

Heep-Altiner, Maria

Research Report

Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung

Forschung am iwWKöln, No. 2/2011

Provided in Cooperation with:

Technische Hochschule Köln – University of Applied Sciences, Institute for Insurance Studies

Suggested Citation: Heep-Altiner, Maria (2011) : Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadenversicherung, Forschung am iwWKöln, No. 2/2011, Technische Hochschule Köln, Institut für Versicherungswesen (iwWKöln), Köln, <https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-58>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/226533>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

Forschung am IVW Köln, 2/2011

Institut für Versicherungswesen



Performanceoptimierung des (Brutto) Neugeschäfts in der Schadensversicherung

Maria Heep-Altiner

Zusammenfassung

Mit Hilfe von internen Modellen kann man in der Schadenversicherung das Risiko / Rendite Profil einer Neugeschäftsstrategie bewerten und Entscheidungen daraus ableiten. Dabei kann man i. d. R. nur einzelne Strategien miteinander vergleichen, aber kein allgemein gültiges Optimum herleiten. Unter bestimmten Voraussetzungen ist es allerdings möglich, für das (Brutto) Neugeschäft auch geschlossene Lösungen für diese Fragestellung zu finden. Selbst wenn diese Voraussetzungen in der Reinform meistens kaum vorliegen, ergeben sich doch aus diesem Ansatz einige interessante Implikationen für die Unternehmenssteuerung. Insbesondere können solche Ansätze dafür verwendet werden, bessere „Startwerte“ zu finden, die dann mit internen Modellen getestet werden können.

Abstract

By the help of internal models the risk / return profile for a new business strategy of a non-life insurer can be evaluated and decisions based on this can be derived. Normally, only single strategies can be compared, but a global optimum can't be determined. Nevertheless, under certain conditions it is possible to obtain closed solutions concerning the (gross) new business strategy. Even if those conditions do not exist purely in this form interesting implications towards value based management can be derived from this approach. Especially, those approaches may be used to find better initial values to test a business strategy by an internal model.

Inhaltsverzeichnis

1	VORBEMERKUNGEN	1
2	VEREINFACHTER MODELLANSATZ BEI UNKORRELIERTEN RISIKEN.....	4
2.1	OPTIMIERUNG DES RETURN ON RISK ADJUSTED CAPITAL.....	5
2.2	OPTIMIERUNG DES ECONOMIC VALUE ADDED.....	8
3	ALLGEMEINER MODELLANSATZ	9
3.1	OPTIMIERUNG DES RETURN ON RISK ADJUSTED CAPITAL.....	10
3.2	OPTIMIERUNG IN SPEZIALFÄLLEN	11
4	BERECHNUNGSBEISPIELE	12
4.1	UNKORRELIERTE ASSETS UND LIABILITIES	12
4.2	KORRELIERTE ASSETS UND LIABILITIES	17
5	FAZIT	18
	LITERATURVERZEICHNIS	20
	ABBILDUNGSVERZEICHNIS	21
	KONTAKT.....	22

1 Vorbemerkungen

Die klassische Performancebeurteilung eines Segmentes in der Schadenversicherung erfolgt über die kombinierte Schadenkostenquote. Mit Hilfe von internen Modellen kann man hier geeignete Zielvorgaben ermitteln, so dass unter Einbeziehung einer Verzinsung des freien liquiden Saldos eine angemessene Verzinsung der für die Risikoabsicherung benötigten Eigenmittel erzielt wird (siehe hierzu auch [1], [2] und [3]).

Dabei ist es natürlich nicht immer möglich, diese Zielvorgaben auch uneingeschränkt umzusetzen, da sich auf den Versicherungsmärkten nicht immer die für die Zielerfüllung benötigten Prämienniveaus erzielen lassen. Hier muss man also unter Berücksichtigung der gegebenen Möglichkeiten nach geeigneten Kombinationen zur Optimierung des Risiko / Rendite Profils für das gesamte Portfolio suchen.

Auch hier bieten interne Modelle geeignete Lösungsansätze, da man in einem solchen Modell unterschiedliche Neugeschäftsstrategien testen und die erzielten Risiko / Rendite Profile miteinander vergleichen kann.

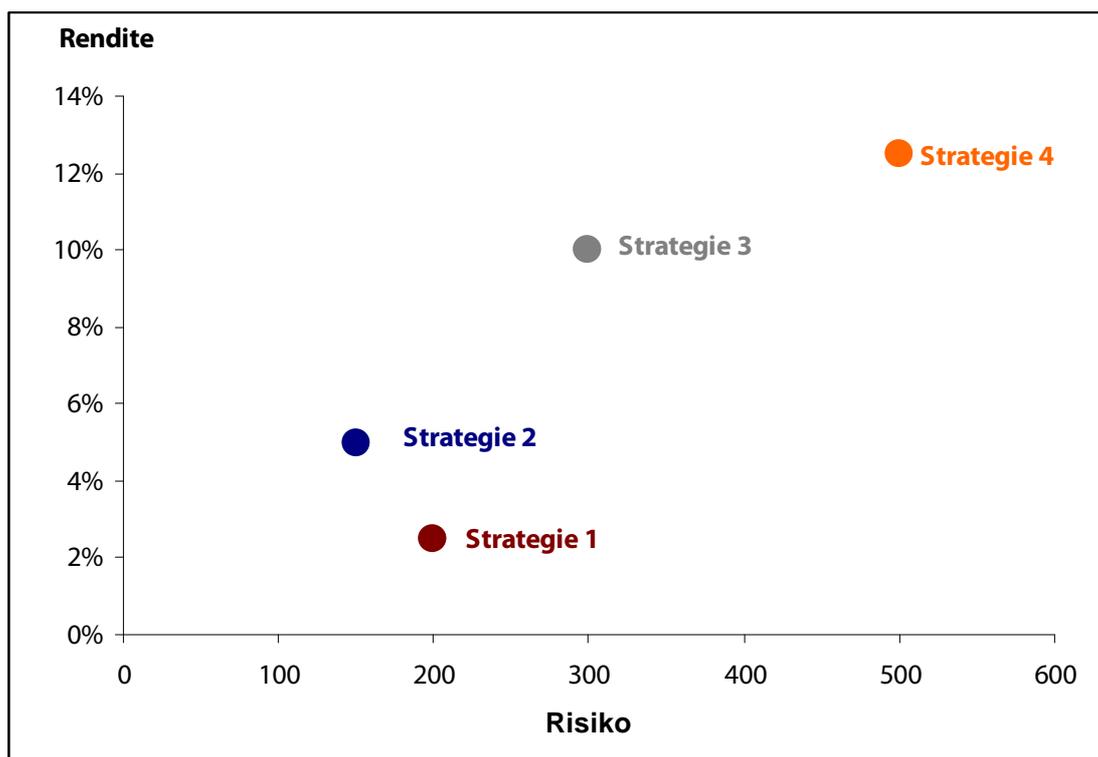


Abbildung 1: Risiko / Rendite Profile unterschiedlicher Geschäftsstrategien.

Die Darstellung der Risiko / Rendite Profile in Abbildung 1 basiert auf dem klassischen Markowitzansatz, welcher seit langem einen Standardansatz zur Beurteilung der Zusammensetzung eines Kapitalanlagenportfolios darstellt (siehe dazu beispielsweise [5] oder [7]). Dabei wird das Risiko i. d. R. durch die Standardabweichung beschrieben. Bereits in dieser einfachen Darstellung ist sofort offensichtlich, dass die Geschäftsstrategie 1 subop-

timal ist, da mit Strategie 2 mehr Rendite bei weniger Risiko erzielt werden kann. Zwischen den Strategien 2 und 4 gibt es dieses einfache Entscheidungskriterium allerdings nicht mehr, da hier zusätzlich die Kenntnis der Risikopräferenzstruktur benötigt wird. Ein risikoscheuer Entscheidungsträger wird eher Strategie 2 wählen, risikofreudigere Entscheidungsträger ziehen durchaus auch die Strategien 3 und 4 in Betracht.

Dabei ist die korrekte Quantifizierung einer Risikopräferenzstruktur durchaus ein nicht triviales Problem, das sich im Kontext einer wertorientierten Unternehmenssteuerung aber aus den folgenden Gründen einfacher gestaltet als im Kontext einer privaten Investitionsentscheidung:

- Es gibt (rechtliche) Mindestvorgaben zur Risikoexponierung, beispielsweise im Rahmen der Solvency II Vorschriften oder der für die Risikozeichnung relevanten Ratinganforderungen.
- Die wertorientierte Steuerung erfolgt auf der Basis zuvor festgelegter Risiko / Renditekennziffern wie etwa RORAC (= „Return on Risk Adjusted Capital“) oder EVA¹ (= „Economic Value Added“).

Mit Hilfe eines internen Modells kann man dann für jede Strategie ermitteln, ob sie die gesetzlichen und sonstigen Mindestvoraussetzungen erfüllt und welchen Wert sie für eine zuvor festgelegte Risiko / Renditekennziffer annimmt.

Dabei wird bei internen Modellen in der Schadenversicherung in der Regel das ökonomische Eigenkapital nach Ablauf eines Jahres mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen modelliert, da man aufgrund der Vielfalt der stochastischen Interaktionen nicht mehr mit geschlossenen Formeln arbeiten kann. Aus diesem Grund kann man auch nicht mehr klassische Optimierungsverfahren anwenden. Somit bedeutet Optimierung in diesem Zusammenhang meistens, dass man einige (aufgrund der Rechnerlaufzeiten oft wenige) Kombinationen simuliert und miteinander vergleicht. Man kann dadurch zwar bessere Geschäftskombinationen erkennen, aber u. U. keine optimale Konstellation identifizieren. Ergänzend hierzu kann jedoch versuchen, mit Hilfe einfacherer Algorithmen bessere Startwerte für die Simulation alternativer Parameterkombinationen zu finden.

Im Folgenden soll für die Optimierung der (Brutto) Neugeschäftsstrategie ein vereinfachtes Verfahren beschrieben werden, das eine geschlossene Lösung für den Optimierungsansatz liefert, wobei sowohl

- die Risikozeichnung in unterschiedliche Sparten als auch
- die Kapitalanlage in unterschiedliche Assetklassen

¹ Das Kürzel EVA ist ein eingetragenes Warenzeichen der Unternehmensberatung Stern Steward & Co. Zur Vereinfachung der nachfolgenden Berechnungen gilt diese Fußnote für alle weiteren Verwendungen des Kürzels.

in die Modellbildung einbezogen werden. Aufgrund der vereinfachten Struktur ist der Ansatz allerdings nur bedingt für die Optimierung der Netto Neugeschäftsstrategie geeignet. In diesem Fall ist eine Anwendung nur dann sinnvoll, wenn näherungsweise von einer quotalen Rückversicherung ausgegangen werden kann oder der Ansatz aufgrund festgelegter Rückversicherungsstrukturen auf die Nettowerte angewendet werden kann. Bei diesem Modellansatz gehen wir für die (Brutto) Neugeschäftsprämie von folgenden Annahmen aus:

- (1) Von der Neugeschäftsprämie entfallen die Anteile $y_0 + y_1 + \dots + y_m = 1$ auf die **Sparten** $0, 1, \dots, m$, wobei für die abgewickelten kombinierten Schadenkostenaufwendungen $E[C_j] = c_j$ gelten soll. Durch eine geeignete Barwertbetrachtung können wir dabei ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass alle Schadenkostenaufwendungen **zum Ende des Jahres** erfolgen.
- (2) Die Neugeschäftsprämie wird mit den Anteilen $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ in die **Assetklassen** $0, 1, \dots, n$ angelegt, wobei für die kumulierten Renditen $E[R_i] = r_i$ gelten soll. Durch eine geeignete Barwertbetrachtung können wir dabei ohne Einschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass alle Kapitalanlagen **zum Beginn des Jahres** erfolgen und die Renditen zum Ende des Jahres fällig werden.
- (3) Das Neugeschäft wird mit dem benötigten **Eigenkapital** EK_α zum Sicherheitsniveau α (beispielsweise dem Niveau gemäß Solvency II) hinterlegt, welches **risikofrei angelegt** wird, d. h. es gilt $EK_{1,\alpha}(\omega) = EK_\alpha \cdot (1 + r_f) + GuV(\omega)$.
- (4) Zumindest für die gesamte GuV wird näherungsweise von einer **Normalverteilung** ausgegangen, so dass $EK_\alpha = (t_\alpha \cdot S - E) / (1 + r_f)$ mit $E = E[GuV]$ und $S = STD[GuV]$ gilt.

Aus der in (1) formulierten Bedingung ergibt sich in den nachfolgenden Betrachtungen eine Definition der kombinierten Schadenkostenquote (bzw. „Combined Ratio“), die auf den Barwert zum Ende des Jahres abstellt im Unterschied zu der üblichen Definition auf Basis aller nominellen Schaden- und Kostenzahlungen. In allen Berechnungsbeispielen werden zur Vereinfachung der Notation unverändert die Begriffe „kombinierte Schadenkostenquote“ oder „Combined Ratio“ verwendet; die so definierten Quoten liegen aufgrund der Barwertbetrachtung unterhalb der nominell definierten Quoten.

Die Annahmen in (1) und (2) berücksichtigen nicht, dass es gesetzliche oder unternehmensinterne Restriktionen gibt, wie hoch die einzelnen Anteile in den Sparten oder Assetklassen sein dürfen. Die Modellansätze lassen sich dahingehend modifizieren; dies lag aber nicht im Fokus der hier skizzierten Überlegungen.

Die Bedingungen (3) und (4) vereinfachen den Modellansatz und ermöglichen geschlossene Formeln. Da es in der Schadenversicherung gesetzliche Bestimmungen gibt, wie hoch die Anteile für riskante Assetklassen sein dürfen, stellt (3) keine wirklich große Einschränkung dar. Dies gilt ebenfalls für (4), da bei Einbeziehung vieler bzw. gut diversifizierter Assetklassen und Sparten diese Bedingung zumindest approximativ gegeben sein sollte.

Wir haben bei den nachfolgenden Modellansätzen im Sinne einer Vorsteuerbetrachtung keine separate Berücksichtigung der steuerlichen Behandlung vorgenommen; bei signifikanten Unterschieden in der steuerlichen Behandlung sollten die Steueransätze in die Parameter eingerechnet werden. Weiterhin kann eine reine Nettobetrachtung vorgenommen werden (sofern die Optimierung der Rückversicherung nicht im Fokus steht) oder die Rückversicherung kann analog zur Vorgehensweise in IFRS als ein mit den Schadenkostenaufwendungen hoch korreliertes Asset angesetzt werden (sofern approximativ von einer quotalen Rückversicherung ausgegangen wird).

Falls nun σ_i die Volatilität der i-ten Assetklasse und τ_j die Volatilität (des Barwertes) der kombinierten Schadenkostenaufwendungen der j-ten Sparte bezeichnet, so gilt:

$$E = \sum x_i \cdot r_i - \sum y_j \cdot c_j$$

$$S = (\sum x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum y_j^2 \cdot \tau_j^2 + 2 \cdot \sum \text{Korrelationsterme})^{1/2}$$

Die beiden Gleichungen beschreiben eine Verallgemeinerung des klassischen Markowitzansatzes. Setzt man formal $r_j^* = (-c_j)$, dann verhalten sich Liabilities bezüglich der üblichen Effizienzkriterien wie Assets und die erste Gleichung schreibt sich als

$$E = \sum x_i \cdot r_i + \sum y_j \cdot r_j^*.$$

Dies entspricht einem Markowitzansatz, bei dem ein bestimmtes Anlagevolumen in eine Gruppe von Assetklassen und ein anderes Anlagevolumen in eine zweite Gruppe von Assetklassen angelegt werden soll.

Im Folgenden soll zunächst zur Vereinfachung der Optimierungsansatz unter der Voraussetzung hergeleitet werden, dass die Assets und die Liabilities jeweils paarweise unkorreliert sind. In diesem Fall kann die allgemeine Lösung noch relativ explizit beschrieben werden, so dass zumindest die wichtigsten Lösungseigenschaften diskutiert werden können. Der allgemeine Lösungsansatz wird im Anschluss daran kurz skizziert.

2 Vereinfachter Modellansatz bei unkorrelierten Risiken

Wie bereits erläutert kann man anhand der üblichen Effizienzkriterien ineffiziente Portfolios sofort eliminieren. Für eine Entscheidung zwischen zwei effizienten Portfolios (und somit für die Auswahl eines optimalen Portfolios) benötigt man eine Risikopräferenzfunktion. Im Kontext der wertorientierten Steuerung gibt es hier natürlicherweise zwei Präferenzfunktionen, der RORAC (= „Return on Risk Adjusted Capital“) und der EVA (= „Economic Value Added“, siehe Fußnote 1), die in unseren Modellansatz wie folgt definiert werden:

$$\text{RORAC} = r_f + E / EK_\alpha = r_f + (1 + r_f) \cdot E / (t_\alpha \cdot S - E) =: r_f + a \cdot E / (t_\alpha \cdot S - E).$$

$$\text{EVA} = E - (z - r_f) \cdot EK_\alpha = E - (z - r_f) \cdot EK_\alpha = E - (z - r_f) \cdot (t_\alpha \cdot S - E) / (1 + r_f)$$

$$= ((1 + z) / (1 + r_f)) \cdot (E - ((z - r_f) / (1 + z)) \cdot t_\alpha \cdot S) =: b \cdot (E - k \cdot S).$$

Der Parameter z bezeichnet hier die unternehmensindividuelle Zielverzinsung; diese definiert zusammen mit dem unternehmensintern gewählten Sicherheitsniveau α sowie dem risikofreien Zins r_f den Kapitalkostenparameter k bei der Steuerung durch den EVA. Für diese beiden Präferenzfunktionen sollen nun die Kriterien für eine optimale Kombination aus Assets und Liabilities analysiert werden. Dabei gilt bzgl. der ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(*)} \text{RORAC} &= a \cdot (\frac{\partial}{\partial(*)} E \cdot S - E \cdot \frac{\partial}{\partial(*)} S) / (t_\alpha \cdot S - E)^2 \\ \frac{\partial}{\partial(*)} \text{EVA} &= b \cdot (\frac{\partial}{\partial(*)} E - k \cdot \frac{\partial}{\partial(*)} S)\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden notwendigen Bedingungen für ein Optimum:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial(*)} E / \frac{\partial}{\partial(*)} S &= E / S && \text{für den RORAC (unter der Bedingung } (t_\alpha \cdot S - E) \neq 0) \\ \frac{\partial}{\partial(*)} E &= k \cdot \frac{\partial}{\partial(*)} S && \text{für den EVA.}\end{aligned}$$

Im Unterschied zum RORAC hängt also beim EVA ein Optimum nicht nur von den Risiko / Rendite Profilen der Asset- und Liabilityklassen ab, sondern auch vom Kapitalkostenparameter k , der durch die individuelle Unternehmenspolitik festgelegt wird. Falls die o. g. Bedingungen erfüllt sind und nicht $(t_\alpha \cdot S - E)^2 = 0$ gilt, dann folgt für die zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial(*)\partial(**)} \text{RORAC} &= -a \cdot E \cdot \frac{\partial^2}{\partial(*)\partial(**)} S / (t_\alpha \cdot S - E)^2, \\ \frac{\partial^2}{\partial(*)\partial(**)} \text{EVA} &= -b \cdot k \cdot \frac{\partial^2}{\partial(*)\partial(**)} S,\end{aligned}$$

a und b positive Konstanten. Im Normalfall ist die Hessematrix $(\dots \frac{\partial^2}{\partial(*)\partial(**)} S \dots)$ positiv definit, d. h. man erhält für die Nullstellen der ersten Ableitungen dieser Funktionen

- stets ein Maximum im Fall des EVA sowie
- ein Maximum / Minimum für den RORAC, falls die Rendite E größer / kleiner Null ist.

In den folgenden Abschnitten werden wir die Optima bezüglich RORAC und EVA für unseren Modellansatz untersuchen, wobei wir zunächst zur Vereinfachung annehmen, dass alle Assets und Liabilities jeweils paarweise unkorreliert miteinander sind. (In diesem Fall gilt also $2 \cdot \sum \text{Korrelationsterme} = 0$.) Die verallgemeinerten Ergebnisse werden wir dann ohne größere Herleitung angeben.

Weiterhin werden wir zur Vereinfachung der Schreibweise x_0 mit x und y_0 mit y sowie r_0 mit r und c_0 mit c abkürzen. Bei Summationsformeln werden wir gelegentlich diesen Index wieder verwenden, wenn diese dadurch klarer und einfacher werden.

2.1 Optimierung des Return on Risk Adjusted Capital

Für $x + x_1 + \dots + x_n = 1$ sowie $\Delta r_i = r_i - r$ und $y + y_1 + \dots + y_m = 1$ sowie $\Delta c_j = c_j - c$ ergeben sich für den Erwartungswert E und die Standardabweichung S bei Annahme vollständiger Unkorreliertheit folgende Beziehungen:

$$E = r + \sum x_i \cdot \Delta r_i - (c + \sum y_j \cdot \Delta c_j)$$

$$S = (x^2 \cdot \sigma^2 + \sum x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + y^2 \cdot \tau^2 + \sum y_j^2 \cdot \tau_j^2)^{1/2}$$

Somit erhält man für die ersten (partiellen) Ableitungen für alle Indizes i, j die folgenden Resultate für die Ableitungen von E und S:

$$\begin{array}{lll} \partial E / \partial x_i = \Delta r_i & \text{sowie} & \partial E / \partial y_j = -\Delta c_j \\ \partial S / \partial x_i = (x_i \cdot \sigma_i^2 - x \cdot \sigma^2) / S & \text{sowie} & \partial S / \partial y_j = (y_j \cdot \tau_j^2 - y \cdot \tau^2) / S \end{array}$$

Aus den Beziehungen $\partial E / \partial (*) / \partial S / \partial (*) = E / S$ für alle Kombinationen i, j, k, l resultieren dann die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} (x_i \cdot \sigma_i^2 - x \cdot \sigma^2) / \Delta r_i = (x_k \cdot \sigma_k^2 - x \cdot \sigma^2) / \Delta r_k \\ (y_j \cdot \tau_j^2 - y \cdot \tau^2) / \Delta c_j = (y_l \cdot \tau_l^2 - y \cdot \tau^2) / \Delta c_l \\ (x_i \cdot \sigma_i^2 - x \cdot \sigma^2) / \Delta r_i = -(y_j \cdot \tau_j^2 - y \cdot \tau^2) / \Delta c_j \end{array}$$

Falls man mit $\Delta r_{i,j} := r_i - r_j$ (mit dem Spezialfall $\Delta r_i = (r_i - r) = (r_i - r_0) = \Delta r_{i,0}$) bezeichnet, dann kann man unter Verwendung der Beziehungen $\Delta r_{i,j} = -\Delta r_{j,i}$ die obigen Gleichungen wie folgt umformulieren:

$$\begin{array}{l} X_i := x_i \cdot \sigma_i^2 = (x \cdot \sigma^2) \cdot (\Delta r_{i,1} / \Delta r_{0,1}) + (x_1 \cdot \sigma_1^2) \cdot (\Delta r_{i,0} / \Delta r_{1,0}) =: u_{i,0} \cdot X + u_{i,1} \cdot X_1 \\ Y_j := y_j \cdot \tau_j^2 = (y \cdot \tau^2) \cdot (\Delta c_{j,1} / \Delta c_{0,1}) + (y_1 \cdot \tau_1^2) \cdot (\Delta c_{j,0} / \Delta c_{1,0}) =: v_{j,0} \cdot Y + v_{j,1} \cdot Y_1 \end{array}$$

Berücksichtigt man, dass für X, X₁, Y und Y₁ die Beziehungen „per definitionem“ gelten (da die beiden Koeffizienten jeweils die Werte 0 und 1 annehmen), dann gelten für

$$\begin{array}{ll} U := \sum U_{i,0} := \sum u_{i,0} / \sigma_i^2 & \text{und} \quad U_1 := \sum U_{i,1} := \sum u_{i,1} / \sigma_i^2 \quad \text{sowie} \\ V := \sum V_{j,0} := \sum v_{j,0} / \tau_j^2 & \text{und} \quad V_1 := \sum V_{j,0} := \sum v_{j,0} / \tau_j^2 \end{array}$$

aufgrund der Normierungen $x + x_1 + \dots + x_n = 1$ und $y + y_1 + \dots + y_m = 1$ die beiden Beziehungen $U \cdot X + U_1 \cdot X_1 = 1$ sowie $V \cdot Y + V_1 \cdot Y_1 = 1$. Jetzt können die zuvor aufgestellten Gleichungen stark vereinfacht werden. Setzt man nämlich $X_1^* = (X_1 - X)$ sowie $Y_1^* = (Y_1 - Y)$ dann erhält man bezüglich dieser transformierten Variablen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{array}{l} X = (1 - U_1 \cdot X_1^*) / (U + U_1) \\ Y = (1 - V_1 \cdot Y_1^*) / (V + V_1) \\ Y_1^* = -(\Delta c_1 / \Delta r_1) \cdot X_1^* \end{array}$$

Für die endgültige Lösung benötigt man eine weitere unabhängige Gleichung in X₁^{*} und Y₁^{*}. Dazu betrachten wir die Ausgangsbeziehung $E \cdot (x_1 \cdot \sigma_1^2 - x \cdot \sigma^2) = \Delta r_1 \cdot S^2$ und somit

$$\begin{aligned}
& (r + \sum x_k \cdot \Delta r_k - (c + \sum y_j \cdot \Delta c_j)) \cdot (x_1 \cdot \sigma_1^2 - x \cdot \sigma^2) \\
&= \Delta r_1 \cdot (x^2 \cdot \sigma^2 + \sum x_k^2 \cdot \sigma_k^2 + y^2 \cdot \tau^2 + \sum y_j^2 \cdot \tau_j^2) \\
&= \Delta r_1 \cdot (x \cdot (1 - \sum x_k) \cdot \sigma^2 + \sum x_k^2 \cdot \sigma_k^2 + y \cdot (1 - \sum y_j) \cdot \tau^2 + \sum y_j^2 \cdot \tau_j^2) \\
&= \Delta r_1 \cdot (x \cdot \sigma^2 + y \cdot \tau^2) + \sum \Delta r_1 \cdot x_k \cdot (x_k \cdot \sigma_k^2 - x \cdot \sigma^2) + \sum \Delta r_1 \cdot y_j \cdot (y_j \cdot \tau_j^2 - y \cdot \tau^2) \\
&= \Delta r_1 \cdot (x \cdot \sigma^2 + y \cdot \tau^2) + \sum \Delta r_k \cdot x_k \cdot (x_1 \cdot \sigma_1^2 - x \cdot \sigma^2) - \sum \Delta c_j \cdot y_j \cdot (x_1 \cdot \sigma_1^2 - x \cdot \sigma^2)
\end{aligned}$$

Somit verkürzt sich der Ausdruck $E \cdot (x_1 \cdot \sigma_1^2 - x \cdot \sigma^2) = \Delta r_1 \cdot S^2$ folglich zu einer Gleichung

$$(r - c) \cdot X_1^* = (r - c) \cdot (x_1 \cdot \sigma_1^2 - x \cdot \sigma^2) = \Delta r_1 \cdot (x \cdot \sigma^2 + y \cdot \tau^2) = \Delta r_1 \cdot (X + Y)$$

Bringt man alle bis jetzt bekannten Beziehungen zusammen, dann kann man diesen Ausdruck nun nach X_1^* wie folgt auflösen:

$$\begin{aligned}
(r - c) \cdot X_1^* &= \Delta r_1 \cdot ((1 - U_1 \cdot X_1^*) / (U + U_1) + (1 - V_1 \cdot Y_1^*) / (V + V_1)) \\
&= \Delta r_1 \cdot (1 / (U + U_1) + 1 / (V + V_1) - X_1^* \cdot U_1 / (U + U_1) - Y_1^* \cdot V_1 / (V + V_1)) \\
&= \Delta r_1 \cdot (1 / (U + U_1) + 1 / (V + V_1) - X_1^* \cdot U_1 / (U + U_1)) + \Delta c_1 \cdot X_1^* \cdot V_1 / (V + V_1)
\end{aligned}$$

Formt man dieses Gleichungssystem um, so ergibt sich folgende Lösung dieser Gleichung:

$$((r - c) + \Delta r_1 \cdot U_1 / (U + U_1) - \Delta c_1 \cdot V_1 / (V + V_1)) \cdot X_1^* = \Delta r_1 \cdot (1 / (U + U_1) + 1 / (V + V_1)).$$

In der Regel, d. h. wenn der Koeffizient von X_1^* nicht Null ist, gibt es also eine einfache Lösung des Optimierungsproblems, die auf die ursprünglichen Parameter zurückgerechnet werden kann. Es ist allerdings nicht klar, ob dies dann auch eine zulässige Lösung derart ist, dass alle Parameter positiv und zwischen Null und Eins sind. Falls die Rendite in diesem Punkt negativ ist, handelt es sich darüber hinaus um ein Minimum und nicht um ein Maximum.

Man sieht selbst unter diesen teilweise sehr vereinfachten Modellannahmen sofort, dass bei einer Optimierung des Gesamtergebnisses aus Assets und Liabilities eine separate Optimierung der Assets und Liabilities nicht ausreichend ist. Würde man beispielsweise im konkreten Fall die Assets separat optimieren, ergäbe sich die sehr viel einfacher strukturierte Lösung

$$(r + \Delta r_1 \cdot U_1 / (U + U_1)) \cdot X_1^* = \Delta r_1 / (U + U_1).$$

Diese Lösung kann bereits mit einem technisch viel geringeren Aufwand hergeleitet werden, denn es gilt für alle i , dass $r \cdot (x_i \cdot \sigma_i^2 - x \cdot \sigma^2) = \Delta r_i \cdot x \cdot \sigma^2$ und somit $r \cdot x_i \cdot \sigma_i^2 = r_i \cdot x \cdot \sigma^2$. Daraus resultiert ganz allgemein für $c_0 = c = 1$ und $c_i = (r_i \cdot \sigma^2) / (r \cdot \sigma_i^2)$, dass $x_i = c_i / \sum c_k$ gilt. Man hat also immer eine (zulässige) Lösung des Gleichungssystems, da alle Koeffizienten (bei positiver Rendite!) positiv sind und aufgrund der Normierung zwischen Null und Eins liegen müssen. Sofern das Portfolio auch ein risikofreies Asset mit $\sigma = 0$ enthält, gibt es nur die „triviale“ Lösung mit 100% Anlage in das risikofreie Asset (und unendlichem RORAC).

Beim gemischten Ansatz gibt es auch bei einem risikofreien Asset eine nicht triviale Lösung, da es zwar risikoarme aber keine wirklich risikofreien Liabilities gibt und somit die Gesamtvarianz niemals Null wird; es ergibt sich somit niemals ein unendlich großer RO-RAC. In diesem Fall muss man nur in der Gesamtformel $1/(U + U_1) = 0 = U_1/(U + U_1)$ setzen.

2.2 Optimierung des Economic Value Added

Die zuvor gefundenen Vereinfachungen der zu lösenden Gleichungen können auch zur Lösung des EVA Optimierungsproblems verwendet werden. In diesem Fall muss die Beziehung $(\Delta r_1 \cdot S)^2 = (k \cdot X_1^*)^2$ aufgelöst werden. Diese Gleichung kann man wie folgt umformen:

$$(\Delta r_1 \cdot S)^2 = \Delta r_1 \cdot (\Delta r_1 \cdot S^2) = \Delta r_1 \cdot (\Delta r_1 \cdot (X + Y) + X_1^* \cdot (\sum \Delta r_i \cdot x_i - \sum \Delta c_j \cdot y_j)).$$

Aufgrund der zuvor aufgestellten Beziehungen sind X und Y sowie alle x_i und y_j linear in X_1^* , so dass sich diese Gleichung ohne Einschränkung wie folgt schreibt:

$$(A + B \cdot X_1^*) + X_1^* \cdot (C + D \cdot X_1^*) = k^2 \cdot (X_1^*)^2$$

Für eine allgemeine Auswahl von k kürzt sich der quadratische Term nicht automatisch, d. h. hier gibt es nicht unbedingt immer eine Lösung (und zwar nicht nur in einzelnen „singulären“ Kombinationen, sondern ggf. in größeren Wertbereichen). Allgemein schreibt sich die Gleichung nun wie folgt:

$$(X_1^*)^2 + (B + C) / (D - k^2) \cdot X_1^* + A / (D - k^2) = 0$$

Diese Koeffizienten sollen nun im Folgenden berechnet werden, wobei wir zunächst von der der Gleichung

$$\begin{aligned} (\Delta r_1)^2 \cdot (X + Y) &= (\Delta r_1)^2 \cdot ((1 - U_1 \cdot X_1^*) / (U + U_1) + (1 - V_1 \cdot Y_1^*) / (V + V_1)) \\ &= (\Delta r_1)^2 \cdot (1 / (U + U_1) + 1 / (V + V_1) + B \cdot X_1^*), \end{aligned}$$

ausgehen. Somit ergeben sich für die Parameter A und B aus der Ausgangsgleichung folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} A &= (\Delta r_1)^2 \cdot (1 / (U + U_1) + 1 / (V + V_1)) \\ B \cdot X_1^* &= (\Delta r_1)^2 \cdot (-X_1^* \cdot U_1 / (U + U_1) - Y_1^* \cdot V_1 / (V + V_1)) \\ &= \Delta r_1 \cdot (\Delta c_1 \cdot V_1 / (V + V_1) - \Delta r_1 \cdot U_1 / (U + U_1)) \cdot X_1^* \end{aligned}$$

wodurch beide Parameter explizit beschrieben werden. Darüber hinaus betrachten wir jetzt die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_i &= U_{i,0} \cdot X + U_{i,1} \cdot X_1 = U_{i,0} \cdot (1 - U_1 \cdot X_1^*) / (U + U_1) + U_{i,1} \cdot (1 + U \cdot X_1^*) / (U + U_1) \\ y_j &= V_{j,0} \cdot Y + V_{j,1} \cdot Y_1 = V_{j,0} \cdot (1 - V_1 \cdot Y_1^*) / (V + V_1) + V_{j,1} \cdot (1 + V \cdot Y_1^*) / (V + V_1) \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir die folgende Gleichung (linear in den Variablen X_1^* und Y_1^*):

$$\begin{aligned}\Delta r_1 \cdot \sum \Delta r_i \cdot x_i &= \Delta r_1 \cdot (\sum \Delta r_i \cdot (U_{i,0} \cdot (1 - U_1 \cdot X_1^*) + U_{i,1} \cdot (1 + U_1 \cdot X_1^*)) / (U+U_1)) \\ &= (\Delta r_1 / (U+U_1)) \cdot (\sum \Delta r_i \cdot (U_{i,0} + U_{i,1}) + X_1^* \cdot \sum \Delta r_i \cdot (U_{i,1} \cdot U - U_{i,0} \cdot U_1)),\end{aligned}$$

sowie eine zweite Gleichung (ebenfalls linear in den Variablen X_1^* und Y_1^*):

$$\begin{aligned}-\Delta r_1 \cdot \sum \Delta c_j \cdot y_j &= -\Delta r_1 \cdot (\sum \Delta c_j \cdot (V_{j,0} \cdot (1 - V_1 \cdot Y_1^*) + V_{j,1} \cdot (1 + V_1 \cdot Y_1^*)) / (V+V_1)) \\ &\quad - (\Delta r_1 / (V+V_1)) \cdot \sum \Delta c_j \cdot (V_{j,0} + V_{j,1}) + X_1^* \cdot (\Delta c_1 / (V+V_1) \cdot \sum \Delta c_j \cdot (V_{j,1} \cdot V - V_{j,0} \cdot V_1))\end{aligned}$$

Fasst man dies alles zusammen, so ergibt sich daraus für den Parameter C die Beziehung

$$\begin{aligned}C &= \Delta r_1 \cdot (\sum \Delta r_i \cdot (U_{i,0} + U_{i,1}) / (U+U_1) - \sum \Delta c_j \cdot (V_{j,0} + V_{j,1}) / (V+V_1)) \\ &= \Delta r_1 \cdot (\sum (\Delta r_i / \sigma_i^2) / (U+U_1) - \sum (\Delta c_j / \tau_j^2) / (V+V_1)) \\ &= \Delta r_1 \cdot (-\Delta c_1 \cdot V_1 / (V + V_1) + \Delta r_1 \cdot U_1 / (U + U_1))\end{aligned}$$

sowie für den Parameter D die nachfolgende Beziehung:

$$\begin{aligned}D &= \Delta r_1 \cdot \sum \Delta r_i \cdot (U_{i,1} \cdot U - U_{i,0} \cdot U_1) / (U+U_1) + \Delta c_1 \cdot \sum \Delta c_j \cdot (V_{j,1} \cdot V - V_{j,0} \cdot V_1) / (V+V_1) \\ &= \Delta r_1 \cdot \sum \Delta r_i \cdot (U_{i,1} \cdot U + U_{i,0} \cdot U - U_{i,0} \cdot U - U_{i,0} \cdot U_1) / (U+U_1) \\ &\quad + \Delta c_1 \cdot \sum \Delta c_j \cdot (V_{j,1} \cdot V + V_{j,0} \cdot V - V_{j,0} \cdot V - V_{j,0} \cdot V_1) / (V+V_1) \\ &= \sum (\Delta r_i / \sigma_i)^2 + \sum (\Delta c_j / \tau_j)^2 - ((\Delta r_1 \cdot U_1)^2 / (U+U_1) + (\Delta c_1 \cdot V_1)^2 / (V+V_1))\end{aligned}$$

Somit folgt, dass stets $B + C = 0$ gilt und die quadratische Gleichung zu $(X_1^*)^2 = -A / (D - k^2)$ vereinfacht werden kann. Da A stets und D in den meisten Fällen positiv ist, erhält man ggf. nur für große (und somit unplausible) Kapitalkostenparameter k eine Lösung des Optimierungsproblems, wobei diese nicht notwendigerweise zulässig sein muss. Auch hier gibt es bei hinreichend großem Kapitalkostenparameter Lösungen, falls das Assetportfolio eine risikofreie Anlage besitzt, da die Gesamtvarianz nicht Null wird. Es gilt wie zuvor in diesem Fall, dass alle Terme = 0 sind, die einen Koeffizienten $1/(U + U_1)$ haben.

3 Allgemeiner Modellansatz

Bislang wurde stets angenommen, dass alle Assets und alle Liabilities jeweils unkorreliert zueinander sind. In diesem Abschnitt wird der allgemeine Optimierungsfall mit korrelierten Assets und Liabilities analysiert, d. h. wir gehen nun von einer (symmetrischen) Korrelationsmatrix K aus und werden auf dieser Basis die Lösungsgleichungen betrachten.

ρ_{00}	...	ρ_{0n}	φ_{00}	...	φ_{0m}
...	ρ_{ik}	φ_{il}	...
ρ_{n0}	...	ρ_{nn}	φ_{n0}	...	φ_{nm}
φ_{00}	...	φ_{0n}	ψ_{00}	...	ψ_{0m}
...	φ_{jk}	ψ_{jl}	...
φ_{m0}	...	φ_{mn}	ψ_{m0}	...	ψ_{mm}

Abbildung 2: Struktur der Korrelationsmatrix.

Man kann den allgemeinen Fall auf den bereits betrachteten Fall zurückführen, indem man die symmetrische Korrelationsmatrix K als $K = M^T \cdot D \cdot M$ zerlegt (Cholesky Zerlegung), M eine obere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix.

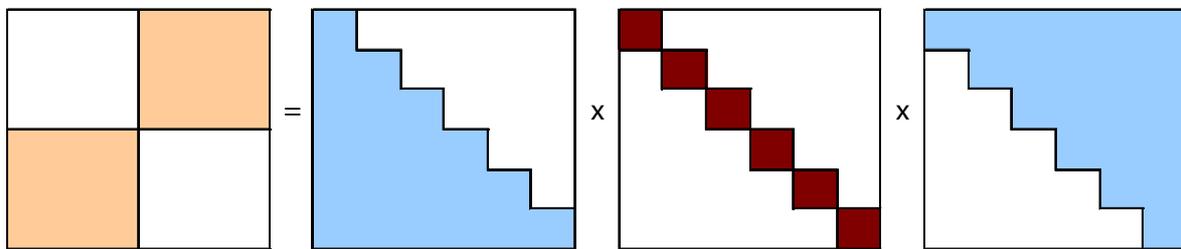


Abbildung 3: Struktur der Cholesky Zerlegung für die Korrelationsmatrix.

Transformiert man alle Assets und Liabilities mit M , dann sind die transformierten Variablen unkorreliert. Die transformierten Combined Ratios können nach wie vor als Combined Ratios (für eine Linearkombination der Liabilities) interpretiert werden; die Renditen sind jetzt allerdings „gemischte“ Terme.

Im Folgenden werden wir zumindest für den RORAC die allgemeine Form der Lösungsgleichungen noch etwas genauer spezifizieren. Für den EVA verzichten wir an dieser Stelle darauf, da die Ansätze sehr komplex sind, wobei häufig keine oder keine zulässigen Lösungen existieren.

3.1 Optimierung des Return on Risk Adjusted Capital

Im Hinblick auf die Optimierung des RORAC erhält man im allgemeinen Fall folgende Formeln für die partiellen Ableitungen von S nach x_i bzw. y_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x_i} &= (\sum(\rho_{ik} \cdot \sigma_i - \rho_{0k} \cdot \sigma) \cdot x_k \cdot \sigma_k + (\sum(\varphi_{il} \cdot \sigma_i - \varphi_{0l} \cdot \sigma) \cdot y_l \cdot \tau_l) / S =: X_i^* / S \\ \frac{\partial S}{\partial y_j} &= (\sum(\varphi_{jk} \cdot \tau_j - \varphi_{0k} \cdot \tau) \cdot x_k \cdot \sigma_k + (\sum(\psi_{jl} \cdot \tau_j - \psi_{0l} \cdot \tau) \cdot y_l \cdot \tau_l) / S =: Y_j^* / S \end{aligned}$$

Man sieht an dieser Darstellung, dass die Formeln für den unkorrelierten Fall ein Spezialfall der allgemeinen Formeln sind. Man erhält ganz analog für alle $i, j, k, l > 0$ die Beziehungen

$$X_i^*/\Delta r_i = X_k^*/\Delta r_k = -Y_j^*/\Delta c_j = -Y_l^*/\Delta c_l \quad \text{ sowie } \quad E \cdot X_1^* = \Delta r_1 \cdot S^2$$

Berücksichtigt man, dass formal $x \cdot \sigma^2 = \sigma \cdot (\rho_{00} \cdot x \cdot \sigma)$ sowie $y \cdot \tau^2 = \tau \cdot (\psi_{00} \cdot y \cdot \tau)$ gilt, dann erhält man

$$S^2 = \sigma \cdot (\sum \rho_{0k} \cdot x_k \cdot \sigma_k + \sum \varphi_{0l} \cdot y_l \cdot \tau_l) + \tau \cdot (\sum \varphi_{0k} \cdot x_k \cdot \sigma_k + \sum \psi_{0l} \cdot y_l \cdot \tau_l) + \sum x_i \cdot X_i^* + \sum y_i \cdot Y_i^*$$

Setzt man jetzt analog zur vorherigen Vorgehensweise in die Gleichungen ein, so ergibt sich eine lineare Gleichung

$$(r - c) \cdot X_1^* = \Delta r_1 \cdot (\sigma \cdot (\sum \rho_{0k} \cdot x_k \cdot \sigma_k + \sum \varphi_{0l} \cdot y_l \cdot \tau_l) + \tau \cdot (\sum \varphi_{0k} \cdot x_k \cdot \sigma_k + \sum \psi_{0l} \cdot y_l \cdot \tau_l))$$

Zusammen mit den $(m + n - 1)$ Gleichungen $X_i^*/\Delta r_i = X_1^*/\Delta r_1 = -Y_j^*/\Delta c_j$ und den beiden Normierungsgleichungen $\sum x_i = 1 = \sum y_j$ erhält man jetzt $(m + n + 2)$ lineare Gleichungen in den $(m + n + 2)$ Variablen x, x_1, \dots, x_n sowie y, y_1, \dots, y_m , die im allgemeinen Fall (d. h. mit Ausnahme von singulären Parameterkonstellationen) lösbar sind, wobei nur in Spezialfällen die Lösungen explizit beschrieben werden können. Bei einer Lösung muss es sich dabei nicht automatisch um eine zulässige Lösung in dem Sinn handeln, dass alle Koeffizienten zwischen Null und Eins liegen.

3.2 Optimierung in Spezialfällen

Für den Spezialfall von zwei Assets und zwei Liabilities, die jeweils nur untereinander korreliert sind, kann man die Lösung noch relativ explizit angeben. In diesem Fall gilt nämlich

$$\begin{aligned} \partial S / \partial x_1 &= (x_1 \cdot \sigma_1 \cdot (\sigma_1 - \rho_{01} \cdot \sigma) - x \cdot \sigma \cdot (\sigma - \rho_{10} \cdot \sigma_1)) / S =: (X_1 - X) / S =: X_1^* / S \\ \partial S / \partial y_1 &= (y_1 \cdot \tau_1 \cdot (\tau_1 - \psi_{01} \cdot \tau) - y \cdot \tau \cdot (\tau - \psi_{10} \cdot \tau_1)) / S =: (Y_1 - Y) / S =: Y_1^* / S \end{aligned}$$

Man erhält $Y_1^* = -(\Delta c_1 / \Delta r_1) \cdot X_1^*$; die Koeffizienten U, U_1, V und V_1 ergeben sich auf offensichtliche Art und Weise. Die Gleichung $E \cdot X_1^* = \Delta r_1 \cdot S^2$ kann aufgelöst werden zu

$$\begin{aligned} (r - c) \cdot X_1^* &= \Delta r_1 \cdot (x \cdot \sigma^2 + x_1 \cdot \rho_{01} \cdot \sigma \cdot \sigma_1 + y \cdot \tau^2 + y_1 \cdot \psi_{01} \cdot \tau \cdot \tau_1) \\ &= \Delta r_1 \cdot (X + Y + \rho_{01} \cdot \sigma \cdot \sigma_1 + \psi_{01} \cdot \tau \cdot \tau_1) \end{aligned}$$

Für $R := ((r - c) + \Delta r_1 \cdot U_1 / (U + U_1) - \Delta c_1 \cdot V_1 / (V + V_1))$ ergibt sich ganz analog

$$R \cdot X_1^* = \Delta r_1 \cdot (1 / (U + U_1) + 1 / (V + V_1) + \rho_{01} \cdot \sigma \cdot \sigma_1 + \psi_{01} \cdot \tau \cdot \tau_1).$$

Auch für den Spezialfall von zwei Assets und zwei Liabilities, die jeweils nur untereinander korreliert sind und einem dritten risikofreien Asset lässt sich noch relativ einfach eine explizite Lösung angeben. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\partial S/\partial x_1 &= (x_1 \cdot \sigma_1^2 + \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot x_2) / S =: (X_1 + (\rho_{12} \cdot \sigma_1 / \sigma_2) \cdot X_2) / S =: X_1^* / S \\ \partial S/\partial x_2 &= (x_2 \cdot \sigma_2^2 + \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot x_1) / S =: (X_2 + (\rho_{12} \cdot \sigma_2 / \sigma_1) \cdot X_1) / S =: X_2^* / S \\ \partial S/\partial y_1 &= (y_1 \cdot \tau_1 \cdot (\tau_1 - \psi_{01} \cdot \tau) - y \cdot \tau \cdot (\tau - \psi_{10} \cdot \tau_1)) / S =: (Y_1 - Y) / S =: Y_1^* / S\end{aligned}$$

Für $R := ((r - c) - \Delta c_1 \cdot V_1 / (V + V_1))$ mit den Koeffizienten V und V_1 gebildet wie zuvor erhält man als letzte Gleichung

$$R \cdot X_1^* = \Delta r_1 \cdot (1 / (V + V_1) + \psi_{01} \cdot \tau \cdot \tau_1).$$

Aus dieser Beziehung ergeben sich sofort X_2^* und Y_1^* , wobei man y und y_1 nun wie zuvor ermitteln kann. Man erhält folgende Lösungen:

$$\begin{aligned}X_1 &= (X_1^* - \rho_{12} \cdot (\sigma_1 / \sigma_2) \cdot X_2^*) / (1 - \rho_{12}^2) \\ X_2 &= (X_2^* - \rho_{12} \cdot (\sigma_2 / \sigma_1) \cdot X_1^*) / (1 - \rho_{12}^2)\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich nun auch explizit die Koeffizienten x , x_1 und x_2 . Die hier skizzierten Lösungen für die Spezialfälle können ebenso wie die Lösungen für den Fall unkorrelierter Risiken relativ leicht in EXCEL ermittelt werden.

4 Berechnungsbeispiele

In diesem Abschnitt werden einige Berechnungsergebnisse vorgestellt und diskutiert. Der Begriff „zulässiges“ Optimum bedeutet dabei, dass ein lokales Maximum vorliegt, bei dem alle Koeffizienten zwischen Null und Eins liegen. Maximalwerte an den Rändern der erlaubten Kombinationen werden an dieser Stelle nicht betrachtet!

4.1 Unkorrelierte Assets und Liabilities

In unserem Modellansatz stellen die (Brutto) Neugeschäftsprämien eine (versicherungstechnische) Einnahme zusätzlich zu den daraus resultierenden (nicht-versicherungstechnischen) Kapitalerträgen dar, so dass nicht die Rendite, sondern die kumulierte Rendite in den Optimierungsansatz eingeht. Für das erste Berechnungsbeispiel gehen wir zunächst davon aus, dass man bei der Anlage der Neugeschäftsprämie zwischen folgenden beiden (approximativ normal verteilten) riskanten Assetklassen, die nicht miteinander korreliert sind, auswählen kann:

	Standard- abweichung	Kumulierte Rendite
Assetklasse 1	10,0%	107,5%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%

Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur den Fall, dass wir lediglich eine einzige risikofreie Sparte mit einer kombinierten Schadenkostenquote von 100% zeichnen. (Diese

Annahme ergäbe sich approximativ, wenn man ausschließlich eine relativ risikoarme Spar- te in einem sehr großen Kollektiv zeichnen würde.) Unter diesen Annahmen liefert das Modell wie folgt den klassischen Markowitzansatz für Assets:

	Standard- abweichung	Ertrag nach einem Jahr
Assetklasse 1	10,0%	7,5%
Assetklasse 2	20,0%	12,5%

Bekannterweise kann man im klassischen Markowitzansatz zunächst einmal nur den ineffizienten Rand als Lösung ausschließen; für die Auswahl einer optimalen Lösung auf dem effizienten Rand benötigt man zusätzlich ein Präferenzsystem wie beispielsweise RORAC oder EVA; beim EVA Präferenzsystem benötigt man zusätzlich noch einen Kapitalkostenparameter k . In der nachfolgenden Tabelle sind das RORAC Optimum und das EVA Optimum bei einem Kapitalkostenparameter von $k = 30\%$ aufgelistet.

	Std. Abw.	Ertrag nach einem Jahr	Anteil im RORAC Optimum	Anteil im EVA Optimum, $k =$ 30,0%
Assetklasse 1	10,0%	7,5%	70,6%	35,3%
Assetklasse 2	20,0%	12,5%	29,4%	64,7%

Abbildung 4: RORAC und EVA Optimum bei nicht riskanten Liabilities.

Beim EVA Optimum liegt die Gewichtung deutlich mehr auf der riskanteren Assetklasse als beim RORAC Optimum. Darüber hinaus wird nur der absolute Wert optimiert ohne besondere Berücksichtigung des tatsächlichen Eigenkapitalbedarfs. Im konkreten Fall ist der Eigenkapitalbedarf im EVA Optimum deutlich höher als im RORAC Optimum; u. U. kann das benötigte Eigenkapital für das EVA Optimum vom Unternehmen gar nicht gestellt werden.

Die Ergebnisse in Abbildung 4 wurden mit Hilfe des zuvor hergeleiteten Formelwerks ermittelt. In diesem vereinfachten Beispiel kann man die Resultate aber auch sehr anschaulich graphisch darstellen. Legt man den RORAC als Präferenzfunktion zugrunde, dann kann man dieses Optimum als den Tangentialpunkt auf der Risiko / Rendite Kurve mit einer Gerade durch den Nullpunkt wie folgt darstellen:

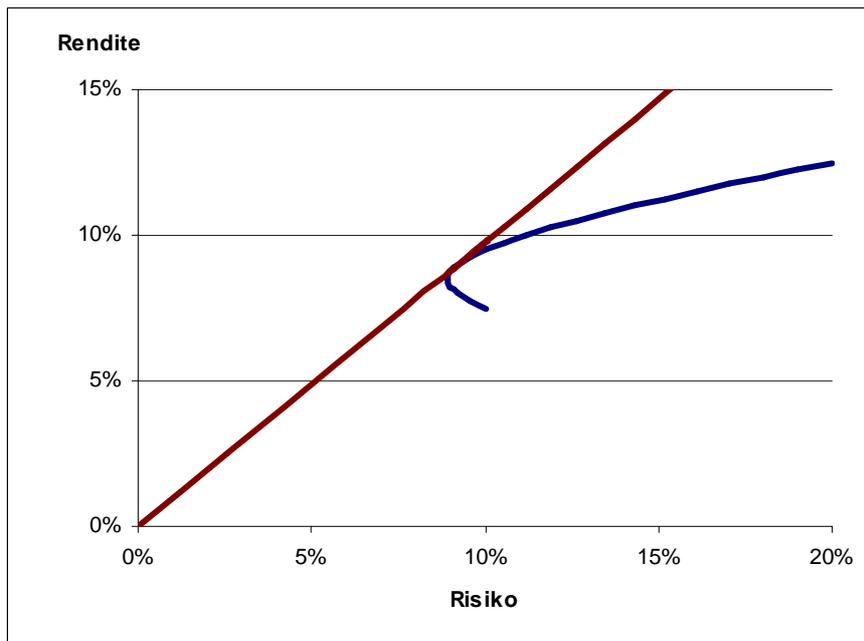


Abbildung 5: RORAC Optimum auf der Risiko / Rendite Kurve.

Beim EVA Optimierungsansatz ergibt sich das Optimum als Tangentialpunkt auf der Risiko / Rendite Kurve mit einer Geraden, deren Steigung vom Kapitalkostenparameter k abhängt. Da sich die Risiko / Rendite Kurve asymptotisch an eine Gerade annähert, gibt es einen solchen Tangentialpunkt nur dann, wenn die Steigung der EVA Geraden (und somit der Kapitalkostenparameter k) ausreichend hoch ist, siehe dazu auch die nachfolgende Abbildung:

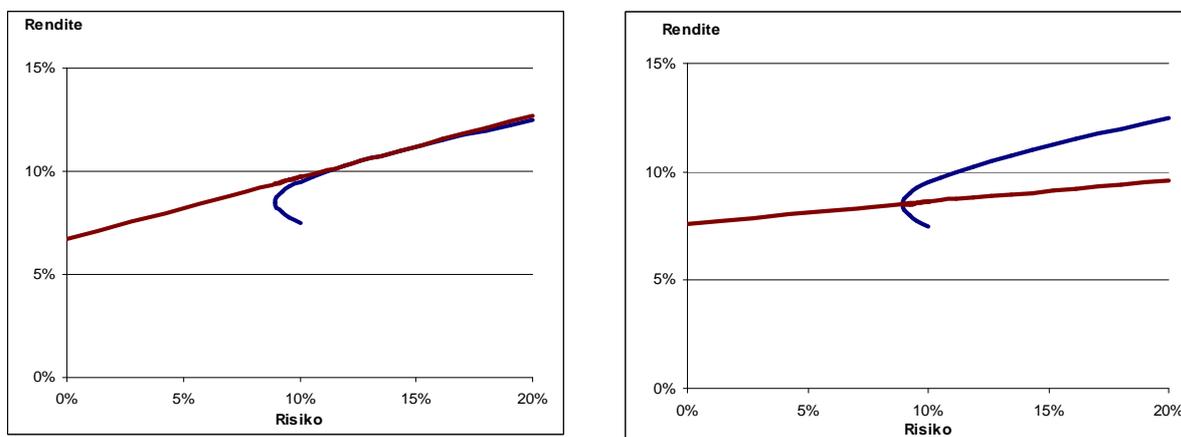


Abbildung 6: EVA Optimum für $k = 30\%$, aber kein EVA Optimum für $k = 10\%$.

Falls es bei nicht ausreichend großem Kapitalkostenparameter k kein EVA Optimum (im Sinne eines klassischen Optimierungsansatzes) gibt, dann liegt der maximale EVA Wert (ungeachtet des absoluten Eigenkapitalbedarfs) am Rand, d. h. bei 100% Auswahl der risikanteren Assetklasse.

Wir wollen jetzt das vorliegende Beispiel erweitern, indem die Risikozeichnung zweier (nicht miteinander und auch nicht mit den Kapitalanlagen korrelierter) Sparten mit dem folgenden Risiko / Renditeprofil in den Optimierungsansatz mit einbezogen werden soll:

	Combined Ratio	Standardabweichung
Sparte 1	97,0%	20,0%
Sparte 2	98,5%	10,0%

Bei der Combined Ratio handelt es sich gemäß unserer Modellannahmen um eine Barwertbetrachtung zum Ablauf des Jahres. In der nachfolgenden Tabelle sind für diesen Fall die Gewichtungen der Asset- und die Liabilityklassen bei einer RORAC Optimierung aufgelistet:

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Ant. im Optimum		Std. Abw.	Combined Ratio	Ant. im Optimum
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	64,5%	Sparte 1	20,0%	97,0%	24,7%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	35,5%	Sparte 2	10,0%	98,5%	75,3%

Abbildung 7: RORAC Optimum für riskante Assets und Liabilities.

Die Anteile für die Assetklassen 1 und 2 haben sich nach Einbeziehung der Sparten 1 und 2 in die Optimierung geändert, da der Optimierungsansatz (selbst bei nicht korrelierten Assets und Liabilities) nicht unabhängig von den Asset und Liability Risiko / Renditeprofilen erfolgt. Es handelt sich im konkreten Fall um ein Maximum, da die Rendite positiv ist. Durch die Hinzunahme der riskanten Sparten verändern sich also die Gewichte ggf. sehr stark, wobei riskantere Kombinationen (sowohl auf der Asset als auch auf der Liability Seite) jetzt höhere Gewichte im Optimum aufweisen, was am größeren Grad der Diversifizierung liegen dürfte.

Eine noch stärkere Verschiebung der Gewichte in Richtung der riskanteren Asset- und Liabilityklassen beobachtet man bei der EVA Optimierung – ungeachtet des dadurch u. U. doch recht hohen erforderlichen Eigenkapitals.

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Ant. Im Opt.		Std. Abw.	Combined Ratio	Ant. Im Opt.
			30,0%				30,0%
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	12,9%	Sparte 1	20,0%	97,0%	40,1%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	87,1%	Sparte 2	10,0%	98,5%	59,9%

Abbildung 8: EVA Optimum für riskante Assets und Liabilities.

Wie man der Tabelle entnehmen kann, gibt es also signifikante Unterschiede zwischen dem RORAC und dem EVA Optimum, da sich beim EVA Optimierungsansatz noch höhere Gewichte für die risikoreicheren Positionen ergeben.

Wir hatten bereits erwähnt, dass im hier vorliegenden Modellansatz die Betrachtung eines risikofreien Assets kein Problem darstellt, da man normalerweise stets risikobehaftete Liabilities hat. Es ist ja gerade in der Tat eine eigenständige Unternehmensentscheidung, ob die liquiden Salden aus der Versicherungstechnik risikofrei oder risikobehaftet angelegt werden sollen. Eine risikobehaftete Kapitalanlage muss hier nicht notwendigerweise „besser“ sein als eine risikofreie Kapitalanlage.

Wir wollen daher das vorliegende Beispiel durch die Hinzufügung eines risikofreien Assets mit einer Verzinsung von 4% noch erweitern und untersuchen, wie sich die Gewichtungen der Asset- und Liabilityklassen dadurch ggf. verändern:

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Ant. im Optimum		Std. Abw.	Combined Ratio	Ant. im Optimum
risikofr. Asset	0,0%	104,0%	22,4%	Sparte 1	20,0%	97,0%	24,1%
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	48,3%	Sparte 2	10,0%	98,5%	75,9%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	29,3%				

Abbildung 9: RORAC Optimum unter Einbeziehung eines risikofreien Assets.

Aufgrund der hohen Diversifikation erhält das risikofreie Asset nur ein relativ kleines Gewicht. Die Anteile der Sparten im Optimum ändern sich nur unwesentlich.

Das entsprechende Beispiel für den EVA Optimierungsansatz gestaltet sich deutlich komplexer: Zunächst einmal erhält man für den (durchaus realistischen) Kapitalkostenparameter $k = 30\%$ keine Lösung mehr. Um eine Optimierungslösung im klassischen Sinn zu erhalten, muss man diesen Parameter deutlich heraufsetzen, mindestens auf den eher unrealistischen Wert von $k = 60\%$.

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Ant. Im Opt.		Std. Abw.	Combined Ratio	Ant. Im Opt.
			60,0%				60,0%
risikofr. Asset	0,0%	104,0%	-119,8%	Sparte 1	20,0%	97,0%	31,7%
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	136,8%	Sparte 2	10,0%	98,5%	68,3%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	83,1%				

Abbildung 10: EVA Optimum unter Einbeziehung eines risikofreien Assets.

Wie man der Abbildung ebenfalls entnehmen kann, existiert zwar eine Lösung für den EVA Optimierungsansatz, sie ist aber nicht zulässig in dem Sinn, dass jeder Anteil positiv und kleiner als Eins ist. Es findet eine derart dramatische Umschichtung der Assets statt, dass im Prinzip die Empfehlung lautet, das risikofreie Asset nicht zu kaufen, sondern zu leihen, um dadurch noch mehr von den riskanteren Assetklassen in das Portfolio aufzunehmen. An diesem noch sehr einfachen Beispiel zeigt sich also, dass der EVA Optimierungsansatz unter Umständen viel kritischere Eigenschaften aufweist als der RORAC Optimierungsansatz.

Es muss allerdings erwähnt werden, dass bei einer geringeren Rendite für das risikofreie Asset auch bei der RORAC Optimierung ähnliche, nicht zulässige Lösungen beobachtet.

4.2 Korrelierte Assets und Liabilities

In diesem Abschnitt sollen ergänzend zu den vorherigen Beispielen noch die Auswirkungen von Korrelationen analysiert werden. Aufgrund der hohen Komplexität des EVA Optimierungsansatzes in diesem Fall in Verbindung mit ggf. sehr kritischen Lösungseigenschaften beschränken wir uns hier ausschließlich auf den RORAC Optimierungsansatz.

Dazu betrachten wir zunächst wieder den Fall der beiden zuvor eingeführten riskanten Assets und Liabilities, wobei wir jetzt annehmen dass die beiden Assets und die beiden Liabilities jeweils zu 50% untereinander korreliert sind; dieses Beispiel enthält bereits wesentliche Eigenschaften des allgemeinen Falls.

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Anteil im Opt.		Std. Abw.	Combined Ratio	Anteil im Opt.
Korrelation	0,0%				0,0%		
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	64,5%	Sparte 1	20,0%	97,0%	24,7%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	35,5%	Sparte 2	10,0%	98,5%	75,3%

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Anteil im Opt.		Std. Abw.	Combined Ratio	Anteil im Opt.
Korrelation	50,0%				50,0%		
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	63,0%	Sparte 1	20,0%	97,0%	11,1%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	37,0%	Sparte 2	10,0%	98,5%	88,9%

Abbildung 11: RORAC Optimum für unkorrelierte und korrelierte Assets und Liabilities.

Durch den Ansatz von Korrelationen verändern sich die Gewichte, wobei bei hoher positiver Korrelation risikoärmere Positionen stärker ins Gewicht fallen. Wenn die Korrelationen zu hoch ausfallen, gibt es ggf. keine zulässigen Lösungen mehr.

In einem letzten Schritt erweitern wir dieses Beispiel noch durch die Hinzufügung eines risikofreien Assets mit einer Verzinsung von 4%; das Beispiel enthält dann bis auf Korrelationen zwischen Assets und Liabilities (die aber mit Ausnahme der als Asset betrachteten Rückversicherung in der Regel kaum signifikant sind) bereits die gesamte Komplexität des allgemeinen Falls.

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Anteil im Opt.		Std. Abw.	Combined Ratio	Anteil im Opt.
Korrelation	0,0%				0,0%		
risikofr. Asset	0,0%	104,0%	22,4%	Sparte 1	20,0%	97,0%	24,1%
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	48,3%	Sparte 2	10,0%	98,5%	75,9%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	29,3%				

	Std. Abw.	kumul. Rendite	Anteil im Opt.		Std. Abw.	Combined Ratio	Anteil im Opt.
Korrelation	50,0%				50,0%		
riskofr. Asset	0,0%	104,0%	36,4%	Sparte 1	20,0%	97,0%	9,1%
Assetklasse 1	10,0%	107,5%	33,3%	Sparte 2	10,0%	98,5%	90,9%
Assetklasse 2	20,0%	112,5%	30,3%				

Abbildung 12: RORAC Optimum unter Einbeziehung eines risikofreien Assets.

Falls also ein risikofreies Asset in die RORAC Optimierung riskanter, jeweils untereinander korrelierter Assets und Liabilities einbezogen wird, dann entfällt in unserem Beispiel ein höheres Gewicht auf dieses Asset; die riskanteren Assets werden entsprechend geringer gewichtet. Weiterhin ist bemerkenswert, dass die Einbeziehung des risikofreien Assets nicht nur die Gewichtung der Assets, sondern auch die Gewichtung der Liabilities stark beeinflusst.

5 Fazit

Legt man den RORAC als Präferenzfunktion zugrunde, dann gibt es beim klassischen Optimierungsansatz für riskante Kapitalanlagen (unter gewissen Modellvereinfachungen) immer ein zulässiges Optimum. Im Spezialfall zweier riskanter Kapitalanlagen kann man dies als den Tangentialpunkt auf der Risiko / Rendite Kurve mit einer Gerade durch den Nullpunkt darstellen, siehe dazu auch Abbildung 5.

Sofern man den EVA als Präferenzfunktion zugrunde legt, gibt es auch im einfachsten Fall des klassischen Optimierungsansatzes mit zwei riskanten Kapitalanlagen nicht immer eine Lösung. Eine Lösung wäre nämlich in diesem Fall der Tangentialpunkt auf der Risiko / Rendite Kurve mit einer Gerade der Form

$$\text{Rendite} = \text{Konstante} + k \cdot \text{Risiko}.$$

Da die Steigung der Risiko / Rendite Kurve nicht beliebig klein wird, sondern sich asymptotisch an eine Gerade annähert, gibt es bei zu kleiner Wahl des Kapitalkostenparameters k keine derartige „Tangentiallösung“, siehe dazu auch Abbildung 6. Für kleinere (und eher realistische) Kapitalkostenparameter ist nämlich die Steigung der EVA Geraden zu flach, d. h. sie wird auch nach entsprechender Parallelverschiebung nicht die Risiko / Rendite Kurve berühren; hier liegen die maximalen Werte auf den Rändern der zulässigen Kombinati-

nen. Für höhere Kapitalkostenparameter hingegen gibt es zulässige Lösungen; diese Parameter bilden aber häufig keine realistische Kapitalkostensystematik ab.

Dieses Ergebnis sollte aus unserer Sicht zum Nachdenken anregen, ob der EVA ein zweckmäßiges Steuerungsinstrument ist, wenn selbst im einfachsten aller denkbaren Beispiele die Optima derart kritisch von der (teilweise recht fiktiven) Parameterwahl für den Kapitalkostensatz abhängen. Insbesondere die Tatsache, dass ggf. nur bei sehr hohem Ansatz für die Kapitalkosten überhaupt Optima existieren, sollte aus unserer Sicht kritisch gewürdigt werden. Aus diesem Grund wurde an dieser Stelle der Fall einer EVA Optimierung bei gegebenen Korrelationsstrukturen auch nicht analysiert.

Sofern nun (beispielsweise im Rahmen einer ganzheitlichen GuV Betrachtung) auch Liabilities in den Optimierungsansatz einbezogen werden, wird selbst bei Modellvereinfachungen die Lösungsstruktur u. U. sehr komplex:

Bei einem (vereinfachten) RORAC Optimierungsansatz wird es in der Regel (d. h. außerhalb „singulärer“ Parameterkonstellationen) Lösungen geben, welche aber nicht notwendigerweise zulässig in dem Sinn sind, dass alle Parameter größer Null und kleiner Eins sind. Sofern es keine Korrelationen oder nur Korrelationen innerhalb der Assets und Liabilities gibt, können die Lösungen anschaulich beschrieben werden und man erkennt sofort, dass die optimalen Assetkombinationen nicht nur von den Eigenschaften der Assets, sondern auch von den Eigenschaften der Liabilities beeinflusst werden (was umgekehrt natürlich genau so gilt). In diesem Fall können nicht zulässige Lösungen ggf. dadurch „geheilt“ werden, dass man u. U. Gruppen zusammenfasst, und dadurch den Optimierungsansatz etwas kleiner dimensioniert.

Im allgemeinen Fall für das RORAC Optimierungsproblem existiert die Lösung zwar in der Regel, ist aber ggf. schwer zu interpretieren. Mit Ausnahme der Beziehungen zwischen Brutto- und zediertem Schadenaufwand, sollten in der Schadenversicherung aber nicht allzu große Korrelationen zwischen Assets und Liabilities auftreten, so dass bei einer reinen Nettobetrachtung die Unkorreliertheitsannahme zwischen Assets und Liabilities ggf. unproblematisch ist.

Wie wir bereits erwähnt haben, eignen sich die hier skizzierten Überlegungen nicht unbedingt bei der Optimierung komplexer Rückversicherungsstrukturen, da die hier getroffenen Modellvereinfachungen in diesem Fall kritisch hinterfragt werden müssen. Die hier skizzierte Vorgehensweise kann lediglich dazu verwendet werden, bei vereinfachtem Modelldesign bessere Startwerte für Alternativberechnungen in internen Modellen zu liefern. Dennoch kann man selbst bei einfachen Beispielen schon einige Implikationen für die unternehmensinterne Steuerung erkennen.

Literaturverzeichnis

- [1] DAV-Arbeitsgruppe Interne Risikomodelle (Hrsg.): Interne Risikomodelle in der Schaden-/ Unfallversicherung, Karlsruhe 2008.
- [2] Diers, Dorothea: Interne Unternehmensmodelle in der Schaden- und Unfallversicherung, Ulm 2007.
- [3] Heep-Altiner; Kaya; Krenzlin; Welter (Hrsg.): Interne Modelle nach Solvency II. Schritt für Schritt zum internen Modell in der Schadenversicherung. Verlag Versicherungswirtschaft, Karlsruhe, 2010.
- [4] Mack, Thomas: Schadenversicherungsmathematik, 2. Auflage, Karlsruhe 2002.
- [5] Markowitz, Harry Max: Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. VII, No. 1, March 1952.
- [6] Maurer, Raimond: Integrierte Erfolgssteuerung in der Schadenversicherung auf der Basis von Risiko-Wert-Modellen, Karlsruhe 2000.
- [7] Spremann, Klaus: Portfoliomanagement. Oldenbourg, 4. Auflage, 2008.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Risiko / Rendite Profile unterschiedlicher Geschäftsstrategien.....	1
Abbildung 2: Struktur der Korrelationsmatrix.	10
Abbildung 3: Struktur der Cholesky Zerlegung für die Korrelationsmatrix.	10
Abbildung 4: RORAC und EVA Optimum bei nicht riskanten Liabilities.	13
Abbildung 5: RORAC Optimum auf der Risiko / Rendite Kurve.....	14
Abbildung 6: EVA Optimum für $k = 30\%$, aber kein EVA Optimum für $k = 10\%$	14
Abbildung 7: RORAC Optimum für riskante Assets und Liabilities.	15
Abbildung 8: EVA Optimum für riskante Assets und Liabilities.	15
Abbildung 9: RORAC Optimum unter Einbeziehung eines risikofreien Assets.	16
Abbildung 10: EVA Optimum unter Einbeziehung eines risikofreien Assets.	16
Abbildung 11: RORAC Optimum für unkorrelierte und korrelierte Assets und Liabilities....	17
Abbildung 12: RORAC Optimum unter Einbeziehung eines risikofreien Assets.....	18

Kontakt/Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der OnlinePublikationsreihe „**Forschung am IVW Köln**“.

Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder unter <http://opus.bsz-bw.de/fhk/index.php?la=de> abgerufen werden.

Eine weitere Publikationsreihe ist die **Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswesen der Fachhochschule Köln**.

Herausgeber: Verein der Förderer des Instituts für Versicherungswesen an der Fachhochschule Köln e. V. Die Schriftenreihe kann über den Verlag Versicherungswirtschaft bezogen werden (<http://www.vvw.de/>).

Eine Übersicht aller Hefte der Schriftenreihe kann auch unter folgender Adresse abgerufen werden:

<http://www.f04.fh-koeln.de/fakultaet/institute/ivw/informationen/publikationen/00366/index.html>

Bildnachweis für das Deckblatt: Gebäude der Fachhochschule Köln
Copyright: Fachhochschule Köln/Monika Probst

Köln, Juli 2011

Herausgeber / Editorship:

Prof. Dr. Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Maria Heep-Altiner
Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3449
Fax +49 221 8275-3277

Mail maria.heep-altiner@fh-koeln.de

ISSN (online) 2192-8479