

Knobloch, Ralf

## Research Report

# Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen.

Forschung am iwvKöln, No. 5/2015

### Provided in Cooperation with:

Technische Hochschule Köln – University of Applied Sciences, Institute for Insurance Studies

*Suggested Citation:* Knobloch, Ralf (2015) : Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen., Forschung am iwvKöln, No. 5/2015, Technische Hochschule Köln, Institut für Versicherungswesen (iwvKöln), Köln,  
<https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-816>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/226573>

### Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

### Terms of use:

*Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.*

*You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.*

*If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

**Forschung am IVW Köln, 5/2015**

Institut für Versicherungswesen

# **Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette**

**Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen**

**Ralf Knobloch**



**Ralf Knobloch**  
**Forschungsstelle FaRis**

## **Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen.**

---

### **Zusammenfassung**

Eine wichtige Fragestellung in den Wirtschaftswissenschaften ist die Bewertung von Zahlungsströmen mit dem Barwert. Sind diese Zahlungsströme mit Risiken behaftet, so kann der Barwert als Zufallsvariable interpretiert werden. In der vorliegenden Arbeit wird der risikobehaftete Zahlungsstrom als bewertete inhomogene Markov-Kette modelliert. Als Hauptergebnis wird eine Formel für die charakteristische Funktion bzw. die momentenerzeugende Funktion der Zufallsvariablen „Barwert“ hergeleitet. Damit ist die Verteilung der Zufallsvariablen eindeutig festgelegt. In konkreten Fallbeispielen wird gezeigt, wie man mit einer EDV-technischen Umsetzung der Formel den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariablen „Barwert“ ermitteln kann.

### **Abstract**

An important question in economics and business is to evaluate cash flows by the present value. If the cash flows are not safe the present value can be interpreted as a random variable. In this paper, the unsafe cash flow will be modelled by a priced inhomogeneous Markov-Chain. The main result is a formula for the characteristic function resp. the moments generating function of the random variable "present value". The characteristic function determinates unambiguously the distribution of the random variable. In specific case examples will be shown how to calculate the expected value, the variance and the standard deviation of the random variable "present value" by an IT-technical implementation of the formula.

### **Schlagwörter:**

Barwert, charakteristische Funktion, Markov-Ketten, Pensionsversicherungsmathematik

# Inhaltsverzeichnis

1.	EINLEITUNG.....	2
2.	DAS MODELL.....	4
3.	DER ERWARTUNGSWERT DES BARWERTS.....	6
4.	DIE CHARAKTERISTISCHE FUNKTION DES BARWERTS.....	7
5.	DIE MOMENTE DES BARWERTS .....	10
6.	FALLBEISPIEL 1: FORDERUNGS AUSFALL .....	12
7.	FALLBEISPIEL 2: BETRIEBLICHE ALTERSVERSORGUNG.....	15
8.	FALLBEISPIEL 3: EINDIMENSIONALE RANDVERTEILUNGEN UND KORRELATIONEN .....	17
9.	SCHLUSSBEMERKUNG.....	19
	LITERATURVERZEICHNIS .....	20

# 1. Einleitung

In den Wirtschaftswissenschaften ist der finanzmathematische Barwert eines Zahlungsstroms ein zentraler Begriff. Er bildet die Grundlage für viele ökonomische Entscheidungen und dient bei der (bilanziellen) Bewertung unterschiedlichster Sachverhalte als Basis. Dabei dominieren in den Wirtschaftswissenschaften die deterministischen Modelle. Da jedoch zukünftige Zahlungsströme in der Regel mit Risiken behaftet sind, erscheint es sinnvoll auch stochastische Modelle zu untersuchen. Dies führt direkt dazu den Barwert nicht als feste Größe, sondern als Zufallsvariable zu verstehen.

In [4] und [6] wird ein Modell betrachtet, bei dem sich ein risikobehafteter Zahlungsstrom aus einer zugrundeliegenden inhomogenen Markov-Kette bzw. aus einem gedächtnislosen Prozess ergibt. In beiden Artikeln wird als Hauptergebnis eine Formel für den erwarteten Barwert hergeleitet: in [4] bei jährlicher Zahlweise, in [6] bei unterjährlicher Zahlweise. In [5] wird die Anwendung auf die betriebliche Altersversorgung bzw. die Pensionsversicherungsmathematik näher beleuchtet. Das diesen Artikeln zugrunde liegende Modell wird in der Literatur als bewertete Markov-Kette bezeichnet. Bewertete Markov-Ketten finden ihre Anwendungen in den unterschiedlichsten wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen (vgl. [10], S.45ff).

In der vorliegenden Arbeit stehen - neben dem Erwartungswert - die Verteilung und die (höheren) Momente, z.B. die Varianz und die Standardabweichung, der Zufallsvariablen „Barwert“ im Mittelpunkt des Interesses. Zur Darstellung der Verteilung einer Zufallsvariablen gibt es mehrere Möglichkeiten. Üblicherweise bestimmt man die Verteilungsfunktion oder alternativ bei diskreten Zufallsvariablen die Einzelwahrscheinlichkeiten bzw. bei stetigen Zufallsvariablen die Dichtefunktion. Diese Ansätze scheitern beim hier betrachteten Modell an dessen Komplexität.

Eine weitere Möglichkeit die Verteilung eindeutig darzustellen ergibt aus dem Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen: Für eine reellwertige Zufallsvariable  $\mathbf{B}$  ist die Verteilung durch die komplexwertige Funktion

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\exp(\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{B})) , \mathbf{x} \in \mathbf{IR}$$

eindeutig festgelegt (vgl. [2], S.92). Dabei ist  $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit.

Im vorliegenden Artikel wird für den Barwert einer bewerteten Markov-Kette, d.h. für den Barwert eines risikobehafteten Zahlungsstroms, eine geschlossene Formel für die charakteristische Funktion hergeleitet.

Analog zur charakteristischen Funktion kann für beschränkte Zufallsvariablen auch die momentenerzeugende Funktion

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B})) , \mathbf{x} \in \mathbf{IR}$$

bestimmt werden. Die höheren Momente ergeben sich durch Ableiten dieser Funktion (vgl. [2], S.95). Setzt man dies EDV-technisch um, so können z.B. durch zweimaliges numerisches Ableiten die Varianz und die Standardabweichung ermittelt werden.

## 2. Das Modell

Gegeben sei eine Markov-Kette  $(X_t)_{t=0,1,2,\dots}$  mit dem endlichen Zustandsraum  $S = \{0,1,2,\dots,N\}$ . Dabei steht der Zeitpunkt  $t$  für den Beginn des  $(t+1)$ -ten Jahres bzw. die Zufallsvariable  $X_t$  für den Zustand zu Beginn des  $(t+1)$ -ten Jahres,  $t = 0,1,2,\dots$ . Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt  $t-1$  zum Zeitpunkt  $t$  seien gegeben durch die  $(N+1) \times (N+1)$ -Matrix

$$Q(t) = (q_{jk}(t))_{j,k \in \{0,1,\dots,N\}}$$

d.h.

$$q_{jk}(t) := P(X_t = k \mid X_{t-1} = j), \quad j,k = 0,1,\dots,N, \quad t = 1,2,\dots$$

(vgl. [4]). Da die Übergangsmatrizen explizit von dem Zeitparameter  $t$  abhängen, heißt die Markov-Kette inhomogen (vgl. [8], S.16f, oder [10], S.11).

Die Verteilung der Zufallsvariablen  $X_t$ ,  $t = 0,1,2,\dots$ , sei gegeben durch den Zeilenvektor  $P_t = (P_{t,j})_{j=0,1,2,\dots,N}$ , d.h.

$$P(X_t = j) = P_{t,j}, \quad j = 0,1,2,\dots,N.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass  $P_0$  vorgegeben ist und alle Wahrscheinlichkeiten, Verteilungen und Momente gegeben dieser Anfangsverteilung berechnet werden. Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [8], S.14) ergibt sich für  $t = 0,1,2,\dots$

$$P_t = P_0 \cdot \prod_{s=1}^t Q(s)$$

(vgl. [4]).

Für jeden Zeitpunkt  $t = 0,1,2,\dots$  sei die Höhe der Zahlung in Abhängigkeit des eingenommenen Zustands durch den Spaltenvektor  $L_t$  festlegt:

$$L_t = (L_{t,j})_{j=0,1,2,\dots,N}, \quad t = 0,1,2,\dots$$

Dieser Spaltenvektor wird im Folgenden Leistungsvektor genannt. Es sei  $\text{abs}(x)$  der Absolutbetrag einer reellen Zahl  $x$ . Es wird für die Leistungsvektoren folgende Bedingung vorausgesetzt:

$$L := \max\{\text{abs}(L_{t,j}) \mid t = 0,1,2,\dots, j = 0,1,2,\dots,N\} < \infty.$$

Die Menge der Leistungsvektoren wird in der Literatur auch Bewertung der Markov-Kette genannt.  $(\mathbf{X}_t)_{t=0,1,2,\dots}$  wird daher als bewertete inhomogene Markov-Kette bezeichnet. Bewertete Markov-Ketten haben in den Wirtschaftswissenschaften eine Vielzahl von Anwendungen. Beispielsweise werden sie bei Lagerhaltungsmodellen eingesetzt, dabei steht die Bewertung für die mit der Lagerhaltung verbundenen Kosten (Bestell-, Lager- und Fehlmengenkosten). In anderen ökonomischen Anwendungen modelliert die Bewertung zustandsabhängige Gewinne (vgl. [10], S.45ff). Im vorliegenden Modell steht die Bewertung für den risikobehafteten Zahlungsstrom.

Ausgehend von der beschriebenen Markov-Kette ist der Barwert des risikobehafteten Zahlungsstroms wie folgt definiert:

$$\mathbf{B}_0 := \sum_{t=0}^{\infty} v^t \cdot \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_t=j\}} \cdot \mathbf{L}_{t,j}$$

Dabei sei  $v$  der Diskontierungsfaktor für eine Periode definiert durch  $v = \frac{1}{1+r}$  und  $r > 0$  der zeitlich konstante Rechnungszins pro Jahr. Wg.  $\mathbf{L} < \infty$  und  $0 < v < 1$  konvergiert die Reihe  $\mathbf{B}_0$  absolut (vgl. [4]). Daraus folgt die Konvergenz der Reihe  $\mathbf{B}_0$  (vgl. [1], S.40f). Der Barwert  $\mathbf{B}_0$  ist somit eine reellwertige Zufallsvariable.

Praktische Anwendungen werden i.d.R. für einen endlichen Zeitraum modelliert. Daher ist es sinnvoll den Zahlungsstrom auf einen endlichen Zeitraum zu beschränken und die Zufallsvariable für  $n \in \mathbf{IN}_0$  wie folgt zu modifizieren:

$$\mathbf{B}_0^n := \sum_{t=0}^n v^t \cdot \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_t=j\}} \cdot \mathbf{L}_{t,j}.$$

Bei einem endlichen Zeitraum kann auf die Bedingung  $\mathbf{L} < \infty$  verzichtet werden. Ferner ist für den jährlichen Rechnungszins  $r = 0$  zugelassen.



### 3. Der Erwartungswert des Barwerts

Für den Erwartungswert der Zufallsvariablen „Barwert“ wurde in [4] folgender Satz bewiesen:

$$\text{Satz 1: } \mathbf{E}(\mathbf{B}_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{L}_s$$

Im Spezialfall einer homogenen Markov-Kette, d.h. falls gilt  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}, t = 1, 2, \dots$ , ergibt sich

$$\mathbf{E}(\mathbf{B}_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}^s \cdot \mathbf{L}_s .$$

Für die Zufallsvariable  $\mathbf{B}_0^n$  erhält man

$$\mathbf{E}(\mathbf{B}_0^n) = \sum_{s=0}^n \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{L}_s .$$

## 4. Die charakteristische Funktion des Barwerts

Es sei  $n \in \mathbb{IN}_0$ . Gemäß Eindeutigkeitsatz ist die Verteilung der reellwertigen Zufallsvariable  $B_0^n$  durch die (komplexwertige) charakteristische Funktion

$$\varphi(x) = E(\exp(i \cdot x \cdot B_0^n)), x \in \mathbb{IR}$$

eindeutig festgelegt (vgl. [2], S.92). Dabei ist  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit.

Zur Formulierung des Hauptsatzes werden die folgenden  $(N+1) \times (N+1)$ -Diagonalmatrizen definiert:

$$V(t, x) := \begin{pmatrix} \exp(i \cdot x \cdot v^t \cdot L_{t,0}) & & & & \\ & \exp(i \cdot x \cdot v^t \cdot L_{t,1}) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \exp(i \cdot x \cdot v^t \cdot L_{t,N}) \end{pmatrix}$$

$t = 0, 1, 2, \dots$  und  $x \in \mathbb{IR}$ .

Hauptsatz:

$$\varphi(x) = E(\exp(i \cdot x \cdot B_0^n)) = \sum_{j=0}^N \left( P_0 \cdot V(0, x) \cdot \prod_{t=1}^n (Q(t) \cdot V(t, x)) \right)_j, x \in \mathbb{IR}$$

Entscheidend für den Beweis dieser Aussage ist das folgende elementare Ergebnis der Matrizenrechnung.

Hilfssatz:

Es seien gegeben die  $(N+1) \times (N+1)$ -Matrizen  $A(t) = (a_{jk}(t))_{j,k \in \{0,1,\dots,N\}}$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots$  und der Vektor  $z = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_N)$ .

$$\text{Für } n \in \mathbb{IN} \text{ gilt: } \left( z \cdot \prod_{t=1}^n A(t) \right)_{l_n} = \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{n-1}=0} z_{l_0} \cdot \prod_{t=1}^n a_{l_{k-1} l_k}(t).$$

Beweis: Induktion nach  $n$

$\mathbf{n} = 1$ :

$$\left( \mathbf{z} \cdot \prod_{t=1}^1 \mathbf{A}(t) \right)_{l_1} = (\mathbf{z} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{1}))_{l_1} = \left( \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{00}(\mathbf{1}) & \cdots & \mathbf{a}_{0N}(\mathbf{1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_{N0}(\mathbf{1}) & \cdots & \mathbf{a}_{NN}(\mathbf{1}) \end{pmatrix} \right)_{l_1} = \sum_{l_0=0}^N z_{l_0} \cdot \mathbf{a}_{l_0 l_1}(\mathbf{1})$$

$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n} + 1$ :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{z} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}+1} \mathbf{A}(t) \right)_{l_{\mathbf{n}+1}} &= \left( \mathbf{z} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{n}+1) \right)_{l_{\mathbf{n}+1}} = \sum_{l_{\mathbf{n}}=0}^N \left( \mathbf{z} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{A}(t) \right)_{l_{\mathbf{n}}} \cdot \mathbf{a}_{l_{\mathbf{n}} l_{\mathbf{n}+1}}(\mathbf{n}+1) = \\ &= \sum_{l_{\mathbf{n}}=0}^N \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}-1}=0}^N z_{l_0} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{a}_{l_{k-1} l_k}(t) \cdot \mathbf{a}_{l_{\mathbf{n}} l_{\mathbf{n}+1}}(\mathbf{n}+1) = \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}-1}, l_{\mathbf{n}}=0}^N z_{l_0} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}+1} \mathbf{a}_{l_{k-1} l_k}(t). \end{aligned}$$

□

Beweis des Hauptsatzes:

Es sei  $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ .

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \mathbf{E} \left( \exp(\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_0^{\mathbf{n}}) \right) = \mathbf{E} \left( \exp \left( \mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \sum_{t=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{v}^t \cdot \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_t=j\}} \cdot L_{t,j} \right) \right) = \\ &= \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}}=0}^N \exp \left( \mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \sum_{t=0}^{\mathbf{n}} \mathbf{v}^t \cdot L_{t, l_t} \right) \cdot \mathbf{P}(X_0 = l_0, X_1 = l_1, \dots, X_{\mathbf{n}} = l_{\mathbf{n}}) = \\ &= \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}}=0}^N \prod_{t=0}^{\mathbf{n}} \exp(\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^t \cdot L_{t, l_t}) \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} q_{l_{t-1} l_t}(t) = \\ &= \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}}=0}^N \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \exp(\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^0 \cdot L_{0, l_0}) \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} q_{l_{t-1} l_t}(t) \cdot \exp(\mathbf{i} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^t \cdot L_{t, l_t}) = \\ &= \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}}=0}^N (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{V}(0, \mathbf{x}))_{l_0} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} (\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{V}(t, \mathbf{x}))_{l_{t-1} l_t} = \\ &= \sum_{l_{\mathbf{n}}=0}^N \sum_{l_0, l_1, \dots, l_{\mathbf{n}-1}=0}^N (\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{V}(0, \mathbf{x}))_{l_0} \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} (\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{V}(t, \mathbf{x}))_{l_{t-1} l_t} = \\ &= \sum_{l_{\mathbf{n}}=0}^N \left( \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{V}(0, \mathbf{x}) \cdot \prod_{t=1}^{\mathbf{n}} (\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{V}(t, \mathbf{x})) \right)_{l_{\mathbf{n}}} \end{aligned}$$

□

Damit lässt sich die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen  $\mathbf{B}_0^{\mathbf{n}}$  im Wesentlichen auf die Matrizenrechnung zurückführen. Eine entsprechende Aussage gilt auch für die momentenerzeugende Funktion

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_0^n)), \mathbf{x} \in \mathbf{IR}.$$

Da die Zufallsvariable  $\mathbf{B}_0^n$  beschränkt ist, lässt das folgende Ergebnis formulieren. Der Beweis kann analog zum Beweis des Hauptsatzes geführt werden.

Satz 2:

Es seien

$$U(\mathbf{t}, \mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{t},0}) & & & & & & \\ & \exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{t},1}) & & & & & \\ & & \mathbf{0} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{t},N}) \end{pmatrix}$$

$\mathbf{t} = 0,1,2,\dots$  und  $\mathbf{x} \in \mathbf{IR}$ .

Es gilt:

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}_0^n)) = \sum_{j=0}^N \left( \mathbf{P}_0 \cdot U(0, \mathbf{x}) \cdot \prod_{t=1}^n (Q(t) \cdot U(t, \mathbf{x})) \right)_j, \mathbf{x} \in \mathbf{IR}$$

## 5. Die Momente des Barwerts

Mithilfe der momentenerzeugenden Funktion können die Momente der Zufallsvariablen  $\mathbf{B}_0^n$  berechnet werden. Denn es gilt:

$$\mathbf{E}\left(\left(\mathbf{B}_0^n\right)^k\right) = \mathbf{m}^{(k)}(\mathbf{0})$$

(vgl. [2], S.95). Damit ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\mathbf{B}_0^n\right) &= \mathbf{m}'(\mathbf{0}) = \sum_{j=0}^N \left( \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{U}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \cdot \prod_{t=1}^n (\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{U}(t, \mathbf{x})) \right)'_j \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \\ &= \left( \sum_{l_0, l_1, \dots, l_n=0}^N \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{L}_{0, l_0}) \cdot \prod_{t=1}^n \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \exp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{L}_{t, l_t}) \right)' \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \\ &= \sum_{l_0, l_1, \dots, l_n=0}^N \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{L}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^n \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) + \sum_{s=1}^n \sum_{l_0, l_1, \dots, l_n=0}^N \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^n \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{L}_{s, l_s} = \\ &= \sum_{l_0=0}^N \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \sum_{l_1, \dots, l_n=0}^N \prod_{t=1}^n \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \mathbf{L}_{0, l_0} + \\ &+ \sum_{s=1}^n \sum_{l_0, \dots, l_s=0}^N \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \sum_{l_{s+1}, \dots, l_n=0}^N \prod_{t=s+1}^n \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \mathbf{L}_{s, l_s} = \\ &= \sum_{l_0=0}^N \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \sum_{l_n=0}^N \left( \prod_{t=1}^n \mathbf{Q}(t) \right)_{l_0, l_n} \cdot \mathbf{L}_{0, l_0} + \\ &+ \sum_{s=1}^n \sum_{l_0, \dots, l_s=0}^N \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \sum_{l_n=0}^N \left( \prod_{t=s+1}^n \mathbf{Q}(t) \right)_{l_s, l_n} \cdot \mathbf{L}_{s, l_s} = \\ &= \sum_{l_0=0}^N \mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{L}_{0, l_0} + \sum_{s=1}^n \sum_{l_0, \dots, l_s=0}^N \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{L}_{s, l_s} = \\ &= \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 + \sum_{s=1}^n \sum_{l_s=0}^N \mathbf{v}^s \cdot \left( \sum_{l_0, \dots, l_{s-1}=0}^N \mathbf{P}_{0, l_0} \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{q}_{l_{t-1}, l_t}(t) \right) \cdot \mathbf{L}_{s, l_s} = \\ &= \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 + \sum_{s=1}^n \sum_{l_s=0}^N \mathbf{v}^s \cdot \left( \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{Q}(t) \right)_{l_s} \cdot \mathbf{L}_{s, l_s} = \\ &= \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 + \sum_{s=1}^n \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{L}_s = \sum_{s=0}^n \mathbf{v}^s \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{t=1}^s \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{L}_s \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Ergebnis aus Kapitel 3. Die höheren Momente lassen ebenfalls durch Ableiten der momentenerzeugenden Funktion bestimmen. Zu bemerken ist dabei, dass sich insbesondere die Varianz der Zufallsvariablen  $\mathbf{B}_0^n$  wie folgt ergibt:

$$\text{Var}(\mathbf{B}_0^n) = \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{B}_0^n\right)^2\right) - \left(\mathbf{E}\left(\mathbf{B}_0^n\right)\right)^2 = \mathbf{m}''(\mathbf{0}) - \left(\mathbf{m}'(\mathbf{0})\right)^2.$$

Allerdings sind die beim Ableiten entstehenden Terme schwer zu handhaben, so dass eine EDV-technische Lösung unter Verwendung der numerischen Ableitung sinnvoll erscheint.

Mithilfe der üblichen numerischen Ableitungen (vgl. [11], S.43ff)

$$\mathbf{m}'(\mathbf{0}) \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}(-\mathbf{x})}{2 \cdot \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{m}''(\mathbf{0}) \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(-\mathbf{x}) - 2 \cdot \mathbf{m}(\mathbf{0})}{\mathbf{x}^2}$$

ergibt sich dann

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{B}_0^n\right) = \mathbf{m}'(\mathbf{0}) \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}(-\mathbf{x})}{2 \cdot \mathbf{x}}$$

$$\mathbf{E}\left(\left(\mathbf{B}_0^n\right)^2\right) = \mathbf{m}''(\mathbf{0}) \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(-\mathbf{x}) - 2 \cdot \mathbf{m}(\mathbf{0})}{\mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(-\mathbf{x}) - 2}{\mathbf{x}^2}$$

bzw.

$$\text{Var}(\mathbf{B}_0^n) = \mathbf{E}\left(\left(\mathbf{B}_0^n\right)^2\right) - \left(\mathbf{E}\left(\mathbf{B}_0^n\right)\right)^2 = \mathbf{m}''(\mathbf{0}) - \left(\mathbf{m}'(\mathbf{0})\right)^2 \approx \frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) + \mathbf{m}(-\mathbf{x}) - 2}{\mathbf{x}^2} - \left(\frac{\mathbf{m}(\mathbf{x}) - \mathbf{m}(-\mathbf{x})}{2 \cdot \mathbf{x}}\right)^2$$

.

Dabei sei  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  hinreichend klein.

## 6. Fallbeispiel 1: Forderungsausfall

Wir betrachten das folgende einfache Beispiel aus [4]: Ein Unternehmen A habe eine Forderung gegenüber einem Unternehmen B. Diese soll in den nächsten  $n$  Jahre durch die Zahlungen  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n > 0$  beglichen werden. Die Zahlungen erfolgen dabei jeweils zum Ende des Jahres. Die Forderung soll aus Sicht des Unternehmens A bewertet werden. Dabei geht das Unternehmen A davon aus, dass es Wahrscheinlichkeiten  $0 < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n < 1$  gibt, mit denen die Zahlungen zu einem bestimmten Zeitpunkt ausfallen, d.h.

$$q_k = P(\text{keine Zahlung zum Ende des } k\text{-ten Jahres}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Es wird vorausgesetzt, dass die Zahlungen nach einem Ausfall nicht wieder aufgenommen werden, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass im  $k$ -ten Jahr keine Zahlung erfolgt, beinhaltet sowohl das Ereignis „Beendigung der Zahlung im  $k$ -ten Jahr“ als auch das Ereignis „Beendigung der Zahlung in einem früheren Jahr“. Damit ergibt sich als Standardbewertungsansatz (erwarteter Barwert):

$$\sum_{k=1}^n v^k \cdot (1 - q_k) \cdot Z_k.$$

$v$  sei wiederum der konstante Diskontierungsfaktor. Wir gehen von folgender Parameterbelegung aus:

$$\begin{aligned} n &= 5 \\ Z_1 &= Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = 100 \\ q_1 &= 0,01 \\ q_2 &= 0,02 \\ q_3 &= 0,03 \\ q_4 &= 0,04 \\ q_5 &= 0,05 \\ r &= 0,03 \Rightarrow v = 1,03^{-1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Bewertung bzw. erwarteter Barwert dieser Forderung:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n v^k \cdot (1 - q_k) \cdot Z_k &= \\ &= 100 \cdot (1,03^{-1} \cdot 0,99 + 1,03^{-2} \cdot 0,98 + 1,03^{-3} \cdot 0,97 + 1,03^{-4} \cdot 0,96 + 1,03^{-5} \cdot 0,95) \approx 440,50 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Barwert als Zufallsvariable, so kann diese Zufallsvariable die folgenden Werte annehmen:

Anzahl der Zahlungen <b>k</b>	Barwert (gerundet) <b>B<sub>0</sub><sup>5</sup></b>	Wahrscheinlichkeit <b>p<sub>k</sub></b>
0	0	0,01
1	97,09	0,01
2	191,35	0,01
3	282,86	0,01
4	371,71	0,01
5	457,97	0,95

Dabei berechnet sich der Barwert bei **k** Zahlungen mit der Formel

$$100 \cdot \frac{1,03^k - 1}{0,03} \cdot \frac{1}{1,03^k}$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeit **p<sub>k</sub>** ergibt sich durch (vgl. [4]):

$$p_0 = q_1 = 0,01$$

$$p_k = \frac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}} \cdot (1 - q_{k-1}) = q_k - q_{k-1} = 0,01, \quad k = 1,2,3,4$$

$$p_5 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0,95$$

Damit erhält man als Erwartungswert und als Varianz:

$$E(B_0^5) \approx 440,50$$

$$E((B_0^5)^2) \approx 201.892,50$$

$$\text{Var}(B_0^5) = E((B_0^5)^2) - (E(B_0^5))^2 \approx 4.310,26$$

Diese Momente lassen sich wie im letzten Kapitel beschrieben auch mithilfe der momentenerzeugenden Funktion und deren (numerischer) Ableitung bestimmen. Dazu muss der Sachverhalt zunächst als bewertete inhomogene Markov-Kette modelliert werden:

Der Zustandsraum sei mit  $S = \{0,1\}$  gegeben, dabei steht Zustand **0** dafür, dass keine Zahlung erfolgt (Ausfall), und Zustand **1** dafür, dass die Zahlung erfolgt (kein Ausfall). Für die Anfangsverteilung gilt somit:  $P_0 = (0 \ 1)$ , d.h. zum Zeitpunkt **0** ist die Forderung noch nicht ausgefallen. Die Leistungsvektoren/Zahlungen gehen durch  $L_{k,0} := 0$  und  $L_{k,1} := Z_k = 100$ ,  $k = 1,2,3,4,5$ , in die Modellierung ein. Ferner ist  $L_0$  der Nullvektor. Aus



den Wahrscheinlichkeiten  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$  und der Festlegung  $q_0 := 0$  werden die Übergangsmatrizen für  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  durch

$$q_{0,0}(k) := 1$$

$$q_{0,1}(k) := 0$$

$$q_{1,0}(k) := \frac{q_k - q_{k-1}}{1 - q_{k-1}}$$

$$q_{1,1}(k) := \frac{1 - q_k}{1 - q_{k-1}}$$

definiert.

Die EDV-technische Umsetzung der Formel aus Satz 2 in Verbindung mit den numerischen Ableitungen

$$m'(0) \approx \frac{m(x) - m(-x)}{2 \cdot x}$$

$$m''(0) \approx \frac{m(x) + m(-x) - 2}{x^2}$$

( $x > 0$  hinreichend klein) liefert die folgenden (gerundeten) Ergebnisse:

$x$	$E(B_0^5)$	$\text{Var}(B_0^5)$
0,0001	444,66	4.308,86
0,00001	444,50	4.309,25
0,000001	444,50	4.310,26
0,0000001	444,50	4.310,26
0,00000001	444,50	4.310,71
0,000000001	444,50	4.700,40

Wählt man  $x$  im Bereich von  $10^{-5}$  und  $10^{-7}$ , so erhält man (bis auf Rundung) in diesem Beispiel die Ergebnisse der exakten Berechnung. Verwendet man zur Näherung andere Werte für  $x$ , so kann es durch numerische Effekte zu größeren Ungenauigkeiten kommen. Dabei ist zu beachten, dass der sinnvolle Bereich für  $x$  von der Größenordnung der Zahlungen, dem zugrundeliegenden Zeitraum und dem jährlichen Rechnungszins abhängt.

## 7. Fallbeispiel 2: Betriebliche Altersversorgung

In Deutschland basiert die Bewertung von Verpflichtungen aus betrieblicher Altersversorgung üblicherweise auf dem Richttafel-Modell von Klaus Heubeck. Dieses Modell sieht für jeden Arbeitnehmer bzw. Rentner mehrere Zustände vor. So kann eine Person aktiv, ausgeschieden oder invalide sein oder sie bezieht als Alters-, Invaliden- oder Hinterbliebenenrentner eine laufende Rente. Das Richttafel-Modell enthält zur Bewertung zum einen ein Formelwerk und zum anderen biometrische Rechnungsgrundlagen für den Übergang zwischen den Zuständen. Letztere sind als eine sogenannte Generationentafel gegeben, d.h. die Wahrscheinlichkeiten hängen nicht nur vom Geschlecht und vom Alter ab, sondern auch vom Geburtsjahrgang. Mit dem Richttafel-Modell können u.a. Bewertungsfaktoren für eine jährlich vorschüssige Zahlung der Höhe 1 ermittelt werden (vgl. [3]).

Die betriebliche Altersversorgung kann aber auch als eine bewertete inhomogene Markov-Kette modelliert werden. Dabei werden die biometrischen Rechnungsgrundlagen des Richttafeln-Modells als Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet (vgl. [5]). Setzt man dies EDV-technisch um, so kann man mithilfe der Formel aus Satz 2 und den numerischen Ableitungen den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung der Zufallsvariablen „Barwert der Verpflichtungen“ ermitteln. Vergleicht man die o.g. Bewertungsfaktoren gemäß Richttafel-Modell und die Erwartungswerte zum „Barwert der Verpflichtungen“, so zeigen sich lediglich minimale Abweichungen. Diese sind durch Rundungen und rechentechnische Effekte beim numerischen Ableiten verursacht.

Im Folgenden wird anhand eines konkreten Personenbestands die Bewertung gemäß Richttafel-Modell und die Berechnung der Momente auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette verglichen. Der Einfachheit halber wird ein reiner Rentnerbestand betrachtet, in dem zum Stichtag (31.12.2013) alle Alters- und Invalidenrentner eine jährlich vorschüssige Rente in Höhe von 1.200 € und alle Witwen-/Witwenrentner eine jährlich vorschüssige Rente in Höhe von 720 € beziehen. Die Alters- und Invalidenrentner haben eine Anwartschaft auf Witwen-/Witwerrente in Höhe von 60% der eigenen Rente. Der Bestand setzt sich wie folgt zusammen::

- 100 männlichen Rentner: 20 Invalidenrenten, 75 Altersrenten, 5 Witwerrenten
- 81 weibliche Rentner: 5 Invalidenrenten, 20 Altersrenten, 56 Witwenrenten

Wie bei betrieblichen Versorgungswerken üblich wird jede Person einzeln bewertet, d.h. für jede Person werden der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable „Barwert der Verpflichtungen“ ermittelt. Den Erwartungswert und die Varianz für den Bestand erhält man durch Addition der Einzelwerte, die Standardabweichung als Wurzel aus der Varianz. Dass sich der Erwartungswert für den Bestand durch Addition ergibt, begründet sich mit der Linearität des Erwartungswertes. Dass sich die Varianz für den Bestand als Summe der Varianzen berechnet, setzt die stochastische Unabhängigkeit der personenbezogenen Barwerte voraus. Letzteres ist der Fall, wenn die biometrischen Ereignisse der einzelnen

Personen stochastisch unabhängig sind.<sup>1</sup> Zur Ermittlung der numerischen Ableitungen wird die Variable der momentenerzeugenden Funktion mit  $x = 10^{-6}$  angesetzt.

Die Bewertung erfolgt zum Stichtag 31.12.2013 unter Berücksichtigung einer jährlichen Dynamik in Höhe von 1,5% sowie eines jährlichen Rechnungszinses in Höhe von 3,0%. Als biometrische Rechnungsgrundlagen werden die Wahrscheinlichkeiten der Richttafeln angesetzt. Die Ergebnisse der üblichen Bewertung gemäß Richttafel-Modell und die Ergebnisse auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Ketten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Ferner enthält die Tabelle zum Vergleich die Resultate einer Monte-Carlo-Simulation mit 100 Simulationsläufen.

Methode/Modell	Bewertung/ Erwartungswert	Varianz	Standardabweichung
Richttafel-Modell	2.546.124		
Bewertete inhomogene Markov-Kette	2.546.037	5.410.171.495	73.554
Monte-Carlo- Simulation	2.555.959	5.240.631.196	72.293

Somit stimmen in diesem Beispiel die Bewertung gemäß Richttafel-Modell und der Erwartungswert auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette bis auf eine Abweichung im Promillebereich überein. Zusätzlich liefert die Modellierung mit einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette die Varianz und die Standardabweichung (in Höhe von ca. 2,9% des Erwartungswertes). Die Ergebnisse auf Basis einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette passen im Wesentlichen zu den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation. Die Abweichungen sind durch die relativ geringe Anzahl von Simulationsläufen (100) und eventuell durch die Qualität des zugrunde liegenden Zufallsgenerators verursacht.

---

<sup>1</sup> Alternativ kann die momentenerzeugende Funktion des Bestandes durch Multiplikation der personenbezogenen momentenerzeugenden Funktionen berechnet und anschließend das Produkt an der Stelle  $x=0$  abgeleitet werden. Diese Vorgehensweise setzt ebenfalls die stochastische Unabhängigkeit der personenbezogenen Barwerte voraus.

## 8. Fallbeispiel 3: Eindimensionale Randverteilungen und Korrelationen

In der Praxis interessiert man sich bei risikobehafteten Zahlungsströmen oftmals für die Chancen und Risiken in einem einzelnen Jahr, d.h. man analysiert die Verteilung der entsprechenden Zahlung. Auch für diese Zufallsvariable ergibt sich die charakteristische Funktion wie folgt auf Basis des Hauptsatzes.

Es seien  $n, k \in \mathbb{IN}$  mit  $0 < k \leq n$ . Es  $Y_k := \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_k=j\}} \cdot L_{k,j}$  die vom Zustand der inhomogenen Markov-Kette zum Zeitpunkt  $k$  abhängige - sprich zufällige - Zahlung. Man wählt nun

$$(1) L_{t,j} = \mathbf{0} \text{ für alle } j = 0, 1, \dots, N, t = 0, 1, \dots, n, t \neq k$$

$$(2) r = \mathbf{0} \text{ bzw. } v = \frac{1}{1+r} = 1$$

Somit gilt für den im Hauptsatz betrachteten zufälligen Barwert

$$B_0^n = \sum_{t=0}^n v^s \cdot \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_t=j\}} \cdot L_{t,j} = Y_k \cdot$$

D.h. die zufälligen Zahlung im  $k$ -ten Jahr kann als Barwert einer bewerteten Markov-Kette dargestellt werden. Wg. (1) gilt

$$V(t, x) = E \text{ für alle } t = 0, 1, \dots, n, t \neq k, x \in \mathbf{IR}$$

( $E$  = Einheitsmatrix). Aus dem Hauptsatz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &:= E(\exp(i \cdot x \cdot Y_k)) = E(\exp(i \cdot x \cdot B_0^n)) = \sum_{j=0}^N \left( P_0 \cdot V(0, x) \cdot \prod_{t=1}^n (Q(t) \cdot V(t, x)) \right)_j = \\ & \sum_{j=0}^N \left( P_0 \cdot \prod_{t=1}^k Q(t) \cdot V(k, x) \cdot \prod_{t=k+1}^n Q(t) \right)_j, x \in \mathbf{IR} \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass der jährliche Rechnungszins mit  $\mathbf{0}$  angesetzt wird (vgl. (2)). Versteht man unter  $(Y_k)_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$  einen stochastischen Prozess, so sind durch die zugehörigen charakteristischen Funktionen  $(\varphi_k)_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$  dessen eindimensionale Randverteilungen eindeutig festgelegt.

Analog zur charakteristischen Funktion erhält man für die momentenerzeugende Funktion

$$m_k(x) := E(\exp(x \cdot Y_k)) = \sum_{j=0}^N \left( P_0 \cdot \prod_{t=1}^k Q(t) \cdot U(k, x) \cdot \prod_{t=k+1}^n Q(t) \right)_j, x \in \mathbf{IR}.$$

Somit können der Erwartungswert, die Varianz, die Standardabweichung von  $Y_k$  durch die EDV-technische Umsetzung der Formel und die numerischen Ableitungen bestimmt werden.

Neben der Analyse der eindimensionalen Randverteilungen besteht auch die Möglichkeit den Korrelationskoeffizienten  $\rho$  zweier Zahlungen  $Y_k$  und  $Y_l$ ,  $0 < k < l \leq n$ , mit folgenden Schritten zu bestimmen:

1. Ermittlung von  $\text{Var}(Y_k)$  und  $\text{Var}(Y_l)$  wie oben beschrieben.
2. Analog zu den obigen Ausführungen gilt:

$$\mathbf{E}(\exp(\mathbf{x} \cdot (Y_k + Y_l))) = \sum_{j=0}^N \left( P_0 \cdot \prod_{t=1}^k Q(t) \cdot U(k, \mathbf{x}) \cdot \prod_{t=k+1}^l Q(t) \cdot U(l, \mathbf{x}) \cdot \prod_{t=l+1}^n Q(t) \right)_j, \mathbf{x} \in \mathbf{IR}.$$

3. Ermittlung von  $\text{Var}(Y_k + Y_l)$  durch die EDV-technische Umsetzung und die numerische Ableitung der Formel.
4. Ermittlung des Korrelationskoeffizienten  $\rho$  durch Einsetzen und Umformen der Gleichung

$$\text{Var}(Y_k + Y_l) = \text{Var}(Y_k) + \text{Var}(Y_l) + 2 \cdot \sqrt{\text{Var}(Y_k)} \cdot \sqrt{\text{Var}(Y_l)} \cdot \rho.$$

## 9. Schlussbemerkung

Das in diesem Artikel verwendete Modell basiert auf einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette und damit verbunden auf einem risikobehafteten Zahlungsstrom. Im Hauptsatz wurde mithilfe der Matrizenrechnung eine Formel für die charakteristische Funktion der Zufallsvariable „Barwert des Zahlungsstroms“ hergeleitet. Damit ist die Verteilung dieser Zufallsvariablen eindeutig festgelegt. Geht man von der komplexwertigen charakteristischen Funktion zur reellwertigen momentenerzeugenden Funktion über und setzt man die auf der Matrizenrechnung basierende Formel EDV-technisch um, so kann man mithilfe der numerischen Ableitung die Momente, z.B. den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung, ermitteln.

In den drei Fallbeispielen wird ausgeführt, wie man diese Vorgehensweise in der Praxis bei ganz konkreten Fragestellungen nutzen kann. Dabei wird in den Beispielen eine jährliche Betrachtungsweise bzw. Zahlweise zugrunde gelegt. In der Praxis aber sind viele Sachverhalte auf eine unterjährliche Zahlweise (z.B. monatlich oder quartalsweise) abgestellt. In [6] und [7] wird die Verallgemeinerung für den Erwartungswert bei unterjährlicher Zahlweise ausgeführt. Es zeigt sich, dass es ganz entscheidend ist, wie man den Jahreszins und die Wahrscheinlichkeiten unterjährlich verteilt. Als einfachstes Modell wird dabei eine lineare Verteilung behandelt.

Es stellt sich nun die Frage, welche Auswirkungen eine unterjährliche Zahlweise auf die charakteristische Funktion der Zufallsvariable „Barwert“ hat. Kann diese weiterhin mit der Matrizenrechnung berechnet werden? Können mithilfe einer EDV-technischen Umsetzung aus der momentenerzeugenden Funktion auch bei unterjährlicher Zahlweise der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung ermittelt werden? Und zu guter Letzt: Wie verhält es sich mit dem Invarianzsatz, der in der Pensionsversicherungsmathematik eine wichtige Rolle spielt (vgl. [6], [9])?

## Literaturverzeichnis

- [1] *Forster, Otto* Analysis 1, 4. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1983.
- [2] *Gänssler, Peter; Stute, Winfried* Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1977.
- [3] *Heubeck, Klaus* Richtttafeln 2005G, Textband und Programm Heurika 2, Verlag: Heubeck-Richtttafeln-GmbH, Köln 2005.
- [4] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten, In: Forschung am IVW Köln, Band 3/2011, Köln 2012, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-98> (Stand 01. März 2015).
- [5] *Knobloch, Ralf* Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 4/2011, Köln 2012, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-100> (Stand 01. März 2015).
- [6] *Knobloch, Ralf* Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Kette bei unterjährlicher Zahlweise, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2012, Köln 2012, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204> (Stand 01. März 2015).
- [7] *Knobloch, Ralf* Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette aus einer jährlichen Markov-Kette, In: Forschung am IVW Köln, Band 6/2013, Köln 2013, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-402> (Stand 01. März 2015).
- [8] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.
- [9] *Neuburger, Edgar* Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der Zahlungsweise, Blätter der DGVM, Bd. XIX, Heft 3, S.257 – S.267, 1990.
- [10] *Waldmann, Karl-Heinz; Stocker, Ulrike M.* Stochastische Modell, 2. Auflage, Springer Verlag, Heidelberg Dordrecht London New York 2011.
- [10] *Westermann, Thomas* Mathematik für Ingenieure 6. Auflage, ergänzende Kapitel, Springer Verlag, Heidelberg Dordrecht London New York 2011, <http://www.home.hs-karlsruhe.de/~weth0002/buecher/mathe/start.htm> (Stand 01. März 2015).

## Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der Online-Publikationsreihe „Forschung am IVW Köln“. Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter [www.ivw-koeln.de](http://www.ivw-koeln.de) oder [hier](#) abgerufen werden.

**Forschung am IVW Köln, 5/2015**

**Knobloch: Momente und charakteristische Funktion des Barwerts einer bewerteten inhomogenen Markov-Kette. Anwendung bei risikobehafteten Zahlungsströmen.**

**Köln, März 2015**

**ISSN (online) 2192-8479**

Herausgeber der Schriftenreihe / Series Editorship:

Prof. Dr. Lutz Reimers-Rawcliffe  
Prof. Dr. Peter Schimikowski  
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /  
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web [www.ivw-koeln.de](http://www.ivw-koeln.de)

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270  
Fax +49 221 8275-3277

Mail [juergen.strobel@fh-koeln.de](mailto:juergen.strobel@fh-koeln.de)

Institut für Versicherungswesen /  
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences  
Gustav Heinemann-Ufer 54  
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch

Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften /  
Schmalenbach Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften /  
Faculty of Business, Economics and Law

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Gustav Heinemann-Ufer 54  
50968 Köln

Tel. +49 221 8275 - 3425  
Fax +49 221 8275 - 3135

Mail [ralf.knobloch@fh-koeln.de](mailto:ralf.knobloch@fh-koeln.de)



## Zuletzt erschienen im Rahmen von „Forschung am IVW Köln“

### 2015

- Heep-Altiner, Rohlf, Beier: Erneuerbare Energien und ALM eines Versicherungsunternehmens, Nr. 4/2015
- Dolgov: Calibration of Heston's stochastic volatility model to an empirical density using a genetic algorithm, Nr. 3/2015
- Heep-Altiner, Berg: Mikroökonomisches Produktionsmodell für Versicherungen, Nr. 2/2015
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2014, Nr. 1/2015

### 2014

- Müller-Peters, Völler (beide Hrsg.): Innovation in der Versicherungswirtschaft, Nr. 10/2014
- Knobloch: Zahlungsströme mit zinsunabhängigem Barwert, Nr. 9/2014
- Heep-Altiner, Münchow, Scuzzarello: Ausgleichsrechnungen mit Gauß Markow Modellen am Beispiel eines fiktiven Stornobestandes, Nr. 8/2014
- Grundhöfer, Röttger, Scherer: Wozu noch Papier? Einstellungen von Studierenden zu E-Books, Nr. 7/2014
- Heep-Altiner, Berg (beide Hrsg.): Katastrophenmodellierung - Naturkatastrophen, Man Made Risiken, Epidemien und mehr. Proceedings zum 6. FaRis & DAV Symposium am 13.06.2014 in Köln, Nr. 6/2014
- Goecke (Hrsg.): Modell und Wirklichkeit. Proceedings zum 5. FaRis & DAV Symposium am 6. Dezember 2013 in Köln, Nr. 5/2014
- Heep-Altiner, Hoos, Krahforst: Fair Value Bewertung von zedierten Reserven, Nr. 4/2014
- Heep-Altiner, Hoos: Vereinfachter Nat Cat Modellierungsansatz zur Rückversicherungsoptimierung, Nr. 3/2014
- Zimmermann: Frauen im Versicherungsvertrieb. Was sagen die Privatkunden dazu?, Nr. 2/2014
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2013, Nr. 1/2014
  
- Maier, Schimikowski: Proceedings zum 6. Diskussionsforum Versicherungsrecht am 25. September 2012 an der FH Köln, Nr. 2/2013
- Institut für Versicherungswesen: Forschungsbericht für das Jahr 2012, Nr. 1/2013