

Knobloch, Ralf

Research Report

Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise

Forschung am iwWKöln, No. 6/2012

Provided in Cooperation with:

Technische Hochschule Köln – University of Applied Sciences, Institute for Insurance Studies

Suggested Citation: Knobloch, Ralf (2012) : Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise, Forschung am iwWKöln, No. 6/2012, Technische Hochschule Köln, Institut für Versicherungswesen (iwWKöln), Köln, <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-204>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/226542>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

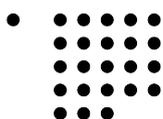
Forschung am IVW Köln, 6/2012

Institut für Versicherungswesen



Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise

Ralf Knobloch



Zusammenfassung

Zahlungsströme werden vielfach mit dem Barwert, d.h. der Summe der abgezinsten Zahlungen, bewertet. Handelt es sich dabei um Zahlungen, die nicht sicher, d.h. risikobehaftet sind, so gehen neben dem Zinssatz i.d.R. auch Wahrscheinlichkeiten in die Bewertung ein. Sowohl der Zinssatz als auch die Wahrscheinlichkeiten liegen dabei normalerweise als Jahreswerte vor, die Zahlungen hingegen erfolgen meist unterjährlich. In der vorliegenden Arbeit wird für diesen unterjährlichen Fall ein auf der Theorie der Markov-Ketten basierendes Modell zur Barwertberechnung behandelt. Die unterjährlichen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich dabei durch Linearisierung der Jahreswerte, als unterjährliches Zinsmodell wird die gemischte Verzinsung – alternativ mit dem relativen Zinssatz und dem konformen Zinssatz – betrachtet.

Abstract

Payment flows are often valued by the present value, i.e. the sum of the discounted payments. If the payments are not secure, i.e. they are fraught with risk, probabilities, apart from the interest rate, are generally considered in the evaluation, as well. Usually both the probabilities and the interest rate are given for a full year. On the other hand the payments are allocated during the year. For these cases, a model is introduced which is based on the theory of Markov Chains. The needed in-year probabilities result from a linearization of the year probabilities. For the in-year interest rates there are two alternative standard models which are handled in this paper.

Inhaltsverzeichnis

1.	EINLEITUNG.....	2
2.	DAS ALLGEMEINE MODELL BEI UNTERJÄHRLICHER ZAHLWEISE	3
3.	BEWERTUNGSFORMEL	6
4.	LINEARISIERUNG DER ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN.....	8
5.	LINEARISIERUNG DER ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND RELATIV GEMISCHTE VERZINSUNG	13
6.	LINEARISIERUNG DER ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND KONFORM GEMISCHTE VERZINSUNG	16
7.	AUSBlick	18
	LITERATURVERZEICHNIS	19
	KONTAKT.....	20

1. Einleitung

Bei den unterschiedlichsten ökonomischen Problemstellungen ist die Bewertung von Zahlungsströmen von zentraler Bedeutung. Einer der wichtigsten Bewertungsansätze ist dabei der Barwert des Zahlungsstroms, d.h. die Summe der abgezinsten Zahlungen. Handelt es sich um einen risikobehafteten Zahlungsstrom, so wird der Barwert i.d.R. unter Verwendung des wahrscheinlichkeitstheoretischen Instrumentariums berechnet. Bei gedächtnislosen Modellen kann er mithilfe von Markov-Ketten ermittelt werden (vgl. [5], [6]).

Bei dem in [5] vorgestellten Modell kann dabei jedes beliebige Zeitraster, z.B. jährlich, quartalsweise oder monatlich, verwendet werden. Man benötigt lediglich, die dem Zeitraster entsprechenden Übergangsmatrizen. In der Praxis allerdings sind die Vorgaben i.d.R. anders. So sind z.B. in der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik die Sterbewahrscheinlichkeiten und Invalidisierungen und damit die Übergangswahrscheinlichkeiten in den verwendeten Tafelwerken als Jahreswerte gegeben. Die Zahlungsströme hingegen basieren auf unterjährlichen Zahlungen, z.B. bei Prämien- und Rentenzahlungen. Die exakte Bewertung solcher unterjährlichen Zahlungsströme erfolgt dann durch Näherungen und Anpassungen der Formeln für jährliche Zahlungen. So wird z.B. in der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik das sogenannte Restglied zur Modellierung verwendet (vgl. [4], [8], [9]). Als weiteres grundlegendes Ergebnis ist in diesem Zusammenhang der Invariansatz für Anwartschaften (vgl. [10]) von zentraler Bedeutung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung wie das in [5] verwendete Modell auf unterjährliche Zahlungsströme angepasst werden kann. Dabei wird wie oben beschrieben von einem zugrundeliegenden jährlichen Modell ausgegangen und darauf aufbauend die unterjährliche Zahlweise eingepflegt. Daraus ergibt sich eine modifizierte Bewertungsformel für unterjährliche Zahlungsströme.

Ein einfaches unterjährliches Modell für die Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt sich aus der linearen Verteilung der Jahreswahrscheinlichkeiten, ein einfaches unterjährliches Zinsmodell aus der linearen Verteilung des Jahreszinses. In diesem speziellen linearen Fall lassen sich die Gültigkeit der in der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik häufig verwendeten Ergebnisse bezüglich Restglied und Invariansatz aus der Bewertungsformel für unterjährliche Zahlungsströme ableiten. Alternativ wird als unterjährliches Zinsmodell die konform gemischte Verzinsung behandelt.

2. Das allgemeine Modell bei unterjährlicher Zahlweise

Gegeben sei zunächst das jährliche Modell, d.h. eine Markov-Kette $(X_k)_{k=0,1,2,\dots}$ mit dem endlichen Zustandsraum $S = \{0,1,2,\dots,N\}$. Dabei steht der Zeitpunkt k für den Beginn des $(k+1)$ -ten Jahres oder anders formuliert die Zufallsvariable X_k steht für den Zustand zu Beginn des $(k+1)$ -ten Jahres, $k = 0,1,2,\dots$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt $k-1$ zum Zeitpunkt k seien gegeben durch die $(N+1) \times (N+1)$ -Matrix

$$Q(k) = (q_{i,j}(k))_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}}$$

d.h.

$$q_{i,j}(k) := P(X_k = j | X_{k-1} = i), \quad i, j = 0,1,\dots,N, k = 1,2,\dots$$

(vgl. [5]).

Dieser stochastische Prozess wird nun um äquidistante unterjährliche Zeitpunkte ergänzt. Dazu sei die Anzahl der unterjährlichen Zahlungszeitpunkte durch die natürliche Zahl T gegeben. Wir betrachten also nun die Markov-Kette:

$$X_0, X_{0+1/T}, X_{0+2/T}, \dots, X_{0+T-1/T}, X_1, X_{1+1/T}, \dots, X_{1+T-1/T}, X_2, X_{2+1/T}, \dots$$

Der Zustandsraum sei auch hier gegeben durch $S = \{0,1,2,\dots,N\}$. Für $k = 1,2,\dots$ werden die jährlichen Übergangsmatrizen vom Zeitpunkt $k-1$ zum Zeitpunkt k wiederum mit $Q(k) = (q_{i,j}(k))_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}}$ bezeichnet. Darüber hinaus seien die speziellen Übergangswahrscheinlichkeiten vom Zeitpunkt k zum Zeitpunkt $k + s/T$, $k = 0,1,2,\dots$, $s = 0,1,2,\dots, T-1, T$ wie folgt gegeben:

$$u_{i,j}(s,k) := P\left(X_{k+s/T} = j | X_k = i\right), \quad i, j = 0,1,\dots,N.$$

Daraus ergeben sich die zugehörigen Übergangsmatrizen

$$U(s,k) = (u_{i,j}(s,k))_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}}, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad s = 0,1,2,\dots, T-1, T.$$

Insbesondere gilt:

$$U(T, k) = Q(k+1) \text{ und } U(0, k) = E, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(E = Einheitsmatrix).

Für jeden Zeitpunkt $k + \frac{s}{T}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots, T-1$, sei durch den Zeilenvektor

$\mathbf{P}_{k+\frac{s}{T}} = \left(\mathbf{P}_{k+\frac{s}{T}, j} \right)_{j=0,1,2,\dots,N}$ die Verteilung der Zufallsvariablen $\mathbf{X}_{k+\frac{s}{T}}$ gegeben, d.h.

$$P\left(\mathbf{X}_{k+\frac{s}{T}} = j\right) = \mathbf{P}_{k+\frac{s}{T}, j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass \mathbf{P}_0 vorgegeben ist und alle Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte gegeben dieser Anfangsverteilung berechnet werden. Unter Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung für Markov-Ketten (vgl. [7] S.14, [11] S.185f) ergibt sich für $k + \frac{s}{T}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots, T-1$

$$\mathbf{P}_{k+\frac{s}{T}} = \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^k Q(j) \cdot U(s, k).$$

Beweis:

Es sei $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ und $s \in \{0, 1, 2, \dots, T-1\}$.

Die Matrizen $\tilde{Q}(k, 0) = \left(\tilde{q}_{i,j}(k, 0) \right)_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}}$ seien gegeben durch

$$\tilde{q}_{i,j}(k, 0) := P(\mathbf{X}_k = j \mid \mathbf{X}_0 = i), \quad i, j = 0, 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots$$

Durch Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung ergibt sich die Übergangsmatrix vom Zeitpunkt 0 zum Zeitpunkt $k + \frac{s}{T}$ durch das Matrizenprodukt $\tilde{Q}(k, 0) \cdot U(s, k)$.

Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung ergibt sich ferner durch Induktion nach k :

$$\tilde{Q}(k, 0) = \prod_{j=1}^k Q(j) \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhält man für $m = 0, 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+\frac{s}{T}, m} &= P\left(\mathbf{X}_{k+\frac{s}{T}} = m\right) = \sum_{i=0}^N P(\mathbf{X}_0 = i) \cdot P\left(\mathbf{X}_{k+\frac{s}{T}} = m \mid \mathbf{X}_0 = i\right) = \\ &= \left(\mathbf{P}_0 \cdot \tilde{Q}(k, 0) \cdot U(s, k)\right)_m \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k} + \frac{s}{T}} = \mathbf{P}_0 \cdot \tilde{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}, 0) \cdot \mathbf{U}(s, \mathbf{k}) = \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^{\mathbf{k}} \mathbf{Q}(j) \cdot \mathbf{U}(s, \mathbf{k}).$$

□

Für jeden Zeitpunkt $\mathbf{k} + \frac{s}{T}$, $\mathbf{k} = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots, T - 1$, sei die Höhe der Zahlung zum Zeitpunkt $\mathbf{k} + \frac{s}{T}$ in Abhängigkeit des eingenommenen Zustands durch den Spaltenvektor $\mathbf{L}_{\mathbf{k} + \frac{s}{T}}$ festlegt:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{k} + \frac{s}{T}} = \left(\mathbf{L}_{\mathbf{k} + \frac{s}{T}, j} \right)_{j=0, 1, 2, \dots, N}, \mathbf{k} = 0, 1, 2, \dots, s = 0, 1, 2, \dots, T - 1.$$

Dieser Spaltenvektor wird im Folgenden Leistungsvektor genannt.

3. Bewertungsformel

Ausgehend von der in Abschnitt 2 beschriebenen Markov-Kette wird der Barwert der zukünftigen Zahlungen wie folgt definiert:

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{T}, \Lambda_{\mathbf{T}}) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\mathbf{T}-1} \sum_{j=0}^{\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{X_{k+s/\mathbf{T}}=j\}} \cdot v^k \cdot v(s) \cdot L_{k+s/\mathbf{T},j}$$

Dieser Barwert hänge ab von der Anzahl der unterjährlichen Zahlungen \mathbf{T} und von der Gesamtheit der Leistungsvektoren $\Lambda_{\mathbf{T}} = \left(L_{k+s/\mathbf{T}} \right)_{k=0,1,2,\dots,s=0,1,2,\dots,\mathbf{T}-1}$. Dabei sei v der

Diskontierungsfaktor für eine Periode definiert durch $v = \frac{1}{1+i}$ und $i > 0$ der zeitlich konstante Rechnungszins pro Jahr. Ferner sei $v(s)$ der Diskontierungsfaktor für das unterjährliche Intervall $(k, k + s/\mathbf{T})$. Für diesen unterjährlichen Diskontierungsfaktor gibt es die unterschiedlichsten Ansätze. Am Gebräuchlichsten sind die relative Verzinsung, d.h.

$$v(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\mathbf{T}} \cdot i},$$

und die konforme Verzinsung, d.h.

$$v(s) = v^{s/\mathbf{T}}.$$

Insbesondere gilt für alle Ansätze $v(0) = 1$.

Es sei $\mathbf{abs}(x)$ der Absolutbetrag einer reellen Zahl x . Unter der Bedingung

$$\mathbf{L} := \max \left\{ \mathbf{abs} \left(L_{k+s/\mathbf{T},j} \right) \mid k = 0,1,2,\dots, s = 0,1,\dots, \mathbf{T}-1, j = 0,1,2,\dots, \mathbf{N} \right\} < \infty$$

konvergiert die Reihe \mathbf{B}_0 wegen $0 < v < 1$ und $0 < v(s) \leq 1$ absolut:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{abs} \left(\sum_{s=0}^{\mathbf{T}-1} \sum_{j=0}^{\mathbf{N}} \mathbf{1}_{\{X_{k+s/\mathbf{T}}=j\}} \cdot v^k \cdot v(s) \cdot L_{k+s/\mathbf{T},j} \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{N}+1) \cdot \mathbf{L} = \frac{\mathbf{T} \cdot (\mathbf{N}+1) \cdot \mathbf{L}}{1-v} < \infty$$

Daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\mathbf{B}_0(\mathbf{T}, \Lambda_{\mathbf{T}})$ (vgl. [2], S.40f). Für den erwarteten Barwert ergibt sich die folgende Aussage.

Satz 1:

Sei $L := \max \left\{ \text{abs} \left(L_{k+s/T, j} \right) \mid k = 0, 1, 2, \dots, s = 0, 1, \dots, T-1, j = 0, 1, 2, \dots, N \right\} < \infty$, so gilt:

$$E(B_0(T, \Lambda_T)) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^k Q(j) \cdot U(s, k) \cdot L_{k+s/T}$$

Beweis:

Wegen $L < \infty$ ergibt durch Anwendung des Satzes der majorisierten Konvergenz (vgl. [3] S.37):

$$\begin{aligned} E(B_0(T, \Lambda_T)) &= E \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^{T-1} \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_{k+s/T} = j\}} \cdot v^k \cdot v(s) \cdot L_{k+s/T, j} \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} E \left(\sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^{T-1} \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_{k+s/T} = j\}} \cdot v^k \cdot v(s) \cdot L_{k+s/T, j} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E \left(\sum_{s=0}^{T-1} \sum_{j=0}^N \mathbf{1}_{\{X_{k+s/T} = j\}} \cdot v^k \cdot v(s) \cdot L_{k+s/T, j} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot \sum_{j=0}^N E \left(\mathbf{1}_{\{X_{k+s/T} = j\}} \right) \cdot L_{k+s/T, j} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot \sum_{j=0}^N P(X_{k+s/T} = j) \cdot L_{k+s/T, j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot \sum_{j=0}^N P_{k+s/T, j} \cdot L_{k+s/T, j} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot P_{k+s/T} \cdot L_{k+s/T} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^k Q(j) \cdot U(s, k) \cdot L_{k+s/T} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1:

Setzt man in Satz 1 $T = 1$, so erhält man wegen $U(0, k) = E$ und $v(0) = 1$:

$$E(B_0(1, \Lambda_1)) = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^k Q(j) \cdot L_k$$

Dies entspricht dem Ergebnis bei jährlicher Zahlweise (vgl. [5]).

4. Linearisierung der Übergangswahrscheinlichkeiten

Ein naheliegender Ansatz bei Kenntnis der jährlichen aber Unkenntnis der unterjährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten ist es, die jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten unterjährlich zeitlich linear zu verteilen. Dabei ergeben sich die unterjährlichen Übergangsmatrizen $U(s, k)$ aus der Interpolation der Einheitsmatrix E mit der jährlichen Übergangsmatrix $Q(k+1)$ wie folgt:

$$U(s, k) = \frac{s}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot E, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, T-1.$$

Dem unterjährlichen Modell liegt als stochastischer Prozess die Markov-Kette

$$X_0, X_{0+1/T}, X_{0+2/T}, \dots, X_{0+T-1/T}, X_1, X_{1+1/T}, \dots, X_{1+T-1/T}, X_2, X_{2+1/T}, \dots$$

zugrunde. Die lineare Annahme bezieht sich lediglich auf die Übergangsmatrizen vom Zeitpunkt k zum Zeitpunkt $k + \frac{s}{T}$. Es stellt sich nun die Frage, ob es geeignete Markov-Prozesse gibt, die dieser linearen Annahme bezüglich der Übergangsmatrizen $U(s, k)$ genügen.

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir zunächst von der jährlichen Markov-Kette $(X_k)_{k=0,1,2,\dots}$ mit den Übergangsmatrizen $Q(k) = (q_{i,j}(k))_{i,j \in \{0,1,\dots,N\}}$ aus. Zur Konstruktion einer unterjährlichen Markov-Kette genügt es als Anwendung des Satzes von Kolmogorov (vgl. [3], S. 257ff), die Anfangsverteilung und die Übergangsmatrizen vom Zeitpunkt $k + \frac{s}{T}$ zum Zeitpunkt $k + \frac{(s+1)}{T}$, $k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, T-1$ zu definieren. Die Anfangsverteilung sei gegeben durch P_0 . Für diese Übergangsmatrizen werde der Ansatz

$$\left(\frac{s}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot E \right)^{-1} \cdot \left(\frac{s+1}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s-1}{T} \cdot E \right)$$

gewählt. Man erhält als unterjährliches Modell die Markov-Kette

$$X_0, X_{0+1/T}, X_{0+2/T}, \dots, X_{0+T-1/T}, X_1, X_{1+1/T}, \dots, X_{1+T-1/T}, X_2, X_{2+1/T}, \dots$$

Durch Anwendung der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (vgl. [7] S.14, [11] S.185f) ergibt sich für $k = 0, 1, 2, \dots$, $s = 0, 1, 2, \dots, T - 1$:

$$U(s, k) = \prod_{t=1}^s \left(\frac{t-1}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-t-1}{T} \cdot E \right)^{-1} \cdot \left(\frac{t}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-t}{T} \cdot E \right) = \left(\frac{s}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot E \right)$$

Somit ist für die so konstruierte Markov-Kette die lineare Bedingung bezüglich $U(s, k)$ erfüllt. Dies allerdings nur, wenn die in den Matrizenprodukten enthaltenen inversen Matrizen existieren und die Matrizenprodukte als Übergangsmatrizen geeignet sind. Beispiel 1 zeigt, dass dieser Ansatz sinnvoll umgesetzt werden kann. Beispiel 2, dass dies aber nicht immer der Fall sein muss.

Beispiel 1:

Gegeben sei eine Markov-Kette $(X_k)_{k=0,1,2,\dots}$ mit den konstanten jährlichen Übergangsmatrizen

$$Q(k) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gebe drei unterjährliche Zahlungen, d.h. $T = 3$. Es ergibt sich:

$$\frac{0}{3} \cdot Q + \frac{3-0}{3} \cdot E = E$$

$$\frac{1}{3} \cdot Q + \frac{3-1}{3} \cdot E = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3} \cdot Q + \frac{3-2}{3} \cdot E = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{3} \cdot Q + \frac{3-3}{3} \cdot E = Q$$

Lemma:

Für $a \neq 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1-a) & -a/(1-a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1-a) & -a/(1-a) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}$$

□

Damit erhält man:

$$\left(\frac{0}{3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{3-0}{3} \cdot \mathbf{E}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{3-1}{3} \cdot \mathbf{E}\right) = \mathbf{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{3-1}{3} \cdot \mathbf{E}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{3-2}{3} \cdot \mathbf{E}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{3-2}{3} \cdot \mathbf{E}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{3} \cdot \mathbf{Q} + \frac{3-3}{3} \cdot \mathbf{E}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich sinnvolle Übergangsmatrizen, die für die Definition einer Markov-Kette

$$\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_{0+1/T}, \mathbf{X}_{0+2/T}, \dots, \mathbf{X}_{0+T-1/T}, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_{1+1/T}, \dots, \mathbf{X}_{1+T-1/T}, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_{2+1/T}, \dots$$

geeignet sind.

Beispiel 2:

Gegeben sei eine Markov-Kette $(X_k)_{k=0,1,2,\dots}$ mit den konstanten jährlichen Übergangsmatrizen

$$Q(k) = Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gebe zwei unterjährliche Zahlungen, d.h. $T = 2$. Es ergibt sich:

$$\frac{0}{2} \cdot Q + \frac{2-0}{2} \cdot E = E$$

$$\frac{1}{2} \cdot Q + \frac{2-1}{2} \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{2} \cdot Q + \frac{2-2}{2} \cdot E = Q$$

In diesem Beispiel kann mit dem obigen Ansatz keine sinnvolle Markov-Kette definiert werden, da die Matrix $\frac{1}{2} \cdot Q + \frac{2-1}{2} \cdot E$ keine Inverse besitzt.

Allgemein ergibt sich unter der linearen Annahme an die Übergangsmatrizen $U(s,k)$ das folgende Ergebnis:

Satz 2:

Es sei

$$U(s,k) = \frac{s}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot E, \quad k = 0,1,2,\dots, \quad s = 0,1,2,\dots, T-1.$$

Es sei ferner

$$L_{k+s/T} = L_0, \quad \text{für alle } k = 0,1,2,\dots, \quad s = 0,1,2,\dots, T-1,$$

d.h. die Leistungsvektoren seien (zeitlich) konstant. Dann gilt:

$$E(B_0(T, \Lambda_T)) = E(B_0(1, \Lambda_1)) \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \left(\frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} + \frac{T-s}{T} \cdot v(s) \right) - P_0 \cdot L_0 \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v}.$$

Dabei sei die Gesamtheit der jährlichen Leistungsvektoren Λ_1 gegeben durch

$$L_k = L_0, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Beweis:

Da die unterjährlichen Leistungsvektoren zeitlich konstant sind, ist die Voraussetzung von Satz 1 erfüllt. Durch dessen Anwendung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{B}_0(T, \Lambda_T)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^k \mathbf{Q}(j) \cdot \mathbf{U}(s, k) \cdot \mathbf{L}_{k+s/T} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^k \mathbf{Q}(j) \cdot \left(\frac{s}{T} \cdot \mathbf{Q}(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{L}_0 = \\
 &= \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot v(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^{k+1} \mathbf{Q}(j) \cdot \mathbf{L}_0 + \sum_{s=0}^{T-1} \frac{T-s}{T} \cdot v(s) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^k \mathbf{Q}(j) \cdot \mathbf{L}_0 = \\
 &= \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} \cdot (E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0) + \sum_{s=0}^{T-1} \frac{T-s}{T} \cdot v(s) \cdot E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) = \\
 &= E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \left(\frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} + \frac{T-s}{T} \cdot v(s) \right) - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v}
 \end{aligned}$$

□

Man kann anhand des Ergebnisses von Satz 2 zwei Fälle unterscheiden:

- Zum Zeitpunkt $\mathbf{0}$ wird ein Zustand angenommen bei dem eine Zahlung geleistet wird, d.h. bezüglich dieses Zustands hat der Leistungsvektor einen Eintrag ungleich null. Dieser Fall wird als laufende Leistung bezeichnet.
- Zum Zeitpunkt $\mathbf{0}$ wird ein Zustand angenommen bei dem keine Zahlung geleistet wird, d.h. bezüglich dieses Zustands hat der Leistungsvektor einen Eintrag gleich null. Dieser Fall wird als Anwartschaft bezeichnet.

Bei Anwartschaften gilt $\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$. Somit kann man den Barwert bei unterjährlicher Zahlung durch eine Multiplikation des Barwerts bei jährlicher Zahlung mit einem konstanten Faktor berechnen. Bei laufenden Leistungen gilt $\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$. D.h. man hat neben der Multiplikation mit einem konstanten Faktor noch die Addition einer Konstanten. Letzteres entspricht dem in der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik verwendeten Ansatz eines Restgliedes.

5. Linearisierung der Übergangswahrscheinlichkeiten und relativ gemischte Verzinsung

Nachdem im letzten Abschnitt mit dem Linearisierungsansatz ein einfaches Modell für die unterjährlichen Wahrscheinlichkeiten eingeführt wurde, wird jetzt zusätzlich ein spezielles unterjährliches Zinsmodell vorausgesetzt. Analog zur Linearisierung der Wahrscheinlichkeiten wird auch der Jahreszins linearisiert, d.h. es wird im Folgenden von der in der Praxis häufig verwendeten relativ gemischten Verzinsung (vgl. [1], S. 27ff) ausgegangen. Es ergeben sich somit die beiden folgenden Modellannahmen:

- Für die Übergangsmatrizen $U(s, k)$ gilt:

$$U(s, k) = \frac{s}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot E, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, T-1.$$

- Zinsmodell für den unterjährlichen Zins: $v(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{T} \cdot i}$.

Damit lassen sich der Faktor und das Restglied in Satz 2 vereinfachen und man die folgende Aussage.

Satz 3:

Es sei

$$L_{k+s/T} = L_0, \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, T-1,$$

d.h. die Leistungsvektoren seien (zeitlich) konstant. Dann gilt:

$$E(B_0(T, \Lambda_T)) = E(B_0(1, \Lambda_1)) \cdot T - P_0 \cdot L_0 \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+i)}{T+s \cdot i}.$$

Dabei sei die Gesamtheit der der jährlichen Leistungsvektoren Λ_1 gegeben durch

$$L_k = L_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Beweis:

Es gilt:

$$\frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} = \frac{s}{T} \cdot \frac{1}{1 + \frac{s}{T} \cdot i} \cdot (1+i) = \frac{s \cdot (1+i)}{T+s \cdot i}$$

und

$$\frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} + \frac{T-s}{T} \cdot v(s) = \frac{s \cdot (1+i)}{T+s \cdot i} + \frac{T-s}{T} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{T} \cdot i} = \frac{s \cdot (1+i) + T-s}{T+s \cdot i} = 1$$

Damit erhält man durch Anwendung von Satz 2:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{B}_0(T, \Lambda_T)) &= E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \left(\frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} + \frac{T-s}{T} \cdot v(s) \right) - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} = \\ &= E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) \cdot T - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+i)}{T+s \cdot i} \end{aligned}$$

□

Als Folgerung aus Satz 3 erhält man für Anwartschaften:

Folgerung:

Im Fall einer Anwartschaft, d.h. $\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$, gilt: $E(\mathbf{B}_0(T, \Lambda_T)) = E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) \cdot T$.

Beweis:

Das Ergebnis ergibt sich durch Anwendung von Satz 3.

□

Bemerkung 2:

In der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik ist es üblich bei der Umrechnung einer unterjährlichen in eine jährliche Zahlweise die Zahlungen mit dem Faktor T zu multiplizieren. Dies bedeutet, dass die Gesamtheit der jährlichen Leistungsvektoren Λ_1 durch den Vektor $T \cdot \mathbf{L}_0$ gegeben ist. Wegen der Linearität von Bar- und Erwartungswert erhält man bei dieser Definition der jährlichen Zahlungen für die Formel aus Satz 3:

$$E(\mathbf{B}_0(T, \Lambda_T)) = E(\mathbf{B}_0(1, \Lambda_1)) - \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 \cdot \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+i)}{T+s \cdot i}.$$

Für laufende Leistungen ergibt sich somit, dass in der Pensionsversicherungsmathematik übliche Restglied

$$k(T) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s \cdot (1+i)}{T+s \cdot i}$$

(vgl. [10], S. 264).

Für Anwartschaften, d.h. $\mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$, ergibt sich mit dieser Definition der unterjährlichen Zahlungen der sogenannte Invarianzsatz (vgl. [10], S. 261), d.h. der Barwert ist bei einem zeitlich konstanten Leistungsvektor unabhängig von der Zahlweise:

$$\mathbf{E}(\mathbf{B}_0(\mathbf{T}, \Lambda_T)) = \mathbf{E}(\mathbf{B}_0(\mathbf{1}, \Lambda_1)) .$$

6. Linearisierung der Übergangswahrscheinlichkeiten und konform gemischte Verzinsung

Nachdem bisher der Linearisierungsansatz für die unterjährlichen Wahrscheinlichkeiten mit der relativ gemischten Verzinsung kombiniert wurde, soll als Zinsmodell jetzt die konform gemischte Verzinsung vorausgesetzt werden. Es ergeben sich somit die beiden folgenden Modellannahmen:

- Für die Übergangsmatrizen $U(s, k)$ gilt:

$$U(s, k) = \frac{s}{T} \cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T} \cdot E, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, T-1.$$

- Zinsmodell für den unterjährlichen Zins: $v(s) = v^{s/T}$.

Geht man von diesen Modellannahmen aus, so erhält man die folgende Aussage.

Satz 4:

Es sei

$$L_{k+s/T} = L_0, \quad \text{für alle } k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, T-1,$$

d.h. die Leistungsvektoren seien (zeitlich) konstant. Dann gilt:

$$E(B_0(T, \Lambda_T)) = E(B_0(1, \Lambda_1)) \cdot \frac{(1-v)^2 \cdot v^{1/T-1}}{T \cdot \left(v^{1/T} - 1\right)^2} - P_0 \cdot L_0 \cdot \frac{\frac{T-1}{T} \cdot v^{1/T} + \frac{1}{T} \cdot v^{1/T-1} - 1}{\left(v^{1/T} - 1\right)^2}$$

Dabei sei die Gesamtheit der der jährlichen Leistungsvektoren Λ_1 gegeben durch

$$L_k = L_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} &= \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot v^{s/T-1} = \frac{\partial}{\partial v} \sum_{s=0}^{T-1} v^{s/T} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^{1/T}}{v^{1/T} - 1} \right)^T - 1 = \frac{\partial}{\partial v} \frac{v-1}{v^{1/T} - 1} = \\ &= \frac{\left(v^{1/T} - 1 \right) - (v-1) \cdot \frac{1}{T} \cdot v^{1/T-1}}{\left(v^{1/T} - 1 \right)^2} = \frac{\frac{T-1}{T} \cdot v^{1/T} + \frac{1}{T} \cdot v^{1/T-1} - 1}{\left(v^{1/T} - 1 \right)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=0}^{T-1} \left(\frac{s}{T} \cdot \frac{v(s)}{v} + \frac{T-s}{T} \cdot v(s) \right) = \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot v^{\frac{s}{T}-1} + \sum_{s=0}^{T-1} \frac{T-s}{T} \cdot v^{\frac{s}{T}} = \\
& = \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot v^{\frac{s}{T}-1} + \sum_{s=0}^{T-1} v^{\frac{s}{T}} - v \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot v^{\frac{s}{T}-1} = \\
& = (1-v) \cdot \sum_{s=0}^{T-1} \frac{s}{T} \cdot v^{\frac{s}{T}-1} + \sum_{s=0}^{T-1} v^{\frac{s}{T}} = \\
& = \frac{(1-v) \cdot \left(\frac{T-1}{T} \cdot v^{\frac{1}{T}} + \frac{1}{T} \cdot v^{\frac{1}{T}-1} - 1 \right)}{\left(v^{\frac{1}{T}} - 1 \right)^2} + \frac{v-1}{v^{\frac{1}{T}} - 1} = \\
& = \frac{(1-v) \cdot \left(\frac{T-1}{T} \cdot v^{\frac{1}{T}} + \frac{1}{T} \cdot v^{\frac{1}{T}-1} - 1 \right) - (1-v) \cdot \left(v^{\frac{1}{T}} - 1 \right)}{\left(v^{\frac{1}{T}} - 1 \right)^2} = \\
& = \frac{(1-v) \cdot \left(\frac{1}{T} \cdot v^{\frac{1}{T}-1} - \frac{1}{T} \cdot v^{\frac{1}{T}} \right)}{\left(v^{\frac{1}{T}} - 1 \right)^2} = \frac{(1-v) \cdot v^{\frac{1}{T}} \cdot \left(\frac{1-v}{v} \right)}{T \cdot \left(v^{\frac{1}{T}} - 1 \right)^2} = \frac{(1-v)^2 \cdot v^{\frac{1}{T}-1}}{T \cdot \left(v^{\frac{1}{T}} - 1 \right)^2}
\end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich durch Anwendung von Satz 2.

□

Mit Satz 4 kann man somit im Falle der konform gemischten Verzinsung die versicherungsmathematischen Barwerte bei unterjährlichen Zahlungen auf die Barwerte bei jährlichen Zahlungen zurückführen. Allerdings hängt dabei der Faktor beim Barwert der jährlichen Zahlung nicht nur von T sondern auch von v ab. Somit gibt es bei konform gemischter Verzinsung und Linearisierung der Übergangswahrscheinlichkeiten kein dem Invarianzsatz entsprechendes Ergebnis.

7. Ausblick

In der Praxis sind risikobehaftete Zahlungsströme oft mit unterjährlicher Zahlweise gegeben. Die anzusetzenden Modellannahmen bezüglich Übergangswahrscheinlichkeiten und Zins basieren i.d.R. aber auf jährlichen Beobachtungen. Satz 1 zeigt, wie sich die diesbezügliche Erweiterung des in [5] eingeführten Modells auf die allgemeine Bewertungsformel auswirkt.

Die Annahme einer linearen Verteilung der jährlichen Übergangswahrscheinlichkeiten führt im Falle von zeitlich konstanten Leistungsvektoren zu dem Ergebnis aus Satz 2. Die entstehenden Formeln lassen sich im Falle spezieller Zinsmodelle (relativ gemischte Verzinsung, konform gemischte Verzinsung) weiter konkretisieren. Dabei lässt sich im Falle der relativ gemischten Verzinsung der Bezug zu den üblichen Techniken der Lebens- und Pensionsversicherungsmathematik herstellen.

Insgesamt zeigt sich, dass das in [5] vorgestellte Modell zur Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme auch mit der zusätzlichen Option einer unterjährlichen Zahlweise handhabbar bleibt. Die vorgestellten Ergebnisse können dabei als Basis für eine EDV-technische Umsetzung dienen. Man kann sich hierbei auch von der in der Praxis häufig verwendeten relativ gemischten Verzinsung lösen und andere unterjährliche Zinsmodelle, z.B. die konform gemischte Verzinsung, verwenden. Dies gilt auch, wenn man den konstanten Jahreszins durch eine Zinsstrukturkurve ersetzen möchte. Hier könnte eine Modifikation des Ergebnisses aus Satz 1 als Basis für die Bewertung mit einer unterjährlich fortgeschriebenen Zinsstrukturkurve dienen.

Literaturverzeichnis

- [1] *Arrenberg, Jutta* Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag, München 2011.
- [2] *Forster, Otto* Analysis 1, 4. Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn
Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1983.
- [3] *Gänssler, Peter;
Stute, Winfried* Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin
Heidelberg New York 1977.
- [4] *Gerber, Hans U.* Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag, Berlin
Heidelberg New York 1986.
- [5] *Knobloch, Ralf* Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme mithilfe von
Markov-Ketten, In: Cologne Open Science/Forschung am IVW
Köln, Band 3/2011, Köln 2011, opus.bsz-bw.de/fhk (Stand 14.
August 2012) .
- [6] *Knobloch, Ralf* Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der
betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette,
In: Cologne Open Science/Forschung am IVW Köln, Band
4/2011, Köln 2011, opus.bsz-bw.de/fhk (Stand 14. August
2012).
- [7] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage,
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.
- [8] *Milbrodt, Hartmut;
Helbig, Manfred* Mathematische Methoden der
Personenversicherungsmathematik, Walter de Gruyter, Berlin
· New York · 1999.
- [9] *Neuburger, Edgar
(Hrsg.)* Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen,
Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik Heft
25, Verlag Versicherungswirtschaft e.V. Karlsruhe 1997.
- [10] *Neuburger, Edgar* Unabhängigkeit von Rentenanwartschaftsbarwerten von der
Zahlungsweise, Blätter der DGVM, Bd. XIX, Heft 3, S.257 –
S.267, 1990
- [11] *Ross, Sheldon M.* Introduction to Probability Modells, Eighth Edition, Academic
Press, Amsterdam e.a. 2003.

Kontakt/Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der OnlinePublikationsreihe „**Forschung am IVW Köln**“.

Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder unter <http://opus.bsz-bw.de/fhk/index.php?la=de> abgerufen werden.

Eine weitere Publikationsreihe ist die **Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswesen der Fachhochschule Köln**.

Herausgeber: Verein der Förderer des Instituts für Versicherungswesen an der Fachhochschule Köln e. V. Die Schriftenreihe kann über den Verlag Versicherungswirtschaft bezogen werden (<http://www.vvw.de/>).

Eine Übersicht aller Hefte der Schriftenreihe kann auch unter folgender Adresse abgerufen werden:

<http://www.f04.fh-koeln.de/fakultaet/institute/ivw/informationen/publikationen/00366/index.html>

Köln, August 2012

Herausgeber / Editorship:

Prof. Dr. Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270

Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch
Schmalenbach Institut für Wirtschaftswissenschaften/
Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3425

Fax +49 221 8275-3135

Mail ralf.knobloch@fh-koeln.de

ISSN (online) 2192-8479