht zu erwarten.

Ergebnisse Kennzahlen

Die Ergebnisse für die Kennzahlen sind in der nachfolgenden Tabelle „Simulationsergebnisse“ zusammengestellt. Im vorliegenden Beispiel sind die Abweichungen bei den Kennzahlen Erwartungswert und Standardabweichung sehr gering, sie bewegen sich bei allen Varianten im Promillebereich. Dies ist auf den hohen Stichprobenumfang zurückzuführen und entspricht den Aussagen des Gesetzes der großen Zahlen. Für die Risikomaße jedoch gibt es bei den unterschiedlichen Varianten große Unterschiede. Es zeigt sich, dass bei einer eher kleinen Anzahl von Risiken die Ränder der Verteilung des Gesamtschadens noch nicht zu einer Normalverteilung passen. Je größer die Anzahl der Risiken desto geringer sind die prozentualen Abweichung zwischen den empirischen und den theoretischen Risikomaßen, ab 500 Risiken sind die Abweichungen im Promillebereich. Tendenziell unterschätzt die Normalverteilung in diesem Beispiel das Gesamtrisiko.

Simulationsergebnisse							
	Anzahl der Risiken	**Erwartungs-wert**	**Standard-abweichung**	**Value at Risk 5%**	**Value at Risk 1%**	**Expected Shortfall 5%**	**Expected Shortfall 1%**
Schätzwerte	10	1.110,71	679,12	2.360,02	2.985,45	2.707,84	3.282,14
	50	7.520,56	1.853,05	10.654,37	11.951,93	11.486,90	12.679,76
	100	14.761,44	2.581,57	19.083,15	20.905,35	20.223,56	21.791,81
	200	28.307,17	3.609,74	34.376,17	36.872,04	35.972,60	38.351,97
	500	69.931,93	5.631,92	79.244,49	83.232,32	81.680,59	85.242,52
	1000	136.458,33	7.813,92	149.265,79	154.504,59	152.615,75	157.935,34
	5000	692.649,85	17.734,84	721.939,09	734.021,99	729.101,97	740.010,42
Theoretische Werte	10	1.107,46	679,50	2.225,17	2.688,19	2.509,00	2.918,68
	50	7.480,84	1.850,84	10.525,29	11.786,45	11.298,39	12.414,26
	100	14.749,60	2.582,21	18.997,08	20.756,60	20.075,67	21.632,49
	200	28.268,30	3.583,95	34.163,54	36.605,65	35.660,56	37.821,32
	500	69.851,18	5.614,32	79.086,17	82.911,76	81.431,27	84.816,14
	1000	136.427,32	7.823,76	149.296,62	154.627,73	152.564,60	157.281,55
	5000	692.465,17	17.665,69	721.523,47	733.560,87	728.902,43	739.553,08
Abweichung	10	-0,29%	0,06%	-5,71%	-9,96%	-7,34%	-11,07%
	50	-0,53%	-0,12%	-1,21%	-1,38%	-1,64%	-2,09%
	100	-0,08%	0,02%	-0,45%	-0,71%	-0,73%	-0,73%
	200	-0,14%	-0,71%	-0,62%	-0,72%	-0,87%	-1,38%
	500	-0,12%	-0,31%	-0,20%	-0,39%	-0,31%	-0,50%
	1000	-0,02%	0,13%	0,02%	0,08%	-0,03%	-0,41%
	5000	-0,03%	-0,39%	-0,06%	-0,06%	-0,03%	-0,06%

Ergebnisse statistische Tests

Die Nullhypothese lautet bei allen Tests, dass der Gesamtschaden normalverteilt ist. Dabei werden die Parameter Erwartungswert und Standardabweichung jeweils mit den theoretischen Werten als bekannt vorausgesetzt. Z.B. lautet die Nullhypothese im Fall von 1.000 Risiken:

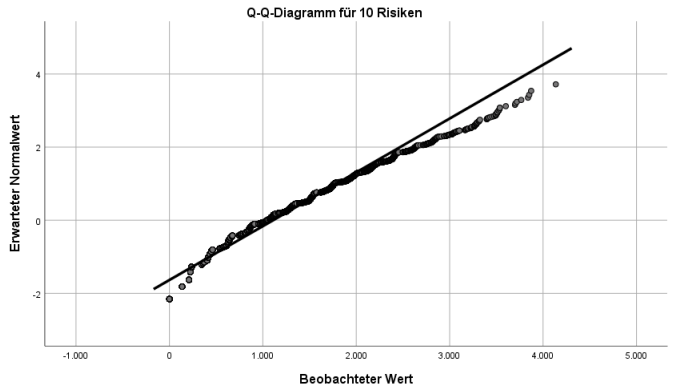
„Der Gesamtschaden ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von $136.427{,}32$ und einer Standardabweichung von $7.823{,}76$."

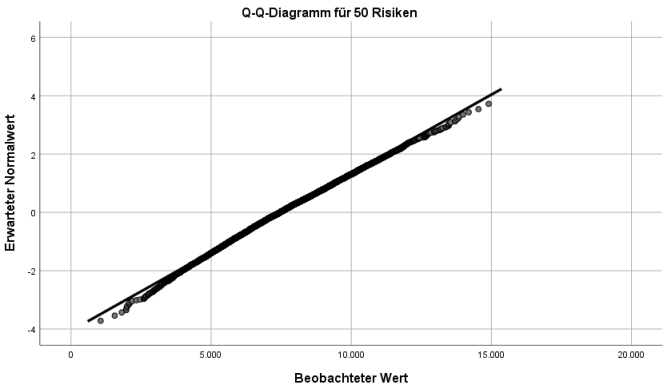
Die Ergebnisse der statistischen Tests sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Ist die Anzahl der Risiken 100 oder mehr, so lehnen beide Tests die Normalverteilungshypothese nicht ab. Bei 10 Risiken lehnen beide Test die Nullhypothese ab, bei 50 Risiken lediglich der Anderson-Darling-Test. Somit sprechen im vorliegenden Beispiel ab einer Anzahl von 100 Risiken die fiktiven Daten nicht gegen die Nullhypothese und es kann von einer Normalverteilung ausgegangen werden.

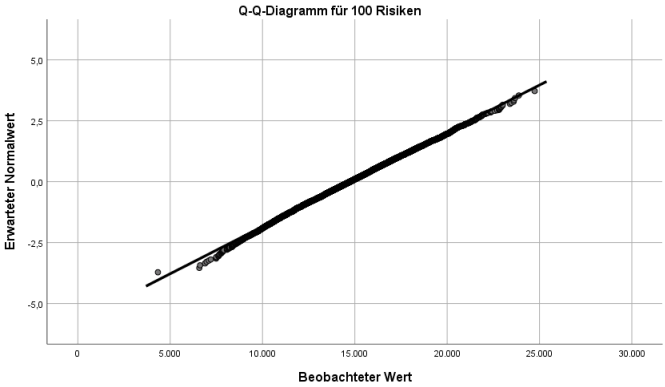
Ergebnisse der statistischenTests Signifikanzniveau 5%				
	Anzahl der Risiken	**Teststatistik**	**p-Wert**	**Hypothese ablehnen**
Kolmogorov-Smirnov-Test	10	7,652	0,0%	Ja
	50	1,114	16,7%	Nein
	100	0,585	88,3%	Nein
	200	1,002	26,8%	Nein
	500	0,753	62,1%	Nein
	1000	0,510	95,7%	Nein
	5000	0,878	42,5%	Nein
Anderson-Darling-Test	10	72,098		Ja
	50	4,265		Ja
	100	1,099		Nein
	200	1,715		Nein
	500	0,877		Nein
	1000	0,290		Nein
	5000	0,776		Nein

Q-Q-Diagramme

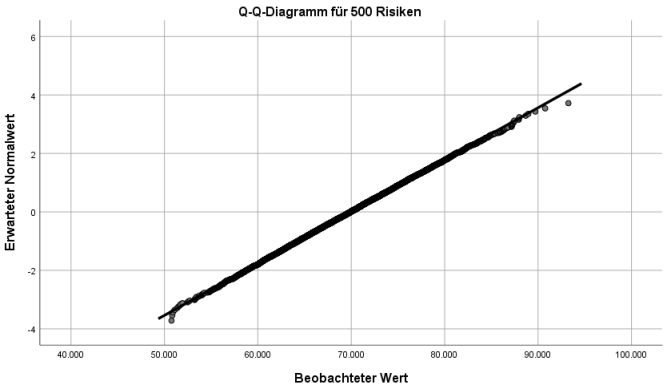
Vergleicht man die mit SPSS erstellten Q-Q-Diagramme, so erkennt man, dass für 10 Risiken die eingezeichneten Werte an den Rändern und in der oberen Hälfte nicht auf der eingezeichneten Geraden liegen. Dies ist ein Indiz für das Nichtvorliegen einer Normalverteilung. Bei 50 Risiken sind lediglich an den Rändern Abweichungen zu beobachten. Ab 100 Risiken hat man eine gute Annäherung an die Gerade mit zunehmender Anzahl auch verstärkt an den Rändern, allerdings mit einzelnen Ausreißern. Somit passt im vorliegenden Beispiel die Analyse der visuellen Darstellung zu den Ergebnissen der Tests und es kann ab einer Anzahl von 100 Risiken von einer Normalverteilung ausgegangen werden. Hier die sieben Q-Q-Diagramme:

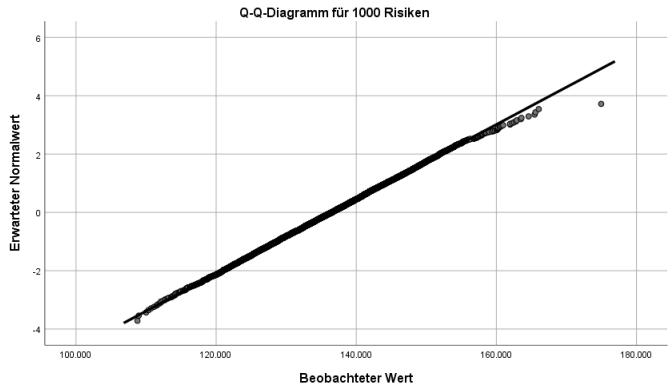


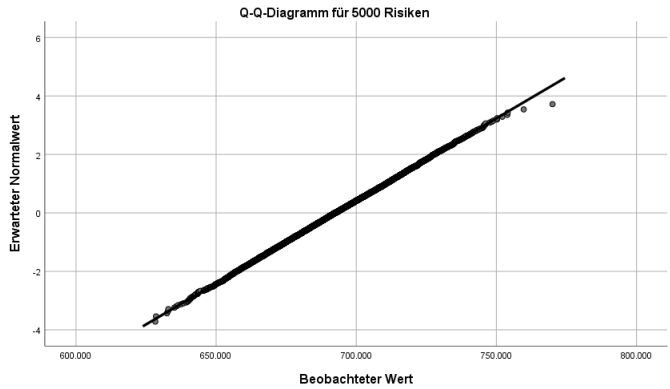

Q-Q-Diagramm für 50 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert
6
4
2
0
-2
-4
0
5.000
10.000
15.000
20.000


Q-Q-Diagramm für 100 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert
5,0
2,5
0,0
-2,5
-5,0
0
5.000
10.000
15.000
20.000
25.000
30.000

Q-Q-Diagramm für 200 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert
4
2
0
-2
-4
15.000
20.000
25.000
30.000
35.000
40.000
45.000


Q-Q-Diagramm für 500 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert
6
4
2
0
-2
-4
40.000
50.000
60.000
70.000
80.000
90.000
100.000





Modifikation des Portfolios

Im Folgenden werden im vorliegenden Beispiel die Auswirkungen einer Modifikation des Portfolios analysiert. Der bisher besprochene Fall wird daher als Datenmodell 1 bezeichnet.

Bei Datenmodell 2 wird zur Festlegung des Schadenbetrags und der Eintrittswahrscheinlichkeit eines Risikos jeweils die selbe Zufallszahl verwendet, so dass in diesem Fall die beiden Größen (Schadenbetrag und Eintrittswahrscheinlichkeit) perfekt positiv korreliert sind. Alle anderen Modellannahmen werden beibehalten. Das bedeutet, dass mit einem hohen Schadenbetrag auch immer eine hohe Ausfallwahrscheinlichkeit verbunden ist.

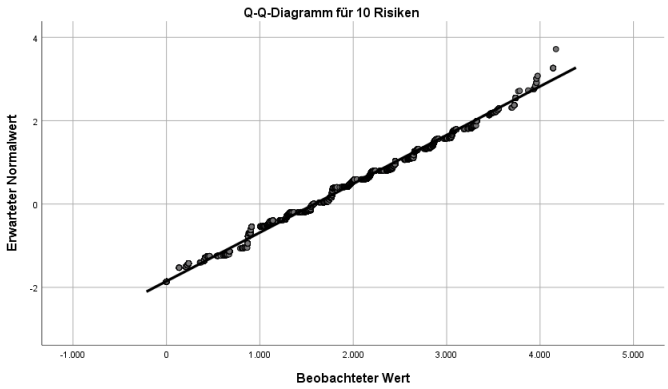
In Datenmodell 3 ist es umkehrt: Ein hoher Schadenbetrag ist mit einer niedrigen Eintrittswahrscheinlichkeit verbunden. Dazu werden für beide Größen zwar jeweils die selbe Zufallszahl verwendet, aber in den zugehörigen Intervallen so umgerechnet, dass aus der Zufallszahl z.B. ein hoher Schadenbetrag und eine niedrige Eintrittswahrscheinlichkeit resultiert. Beide Größen sind in diesem Modell perfekt negativ korreliert. Alle anderen Modellannahmen werden wiederum beibehalten.

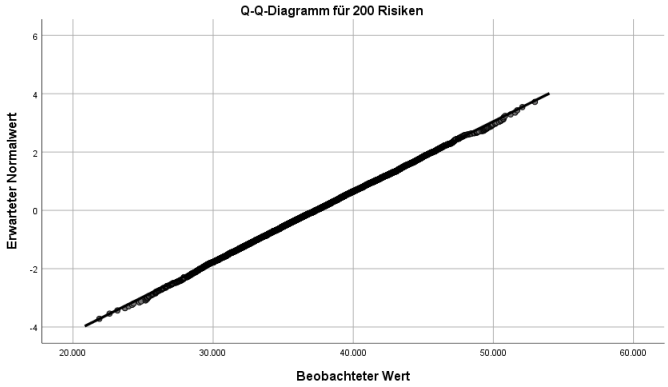
Datenmodell 4 wird mit Blick auf den Satz von Laplace und De Moivre konzipiert. D.h. alle Schadenbeträge sind identisch. O.B.d.A. werden sie mit 1 angesetzt. Ferner sind

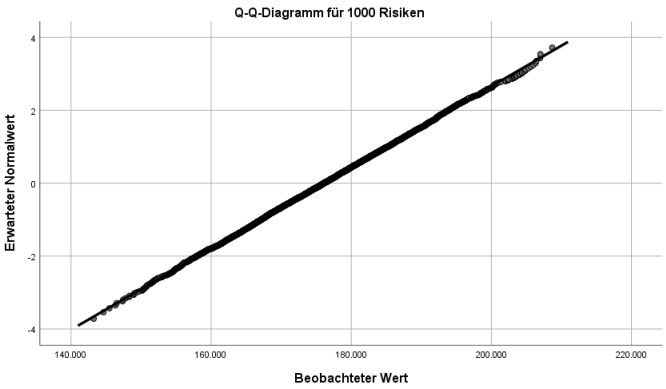
alle Eintrittswahrscheinlichkeiten ebenfalls konstant. Als konstanter Wert wird hier $0{,}25$ gewählt.

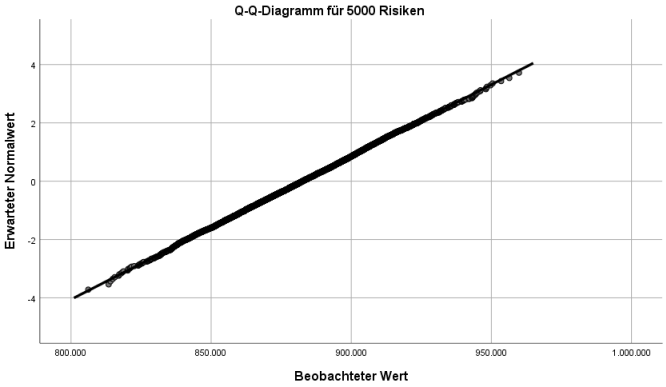
Ergebnisse Datenmodell 2 und Datenmodell 3

Bei Datenmodell 2 (perfekte positive Korrelation von Schadenbetrag und Eintrittswahrscheinlichkeit) kann bezüglich des Gesamtschadens von einer guten Annäherung an die Normalverteilung schon ab 100 Risiken ausgegangen werden, da die prozentuale Abweichung zwischen den empirischen und den theoretischen Risikomaßen ab dieser Anzahl im Promillebereich liegen und beide Testverfahren die Nullhypothese lediglich für 10 Risiken klar ablehnen. Allerdings ist anzumerken, dass die Normalverteilungshypothese bei beiden Tests auch bei 5.000 Risiken abgelehnt wird. Im Unterschied zu dem Fall mit 10 Risiken würde aber bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1\%$, bei beiden Tests die Nullhypothese nicht abgelehnt werden. Ferner zeigt das Q-Q-Diagramm bei 5.000 Risiken keine Auffälligkeiten. Hier die Q-Q-Diagramme für die Fälle mit 10, 200, 1.000 und 5.000 Risiken.









Bei Datenmodell 3 (perfekte negative Korrelation von Schadenbetrag und Eintrittswahrscheinlichkeit) kann erst bei einer höheren Anzahl von Risiken bezüglich des Gesamtschadens von einer Normalverteilung ausgegangen werden: Die prozentualen Abweichungen zwischen empirischen und theoretischen Risikomaßen liegen erst ab 500 Risiken im Wesentlichen im Promillebereich, beide Tests lehnen die Normalverteilungshypothese erst ab 200 Risiken nicht ab.

Somit hängt die Anzahl der Risiken, ab der für den Gesamtschaden als Konsequenz des zentralen Grenzwertsatzes von einer Normalverteilung ausgegangen werden kann, von der Korrelation der beiden Größen Schadenbetrag und Einzelwahrscheinlichkeit ab. Einen Einfluss wird ebenfalls die Verteilung der beiden Größen haben. Es wird daher für die Anwendung empfohlen, bei einer Musterberechnung entweder ein für den zu untersuchenden Fall typisches Portfolio von dichotome stochastischen unabhängigen Risiken zu verwenden oder die Verteilung und die Korrelation von Schadenbetrag und Eintrittswahrscheinlichkeit vorab zu analysieren.

Die Tabellen mit den Ergebnissen sind für die Datenmodelle 2 und 3 auf den beiden folgenden Seiten abgedruckt.

Datenmodell 2

Simulationsergebnisse

	Anzahl der Risiken	Erwartungs-wert	Standard-abweichung	Value at Risk 5%	Value at Risk 1%	Expected Shortfall 5%	Expected Shortfall 1%
Schätzwerte	10	1.584,86	854,98	3.049,58	3.724,16	3.370,24	3.819,81
	50	9.772,06	2.132,08	13.363,98	14.913,03	14.269,27	15.504,37
	100	18.426,02	2.928,81	23.261,25	25.362,93	24.536,42	26.306,58
	200	37.335,88	4.154,69	44.256,65	47.059,83	45.946,81	48.517,73
	500	91.044,54	6.441,70	101.575,98	106.266,57	104.340,80	108.149,65
	1000	176.105,91	8.983,63	190.899,57	196.774,16	194.583,76	200.272,01
	5000	882.543,44	20.362,68	915.304,98	929.945,27	924.506,80	937.249,86
Theoretische Werte	10	1.573,67	856,77	2.982,96	3.566,76	3.340,84	3.857,38
	50	9.749,67	2.129,83	13.253,02	14.704,28	14.142,65	15.426,72
	100	18.420,81	2.920,42	23.224,61	25.214,58	24.444,47	26.205,19
	200	37.337,41	4.154,82	44.171,67	47.002,77	45.907,14	48.412,08
	500	91.061,49	6.491,00	101.738,54	106.161,50	104.449,83	108.363,25
	1000	176.075,67	9.011,85	190.899,25	197.039,92	194.663,50	200.096,74
	5000	882.195,67	20.175,82	915.382,88	929.130,68	923.810,32	935.974,32
Abweichung	10	-0,71%	0,21%	-2,18%	-4,23%	-0,87%	0,98%
	50	-0,23%	-0,11%	-0,83%	-1,40%	-0,89%	-0,50%
	100	-0,03%	-0,29%	-0,16%	-0,58%	-0,37%	-0,39%
	200	0,00%	0,00%	-0,19%	-0,12%	-0,09%	-0,22%
	500	0,02%	0,77%	0,16%	-0,10%	0,10%	0,20%
	1000	-0,02%	0,31%	0,00%	0,14%	0,04%	-0,09%
	5000	-0,04%	-0,92%	0,01%	-0,09%	-0,08%	-0,14%

Datenmodell 2

Ergebnisse der statistischenTests
Signifikanzniveau 5%

	Anzahl der Risiken	Teststatistik	p-Wert	Hypothese ablehnen
Kolmogorov-Smirnov-Test	10	7,527	0,0%	ja
	50	0,598	86,6%	nein
	100	0,482	83,9%	nein
	200	0,634	81,6%	nein
	500	0,631	82,0%	nein
	1000	0,576	89,5%	nein
	5000	1,497	2,3%	ja
Anderson-Darling-Test	10	42,433		ja
	50	0,827		nein
	100	0,598		nein
	200	0,420		nein
	500	0,423		nein
	1000	0,378		nein
	5000	2,594		ja

Datenmodell 3

Simulationsergebnisse

	Anzahl der Risiken	Erwartungs-wert	Standard-abweichung	Value at Risk 5%	Value at Risk 1%	Expected Shortfall 5%	Expected Shortfall 1%
Schätzwerte	10	952,55	587,18	2.075,88	2.593,23	2.397,89	2.891,61
	50	5.126,97	1.484,02	7.708,07	8.843,16	8.426,10	9.461,83
	100	10.200,58	2.044,42	13.695,70	15.212,94	14.652,48	16.114,35
	200	20.838,51	2.938,63	25.840,09	28.179,83	27.220,60	29.275,62
	500	51.240,48	4.539,97	58.898,12	61.916,82	60.746,77	63.420,47
	1000	103.006,09	6.487,83	113.838,93	118.099,40	116.466,32	120.567,84
	5000	514.525,68	14.576,96	538.370,46	548.795,42	544.673,60	553.717,91
Theoretische Werte	10	948,92	587,26	1.914,91	2.315,07	2.160,21	2.514,27
	50	5.111,83	1.487,33	7.558,34	8.571,81	8.179,60	9.076,31
	100	10.182,10	2.050,59	13.555,12	14.952,39	14.411,65	15.647,95
	200	20.809,61	2.944,99	25.653,83	27.660,55	26.883,95	28.659,49
	500	51.193,94	4.554,21	58.685,15	61.788,39	60.587,44	63.333,18
	1000	102.946,99	6.432,75	113.528,23	117.911,50	116.215,19	120.093,49
	5000	514.328,23	14.404,18	538.021,67	547.836,68	544.038,30	552.722,58
Abweichung	10	-0,38%	0,01%	-7,75%	-10,73%	-9,91%	-13,05%
	50	-0,30%	0,22%	-1,94%	-3,07%	-2,93%	-4,07%
	100	-0,18%	0,30%	-1,03%	-1,71%	-1,64%	-2,89%
	200	-0,14%	0,22%	-0,72%	-1,84%	-1,24%	-2,10%
	500	-0,09%	0,31%	-0,36%	-0,21%	-0,26%	-0,14%
	1000	-0,06%	-0,85%	-0,27%	-0,16%	-0,22%	-0,39%
	5000	-0,04%	-1,19%	-0,06%	-0,17%	-0,12%	-0,18%

Datenmodell 3

Ergebnisse der statistischenTests
Signifikanzniveau 5%

	Anzahl der Risiken	Teststatistik	p-Wert	Hypothese ablehnen
Kolmogorov-Smirnov-Test	10	7,465	0,0%	ja
	50	1,925	0,1%	ja
	100	1,521	2,0%	ja
	200	0,917	37,0%	nein
	500	0,807	53,3%	nein
	1000	0,936	34,5%	nein
	5000	1,206	10,9%	nein
Anderson-Darling-Test	10	87,279		ja
	50	9,027		ja
	100	4,340		ja
	200	2,358		nein
	500	1,120		nein
	1000	1,172		nein
	5000	1,454		nein

Der homogene Fall

Als homogenen Fall (Datenmodell 4) betrachten wir die folgende Konstellation:

$$S_1 = S_2 = \cdots = S = 1 \text{ und } p_1 = p_2 = \cdots = p = 0{,}25,$$

d.h. alle Schadenbeträge und alle Eintrittswahrscheinlichkeiten sind identisch. Somit steht der Gesamtschaden, d.h. die Summe der zweiwertigen Zufallsvariablen, für die Anzahl der eingetretenen Schäden. Dies entspricht der Ausgangssituation des Satzes von Laplace und De Moivre, d.h. auch hier sollte man eine Normalverteilung beobachten können.

Vergleicht man die Werte für die Kennzahlen, so liegen die Abweichungen ab 500 Risiken im Promillebereich (mit Ausnahme der Standardabweichung). Bei 200 Risiken bzw. 100 Risiken gibt es lediglich beim Value at Risk bzw. beim Expected Shortfall (jeweils 1%) größere Abweichungen. Dies passt zu den Q-Q-Diagrammen: Auch hier sind bei 100 und 200 Risiken größere Abweichungen an beiden Rändern zu beobachten, wohingegen ab 500 Risiken lediglich am oberen Rand kleinere Abweichungen bzw. einzelne Ausreiser vorkommen. Allerdings lehnen die statistischen Tests die Normalverteilungshypothese erst ab 5.000 nicht ab. Dies ist sicherlich auf die Nähe der Summe der zweiwertigen Zufallsvariablen zu einer diskreten Verteilung zurückzuführen. Auf den ersten Blick passt dies nicht zu dem Ergebnis des Satzes von Laplace und De Moivre bzw. der Faustregel, dass bei Berücksichtigung des Korrekturterms $0{,}5$ unter den Bedingungen

$$n \cdot p \geq 10 \text{ und } n \cdot (1 - p) \geq 10$$

von einer hinreichend guten Annäherung an die Normalverteilung ausgegangen werden kann, d.h. im vorliegenden Beispiel ab $n = 40$ Risiken. Vergleicht man allerdings für nicht zu große n die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Binomialverteilung und der entsprechenden Normalverteilung, so erkennt man, dass es gerade an den Rändern wegen der niedrigen Größenordnung der Werte zwar zu geringen absoluten aber zu hohen relativen Abweichungen kommt. Diese Abweichungen an den Rändern führen dann in Kombination mit einem großen Stichprobenumfang (hier: $m = 10.000$) zu hohen Werten für die Teststatistiken und zur Ablehnung der Normalverteilungshypothese.

Zu erwähnen ist noch, dass ausgehend von Datenmodell 1 die Annahme eines identischen Schadenbetrags eher zu einer Ablehnung der Normalverteilungshypothese führt als die Annahme einer identischen Eintrittswahrscheinlichkeit.

Hier die Zusammenstellung der Ergebnisse und die Q-Q-Diagramme für das Datenmodell 4.

Datenmodell 4

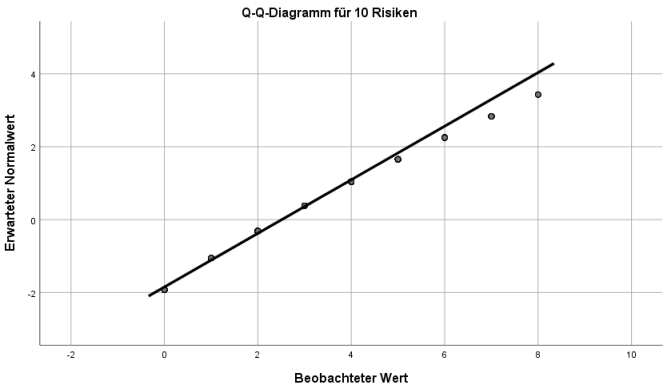
Simulationsergebnisse

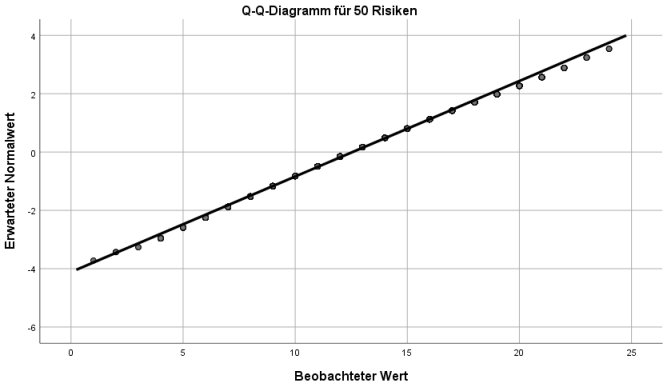
	Anzahl der Risiken	Erwartungs-wert	Standard-abweichung	Value at Risk 5%	Value at Risk 1%	Expected Shortfall 5%	Expected Shortfall 1%
Schätzwerte	10	2,51	1,36	5,00	6,00	5,50	6,45
	50	12,56	3,05	18,00	20,00	19,17	21,13
	100	25,04	4,31	32,00	36,00	34,34	37,08
	200	50,05	6,07	60,00	65,00	62,86	66,97
	500	125,07	9,58	141,00	148,00	145,29	152,05
	1000	249,96	13,54	272,00	283,00	278,66	287,14
	5000	1.250,07	30,78	1.301,00	1.321,00	1.313,66	1.333,61
Theoretische Werte	10	2,50	1,37	4,75	5,69	5,32	6,15
	50	12,50	3,06	17,54	19,62	18,82	20,66
	100	25,00	4,33	32,12	35,07	33,93	36,54
	200	50,00	6,12	60,07	64,25	62,63	66,32
	500	125,00	9,68	140,93	147,52	144,97	150,81
	1000	250,00	13,69	272,52	281,85	278,24	286,50
	5000	1.250,00	30,62	1.300,36	1.321,23	1.313,15	1.331,61
Abweichung	10	-0,40%	0,74%	-5,00%	-5,17%	-3,27%	-4,65%
	50	-0,48%	0,33%	-2,56%	-1,90%	-1,83%	-2,22%
	100	-0,16%	0,46%	0,37%	-2,58%	-1,19%	-1,46%
	200	-0,10%	0,82%	0,12%	-1,15%	-0,37%	-0,97%
	500	-0,06%	1,04%	-0,05%	-0,32%	-0,22%	-0,82%
	1000	0,02%	1,11%	0,19%	-0,41%	-0,15%	-0,22%
	5000	-0,01%	-0,52%	-0,05%	0,02%	-0,04%	-0,15%

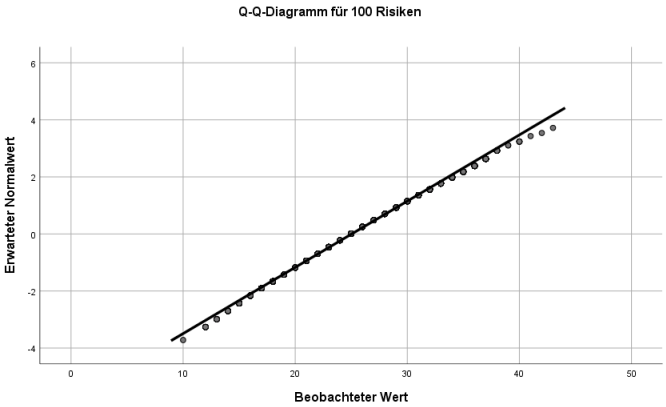
Datenmodell 4

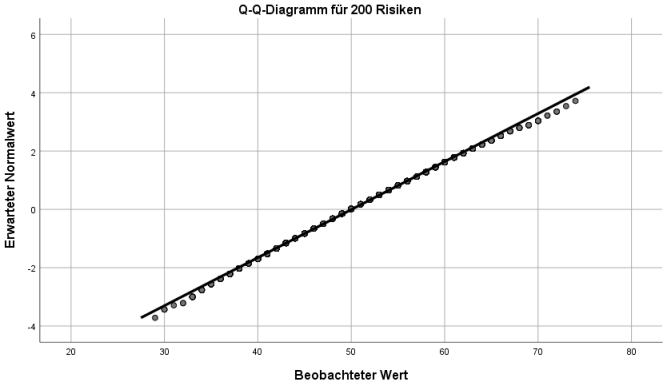
Ergebnisse der statistischenTests
Signifikanzniveau 5%

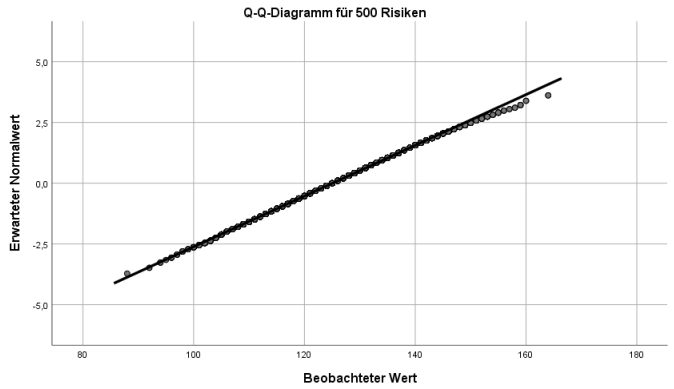
	Anzahl der Risiken	Teststatistik	p-Wert	Hypothese ablehnen
Kolmogorov-Smirnov-Test	10	15,930	0,0%	ja
	50	7,156	0,0%	ja
	100	5,328	0,0%	ja
	200	3,986	0,0%	ja
	500	2,304	0,0%	ja
	1000	2,410	0,0%	ja
	5000	0,918	36,8%	nein
Anderson-Darling-Test	10	230,784		ja
	50	46,382		ja
	100	23,877		ja
	200	12,410		ja
	500	5,379		ja
	1000	4,097		ja
	5000	0,621		nein

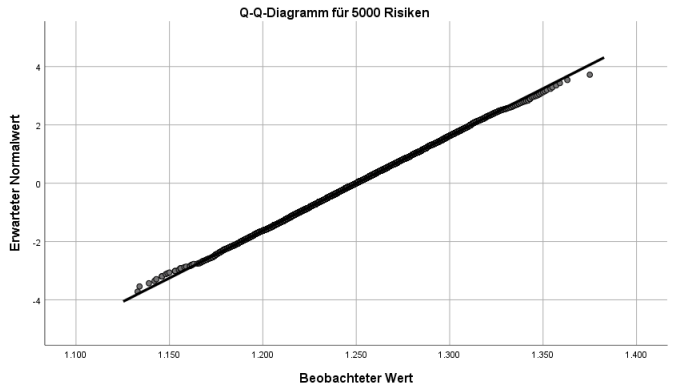

Q-Q-Diagramm für 10 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert


Q-Q-Diagramm für 50 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert


Q-Q-Diagramm für 100 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert


Q-Q-Diagramm für 200 Risiken
Erwarteter Normalwert
Beobachteter Wert





Fazit

Mit auf Simulationsergebnissen aufbauenden statistischen Tests und Q-Q-Diagrammen kann für ein konkretes Portfolio von stochastisch unabhängigen dichotomen Risiken das Vorliegen einer Normalverteilung überprüft werden. Vorsicht ist bei den statistischen Tests bezüglich des Stichprobenumfangs, d.h. bezüglich der Anzahl der Simulationsläufe, geboten. Eine hohe Anzahl von Simulationsläufen kann zu einer Ablehnung der Nullhypothese führen, obwohl nach dem Q-Q-Diagramm eine Normalverteilung naheliegend ist.

Des Weiteren kann bei Anwendung der statistischen Tests ein konstanter Schadenbetrag auch bei einer großen Anzahl von Risiken zur Ablehnung der Normalverteilungsannahme führen. Die Q-Q-Diagramm vermitteln in solchen Fällen oft einen besseren Eindruck.

6. Approximation mit einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung

Im Bereich der Bankbetriebslehre hat sich eine weitere Approximation für die Verteilung des Gesamtschadens eines Portfolios von stochastisch unabhängigen dichotomen Risiken etabliert. Dabei wird die Verteilung von Z_n durch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung approximiert. Dieses Verfahren wird in Literatur als Teil des von Credit Suisse Financial Products im Jahre 1997 entwickelte CreditRisk+™ dargestellt (vgl. [6] S.442ff).

Zunächst werden dazu die Schadenbeträge durch eine Grundeinheit L dividiert und das Ergebnis ganzzahlig gerundet. Dabei wird die Grundeinheit L so gewählt, dass der Wert 0 nicht als Ergebnis vorkommen kann. Es sei also:

$$S_i^* := runden\left(\frac{S_i}{L}\right) \quad , \qquad i = 1, \dots, n$$

Wir betrachten nun das folgende modifizierte Modell. Es sei

$$X_i^* = \begin{cases} S_i^* & , \quad p_i \\ 0 & , \quad 1 - p_i \end{cases},$$

für alle $i = 1,2, \dots$ und

$$Z_n^* = X_1^* + X_2^* + \cdots + X_n^*$$

für $n \in IN$. Es gilt

$$Z_n^* \cdot L \approx Z_n$$

für alle $n \in IN$. Insbesondere ist Z_n^* eine IN_0-wertige Zufallsvariable, d.h. die Verteilung ist durch die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$f(s) = E\left(s^{Z_n^*}\right), s \in [0,1]$$

eindeutig festgelegt. Es gilt:

$$f(s) = E\left(s^{Z_n^*}\right) = E\left(s^{X_1^* + X_2^* + \cdots + X_n^*}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} s^{X_i^*}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(s^{X_i^*}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(s^{S_i^*} \cdot p_i + (1 - p_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\ln\left(1 + p_i \cdot \left(s^{S_i^*} - 1\right)\right)\right)$$

Verwendet man die Näherung $\ln(1 + x) \approx x$ (Tangente an die Funktion $\ln(1 + x)$ im Punkt $x_0 = 0$), so ergibt sich:

$$f(s) \approx \prod_{i=1}^{n} \exp\left(p_i \cdot \left(s^{S_i^*} - 1\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(s^{S_i^*} - 1\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot s^{S_i^*} - \sum_{i=1}^{n} p_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot s^{S_i^*}}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - 1\right)\right)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\lambda := \sum_{i=1}^{n} p_i$$

und

$$g(s) := \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot s^{S_i^*}}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, s\epsilon[0,1]$$

erhält man

$$f(s) \approx \exp\big(\lambda \cdot (g(s) - 1)\big)$$

für alle $s\epsilon[0,1]$. Dabei handelt es sich bei der Funktion g um eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion. Sei U eine IN_0-wertige Zufallsvariable, deren Verteilung durch g eindeutig festgelegt ist. Dann erhält man die Einzelwahrscheinlichkeiten mittels Ableiten wie folgt:

$$P(U = j) = \frac{1}{j!} \cdot g^{(j)}(0) = \frac{\sum_{i\in\{1,\dots,n\}, S_i^* = j} p_i}{\lambda}$$

Insbesondere gilt wegen der Wahl der Grundeinheit L: $P(U = 0) = 0$.

Sei nun N eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter λ. Sei ferner $U_1, U_2, \dots$ eine Folge stochastische unabhängiger, identisch-verteilter Zufallsvariablen. Die Verteilung der Zufallsvariable U_i sei gegeben durch die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion g. Des Weiteren sei die Folge der Zufallsvariablen stochastisch unabhängig von N. Für die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von $V := \sum_{i=1}^{N} U_i$ gilt

$$E(s^V) = E\left(s^{\sum_{i=1}^{N} U_i}\right) = E\left(E\left(s^{\sum_{i=1}^{N} U_i} \middle| N\right)\right) = E\left(E\left(\prod_{i=1}^{N} s^{U_i} \middle| N\right)\right) =$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{N} E(s^{U_i})\right) = E(g(s)^N) = \exp\big(\lambda \cdot (g(s) - 1)\big)$$

für alle $s\epsilon[0,1]$. Da es sich bei der Poisson-Verteilung mit Parameter λ um eine Panjer-Verteilung mit den Parametern $a = 0$ und $b = \lambda$ handelt, gilt die Rekursionsformel von Panjer (vgl. [2] S.92 und [9] S.121). Damit ergibt sich die Rekursion

$$P(V = k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda}{k} \cdot j \cdot P(U_1 = j) \cdot P(V = k - j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\sum_{i\in\{1,\dots,n\}, S_i^* = j} p_i}{k} \cdot j \cdot P(V = k - j)$$

für alle $k = 1,2, \dots$ und mit Anfangswert

$$P(V = 0) = \exp(-\lambda).$$

Da die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen von Z_n^* und V annähernd gleich sind, können die Einzelwahrscheinlichkeiten von Z_n^* näherungsweise mit dieser Rekursion bestimmt werden. Aus diesen Einzelwahrscheinlichkeiten lassen sich auch der Erwartungswert, die Standardabweichung sowie die Risikomaße Value at Risk und Expected Shortfall näherungsweise berechnen. Eine Näherung für die Kennzahlen von Z_n ergeben sich dann durch Multiplikation mit der Grundeinheit L.

Bemerkungen:

1. Im homogenen Fall erhält man durch diese Vorgehensweise die übliche Näherung der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung.
2. Beim Kreditausfallrisiko werden Kredite mit gleichem S_i^* zu sogenannten „Exposure-Bänder“ zusammengefasst (vgl. [6] S.447).

7. Fallbeispiel 2: Normalverteilung vs. zusammengesetzte Poisson-Verteilung

Zum Vergleich der beiden Approximationsverfahren wird das Verfahren aus dem vorherigen Abschnitt (Näherung mittels einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung) zunächst auf das Datenmodell 1 aus Fallbeispiel 1 angewendet und mit den Ergebnissen der Normalverteilungs-Approximation sowie den geschätzten Werten aus der Simulation verglichen. Die Grundeinheit für die zusammengesetzte Poisson-Verteilung wird mit $L = 100$ angesetzt. Für 50, 200, 500 und 1.000 Risiken erhält man die folgenden Ergebnisse:

	Anzahl der Risiken	Erwartungs-wert	Standard-abweichung	Value at Risk 5%	Value at Risk 1%	Expected Shortfall 5%	Expected Shortfall 1%
Schätzwerte Simulation	50	7.520,56	1.853,05	10.654,37	11.951,93	11.486,90	12.679,76
	200	28.307,17	3.609,74	34.376,17	36.872,04	35.972,60	38.351,97
	500	69.931,93	5.631,92	79.244,49	83.232,32	81.680,59	85.242,52
	1000	136.458,33	7.813,92	149.265,79	154.504,59	152.615,75	157.935,34
Werte Normal-verteilung	50	7.480,84	1.850,84	10.525,29	11.786,45	11.298,39	12.414,26
	200	28.268,30	3.583,95	34.163,54	36.605,65	35.660,56	37.821,32
	500	69.851,18	5.614,32	79.086,17	82.911,76	81.431,27	84.816,14
	1000	136.427,32	7.823,76	149.296,62	154.627,73	152.564,60	157.281,55
Abweichung Normal-verteilung zu Schätzwerten der Simulation	50	-0,53%	-0,12%	-1,21%	-1,38%	-1,64%	-2,09%
	200	-0,14%	-0,71%	-0,62%	-0,72%	-0,87%	-1,38%
	500	-0,12%	-0,31%	-0,20%	-0,39%	-0,31%	-0,50%
	1000	-0,02%	0,13%	0,02%	0,08%	-0,03%	-0,41%
Werte zusammenges. Poisson-verteilung	50	7.480,84	2.249,37	11.400,00	13.200,00	12.525,28	14.211,73
	200	28.268,30	4.364,67	35.700,00	39.000,00	37.684,79	40.653,68
	500	69.851,18	6.867,27	81.400,00	86.400,00	84.437,77	88.788,31
	1000	136.427,32	9.525,56	152.300,00	159.100,00	156.493,38	162.576,79
Abweichung zusammenges. Poisson-verteilung zu Schätzwerten der Simulation	50	-0,53%	21,39%	7,00%	10,44%	9,04%	12,08%
	200	-0,14%	20,91%	3,85%	5,77%	4,76%	6,00%
	500	-0,12%	21,93%	2,72%	3,81%	3,38%	4,16%
	1000	-0,02%	21,91%	2,03%	2,97%	2,54%	2,94%

Beide Approximationen liefern die gleichen Erwartungswerte, wegen des Gesetzes der großen Zahlen sind die Abweichungen zu den aus der Simulation geschätzten Werten gering. Dies gilt bei der Normalverteilungs-Approximation auch für die Standardabweichung (vgl. Fallbeispiel 1). Bei der Approximation mit der

zusammengesetzten Poisson-Verteilung allerdings sind die Abweichungen bei der Standardabweichung bei ca. 20-22%: Die Approximation überschätzt damit die Streuung.

Im homogenen Fall ist dieser Effekt plausibel. Die Binomialverteilung mit den Parametern n und p hat die Standardabweichung $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Die zur Approximation verwendete Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$ die Standardabweichung $\sqrt{\lambda} = \sqrt{n \cdot p}$. Somit überschätzt die Poisson-Verteilung auch hier die Streuung, je größer die Eintrittswahrscheinlichkeit p, desto größer der Effekt.

Diese Überschätzung der Streuung bei der Approximation mit der zusammengesetzten Poisson-Verteilung überträgt sich im vorliegenden Beispiel auf die Risikomaße. Die Abweichungen zu den aus der Simulation geschätzten Werten liegen im unteren Prozentbereich. Sie sind damit betragsmäßig höher als die Abweichungen bei der Approximation mit der Normalverteilung. Obwohl die Näherung mit der Normalverteilung das Gesamtrisiko des Portfolios leicht unterschätzt, ist im vorliegenden Beispiel somit die Approximation mit der Normalverteilung der Approximation mit der zusammengesetzten Poisson-Verteilung vorzuziehen. Diese Aussage dreht sich aber bei kleineren Eintrittswahrscheinlichkeiten um, wie das folgende zweite Beispiel zeigt.

Das Datenmodell 1 aus Fallbeispiel 1 wird dahingehend modifiziert, dass die Eintrittswahrscheinlichkeiten gemessen in Prozent zufällig (gleichverteilt) aus dem Intervall $[1{,}10]$ gewählt werden und nicht wie bisher aus dem Intervall $[1{,}50]$. Alle anderen Annahmen und die oben gewählte Grundeinheit $L = 100$ werden beibehalten. Zunächst betrachten wir analog zu Fallbeispiel 1 die Ergebnisse aus den Tests auf Normalverteilung.

Ergebnisse der statistischenTests
Signifikanzniveau 5%

	Anzahl der Risiken	Teststatistik	p-Wert	Hypothese ablehnen
Kolmogorov-Smirnov-Test	50	5,537	0,0%	ja
	200	2,432	0,0%	ja
	500	1,822	3,0%	ja
	1000	0,850	46,5%	nein
Anderson-Darling-Test	50	50,141		ja
	200	13,342		ja
	500	4,774		ja
	1000	1,418		nein

Es zeigt sich, dass im Unterschied zu Datenmodell 1 die Normalverteilungshypothese erst ab 1.000 Risiken nicht abgelehnt wird. D.h. bei kleineren Eintrittswahrscheinlichkeiten kann erst bei einer höheren Anzahl von Risiken von einer Normalverteilung ausgegangen werden. Bei den Kennzahlen ergibt sich folgendes Bild:

	Anzahl der Risiken	Erwartungs-wert	Standard-abweichung	Value at Risk 5%	Value at Risk 1%	Expected Shortfall 5%	Expected Shortfall 1%
Schätzwerte Simulation	50	1.614,00	1.016,48	3.453,22	4.416,25	4.042,67	4.910,47
	200	6.120,98	1.960,70	9.523,86	11.179,59	10.541,11	12.019,28
	500	15.128,89	3.111,49	20.393,82	22.870,70	21.935,08	24.091,16
	1000	29.561,39	4.316,45	36.788,98	40.026,92	38.818,02	41.780,46
Werte Normal-verteilung	50	1.611,91	1.010,68	3.274,37	3.963,05	3.696,53	4.305,87
	200	6.122,86	1.965,14	9.355,31	10.694,36	10.176,15	11.360,93
	500	15.106,81	3.087,05	20.184,69	22.288,21	21.474,15	23.335,33
	1000	29.524,23	4.286,50	36.575,10	39.495,92	38.365,57	40.949,91
Abweichung Normal-verteilung zu Schätzwerten der Simulation	50	-0,13%	-0,57%	-5,18%	-10,26%	-8,56%	-12,31%
	200	0,03%	0,23%	-1,77%	-4,34%	-3,46%	-5,48%
	500	-0,15%	-0,79%	-1,03%	-2,55%	-2,10%	-3,14%
	1000	-0,13%	-0,69%	-0,58%	-1,33%	-1,17%	-1,99%
Werte zusammenges. Poisson-verteilung	50	1.611,91	1.046,82	3.500,00	4.600,00	4.158,21	5.104,18
	200	6.122,86	2.033,34	9.700,00	11.400,00	10.719,44	12.272,72
	500	15.106,81	3.195,58	20.600,00	23.100,00	22.111,88	24.375,76
	1000	29.524,23	4.434,95	37.000,00	40.400,00	39.084,52	42.094,98
Abweichung zusammenges. Poisson-verteilung zu Schätzwerten der Simulation	50	-0,13%	2,98%	1,35%	4,16%	2,86%	3,94%
	200	0,03%	3,70%	1,85%	1,97%	1,69%	2,11%
	500	-0,15%	2,70%	1,01%	1,00%	0,81%	1,18%
	1000	-0,13%	2,75%	0,57%	0,93%	0,69%	0,75%

Man erkennt, dass unter der Annahme kleinerer Eintrittswahrscheinlichkeiten die Abweichung der Streuung (gemessen in der Standardabweichung) bei der Approximation mit einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung mit 2,7% bis 3,7% bedeutend geringer ausfällt als im vorherigen Beispiel. Damit sind auch die Abweichungen bei den Risikomaßen geringer. Bei der Normalverteilungs-Approximation hingegen sind die Abweichungen bei den Risikomaßen größer als im vorherigen Beispiel. Daher wäre hier mit Blick auf den Value at Risk und den Expected Shortfall die Approximation mit der zusammengesetzten Poisson-Verteilung der Normalverteilungs-Approximation vorzuziehen. Da bei kleineren Eintrittswahrschein-

lichkeiten, die Verteilung des Gesamtschadens eher asymmetrisch ist und die Poisson-Verteilung – im Unterschied zur Normalverteilung – ebenfalls asymmetrisch ist, ist dieses Ergebnis plausibel.

8. Betriebswirtschaftliche Anwendungsgebiete

Beispiel 1: Kreditmanagement

Das wichtigste Beispiel für dichotome Risiken im Bereich der Bankbetriebslehre ist die Modellierung des Kreditausfallrisikos (vgl. [6] S.436ff). Dabei stellt das hier vorgestellte Modell eine einfache Variante dar: Jeder Kredit kann in einem vorgegebenen Zeitraum ausfallen oder nicht, die Ausfallwahrscheinlichkeit und der Schadenbetrag sind bekannt, die Risiken sind stochastisch unabhängig. Geht man in diesem Modell bei hinreichend großen Anzahl von Krediten aus, so kann die Verteilung des Gesamtschadens je nach Größenordnung der Eintrittswahrscheinlichkeiten mit der Normalverteilung oder mit einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung approximiert werden. Quantile bzw. Risikomaße können dann einfach ermittelt werden. Darauf aufbauend wird das Kreditausfallrisiko, z.B. in Form des unexpected loss, quantifiziert.

Beispiel 2: Risikoverlust bei einer Pensionskasse

Eine Pensionskasse ist einer der Durchführungswege für betriebliche Altersversorgung in Deutschland. Dabei stellt sich regelmäßig die Frage nach den jährlichen Risikoverlusten für die einzelnen Elemente einer Zusage (Hinterbliebenenversorgung, Invalidenversorgung, …). Auch hier handelt es sich um dichotome Risiken: Der Versorgungsfall tritt im Laufe eines Jahres ein oder er tritt nicht ein. Betrachtet man zur Analyse oder Prognose der Risikoverluste lediglich die Anzahl der Versorgungsfälle (z.B. beim Vergleich Anzahl der beobachteten und Anzahl der erwarteten Versorgungsfälle), so ähnelt dies eher Datenmodell 4 im Fallbeispiel 1 ,da der Schadenbetrag einheitlich mit 1 angesetzt wird. Wird das im Versorgungsfall fällige Kapital bzw. der Barwert einer im Versorgungsfall fälligen Rente in die Analyse einbezogen, so entspricht die Problemstellung Datenmodell 1 im Fallbeispiel 1. Bei einer Pensionskasse liegt die Anzahl der Risiken (Personen) häufig im vierstelligen Bereich und es ist ferner üblich, von stochastisch unabhängigen Risiken auszugehen. Zu erwähnen ist noch, dass die jährlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Versorgungsfälle bedeutend geringer sind als in der Fallbeispiel 1. Die Sterbe- und Invalidiesierungswahrscheinlichkeiten sind alters-, geschlechts- sowie jahrgangsabhängig und liegen in den stark besetzten Altern im Promille- und unteren Prozentbereich.

Beispiel 3: Betriebswirtschaftliches Risikomanagement

Im betriebswirtschaftlichen Risikomanagement werden Risiken häufig mit einer Eintrittswahrscheinlichkeit und einem festen Schadenbetrag, d.h. dichotom, modelliert. Dies ist sinnvoll bei ereignisorientierten Risiken, bei denen davon ausgegangen wird, dass sie einmal im Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit eintreten können und einen

bestimmten monetären Schaden zur Folge haben (vgl. [3] S.15ff). Hat man mehrere dieser Risiken und sind diese stochastisch unabhängig, so stellt sich auch hier die Frage, ob eine Normalverteilung zur Quantifizierung des gemeinsamen Schadens verwendet werden kann. Kritisch ist in diesem Beispiel – im Unterschied zu den beiden vorherigen Beispielen – die Anzahl der Risiken. I.d.R. werden im Rahmen des betriebswirtschaftlichen Risikomanagements nur die wesentlichen Risiken bewertet. Ferner werden häufig Abhängigkeitsstrukturen in die Analyse einbezogen.

9. Fazit

In dem vorliegenden Artikel wird zunächst die Frage, ob bzw. ab welcher Anzahl bei einem Portfolio von stochastisch unabhängigen dichotomen Risiken zur Risikoquantifizierung eine Normalverteilung verwendet werden kann, aus zwei Perspektiven beleuchtet: Theorie und schließende Statistik.

Aus Sicht der Theorie lässt sich zeigen, dass unter relativ einfachen Bedingungen der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann und somit der Gesamtschaden für eine große Anzahl von Risiken annähernd normalverteilt ist. Erzeugt man im Rahmen einer Monte-Carlo-Situation fiktive Datensätze, so kann mit mithilfe von statistischen Methoden die Normalverteilungshypothese getestet werden. Q-Q-Diagramme und der Vergleich von empirischen und theoretischen Kennzahlen bilden hier eine sehr gute Ergänzung bzw. Alternative. Es zeigt sich u.a., dass im homogenen Fall die beiden Perspektiven nicht zum gleichen Ergebnis führen: So liefert der Satz von Laplace und De Moivre im Datenmodell 4 eine hinreichend gute Näherung ab 40 Risiken, die Monte-Carlo-Simulation mit den statistischen Tests, den Q-Q-Diagrammen und dem Vergleich der Kennzahlen aber erst ab 5.000 bzw. 500 Risiken.

Als zweites Verfahren zur Quantifizierung des Gesamtrisikos wird alternativ die Approximation mithilfe einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung betrachtet. Die Beispiele zeigen, dass bei Eintrittswahrscheinlichkeiten, die näher an 50% liegen, bezogen auf die Risikomaße die Normalverteilungs-Approximation vorzuziehen ist, bei kleineren Eintrittswahrscheinlichkeiten hingegen die Approximation mithilfe einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung.

Die einfache Form der Modellierung von Risiken mit zweiwertigen Zufallsvariablen findet man in verschiedenen Bereichen der Betriebswirtschaftslehre. Wendet man die Verfahren aus den Fallbeispielen an, so kann man in konkreten Fällen analysieren, ob die Normalverteilungsannahme für den Gesamtschaden gerechtfertigt und somit eine formelmäßig einfache Risikoquantifizierung möglich ist.

Im vorliegenden Artikel wird generell von der stochastischen Unabhängigkeit der dichotomen Risiken ausgegangen. Gibt es Abhängigkeiten zwischen den Risiken, so können diese z.B. mithilfe einer Korrelationsmatrix oder einer Copula modelliert werden. Es stellt sich dann die Frage, ob in diesem Fall ebenfalls näherungsweise eine vereinfachte Quantifizierung des Gesamtschadens möglich ist.

Literaturverzeichnis

[1]	*Arrenberg, Jutta*	Analyse multivariater Daten mit SPSS, Books on Demand, Norderstedt 2019.
[2]	*Cottin, Claudia; Döhler, Sebastian*	Risikoanalyse, 2. Auflage, Wiesbaden: Springer 2013.
[3]	*Gleißner, Werner; Wolfrum, Marco*	Risikoaggregation und Monte-Carlo-Simulation, Springer-Verlag, Wiesbaden 2019.
[4]	*Gänssler, Peter; Stute, Winfried*	Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.
[5]	*Meintrup, David; Schäffler, Stefan*	Stochastik: Theorie und Anwendung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2005.
[6]	*Schierenbeck, Henner; Lister, Michael; Kirmße, Stefan*	Ertragsorientiertes Bankmanagement Band 1: Messung von Rentabilität und Risiko im Bankgeschäft, 9. Auflage, Springer Gabler Wiesbaden 2014.
[7]	*Schlittgen, Rainer*	Einführung in die Statistik: Analyse und Modellierung von Daten, 12. Auflage, Oldenbourg Verlag München 2012.
[8]	*Stephens, Michael A.*	The Anderson-Darling Statistic, Technical Report No. 39, Department of Statistics, Stanford University, Stanfort California 1979.
[9]	*Wolfsdorf, Kurt*	Versicherungsmathematik Teil2 Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung, B. G. Teubner Stuttgart 1988.

Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am **ivw**Köln“. Eine vollständige Übersicht aller bisher erschienenen Publikationen findet sich am Ende dieser Publikation und kann hier abgerufen werden.

Forschung am ivwKöln, 2/2021
ISSN (online) 2192-8479

Ralf Knobloch: Die quantitative Risikobewertung bei einem Portfolio von dichotomen Risiken mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes

Köln, Januar 2021

Schriftleitung / editor's office:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Ralf Knobloch
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Marcel Berg

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /
Faculty of Business, Economics and Law

Technische Hochschule Köln /
University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Mail ralf.knobloch@th-koeln.de

Publikationsreihe „Forschung am ivwKöln“

Die Veröffentlichungen der Online-Publikationsreihe "Forschung am ivwKöln" (ISSN: 2192-8479) werden üblicherweise über Cologne Open Science (Publikationsserver der TH Köln) veröffentlicht. Die Publikationen werden hierdurch über nationale und internationale Bibliothekskataloge, Suchmaschinen sowie andere Nachweisinstrumente erschlossen.

Alle Publikationen sind auch kostenlos abrufbar unter www.ivw-koeln.de.

2021

1/2021 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2020 *(im Erscheinen)*

2020

7/2020 Müller-Peters, Schmidt, Völler: Revolutionieren Big Data und KI die Versicherungswirtschaft? 24. Kölner Versicherungssymposium am 14. November 2019

6/2020 Schmidt: Künstliche Intelligenz im Risikomanagement. Proceedings zum 15. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2019 in Köln

5/2020 Müller-Peters: Die Wahrnehmung von Risiken im Rahmen der Corona-Krise

4/2020 Knobloch: Modellierung einer Cantelli-Zusage mithilfe einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette

3/2020 Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit

2/2020 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2020 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

1/2020 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2019

2019

5/2019 Muders: Risiko und Resilienz kollektiver Sparprozesse – Backtesting auf Basis deutscher und US-amerikanischer Kapitalmarktdaten 1957-2017

4/2019 Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen. Teil 2: Renditemaximierung und Vergleich mit klassischen Optimierungsansätzen.

3/2019 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 2019 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2019 Rohlfs, Pütz, Morawetz: Risiken des automatisierten Fahrens. Herausforderungen und Lösungsansätze für die Kfz-Versicherung. Proceedings zum 14. FaRis & DAV-Symposium am 7.12.2018 in Köln.

1/2019 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2018

2018

7/2018 Goecke: Resilience and Intergenerational Fairness in Collective Defined Contribution Pension Funds

6/2018 Miebs: Kapitalanlagestrategien für die bAV – Herausforderungen für das Asset Management durch das Betriebsrentenstärkungsgesetz. Proceedings zum 13. FaRis & DAV Symposium am 8. Dezember 2017 in Köln

5/2018 Goecke, Heep-Altiner, Knobloch, Schiegl, Schmidt (Hrsg.): FaRis at ICA 2018 – Contributions to the International Congress of Actuaries 2018 in Berlin. Beiträge von FaRis Mitgliedern zum Weltkongress der Aktuare vom 4. bis zum 8. Juni 2018 in Berlin

4/2018 Knobloch: Die Pfade einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette - Fallbeispiele aus der betrieblichen Altersversorgung

3/2018 Völler, Müller-Peters: InsurTech Karte ivwKöln 1/2018 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2018 Schmidt, Schulz: InsurTech. Proceedings zum 12. FaRis & DAV Symposium am 9. Juni 2017 in Köln

1/2018 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2017

2017

8/2017 Materne, Pütz: Alternative Capital und Basisrisiko in der Standardformel (non-life) von Solvency II

7/2017 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette - Eine Verallgemeinerung des linearen Ansatzes

6/2017 Goecke, Oskar (Hrsg.): Risiko und Resilienz. Proceedings zum 11. FaRis & DAV Symposium am 9. Dezember 2016 in Köln

5/2017 Grundhöfer, Dreuw, Quint, Stegemann: Bewertungsportale - eine neue Qualität der Konsumenten-information?

4/2017 Heep-Altiner, Mehring, Rohlfs: Bewertung des verfügbaren Kapitals am Beispiel des Datenmodells der „IVW Privat AG“

3/2017 Müller-Peters, Völler: InsurTech Karte ivwKöln 1/2017 - Beiträge zu InsurTechs und Innovation am ivwKöln

2/2017 Heep-Altiner, Müller-Peters, Schimikowski, Schnur (Hrsg.): Big Data für Versicherungen. Proceedings zum 21. Kölner Versicherungssymposium am 3. 11. 2016 in Köln

1/2017 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2016

2016

13/2016 Völler: Erfolgsfaktoren eines Online-Portals für Akademiker

12/2016 Müller-Peters, Gatzert: Todsicher: Die Wahrnehmung und Fehlwahrnehmung von Alltagsrisiken in der Öffentlichkeit (erscheint 2017)

11/2016 Heep-Altiner, Penzel, Rohlfs, Voßmann: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Leben AG“

10/2016 Heep-Altiner (Hrsg.): Big Data. Proceedings zum 10. FaRis & DAV Symposium am 10. Juni 2016 in Köln

9/2016 Materne, Pütz, Engling: Die Anforderungen an die Ereignisdefinition des Rückversicherungsvertrags: Eindeutigkeit und Konsistenz mit dem zugrundeliegenden Risiko

8/2016 Rohlfs (Hrsg.): Quantitatives Risikomanagement. Proceedings zum 9. FaRis & DAV Symposium am 4. Dezember 2015 in Köln

7/2016 Eremuk, Heep-Altiner: Internes Modell am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“

6/2016 Heep-Altiner, Rohlfs, Dağoğlu, Pulido, Venter: Berichtspflichten und Prozessanforderungen nach Solvency II

5/2016 Goecke: Collective Defined Contribution Plans - Backtesting based on German capital market data 1955 - 2015

4/2016 Knobloch: Bewertete inhomogene Markov-Ketten - Spezielle unterjährliche und zeitstetige Modelle

3/2016 Völler (Hrsg.): Sozialisiert durch Google, Apple, Amazon, Facebook und Co. – Kundenerwartungen und –erfahrungen in der Assekuranz. Proceedings zum 20. Kölner Versicherungssymposium am 5. November 2015 in Köln

2/2016 Materne (Hrsg.): Jahresbericht 2015 des Forschungsschwerpunkts Rückversicherung

1/2016 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2015

2015

11/2015 Goecke (Hrsg.): Kapitalanlagerisiken: Economic Scenario Generator und Liquiditätsmanagement. Proceedings zum 8. FaRis & DAV Symposium am 12. Juni 2015 in Köln

10/2015 Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG“ – Teil 2

9/2015 Goecke: Asset Liability Management in einem selbstfinanzierenden Pensionsfonds

8/2015 Strobel (Hrsg.): Management des Langlebigkeitsrisikos. Proceedings zum 7. FaRis & DAV Symposium am 5.12.2014 in Köln

7/2015 Völler, Wunder: Enterprise 2.0: Konzeption eines Wikis im Sinne des prozessorientierten Wissensmanagements

6/2015 Heep-Altiner, Rohlfs: Standardformel und weitere Anwendungen am Beispiel des durchgängigen Datenmodells der „IVW Privat AG"

5/2015 Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen

4/2015 Heep-Altiner, Rohlfs, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens

3/2015 Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm

2/2015 Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen

1/2015 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014

2014

10/2014 Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft

9/2014 Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert

8/2014 Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes

7/2014 Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books

6/2014 Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln

5/2014 Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln

4/2014 Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven

3/2014 Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung

2/2014 Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?

1/2014 Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013

2013

11/2013 Heep-Altiner: Verlustabsorbierung durch latente Steuern nach Solvency II in der Schadenversicherung, Nr. 11/2013

10/2013 Müller-Peters: Kundenverhalten im Umbruch? Neue Informations- und Abschlusswege in der Kfz-Versicherung, Nr. 10/2013

9/2013 Knobloch: Risikomanagement in der betrieblichen Altersversorgung. Proceedings zum 4. FaRis & DAV-Symposium am 14. Juni 2013

8/2013 Strobel (Hrsg.): Rechnungsgrundlagen und Prämien in der Personen- und Schadenversicherung - Aktuelle Ansätze, Möglichkeiten und Grenzen. Proceedings zum 3. FaRis & DAV Symposium am 7. Dezember 2012

7/2013 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Backtesting

6/2013 Knobloch: Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette

5/2013 Heep-Altiner et al. (Hrsg.): Value-Based-Management in Non-Life Insurance

4/2013 Heep-Altiner: Vereinfachtes Formelwerk für den MCEV ohne Renewals in der Schadenversicherung

3/2013 Müller-Peters: Der vernetzte Autofahrer – Akzeptanz und Akzeptanzgrenzen von eCall, Werkstattvernetzung und Mehrwertdiensten im Automobilbereich

2/2013 Maier, Schimikowski (beide Hrsg.): Proceedings zum 6. Diskussionsforum Versicherungsrecht am 25. September 2012 an der FH Köln

1/2013 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2012

2012

11/2012 Goecke (Hrsg.): Alternative Zinsgarantien in der Lebensversicherung. Proceedings zum 2. FaRis & DAV-Symposiums am 1. Juni 2012

10/2012 Klatt, Schiegl: Quantitative Risikoanalyse und -bewertung technischer Systeme am Beispiel eines medizinischen Gerätes

9/2012 Müller-Peters: Vergleichsportale und Verbraucherwünsche

8/2012 Füllgraf, Völler: Social Media Reifegradmodell für die deutsche Versicherungswirtschaft

7/2012 Völler: Die Social Media Matrix - Orientierung für die Versicherungsbranche

6/2012 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise

5/2012 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich - Simulationsrechnungen

4/2012 Günther (Hrsg.): Privat versus Staat - Schussfahrt zur Zwangsversicherung? Tagungsband zum 16. Kölner Versicherungssymposium am 16. Oktober 2011

3/2012 Heep-Altiner/Krause: Der Embedded Value im Vergleich zum ökonomischen Kapital in der Schadenversicherung

2/2012 Heep-Altiner (Hrsg.): Der MCEV in der Lebens- und Schadenversicherung - geeignet für die Unternehmenssteuerung oder nicht? Proceedings zum 1. FaRis & DAV-Symposium am 02.12.2011 in Köln

1/2012 Institut für Versicherungswesen (Hrsg.): Forschungsbericht für das Jahr 2011

2011

5/2011 Reimers-Rawcliffe: Eine Darstellung von Rückversicherungsprogrammen mit Anwendung auf den Kompressionseffekt

4/2011 Knobloch: Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette

3/2011 Knobloch: Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten

2/2011 Heep-Altiner: Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung

1/2011 Goecke: Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich