

Knobloch, Ralf

Research Report

Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette

Forschung am iwWKöln, No. 4/2011

Provided in Cooperation with:

Technische Hochschule Köln – University of Applied Sciences, Institute for Insurance Studies

Suggested Citation: Knobloch, Ralf (2011) : Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette, Forschung am iwWKöln, No. 4/2011, Technische Hochschule Köln, Institut für Versicherungswesen (iwWKöln), Köln, <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-100>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/226535>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

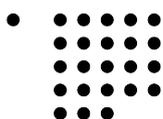
Forschung am IVW Köln, 4/2011

Institut für Versicherungswesen



Ein Konzept zur Berechnung von einfachen Barwerten in der betrieblichen Altersversorgung mithilfe einer Markov-Kette

Ralf Knobloch



Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird für die Pensionsversicherungsmathematik eine Methode zur Berechnung von einfachen Barwerten mithilfe von Markov-Ketten dargestellt. Dabei stehen die konzeptionelle Aufbereitung und die Vorbereitung einer EDV-technischen Umsetzung im Mittelpunkt des Interesses.

Abstract

In this paper, a method for calculating present values in the mathematics of pension insurance by using a Markov Chain is presented. It focuses on the conceptual treatment and the preparation for an IT implementation.

Inhaltsverzeichnis

1.	EINLEITUNG	2
2.	DAS ALLGEMEINE MODELL DER BETRIEBLICHEN ALTERSVERSORGUNG	3
3.	DER EINPERSONENFALL OHNE HINTERBLIEBENENVERSORGUNG UND FLUKTUATION.....	5
4.	DER ALLGEMEINE EINPERSONENFALL	9
5.	EDV-TECHNISCHE UMSETZUNG	11
6.	AUSBlick.....	12
	LITERATURVERZEICHNIS	14

1. Einleitung

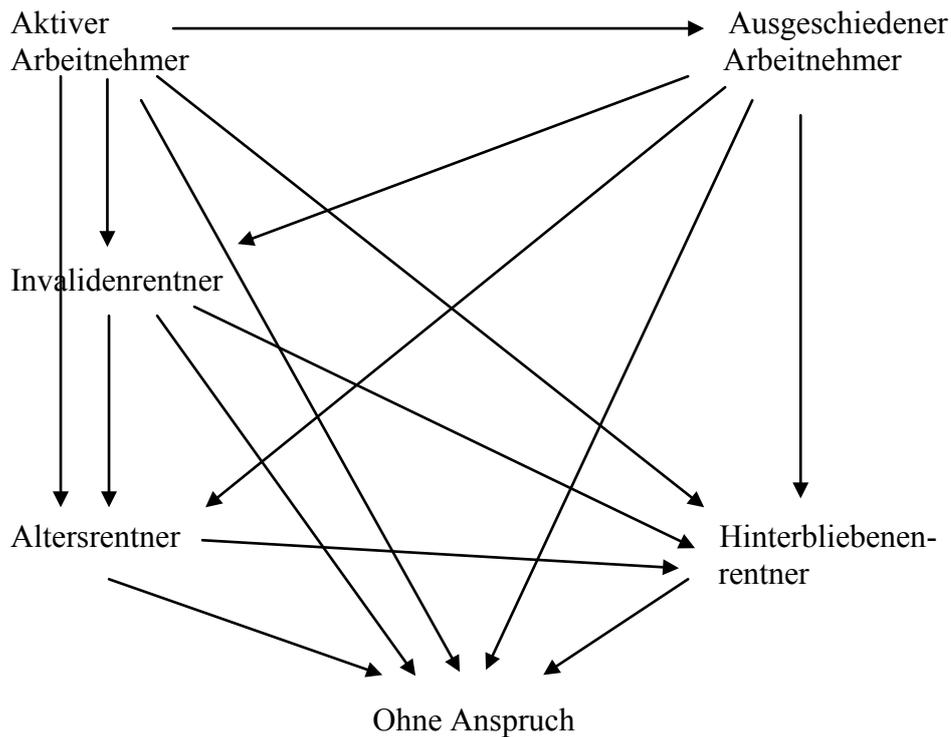
Nach dem deutschen Arbeitsrecht (§1 Abs.1 Gesetz zur Verbesserung der betrieblichen Altersversorgung – kurz BetrAVG) handelt es sich um betriebliche Altersversorgung, wenn ein Arbeitgeber einem Arbeitnehmer aus Anlass des Arbeitsverhältnisses Leistungen der Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenversorgung zusagt. Diese Leistungen können in unterschiedlichen Durchführungswegen abgewickelt werden. Zum einen besteht die Möglichkeit einer Direktzusage, d.h. die Versorgungsverpflichtung wird vom Arbeitgeber direkt übernommen. Zum anderen besteht die Möglichkeit die Zusage auf betriebliche Altersversorgung über eine externe Versorgungseinrichtung zu übertragen. Neben dem Abschluss einer Direktversicherung bei einem Versicherungsunternehmen gibt es als externe Durchführungswege für die betriebliche Altersversorgung im deutschen Recht die Pensionskasse, die Unterstützungskasse und den Pensionsfond. (vgl. z.B. [2])

Bei der Direktzusage muss die sich ergebende Verpflichtung sowohl in der Handelsbilanz als auch der Steuerbilanz auf der Passivseite ausgewiesen werden. Zur Durchführung dieser bilanziellen Bewertungen müssen u.a. versicherungsmathematische Barwerte berechnet werden. Aber auch bei den externen Durchführungswegen besteht die Notwendigkeit der Bewertung der mit dem Versorgungsversprechen verbundenen zukünftigen Zahlungsverpflichtungen und damit zur Berechnung versicherungsmathematischer Barwerte. Dazu hat sich eine Modellierung etabliert, die davon ausgeht, dass sich das Kollektiv der Versorgungsberechtigten aus verschiedenen Gruppen, wie z.B. aktiven Arbeitnehmern oder Altersrentnern, zusammensetzt. Personen wechseln durch das Eintreten eines biologischen Ereignisses (z.B. Erreichen der Altersgrenze, Invalidität oder Tod) die Gruppe innerhalb des Kollektivs.

Zur Berechnung der versicherungsmathematischen Barwerte für die betriebliche Altersversorgung findet man in der Literatur und in der Praxis im Wesentlichen zwei Methoden. Die erste Methode berechnet die Barwerte direkt als Erwartungswert der zukünftigen Zahlungen (vgl. [7] S. 48ff, [4] S. 494ff). Die zweite Methode verwendet ein lineares Gleichungssystem zur Bewertung der Zahlungsverpflichtungen (vg. [7], S.78ff). In der vorliegenden Arbeit wird ein Konzept dargestellt, mit dem man sowohl bei Anwartschaften als auch bei laufenden Leistungen versicherungsmathematische Barwerte mithilfe einer Markov-Kette berechnen kann. Die vorgestellte Modellierung kann als Basis für eine EDV-technische Umsetzung verwendet werden. Zur Modellierung der betrieblichen Altersversorgung mit Markov-Prozessen vergleiche auch [6] S. 291ff.

2. Das allgemeine Modell der betrieblichen Altersversorgung

Im allgemeinen Modell der betrieblichen Altersversorgung besteht das Kollektiv aus mehreren Gruppen: den aktiven Arbeitnehmern, den ausgeschiedenen Arbeitnehmern, den Altersrentnern, den Invalidenrentnern und den Hinterbliebenenrentnern. Die Zusammenhänge der einzelnen Gruppen und die möglichen Übergänge sind in der folgenden Grafik zusammengefasst.



(vgl. [7] S.57 und S.66 bzw. [4] S.508)

Man erkennt, dass ein aktiver Arbeitnehmer zwar in alle Gruppen direkt oder auch über Umwege wechseln kann, aber das Modell keine Reaktivierung von Arbeitnehmern z.B. aus der Invalidität oder nach dem Ausscheiden aus dem Arbeitsverhältnis vorsieht. Am Ende landet jeder Versorgungsanspruch in dem Zustand „Ohne Anspruch“.

Das in der Grafik beschriebene Modell wird in der Pensionsversicherungsmathematik wie folgt formalisiert (vgl. [7] S.47 bzw. [4] S.492f):

q_x^{aa} : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger aktiver Arbeitnehmer als Aktiver im Altersintervall $[x, x + 1)$ stirbt.

i_x : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger aktiver Arbeitnehmer im Altersintervall $[x, x + 1)$ invalide wird.

s_x : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger aktiver Arbeitnehmer im Altersintervall $[x, x + 1)$ ausscheidet.

q_x^i : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger Invalidenrentner im Altersintervall $[x, x + 1)$ stirbt.

q_x^r : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger Altersrentner im Altersintervall $[x, x + 1)$ stirbt.

q_x^w : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger Hinterbliebenenrentner im Altersintervall $[x, x + 1)$ stirbt.

$q_x^{aa,0F}$: Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger ausgeschiedener Arbeitnehmer als ausgeschiedener Arbeitnehmer im Altersintervall $[x, x + 1)$ stirbt.

i_x^{0F} : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger ausgeschiedener Arbeitnehmer im Altersintervall $[x, x + 1)$ invalide wird.

h_x : Wahrscheinlichkeit, dass ein x -jähriger Mann, bei Tod im Altersintervall $[x, x + 1)$ verheiratet ist.

$y(x)$: Alter der Hinterbliebenen am Beginn des Todesjahres des Mannes, bei Tod im Altersintervall $[x, x + 1)$.

Dabei wird das Alter x versicherungstechnisch (d.h. durch normale Rundung) ermittelt. Bei einer männlichen Person wird dieses versicherungstechnische Alter wie in den obigen Definitionen mit x , bei einer weiblichen Person mit y bezeichnet. $y(x)$ ist das versicherungstechnische Alter der Witwe zu Beginn des Todesjahres des Mannes. Die entsprechende Bezeichnung des versicherungstechnischen Alters des Witwers ist $x(y)$.

Hängen die Wahrscheinlichkeiten nur vom Alter und vom Geschlecht ab, so handelt es sich um eine Periodentafel. Gibt es darüber hinaus eine Abhängigkeit vom Geburtsjahrgang, so spricht man von einer Generationentafel. In der betrieblichen Altersversorgung haben sich in Deutschland die Richttafeln von K. Heubeck durchgesetzt. Bis ins Jahr 2005 wurde dabei eine Periodentafel, die Richttafeln 1998 bzw. die Vorgängerversion die Richttafeln 1983, verwendet. Bei dem heute in der Praxis verwendeten Modell - den Richttafeln 2005 G - handelt es sich um eine Generationentafel (vgl. [4]).

3. Der Einpersonenfall ohne Hinterbliebenenversorgung und Fluktuation

In dem in Abschnitt 2 beschriebenen allgemeinen Modell der betrieblichen Altersversorgung hängen die Wahrscheinlichkeiten nur vom aktuellen versicherungsmathematischen Alter ab. Es spielt dabei z.B. für die Invalidensterblichkeit keine Rolle, wie lange die Person schon invalide ist. Daher ist es sinnvoll zur Modellierung eine Markov-Kette zu verwenden. Da die Wahrscheinlichkeiten für die Übergänge von einem zum anderen Zustand aber vom jeweiligen Alter abhängen, handelt es sich um eine inhomogene Markov-Kette. Das Ziel ist es, mithilfe der in [5] dargestellten Ergebnisse versicherungsmathematische Barwerte zu berechnen. Die Verwendung von Markov-Prozessen zur Berechnung von versicherungsmathematischen Barwerten für die betriebliche Altersversorgung findet man auch in der Literatur wieder. So wird z.B. in [6] S.291ff die Berechnung von Anwartschaftsbarwerten in der Pensionsversicherungsmathematik mithilfe von Markov-Modellen ausgeführt.

In diesem Abschnitt sei eine Person mit einer Zusage auf Alters- und Invalidenversorgung gegeben. Eine Hinterbliebenenversorgung ist nicht zugesagt. Eine Fluktuation, d.h. ein

vorzeitiges Ausscheiden aus dem Unternehmen ist in diesem einfachen Modell nicht vorgesehen. Das Geschlecht wird als männlich angenommen, somit wird das Alter am Bewertungsstichtag im Folgenden mit x bezeichnet. Für die Person gibt es die folgenden Zustände in denen sie sich befinden kann.

Zustand Nummer 0:

Die Person ist tot und es bestehen somit keinerlei Zahlungsverpflichtungen mehr.

Zustand Nummer 1:

Die Person ist aktiver Arbeitnehmer und im Unternehmen tätig.

Zustand Nummer 2:

Die Person bezieht Invalidenrente.

Zustand Nummer 3:

Die Person bezieht Altersrente.

Es sei X_n der Zustand, in dem sich die Person am Ende des n -ten Jahres befindet, $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann ist $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ die zugehörige Markov-Kette mit dem Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Die 4×4 Übergangsmatrizen $Q(n) = (q_{i,j}(n))$, $n = 1, 2, 3, \dots$, seien wie folgt gegeben. Dabei sei x das Alter der Person im Zeitpunkt 0 (Bewertungszeitpunkt), A das früheste mögliche Eintrittsalter in die Unternehmung, E das Endalter der Finanzierung bzw. der Übergang in die Altersrente und Ω das letzte mögliche Alter überhaupt. Die Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten erfolgt dabei auf Basis der Modellierung in [4] S.505.

Übergänge aus Zustand 0:

$$q_{0,0}(n) := 1, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$q_{0,j}(n) := 0, j = 1, 2, 3, n = 1, 2, 3, \dots$$

Übergänge aus Zustand 1:

$$q_{1,1}(n) := 1 - q_{x+n-1}^{aa} - i_{x+n-1}, \quad A \leq x+n-1 \leq E-2$$

$$q_{1,1}(n) := 0, \quad x+n-1 = E-1$$

$$q_{1,2}(n) := i_{x+n-1} \cdot \frac{1 - q_{x+n-1}^i}{1 - 0,5 \cdot q_{x+n-1}^i}, \quad A \leq x+n-1 \leq E-2$$

$$q_{1,2}(n) := 0, \quad A \leq x+n-1 = E-1$$

$$q_{1,3}(n) := 0, \quad A \leq x+n-1 < E-1$$

$$q_{1,3}(n) := 1 - q_{x+n-1}^{aa} - i_{x+n-1} + i_{x+n-1} \cdot \frac{1 - q_{x+n-1}^i}{1 - 0,5 \cdot q_{x+n-1}^i}, \quad x+n-1 = E-1$$

$$q_{1,0}(n) := 1 - \sum_{j=1}^3 q_{1,j}(n) = q_{x+n-1}^{aa} + i_{x+n-1} \cdot \frac{0,5 \cdot q_{x+n-1}^i}{1 - 0,5 \cdot q_{x+n-1}^i}, \quad A \leq x+n-1 \leq E-1$$

$$q_{1,0}(n) = 1, q_{1,1}(n) = q_{1,2}(n) = q_{1,3}(n) = 0, \quad x+n-1 > E-1$$

Übergänge aus Zustand 2:

$$q_{2,1}(n) := 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$q_{2,2}(n) := 1 - q_{x+n-1}^i, \quad A \leq x+n-1 \leq E-2$$

$$q_{2,2}(n) := 0, \quad x+n-1 = E-1$$

$$q_{2,3}(n) := 0, \quad A \leq x+n-1 < E-1$$

$$q_{2,3}(n) := 1 - q_{x+n-1}^i, \quad x+n-1 = E-1$$

$$q_{2,0}(n) := 1 - \sum_{j=1}^3 q_{2,j}(n) = q_{x+n-1}^i, \quad A \leq x+n-1 \leq E-1$$

$$q_{2,0}(n) = 1, q_{2,2}(n) = q_{2,3}(n) = 0, \quad x+n-1 > E-1$$

Übergänge aus Zustand 3:

$$q_{3,1}(n) := 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$q_{3,2}(n) := 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$q_{3,3}(n) := 1 - q_{x+n-1}, A \leq x + n - 1 < \Omega$$

$$q_{3,0}(n) := 1 - \sum_{j=1}^3 q_{3,j}(n) = q_{x+n-1}, A \leq x + n - 1 < \Omega$$

$$q_{3,0}(n) = 1, q_{3,3}(n) = 0, x + n - 1 \geq \Omega$$

Entsprechend der Modellierung in [5] werden jetzt die Anfangsverteilung \mathbf{P}_0 und die Leistungsvektoren \mathbf{L}_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, definiert. Die gegebene Person kann einem der vier möglichen Zustände zugeordnet werden. Der Zeilenvektor \mathbf{P}_0 ist an der zu diesem Zustand gehörenden Stelle mit 1 besetzt, ansonsten mit 0. Der Leistungsvektor

$$\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} L_{n,0} \\ L_{n,1} \\ L_{n,2} \\ L_{n,3} \end{pmatrix} \text{ ist für } n = 1, 2, \dots, \Omega - x \text{ mit den nach } n \text{ Jahren in den jeweiligen Zuständen}$$

zu zahlenden Leistungen belegt. Für $n > \Omega - x$ sei \mathbf{L}_n der Nullvektor.

Es sei ferner $\mathbf{B}_k := \sum_{n=k}^{\infty} v^{n-k} \cdot \sum_{j=0}^3 \mathbf{1}_{\{X_n=j\}} \cdot \mathbf{L}_{n,j}$ der (zufällige) Barwert der zukünftigen

Leistungen für die Zeitpunkte $k = 0, 1, 2, \dots$. Dabei ist v der konstante Diskontierungsfaktor. Für die erwarteten Barwerte erhält man folgende Aussage:

Satz 1:

$$\mathbf{E}(\mathbf{B}_k) = \sum_{n=k}^{\Omega-x} v^{n-k} \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \prod_{j=1}^n \mathbf{Q}(j) \cdot \mathbf{L}_n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Beweis:

Da \mathbf{L}_n der Nullvektor für $n > \Omega - x$ und

$$L := \max \{ \text{abs}(L_{n,j}) \mid n = 0, 1, 2, \dots, j = 0, \dots, 3 \} = \max \{ \text{abs}(L_{n,j}) \mid n = 0, 1, 2, \dots, \Omega - x, j = 0, \dots, 3 \} < \infty$$

folgt die Behauptung direkt aus [5] Satz 1.

□

Der erwartete Barwert zum Bewertungszeitpunkt 0 berechnet sich somit durch:

$$E(\mathbf{B}_0) = \sum_{n=0}^{\Omega-x} v^n \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j) \cdot L_n .$$

Dabei ist zu beachten, dass mit diesem einfachen Ansatz keine Finanzierung (z.B. PUC-Methode) berücksichtigt wird und nur einfache Versorgungsordnungen abgebildet werden können.

Aus [5] Satz 2 ergibt sich ferner die folgende Bilanzgleichung:

$$E(\mathbf{B}_{k-1}) = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k-1} Q(j) \cdot L_{k-1} + v \cdot E(\mathbf{B}_k) , k = 1, 2, \dots .$$

4. Der allgemeine Einpersonenfall

Der in Abschnitt 3 betrachtete Fall beinhaltet keine Zusage auf Hinterbliebenenleistung. Des Weiteren fehlte bei diesem Modell die Möglichkeit, das Unternehmen vorzeitig zu verlassen. In diesem Abschnitt wird diskutiert, wie sich die Markov-Kette verändert, wenn beide Sachverhalte berücksichtigt werden.

Durch die Berücksichtigung des vorzeitigen Ausscheidens aus dem Unternehmen muss der Zustandsraum um eine Möglichkeit erweitert werden. Die Übergangswahrscheinlichkeiten aus dem Zustand eines aktiven Arbeitnehmers berücksichtigen dann neben den bisherigen Wahrscheinlichkeiten q_x^{aa} und i_x auch die Fluktuationswahrscheinlichkeiten s_x und die Ausscheideordnungen für ausgeschiedene Arbeitnehmer $q_x^{aa,of}$ und i_x^{of} (vgl. [8] S.40ff).

Wir wollen im Folgenden davon ausgehen, dass bei der Berücksichtigung der Hinterbliebenenleistung die kollektive Bewertungsmethode (vgl. [6] S. 306ff) angewendet wird. Dies hat zur Konsequenz, dass bei der Berücksichtigung der Hinterbliebenenleistung nicht von einer festen Altersdifferenz bezüglich verstorbener Person und Witwe/Witwer ausgegangen wird. Vielmehr ist diese Altersdifferenz abhängig vom Alter der verstorbenen Person. Bei der Verwendung einer Generationentafel hat dies zur Folge, dass damit auch der Geburtsjahrgang der Hinterbliebenen je nach Alter variiert. Somit sind für die Modellierung der Hinterbliebenenversorgung mehrere zusätzliche Zustände nötig. Es ergibt sich der folgende Zustandsraum:

Zustand Nummer 0:

Die Person ist tot und es bestehen somit keinerlei Zahlungsverpflichtungen mehr.

Zustand Nummer 1:

Die Person ist aktiver Arbeitnehmer und im Unternehmen tätig.

Zustand Nummer 2:

Die Person bezieht Invalidenrente.

Zustand Nummer 3:

Die Person bezieht Altersrente.

Zustand Nummer 4

Die Person ist als Arbeitnehmer aus dem Unternehmen ausgeschieden.

Zustand Nummer 5 bis $4 + M$

Die Person vom Jahrgang J ist verstorben. Es gibt eine Witwe bzw. einen Witwer vom Geburtsjahrgang J_w . Dabei ist M die Anzahl der möglichen Jahrgänge für die Witwe bzw. den Witwer und Δ die maximal mögliche Differenz $J - J_w$.

Somit erhält man jetzt eine inhomogene Markov-Kette $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ mit dem Zustandsraum $S = \{0,1,2,\dots,4 + M\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch die $(5 + M) \times (5 + M)$ Übergangsmatrizen $Q(n)$, $n = 1,2,\dots$. Deren Einträge ergeben sich durch die Anwendung der üblichen Modelle der Pensionsversicherungsmathematik (vgl. [4], [7], [8]).

Die am Anfang gegebene Person kann einem der $5 + M$ Zustände zugeordnet werden. Der Zeilenvektor P_0 ist an dieser Stelle wieder mit $\mathbf{1}$ besetzt, ansonsten mit $\mathbf{0}$. Die Leistungsvektoren L_n seien analog zum einfachen Fall in Abschnitt 3 definiert. Allerdings ist dabei zu beachten, dass aufgrund der Jahrgangsdifferenz (verstorbene Person und Hinterbliebene) L_n erst ab einem späteren Zeitpunkt mit dem Nullvektor besetzt werden kann, frühestens für $n > \max(\Omega - x, \Omega - x + \Delta)$. Aus der Theorie der Markov-Ketten ergibt sich nun analog zu Abschnitt 3:

Satz:

a) Bewertung:

$$E(B_k) = \sum_{n=k}^{\max(\Omega-x, \Omega-x+\Delta)} v^{n-k} \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j) \cdot L_n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$E(B_0) = \sum_{n=0}^{\max(\Omega-x, \Omega-x+\Delta)} v^n \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j) \cdot L_n$$

b) Bilanzgleichung:

$$E(B_{k-1}) = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k-1} Q(j) \cdot L_{k-1} + v \cdot E(B_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Dabei ist auch hier zu beachten, dass mit auch diesem Ansatz keine Finanzierung (z.B. PUC-Methode) berücksichtigt wird und nur einfache Versorgungsordnungen abgebildet werden können.

5. EDV-technische Umsetzung

Nach der Modellierung der betrieblichen Altersversorgung als Markov-Kette stellt sich direkt die Frage, wie eine EDV-technische Umsetzung der Formel

$$E(B_0) = \sum_{n=0}^{\max(\Omega-x, \Omega-x+\Delta)} v^n \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j) \cdot L_n$$

zur Berechnung von Barwerten zu realisieren ist.

Um Rechenzeit und Speicherplatz zu sparen wird die Programmierung der Formel wie folgt strukturiert.

(1) Berechne im ersten Schritt $P_n = P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j)$ durch die Induktion $P_n = P_{n-1} \cdot Q(n)$.

(2) Berechne im zweiten Schritt die Produkte $P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j) \cdot L_n = P_n \cdot L_n$.

(2) Berechne im dritten Schritt die Summe

$$E(B_0) = \sum_{n=0}^{\max(\Omega-x, \Omega-x+\Delta)} v^n \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^n Q(j) \cdot L_n = \sum_{n=0}^{\max(\Omega-x, \Omega-x+\Delta)} v^n \cdot P_n \cdot L_n$$

Durch diese Vorgehensweise werden lediglich Vektoren mit Vektoren bzw. Vektoren mit Matrizen nicht aber Matrizen mit Matrizen multipliziert. Dies führt bezogen auf Rechenzeit und Speicherplatz zu einer erheblichen Entlastung.

6. Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird eine auf der Markov-Theorie basierende Methode zur Berechnung von Barwerten in der Pensionsversicherungsmathematik dargestellt. Dies wird bisher allerdings lediglich bei einfachen Konstellationen ausgeführt. So wird zunächst nur der Einpersonenfall mit jährlicher Zahlung und einfacher Versorgungsordnung behandelt.

Es stellt sich nun direkt die Frage, wie die in der Pensionsversicherungsmathematik üblichen Annahmen in das Modell eingebaut werden können. Dies sind im Einzelnen:

- Komplexere Versorgungsordnungen, z.B. die Abhängigkeit der Invalidenrente oder Hinterbliebenenrente von der Dienstzeit bzw. dem Alter.
- Rententrend, d.h. eine jährliche Steigerung der laufenden Renten.
- Unterjährliche Zahlungen, d.h. die laufenden Renten werden z.B. monatlich gezahlt.
- Finanzierungsverfahren, z.B. die PUC-Methode.

Wenn es gelingt, diese bewertungsrelevanten Sachverhalte in das Modell einzubauen, ergibt sich durch eine Bewertung mithilfe von Markov-Ketten die Möglichkeit Sachverhalte zu modellieren, bei denen die beiden üblichen Bewertungsmethoden (direkte Berechnung des Erwartungswertes, Lösen des linearen Gleichungssystems) an ihre Grenzen stoßen.

Ein Aspekt ist dabei die Reaktivierung eines Invaliden bzw. eines Ausgeschiedenen mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit. Ein weiterer Aspekt ist der Übergang in die Altersrente; die meisten Versorgungsordnungen ermöglichen den Übergang in die Altersrente zu unterschiedlichen Altern (vorgezogen oder regulär). Beide Aspekte können durch den Ansatz von entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in der Übergangsmatrix relativ einfach modelliert werden.

Eine weitere Möglichkeit ergibt sich bei ungewöhnlichen Rentenverläufen, insbesondere bei den vorzeitigen Leistungen (Invalidität und Tod). Damit sind Rentenverläufe gemeint, die weder konstant sind noch geometrisch oder arithmetisch wachsend. Dadurch, dass in jedem Zeitpunkt die Verteilung auf die Zustände berechnet wird, ist es möglich die Rentenhöhe zustands- und zeitabhängig abzubilden, ohne dass sich dadurch der Rechenaufwand entscheidend erhöht.

Offen bleibt die Frage, wie die Bewertung eines Bestandes (d.h. mehrere Personen) sinnvoll organisiert werden sollte. Zum einen hat man die Möglichkeit den Zustandsraum der Markov-Kette erheblich zu vergrößern und alle Personen eines Bestandes gleichzeitig zu bewerten. Dies führt allerdings zu relativ großen Übergangsmatrizen, was bei den durchzuführenden Multiplikationen EDV-technisch schwierig zu handhaben wäre. Darüber hinaus würde diese Vorgehensweise dem Einzelbewertungsgrundsatz bei der Bilanzerstellung widersprechen. Daher erscheint es sinnvoller, für jede Person die Übergangsmatrizen zu definieren und die entsprechenden Bewertungen einzeln durchzuführen.

Literaturverzeichnis

- [1] *Gerber, Hans U.* Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1986.
- [2] *Kemper, Kurt;
Kisters-Kölkes,
Margarete;
Berenz, Klaus;
Huber, Brigitte* BetrAVG Kommentar zum Betriebsrentengesetz, 4. Auflage, Luchterhand 2010.
- [3] *Koller, Michael* Stochastische Modelle in der Lebensversicherung, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010.
- [4] *Heubeck, Klaus;
Herrmann, Richard;
D'Souza, Gabriele* Die Richttafel 2005 G - Modell, Herleitung, Formeln -, Blätter der DGVFM, Band XXVII, Heft 3, S. 473-517.
- [5] *Knobloch, Ralf* Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme mithilfe von Markov-Ketten. In: Forschung am IVW Köln 3/2011, Köln 2011, www.fh-koeln.de/faris (Stand 27. Juli 2011).
- [6] *Milbrodt, Hartmut;
Helbig, Manfred* Mathematische Methoden der Personenversicherungsmathematik, Walter de Gruyter, Berlin New York 1999.
- [7] *Neuburger, Edgar
(Hrsg.)* Mathematik und Technik betrieblicher Pensionszusagen, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik Heft 25, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe 1997.
- [8] *Neuburger, Edgar* Skript zur Mathematik der Pensionsversicherung, www.neuburger.com/Skript.html (Stand 27. Juli 2011).

Kontakt/Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der OnlinePublikationsreihe „**Forschung am IVW Köln**“.

Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder unter <http://opus.bsz-bw.de/fhk/index.php?la=de> abgerufen werden.

Eine weitere Publikationsreihe ist die **Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswesen der Fachhochschule Köln**.

Herausgeber: Verein der Förderer des Instituts für Versicherungswesen an der Fachhochschule Köln e. V. Die Schriftenreihe kann über den Verlag Versicherungswirtschaft bezogen werden (<http://www.vvw.de/>).

Eine Übersicht aller Hefte der Schriftenreihe kann auch unter folgender Adresse abgerufen werden:

<http://www.f04.fh-koeln.de/fakultaet/institute/ivw/informationen/publikationen/00366/index.html>

Köln, Oktober 2011

Herausgeber / Editorship:

Prof. Dr. Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270

Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Ralf Knobloch
Institut für Betriebswirtschaftslehre /
Institute of Business Administration

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3425

Fax +49 221 8275-3135

Mail ralf.knobloch@fh-koeln.de

ISSN (online) 2192-8479