

Goecke, Oskar

Research Report

Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich

Forschung am iwvKöln, No. 1/2011

Provided in Cooperation with:

Technische Hochschule Köln – University of Applied Sciences, Institute for Insurance Studies

Suggested Citation: Goecke, Oskar (2011) : Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich, Forschung am iwvKöln, No. 1/2011, Technische Hochschule Köln, Institut für Versicherungswesen (iwvKöln), Köln,
<https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:832-cos-30>

This Version is available at:

<https://hdl.handle.net/10419/226532>

Standard-Nutzungsbedingungen:

Die Dokumente auf EconStor dürfen zu eigenen wissenschaftlichen Zwecken und zum Privatgebrauch gespeichert und kopiert werden.

Sie dürfen die Dokumente nicht für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, öffentlich zugänglich machen, vertreiben oder anderweitig nutzen.

Sofern die Verfasser die Dokumente unter Open-Content-Lizenzen (insbesondere CC-Lizenzen) zur Verfügung gestellt haben sollten, gelten abweichend von diesen Nutzungsbedingungen die in der dort genannten Lizenz gewährten Nutzungsrechte.

Terms of use:

Documents in EconStor may be saved and copied for your personal and scholarly purposes.

You are not to copy documents for public or commercial purposes, to exhibit the documents publicly, to make them publicly available on the internet, or to distribute or otherwise use the documents in public.

If the documents have been made available under an Open Content Licence (especially Creative Commons Licences), you may exercise further usage rights as specified in the indicated licence.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>

Forschung am IVW Köln, 1/2011

Institut für Versicherungswesen



Sparprozesse mit kollektivem Risikoausgleich

Oskar Goecke

Zusammenfassung

Fondssparen ist dadurch gekennzeichnet, dass das Kapitalanlagerisiko des Fonds unmittelbar auf das Anteilsvermögen wirkt. Altersvorsorgesparer scheuen Kapitalmarktrisiken insbesondere kurz vor Rentenbeginn. Die Idee von With-Profit Policen (Lebensversicherungsverträgen mit Überschussbeteiligung) ist, dass die Kapitalerträge teilweise den Versicherten direkt gutgeschrieben werden und teilweise einer kollektiven Reserve zugeführt werden. Bei positiver Entwicklung am Kapitalmarkt kann so die Reserve aufgebaut werden; Verluste am Kapitalmarkt können andererseits durch Entnahmen aus der Reserve kompensiert werden. Der Auf- und Abbau der kollektiven Reserve bedeutet einen Risikotransfer zwischen den Sparergenerationen. Wir stellen hier ein zeitstetiges Modell zur Analyse dieses Risikotransformationsprozesses vor. Mit Hilfe stochastischer Prozesse können wir Aussagen über Grenzverteilungen, risikoneutrale Bewertungen und Ruinwahrscheinlichkeiten herleiten. Anhand von Rendite-Risikoprofilen kann nachgewiesen werden, dass der intergenerationale Risikotransfer tatsächlich einen Nutzeneffekt hat.

Abstract

Mutual fund saving is characterized by the fact that the fund's capital market risk exposure directly affects the individual assets of each saver. A person who saves money for his/ her pension is particularly concerned about capital market risks when he/ she approaches pension age. The idea of with-profit life insurance business is that the returns of the assets are partially distributed to the individual savers' accounts and to a collective reserve (unallocated fund). When capital markets are performing well the collective reserve builds up while in times of ill performance the collective reserve is reduced in order to subsidize the individual accounts. Building up and reducing the collective reserve constitutes an intergenerational risk transfer with respect to capital market risks. We present a continuous time model to analyze this risk transformation process. We employ stochastic processes to derive statements about terminal distributions, risk neutral valuation, and ruin probabilities. By analyzing risk-return-profiles we can prove that intergenerational risk transfer actually has a positive welfare effect.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	I
1 Motivation	1
2 Kollektives Sparen	3
2.1 Der Glättungsmechanismus.....	3
2.2 Beschreibung des Kapitalmarktes	7
2.3 Beschreibung des Deklarationsprozesse	11
2.4 Zulässige Asset-Liability-Management Strategien	12
3 ALM-Strategien für kollektive Sparprozesse	15
3.1 Das Basismodell	15
3.1.1 Bestimmung des Deklarationsprozesses.....	15
3.1.2 Bestimmung des Anlageprozesses.....	18
3.1.3 Definition des linearen Modells	19
3.2 Elementare Eigenschaften des linearen Modells	20
3.3 Grenzprozesse im linearen Modell.....	31
3.4 Risikoneutrale Bewertung im linearen Modell	41
3.5 Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit	47
4 Glättung des Anlagerisikos	60
4.1 Anlagerisiko bezogen auf das Endkapital	60
4.2 Anlegerstress während der Vertragslaufzeit	69
Literaturverzeichnis	84
Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	88

SPARPROZESSE MIT KOLLEKTIVEM RISIKOAUSGLEICH

1 Motivation

Der Lebensversicherungsvertrag ist die am weitesten verbreitete Form der kapitalgedeckten Altersvorsorge in Deutschland. Im Vergleich zu Bank- und Fondssparplänen wird in aller Regel auf die Absicherung biometrischer Risiken als das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der Lebensversicherung hingestellt. Hierbei wird vernachlässigt, dass die klassische Lebensversicherung¹ einen *langfrister Sparprozess* umfasst, bei dem über die Überschussbeteiligung eine Teilhabe am Anlageerfolg des Versicherers stattfindet.

Durch diese Art der Teilhabe am Anlageerfolg des Anbieters unterscheidet sich die Lebensversicherung *fundamental* von anderen Sparformen:

- Bei einem Banksparplan kommt es zu einer vollständigen Trennung zwischen dem Anlageerfolg des Anbieters und der Verzinsung des Sparvertrages. Der Sparzins wird regelmäßig an die Marktverhältnisse angepasst; die Differenz zwischen der Verzinsung des Aktivgeschäfts und dem Sparzins (Refinanzierungskosten) steht der Bank uneingeschränkt als Ertrag zur Verfügung.
- Beim Fondssparen ist das gesamte Anlagevermögen zu jedem Zeitpunkt vollständig auf die Sparer verteilt – es gilt das *strenge Individualprinzip*. Auf diese Weise partizipieren die Sparer uneingeschränkt am Anlageerfolg (oder Anlagemisserfolg) des Investmentfonds. Für den Betreiber des Investmentfonds stellen die Verwaltungsgebühren (management fees) die Erträge dar. Da sich die Verwaltungsgebühren in aller Regel am Anlagevolumen orientieren, ist die Ertragslage des Betreibers relativ unabhängig vom Anlageerfolg.
- Bei einem kapitalbildenden Lebensversicherungsvertrag mit Überschussbeteiligung deutscher Prägung steht der Anlageerfolg (nach Abzug einer Erfolgsbeteiligung des Aktionärs) ähnlich wie beim Fondssparen der Gesamtheit der Sparer zu. Allerdings erfolgt die Verteilung des Anlageerfolgs *nicht* nach dem strengen Individualprinzip, sondern dem *Grundsatz des kollektiven Risikoausgleichs*. Dieser erfolgt in der Weise, dass ein Teil des Anlageerfolgs einer *kollektiven Sparreserve* zugeführt wird. Dies ermöglicht eine „Glättung“ der Verzinsung der

¹ Mit „klassischer Lebensversicherung“ sollen hier die Verträge mit Überschussbeteiligung gemeint sein; nicht hierzu gehören fondsgebundene Lebensversicherungen.

Sparer. Die Zuführungen und Entnahmen aus der kollektiven Reserve führen zu einem *Generationen-übergreifenden kollektiven Risikoausgleich* bezogen auf die Kapitalmarktrisiken.

Ziel dieser Untersuchung ist es, den Nutzen dieses kollektiven Risikoausgleichs aus Sicht der Sparer darzustellen.² Die klassische deutsche kapitalbildende Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung ist eine Form des kollektiven Sparens; ähnliches gilt für die sogenannten „With-Profit-Policen“ wie sie insbesondere in Großbritannien angeboten werden. Um den Nutzen des kollektiven Risikoausgleichs in Bezug auf das Kapitalanlagerisiko untersuchen und darstellen zu können, ist es erforderlich, das Modell des Lebensversicherungssparens zu reduzieren auf ein einfaches Modell des kollektiven Sparen.

² In der Literatur findet man bereits vereinzelte Ansätze; u.a. *Gollier, Christian* : Intergenerational risk sharing and risk taking in a pension fund, *Journal of Public Economics*, vol. 92, n. 5-6, June 2008, S.1463-1485; *Gordon, Roger H.; Varian, Hal R.*: Intergenerational risk sharing, *Journal of Public Economics* 37 (1988), S.185-202; *Thøgersen, Øystein* : Intergenerational risk sharing by means of pay-as-you-go programs – an investigation of alternative mechanisms; SNF-Report No.12/ 06; SNF-project no. 1345, Institute for Research in Economics and Business Administration Bergen, May 2006; *Consiglio, Andrea; Cocco, Flavio; Zenions, Stavros A.*: Asset Liability Modeling for Participating Policies with Guarantees, The Wharton School, University of Pennsylvania, Working Paper, Dec. 2000, revised Feb. 2001; *Gulli n, Monserrat; Jørgensen, Peter Løchte; Perch-Nielsen, Jens*: Return Smoothing Mechanism in Life and Pension Insurance, *Insurance: Mathematics and Economics*, 2006; Vol 38, Nr. 2, S.229-252; *Jørgensen, Peter Løchte*: Lognormal Approximation of Complex Path Complex Path-Dependant Pension Scheme Payoffs, *European Journal of Finance*, 2007, Vol. 13, S.595-619.

2 Kollektives Sparen

2.1 Der Glättungsmechanismus

Um den Effekt des kollektiven Risikoausgleichs in Bezug auf das Kapitalmarktrisiko darstellen zu können, ist es erforderlich, das Modell der Lebensversicherung mit Überschussbeteiligung bzw. das Modell der With-Profit-Police zu reduzieren auf ein einfaches Modell des kollektiven Sparens. Insbesondere blenden wir die Effekte des Ausgleichs biometrischer Risiken (insbesondere Todesfall- und Langlebighkeitsrisiko) aus. Des Weiteren unterstellen wir, dass der kollektive Sparprozess von einem Lebensversicherungsunternehmen (LVU) betreut wird, das selbst kein Eigenkapital stellt, keine Kosten erhebt und ausschließlich im Auftrage der Versicherten (Kollektiv der Sparer) tätig wird. Ein Versicherungsverein auf Gegenseitigkeit kommt diesem Modell recht nahe. Die Annahme, dass keine Verwaltungskosten/ Transaktionskosten anfallen, ist für das Modell nicht zwingend. Man könnte beispielsweise Verwaltungskosten/ Transaktionskosten seitens des Betreibers durch eine passende *reduction in yield* (Management fee auf das Anlagevermögen) berücksichtigen. An den im Folgenden dargelegten Zusammenhängen ändert dies wenig.

Die Annahme, dass der Betreiber (das LVU) kein Eigenkapital bereit stellt bzw. bereit stellen muss, stellt eine deutliche Vereinfachung des Modells dar. Ist der Betreiber durch die Bereitstellung von Eigenkapital beteiligt, so wird er eine *angemessene Eigenkapitalrendite* erwarten. Dabei muss allerdings festgelegt werden, welche Funktion das Eigenkapital hat und welchen Risiken es ausgesetzt ist. Angesichts der Eigenkapitalquoten³ der deutschen Lebensversicherer (ca. 1%-2%) ist aber auch klar, dass das Eigenkapital nur in sehr begrenzt eingesetzt werden kann, um Kapitalmarktrisiken (um die geht es ja hier ausschließlich) auszugleichen. Für die Analyse des Nutzens des kollektiven Sparens ist es daher keine Einschränkung der Aussagekraft des Modells, wenn auf den Ansatz einer Eigenkapitalposition verzichtet wird.

Wir reduzieren daher den Lebensversicherungsvertrag auf einen Sparvertrag mit einmaligen oder regelmäßigen Sparbeiträgen, bei dem am Ende der Laufzeit ein Versorgungskapital ausgezahlt wird. Eine Entsparphase wird zunächst nicht berücksichtigt.

Das LVU (als Betreiber des kollektiven Sparprozesses) führt alle Sparbeiträge zusammen und legt die Mittel am Kapitalmarkt an. In Abhängigkeit von der Kapitalmarktentwicklung legt das LVU fest, welcher Zins den Sparern gutgeschrieben wird. Bei der

3

Festlegung des Guthabenzinses („Deklaration“) kann das LVU bei Bedarf auch „kollektive Mittel“ einsetzen.

Die Bilanz des LVU habe folgende sehr einfache Struktur

<i>Aktiva</i>	<i>Passiva</i>
Portfolio P_t	kollektives R_t Guthaben
	Versicherten- Guthaben V_t

ABBILDUNG 2 -1: Vereinfachtes Bilanzschema eines Lebensversicherers

Wir betrachten hier die Lebensversicherung gewissermaßen als Selbsthilfeeinrichtung, bei der das gesamte vorhandene Vermögen den Sparern gehört, wobei zu unterscheiden ist zwischen den *Versicherten-Guthaben* – dies ist die Summe der individuellen Ansprüche aller Versicherten – und dem *Kollektiv-Guthaben* – dieses Kapital gehört allen Versicherten gleichermaßen. Das LVU fungiert hierbei als *Agent* des *Prinzipals* „Versicherungskollektiv“ und agiert ausschließlich zum Nutzen des Versichertenkollektives.

Das LVU entscheidet über die Zusammensetzung des Anlageportfolios und über die Aufteilung des gesamten Vermögens auf die individuellen Ansprüche (Versichertenguthaben) und den kollektiven Ansprüchen (kollektive Reserve). Die Sparer haben *keine individuellen* Ansprüche auf die in der kollektiven Reserve gebundenen Mittel, wohl aber sind sie *Teilhaber*. Sie haben Anspruch darauf, dass die kollektive Reserve bei *Bedarf* zu ihrem Nutzen eingesetzt wird. Eine Regel könnte beispielsweise lauten, dass jeder Sparer einen Anspruch darauf hat, dass er bei Fälligkeit des Vertrages (zu Beginn des Ruhestandes) neben seinem individuellen Versichertenguthaben ggf. einen Zusatzbetrag aus der kollektiven Reserve erhält um sicher zu stellen, dass mindestens die Summe der von ihm eingezahlten Beiträge ausgezahlt werden.

Das Beispiel macht klar, dass das LVU einen fairen Interessensausgleich zwischen den Sparergenerationen anstreben muss. Die Sparergenerationen, die kurz vor Fälligkeit ihrer Verträge stehen, haben ein Interesse daran, dass die kollektive Reserve abgeschmolzen wird, während die „Jungsparer“ eher an einer Aufstockung der Reserve interessiert sind.⁴

⁴ Weitere Ausführungen hierzu in: [Goecke 2009] S. 291ff.

Es wird im Folgenden u.a. darum gehen, Kriterien für angemessene Entscheidungsregeln des LVU aufzustellen. Ein Leitgedanke hierbei ist, dass das LVU versucht, die möglicherweise stark schwankende Wertentwicklung der Aktivseite (des Portfolios) durch Zuführungen oder Entnahmen aus der kollektiven Reserve so auszugleichen, dass die Versichertenguthaben sich halbwegs stabil entwickeln können.

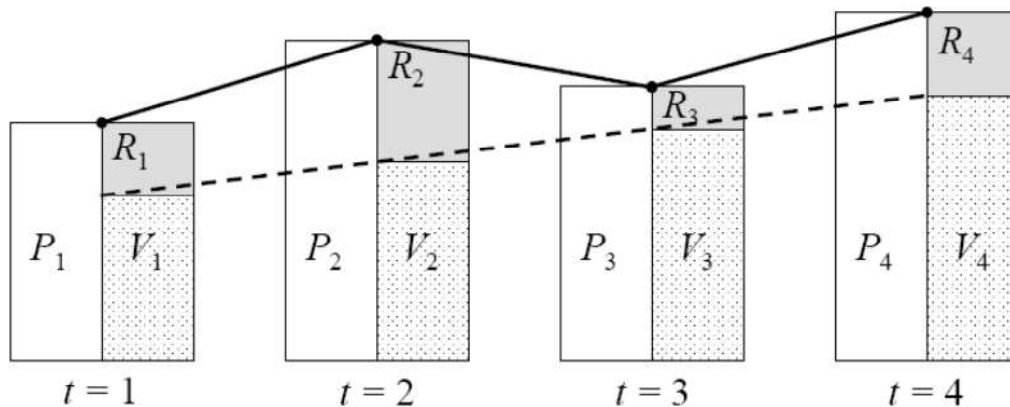


ABBILDUNG 2 -2: Prinzip der Ergebnisglättung

Die Abbildung 2-2 illustriert den Glättungseffekt in der Zeit. Während die Wertentwicklung des Portfolios (P_t) erheblich schwankt, steigen die Ansprüche der Versicherten (V_t) kontinuierlich. Das kollektive Reserve (R_t) dient gewissermaßen als Schwankungsreserve.

Beim kollektiven Sparen kann also die Verzinsung der Versicherten-Guthaben höher oder niedriger ausfallen als die Portfolioverzinsung. Es ist somit denkbar, dass eine Sparergeneration zugunsten der nachfolgenden Sparergenerationen zum Aufbau kollektiven der Reserve beiträgt bzw. zu Lasten der nachfolgenden Sparergeneration die kollektive Reserve abgebaut hat.

Albrecht e.a.⁵ haben in zahlreichen Veröffentlichungen gezeigt, dass die Lebensversicherer in der Vergangenheit tatsächlich eine sehr stabile Verzinsung der Versichertenguthaben darstellen konnten. Auch die Lebensversicherungsunternehmen erklären eine gleichmäßig (hohe) Überschussbeteiligung als ein Ziel ihrer Unternehmenspolitik.

Wir können diesen Prozess der Ergebnisglättung als *Zinstransformation* bezeichnen, denn der „Zins“, den das LVU mit seiner Anlagepolitik am Kapitalmarkt erzielt, wird

⁵ Albrecht, Peter; Maurer, Raimond; Schradin, Heinrich R.: Die Kapitalanlageperformance der Lebensversicherer im Vergleich zur Fondsanlage unter Rendite- und Risikoaspekten, Karlsruhe 1999.; Albrecht, Peter: Die Kapitalanlageperformance der deutschen Lebensversicherer 1980-2006, Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 169, Mannheim 2007.

durch Auf- und Abbau der kollektiven Reserve transformiert - sprich geglättet (Abbildung 2-3).

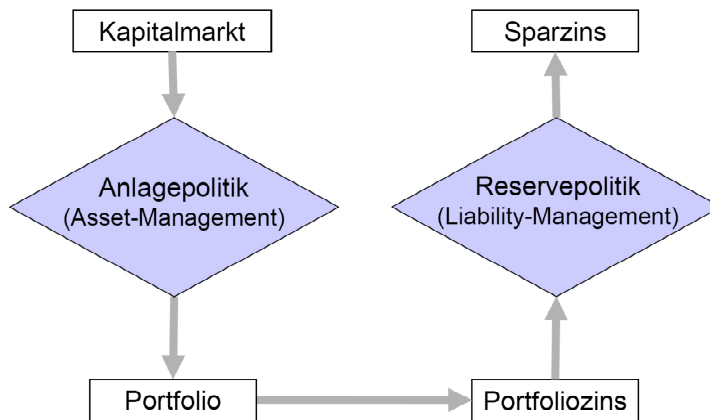


ABBILDUNG 2 -3: Zinstransformation beim Lebensversicherungssparen

Die Zinstransformation beim Lebensversicherungssparen umfasst also zwei Entscheidungsebenen:

- Entscheidung über die Portfoliozusammensetzung
- Entscheidung über den Einsatz der kollektiven Reserve.

Diese beiden Entscheidungsebenen können auch mit den Begriffen Asset-Management und Liability-Management erfasst werden. Entsprechend können wir von *Asset-Liability-Management* sprechen, wenn beide Entscheidungsebenen aufeinander abgestimmt werden. Die Entscheidung über den Einsatz der kollektiven Reserve entspricht im Wesentlichen der Entscheidung des LVU über die Festlegung der Deklaration. Mit Festlegung der Deklaration wird nämlich ein entsprechender Teil der RfB gebunden, so dass im Laufe des Geschäftsjahres dieser gebundene Teil der RfB sukzessive in das Versicherten-Guthaben umgebucht wird.

Bezeichnungen:

P_t : Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t

V_t : Wert der Versichertenguthaben zum Zeitpunkt t

$R_t := P_t - V_t$: kollektive Reserve zum Zeitpunkt t

$\rho_t := \ln\left(\frac{P_t}{V_t}\right) = -\ln\left(1 - \frac{R_t}{P_t}\right)$: (log.)Reservequote zum Zeitpunkt t .

Der Wert $\ln(P_t / V_t)$ entspricht näherungsweise der üblichen Reservequote R_t / P_t . Im Weiteren wird sich zeigen, dass die auf den ersten Blick etwa umständliche Definition der Reservequote tatsächlich die Darstellung wesentlich vereinfacht.

Wir unterstellen, dass sich das betrachtete LVU in einem dynamischen Gleichgewicht befindet, d.h. zu jedem Zeitpunkt entsprechen zufließenden Sparbeiträge den abfließenden Rentenzahlungen. Daraus folgt dass die Wertentwicklung des Portfolios ausschließlich von der Performance der Kapitalanlagen abhängt.

2.2 Beschreibung des Kapitalmarktes

Das LVU legt die Gelder der Sparer am Kapitalmarkt an; hierbei kann das LVU in der Praxis aus einem nahezu unbegrenzten Spektrum von Anlageformen auswählen. Bezogen auf den Untersuchungsgegenstand ist jedoch die spezielle Kapitalanlage des LVU ohne Bedeutung, vielmehr ist das *Ausmaß des Risikos*, das das LVU bei der Kapitalanlage wählt die Schlüsselgröße.⁶

Für den Kapitalmarkt legen wir das (Standard-) Black-Scholes-Modell zugrunde: Der Anleger hat danach für die Kapitalanlage zwei Anlagen zur Verfügung: eine *sichere* und eine *risikobehaftete* Anlage. Die risikobehaftete Anlage besteht darin, dass der Anleger in das *Marktportfolio* P_M investiert, für das gelte

$$dP_M(t) = P_M(t)(\tilde{\mu}_M dt + \sigma_M dW_t) \text{ mit } P_M(0) = 1 \quad (\text{Gl. 2-1})$$

bzw.

$$P_M(t) = \exp(\mu_M t + \sigma_M W_t) \quad (\text{Gl. 2-2})$$

mit $\mu_M := \tilde{\mu}_M - \frac{1}{2}\sigma_M^2$, die *Drift* des Marktportfolios und $\sigma_M > 0$.

Für die sichere Anlage $A(t)$ gelte:

$$dA(t) = A(t)\bar{\mu} dt \text{ mit } A(0) = 1 \text{ bzw. } A(t) = \exp(t\bar{\mu}) \quad (\text{Gl. 2-3})$$

Der Kapitalmarkt wird somit eindeutig durch die Parameter

$\bar{\mu}$ sicherer Zins

σ_M Volatilität des Marktportfolios

μ_M Drift des Marktportfolios

bestimmt. Ferner definieren wir

⁶ Dies entspricht auch der Grundkonzeption von *Solvency II*: Das gesamte Kapitalanlagerisiko wird in einer einzigen Maßzahl, dem *Value at Risk*, zusammengefasst.

$$r^{SR} := \frac{\tilde{\mu}_M - \bar{\mu}}{\sigma_M} \text{ (Sharpe-Ratio)}.$$

Sofern nicht anderes gesagt wird, wollen wir bei Zahlenbeispielen folgende Daten unterstellen:

$$\bar{\mu} = 3\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

$$\tilde{\mu}_M = 8\%$$

$$\mu_M = \tilde{\mu}_M - \frac{1}{2} \sigma_M^2 = 6\%$$

$$r^{SR} = \frac{\tilde{\mu}_M - \bar{\mu}}{\sigma_M} = 0,25 .$$

Für ein festes $T > 0$ (Anlagehorizont) sei \mathbf{Q} das durch (Gl. 2-4) definierte zu \mathbf{P} äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$d\mathbf{Q} = \exp\left(-\frac{1}{2} r_{SR}^2 T - r_{SR} W_T\right) d\mathbf{P} \quad (\text{Gl. 2-4})$$

Dann ist $\tilde{W}_t := r_{SR} t + W_t$ bzgl. des Maßes \mathbf{Q} ein Standard-Wiener-Prozess, und der diskontierte Marktprozess $\tilde{P}_M(t) := \exp(-t \bar{\mu}) P_M(t)$ ist ein \mathbf{Q} -Martingal.

Die Asset-Allokation des LVU zum Zeitpunkt $t \geq 0$ wird durch einen einzigen Parameter festgelegt: In Abhängigkeit von der Erfahrungen bis zum Zeitpunkt t wählt das LVU die Risikoexposition $\sigma(t)$, hierbei werde das Portfolio des LVU durch die folgende stochastische Differentialgleichung (SDG)⁷ beschrieben:

$$dP(t) = P(t) \left(\tilde{\mu}(t) dt + \sigma(t) dW_t \right) \text{ mit } P(0) = P_0 \quad (\text{Gl. 2-5})$$

bzw.

$$P(t) = P_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds + \int_{[0,t]} \sigma(s) dW_s \right) \quad (\text{Gl. 2-6})$$

mit $\mu(s) := \tilde{\mu}(s) - \frac{1}{2} \sigma^2(s)$, die Drift des Portfolios. $(W_t)_{t \geq 0}$ ist hier ein Standard-Wiener-Prozess.

⁷ Es wird angenommen, dass alle vorkommenden Prozesse die üblichen Messbarkeitsbedingungen erfüllen. Ferner wird angenommen, dass alle Pfade zumindest rechtsseitig stetig sind. Bei den Simulationsrechnungen wird unterstellt, dass die Pfade in der Regel abschnittsweise konstant sind.

Die zum Zeitpunkt t zu erwartende Rendite⁸ $\tilde{\mu}(t)$ ist *marktkonform* festzulegen, d.h. das Portfolio darf keine *Arbitrage* ermöglichen. Mithin ist $\tilde{\mu}(t)$ ein stochastischer Prozess, der von $\sigma(t)$ abhängt.

Proposition 2.1

Ist $P(t) = P_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds + \int_{[0,t]} \sigma(s) dW_s\right)$ das Anlageportfolio des LVU, so ist der

diskontierte Prozess $\tilde{P}(t) = \exp(-\bar{\mu}t)P(t)$ genau dann ein \mathbf{Q} -Martingal, wenn für die Drift des Prozesses gilt

$$\mu(t) = \bar{\mu} + \sigma(t)r_{SR} - \frac{1}{2}\sigma^2(t) = \bar{\mu} + \frac{\sigma(t)}{\sigma_M}(\tilde{\mu}_M - \bar{\mu}) - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \quad (\text{Gl. 2-7})$$

Beweis

$\tilde{W}_t := r_{SR}t + W_t$ ist bzgl. \mathbf{Q} ein Standard-Wiener-Prozess; somit gilt

$$dP(t) = P(t)(\tilde{\mu}(t)dt + \sigma(t)dW_t) = P(t)((\tilde{\mu}(t) - \sigma(t)r_{SR})dt + \sigma(t)d\tilde{W}_t).$$

Für den diskontierten Prozess $\tilde{P}(t) = \exp(-\bar{\mu}t)P(t)$ gilt somit:

$$\begin{aligned} d\tilde{P}(t) &= \exp(-\bar{\mu}t)dP(t) - \bar{\mu}\exp(-\bar{\mu}t)P(t)dt \\ &= \exp(-\bar{\mu}t)P(t)((\tilde{\mu}(t) - \sigma(t)r_{SR} - \bar{\mu})dt + \sigma(t)d\tilde{W}_t). \end{aligned}$$

$\tilde{P}(t)$ ist also genau dann ein \mathbf{Q} -Martingal, wenn $\tilde{\mu}(t) - \sigma(t)r_{SR} - \bar{\mu} = 0$.

Im Folgenden werden wir daher stets unterstellen, dass

$$\mu(t) = \mu(\sigma(t)) = \bar{\mu} + \sigma(t)r_{SR} - \frac{1}{2}\sigma^2(t)$$

Bemerkung:

Im Black-Scholes-Modell kann jeder contingent Claim als (dynamische) Mischung aus einer Anlage in das Marktportfolio und einer sicheren Anlage dargestellt werden. Somit

⁸ Im Folgenden werden wir in aller Regel eine *exponentielle Verzinsung* unterstellen; d.h. ist μ der (exponentielle) Zins, so ist $i = \exp(\mu) - 1$ der übliche Zinssatz. Entsprechend beziehen wir den Begriff *Rendite* meist auf die exponentielle Verzinsung.

kann man auch das Portfolio $P(t)$ als Mischung von Anlage in das Marktportfolio und sicherer Anlage darstellen. Setzt man nämlich

$$\varphi_1(t) := \frac{\sigma(t)}{\sigma_M} \frac{P(t)}{P_M(t)} \quad \text{und} \quad \varphi_0(t) := \left(1 - \frac{\sigma(t)}{\sigma_M}\right) \frac{P(t)}{A(t)},$$

so gilt: $P(t) = \varphi_0(t) A(t) + \varphi_1(t) P_M(t)$.

Somit können wir $\frac{\varphi_1(t) P_M(t)}{P(t)} = \frac{\sigma(t)}{\sigma_M}$ als *momentane Aktienquote* interpretieren.

Die folgende *Abbildung 2-4* veranschaulicht den Zusammenhang in (Gl. 2-7). Die Kapitalanlageentscheidung des LVU können wir in diesem Kontext dahin gehend interpretieren, dass das Unternehmen ein Portfolio auf der *Kapitalmarktkurve* wählt. Die Positionen *A*, *B* bzw. *C* in der Abbildung entsprechen einer eher *sicherheitsorientierten* bzw. *ausgewogenen* bzw. einer eher *renditeorientierten* Kapitalanlage.

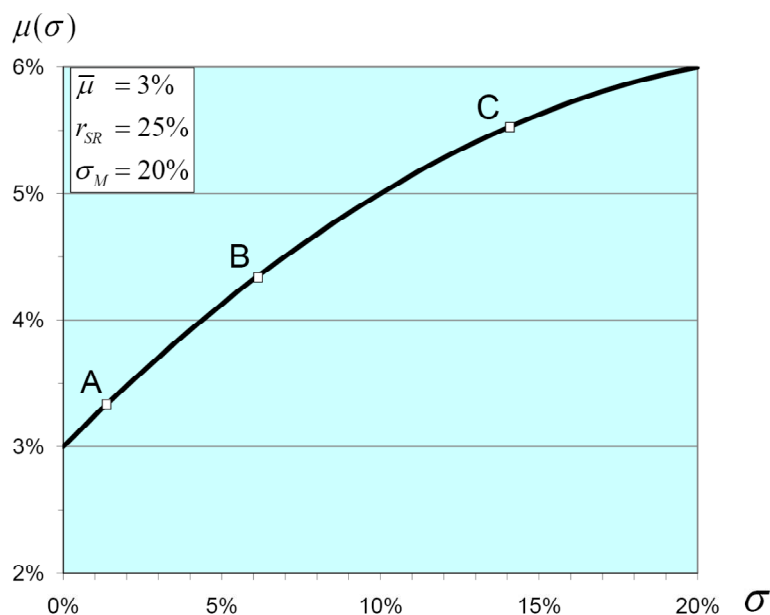


ABBILDUNG 2-4: Graph der Funktion $\sigma \mapsto \bar{\mu} + \sigma r_{SR} - \frac{1}{2} \sigma^2$

Für die *erwartete Rendite* des Anlageportfolios gilt:

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{P(t)}{P_0} \right) \right) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}(\mu(s)) ds = \bar{\mu} + \frac{1}{t} \int_0^t r_{SR} \mathbb{E}(\sigma(s)) - \frac{1}{2} \mathbb{E}(\sigma^2(s)) ds \quad (\text{Gl. 2-8})$$

2.3 Beschreibung des Deklarationsprozesse

Die Wertentwicklung der Versichertenguthaben $V(t)$ ist nicht vollständig an die Wertentwicklung des Portfolios P_t gekoppelt. Vielmehr bestimmt das LVU (unter Berücksichtigung der Erfahrung der Vergangenheit) mit welcher Rate sich die Versichertenguthaben in der Folgeperiode verzinsen sollen. Für den Wertprozess der Versichertenguthaben unterstellen wir:

$$dV(t) = V(t)\eta(t) dt \quad \text{mit } V(0) = V_0 \quad \text{bzw.} \quad V(t) = V_0 \exp\left(\int_0^t \eta(s) ds\right) \quad (\text{Gl. 2-9})$$

Diese Darstellung impliziert das Konzept der Vorausdeklaration, da die obige SDG keine stochastische Komponente dW_t enthält. Der Deklarationsprozess $\eta(t)$ selbst ist natürlich stochastisch, aber lokal ist der deklarierte Zins sicher. Der Ansatz, dass das LVU den stochastischen Portfoliozins $\tilde{\mu}(t)dt + \sigma(t)dW_t$ in einen sicheren $\eta(t)dt$ Zins transformiert.

Bei der Festlegung der Deklaration muss das LVU beachten, dass die Reserve niemals negativ wird, bzw. dass die Wahrscheinlichkeit einer negativen Reserve „sehr klein ist.

Aus (Gl. 2-2 und 2-9) folgt:

$$\rho(t) = \ln\left(\frac{P(t)}{V(t)}\right) = \rho_0 + \int_0^t \mu(s) - \eta(s) ds + \int_{[0,t]} \sigma(s) dW_s \quad (\text{Gl. 2-10})$$

bzw.

$$d\rho(t) = (\mu(t) - \eta(t))dt + \sigma(t) dW_t \quad \text{mit } \rho(0) = \rho_0 = \ln\left(\frac{P_0}{V_0}\right), \quad (\text{Gl. 2-11})$$

und es gilt $R(t) = P(t) - V(t) \geq 0 \Leftrightarrow \rho(t) \geq 0$.

Der Deklarationsprozess ist also so zu steuern, dass $\rho(t) \geq 0$ bzw. $\mathbf{P}(\rho(t) < 0) < \varepsilon$.

Wählt das LVU zum Zeitpunkt t die Risikoexposition $\sigma(t)$ und die Deklaration $\eta(t)$ und nehmen wir an, dass die Risikoexposition und die Deklaration im Zeitabschnitt $[t, t + \Delta]$ konstant sind, so gilt:

$$\rho(t + \Delta) - \rho(t) = \Delta(\mu(t) - \eta(t)) + \sigma(t)(W_{t+\Delta} - W_t). \quad (\text{Gl. 2-12})$$

Die Reserveänderung ist somit normalverteilt mit

$$\mathbb{E}(\rho(t + \Delta) - \rho(t)) = \Delta(\mu(t) - \eta(t)) \quad \text{und} \quad \text{Var}(\rho(t + \Delta) - \rho(t)) = \Delta \sigma^2(t).$$

Insbesondere gilt für $\sigma(t) > 0$

$$\mathbf{P}(\rho(t+\Delta) < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{\rho(t) + \Delta(\mu(t) - \eta(t))}{\sqrt{\Delta}\sigma(t)}\right) > 0. \quad (\text{Gl. 2-13})$$

Bei einer diskreten (d.h. mit abschnittsweise konstanten Parametern) Portfolio- und Deklarationssteuerung ist also die Bedingung $\mathbf{P}(\rho(t) < 0) = 0$ nur zu erfüllen, wenn $\sigma(t) = 0$ für alle t . Dies bedeutet, dass bei einer Monte-Carlo-Simulation der Fall $\rho(t) < 0$ nicht auszuschließen ist. In einem solchen Fall werden wir von *Ruin* sprechen; praktisch bedeutet dies, dass von außen Eigenkapital zugeführt werden muss.

2.4 Zulässige Asset-Liability-Management Strategien

Wir betrachten zunächst ein diskretes Modell, bei dem das LVU jeweils zum Zeitpunkt t für die Folgeperiode $[t, t+\Delta[$ die Risikoexposition der Kapitalanlage $\sigma(t)$ und die Deklaration $\eta(t)$ festlegt. Die Regel, nach der dies geschieht wollen wir als *ALM-Strategie* bezeichnen.

Wir führen eine Solvenzbedingung ein und fordern, dass eine vorgegebene Reservequote ρ_{\min} „mit großer Wahrscheinlichkeit“ nicht unterschritten wird:

$$\mathbf{P}(\rho(t+\Delta) \geq \rho_{\min}) \geq 1 - \alpha.$$

Wegen (Gl.2-13) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho(t+\Delta) \geq \rho_{\min}) &= \mathbf{P}\left(\rho(t) + \Delta(\mu(t) - \eta(t)) + \sigma(t)(W_{t+\Delta} - W_t) \geq \rho_{\min}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{\Delta(\mu(t) - \eta(t)) + \rho(t) - \rho_{\min}}{\sqrt{\Delta}\sigma(t)}\right), \end{aligned}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho(t+\Delta) \geq \rho_{\min}) \geq 1 - \alpha &\Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{\Delta(\mu(t) - \eta(t)) + \rho(t) - \rho_{\min}}{\sqrt{\Delta}\sigma(t)}\right) \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow -\frac{\Delta(\mu(t) - \eta(t)) + \rho(t) - \rho_{\min}}{\sqrt{\Delta}\sigma(t)} \leq -u_{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Dies ist genau dann der Fall wenn

$$(ALM) \quad \eta(t) \leq \bar{\mu} + \frac{\rho(t) - \rho_{\min}}{\Delta} - \sigma(t)\left(\frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{\Delta}} - r_{SR}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2(t). \quad (\text{Gl. 2-14})$$

Hierbei sei $u_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

Die Bedingung (ALM) können wir auch als *Fundamental-Bedingung des Asset-Liability-Managements der Lebensversicherung* bezeichnen. Sie zeigt nämlich den funktionalen Zusammenhang zwischen den zentralen Steuerungsgrößen des ALM-Prozesses, der Risikoexposition $\sigma(t)$ (Steuerungsparameter der Aktivseite) und der Deklaration $\eta(t)$ (Steuerungsparameter der Passivseite). Beide Prozesse sind *optimal* aufeinander abzustimmen.

Für sehr kurze Zeitabschnitte $\Delta \rightarrow 0$ ist die Bedingung (ALM) immer dann erfüllt, wenn zum Zeitpunkt t der Reservepuffer $\rho(t) - \rho_{\min} > 0$ ist.

Wir können

$$\eta_{neutral}(t) := \mu(t) = \bar{\mu} + \sigma(t)r_{SR} - \frac{1}{2}\sigma^2(t) \quad (\text{Gl. 2-15})$$

auch als die *risikoneutrale Deklaration* bezeichnen, denn wegen

$$\mathbb{E}(\rho(t+\Delta) - \rho(t)) = \Delta(\mu(t) - \eta(t))$$

entspricht in diesem Fall die *erwartete* der aktuellen Reservequote.

In Hinblick auf praktische Anwendungen kann es sinnvoll sein zusätzlich fordern

$$\sigma(t) \leq \sigma_{\max} \quad \text{und} \quad \eta(t) \geq \eta_{\min} \quad \text{für vorgegebene Parameter } \sigma_{\max}, \eta_{\min} \in \mathbb{R}.$$

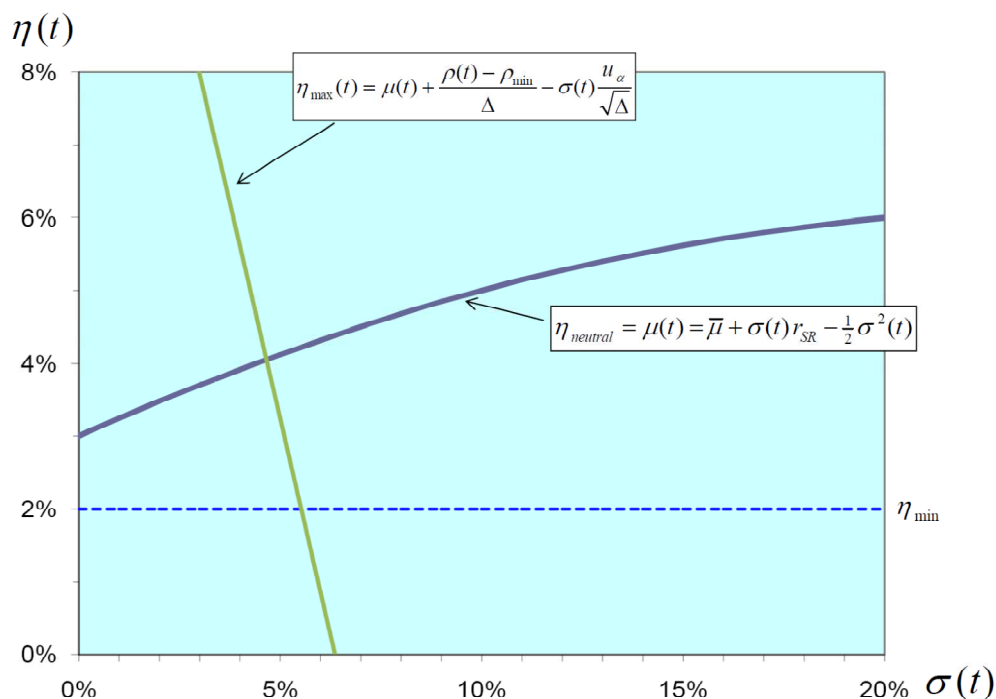


ABBILDUNG 2 -5: Zulässige ALM-Positionen nach (Gl. 2-16) für $\Delta = 1$, $1 - \alpha = 99,5\%$ und $\rho(t) - \rho_{\min} = 12\%$.

Die Abbildung 2-5 illustriert den Zusammenhang zwischen Risikoexposition und Deklaration. Jeder Punkt (σ, η) in dem Diagramm markiert eine ALM-Position, also eine Entscheidung des LVU hinsichtlich der Asset-Seite (Risikoexposition $\sigma(t)$) und der Liability-Seite (Deklaration $\eta(t)$). Ausgehend von einer verfügbaren Reserve von $\rho(t) - \rho_{\min} = 10\%$ und einem Sicherheitsniveau von $1 - \alpha = 99,5\%$ zeigt die Abbildung den Bereich der zulässigen ALM-Positionen; er wird begrenzt durch die Solvabilitätsbedingung ($\eta(t) \leq \eta_{\max}$) und die Mindestverzinsung ($\eta(t) \geq \eta_{\min}$).

Nicht alle zulässigen ALM-Positionen sind sinnvoll, denn eine hohe Deklaration kann zwar zulässig sein (d.h. die Solvabilitätsbedingung erfüllen), aber dennoch zu einem nicht vertretbaren Reserveabbau führen. Wählt nämlich das LVU bei einer ALM-Position (σ, η) oberhalb der reserveneutralen Deklaration $\eta_{\text{neutral}} = \mu(t)$, so bedeutet dies, dass im Erwartungswert die Reserve abgebaut wird und somit in der nächsten Periode das Ruinrisiko stark steigt.

3 ALM-Strategien für kollektive Sparprozesse

3.1 Das Basismodell

Im Folgenden soll ein lineares Modell für das ALM eines Sparerkollektivs mit kollektivem Risikoauagelich eingeführt und elementare Eigenschaften hergeleitet werden.

Allgemein wollen wir als ALM-Strategie einen (stochastischen) Prozess $(\sigma(t), \eta(t))_{t \geq 0}$ verstehen, der folgende Eigenschaften hat

1. $(\sigma(t), \eta(t))_{t \geq 0}$ ist ein \mathbf{F}_t -messbarer, previsible Prozess
2. $(\sigma(t), \eta(t))_{t \geq 0}$ ist in jedem Zeitintervall $[0, T]$ f.s. beschränkt
3. Die Pfade $(\sigma(\omega, t))_{t \geq 0}$ und $(\eta(\omega, t))_{t \geq 0}$ sind f.s. rechtsseitig stetig.
4. $\sigma(t) \geq 0$ f.s. für alle $t \geq 0$.

Eine ALM-Strategie ist also eine Vorschrift, die zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ unter Berücksichtigung der t -Vergangenheit die Risikoexposition der Kapitalanlagen $\sigma(t)$ und die Deklaration (Verzinsung der Versichertenguthaben) $\eta(t)$ für die nächste Periode $[t, t + \Delta[$ festlegt.

Da wir einen arbitragefreien Kapitalmarkt unterstellen, ist durch die Wahl des Risiko-
prozesses $(\sigma(t))_{t \geq 0}$ der Driftprozess $(\mu(t))_{t \geq 0}$ eindeutig festgelegt – vgl. (Gl.2-8).

3.1.1 Bestimmung des Deklarationsprozesses

Die Bedingung (ALM) in (Gl. 2-15) zeigt, dass der Reserveprozess $(\rho(t))$ eine zentrale Steuerungsgröße des ALM-Prozesses ist. Wir wollen im unterstellen, dass das LVU bestrebt ist, eine bestimmte strategische Zielreserve $\rho_{Ziel} \geq \rho_{\min}$ zu erreichen. Hierzu wählt es in jeder Periode die ALM-Position $(\sigma(t), \eta(t))$ so aus, dass (im Erwartungswert) eine bestehende Abweichung von der Zielreserve abgebaut wird. Die Angleichung an die Zielreserve kann das LVU über die Deklaration $\eta(t)$ steuern: Wählt das LVU eine Deklaration oberhalb bzw. unterhalb der erwarteten Portfoliorendite, d.h. $\eta(t) > \mu(t)$ bzw. $\eta(t) < \mu(t)$, so wird *im Erwartungswert* die Reserve abgebaut bzw. aufgebaut.

Wir konkretisieren die Strategie und definieren $\hat{\rho}(t) := \rho(t) - \rho_{Ziel}$ als *Abweichung von der Zielreserve* und verlangen, dass die Abweichung von der Zielreserve *im Erwartungswert* gleichmäßig reduziert wird. Für ein $\theta \geq 0$ soll daher gelten:

$$d \mathbb{E}(\hat{\rho}(t)) = -\theta \hat{\rho}(t) dt \quad (\text{Gl. 3-1})$$

Wir können θ als *Anpassungsgeschwindigkeit* interpretieren.

Dies legt wegen (Gl. 2-12) den folgenden Zusammenhang zwischen Deklaration und Reserve nahe:

$$\eta(t) = \mu(t) + \theta \hat{\rho}(t). \quad (\text{Gl. 3-2})$$

Damit ist allerdings die ALM-Strategie noch nicht eindeutig festgelegt, denn (Gl. 3-2) kann für jede Risikoexposition $\sigma(t)$ erfüllt werden. Man beachte, dass wegen (ALM 1) der Renditeprozesse $\mu(t)$ vollständig durch $\sigma(t)$ bestimmt ist.

Proposition 3-1

Wird die Deklaration entsprechend (Gl. 3-2) an die jeweilige Reservesituation angepasst, so ist der Reserveprozess $\hat{\rho}(t)$ ein verallgemeinerter *mean-reversion Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*,⁹ d.h. erfüllt die SDG :

$$d \hat{\rho}(t) = -\theta \hat{\rho}(t) dt + \sigma(t) dW_t \quad (\text{Gl. 3-3})$$

mit der Startbedingung $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_0 := \rho_0 - \rho_{\text{Ziel}}$ mit der Lösung

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \int_{[0,t]} \sigma(s) \exp(\theta s) dW_s \right) \quad (\text{Gl. 3-4})$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}(t)) = \exp(-\theta t) \hat{\rho}_0 \quad (\text{Gl. 3-5})$$

$$\text{Var}(\hat{\rho}(t)) = \exp(-2\theta t) \int_0^t \mathbb{E}(\sigma^2(s)) \exp(2\theta s) ds. \quad (\text{Gl. 3-6})$$

Beweis

(Gl. 3-3) folgt unmittelbar aus (Gl. 2-11) und (Gl. 3-2). Es handelt sich um eine lineare SDG mit der eindeutigen Lösung (Gl. 3-4) – vgl. [Karatzas/ Shreve 1991] S. 360f. (Gl. 3-5) folgt unmittelbar aus (Gl. 3-4). Mit Hilfe der Ito-Isometrie (vgl. [Øksendal 2003] S. 29) erhalten wir schließlich

⁹ Es handelt sich also um einen *mean-reverting Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*; vgl. [Øksendal 2003] S. 75.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\rho}(t)) &= \exp(-2\theta t) \mathbb{E} \left(\int_{[0,t]} \sigma(s) \exp(\theta s) dW_s \right)^2 \\ &= \exp(-2\theta t) \int_0^t \mathbb{E}(\sigma^2(s)) \exp(2\theta s) ds.\end{aligned}$$

Für den Zusammenhang von Deklaration und Risikoexposition folgt aus Proposition 3-1

$$\eta(t) = \bar{\mu} + \sigma(t) r_{SR} - \frac{1}{2} \sigma^2(t) + \theta \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \int_{[0,t]} \sigma(s) \exp(\theta s) dW_s \right). \quad (\text{Gl. 3-7})$$

(Gl. 3-7) verbindet die beiden Prozesse $\sigma(t)$ und $\eta(t)$, also die Steuerung der Aktiv- und der Passivseite. Allerdings gibt (Gl. 3-7) keine Auskunft darüber, wie $\sigma(t)$ zu wählen ist, ohne die Solvabilitätsbedingung (ALM in Gl. 2-15) zu gefährden.

Wir wollen noch zeigen, dass die obige Strategie der Anpassung an eine Zielreserve eine *faire Beteiligung* der Sparer am Anlageergebnis darstellt. Hierzu vergleichen wir die erwartete Rendite des Anlageportfolios mit der erwarteten Rendite der Versichertenguthaben.

Die erwartete Rendite des Portfolios beträgt wegen (Gl. 2-2)

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{P(t)}{P_0} \right) \right) = \frac{1}{t} \int_0^t \mu(s) ds ;$$

Für die erwartete Rendite der Versichertenguthaben gilt wegen (Gl. 2-11 und Gl. 3-7):

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{V(t)}{V_0} \right) \right) &= \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{E}(\eta(s)) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \mu(s) + \theta \hat{\rho}_0 \exp(-\theta s) ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \mu(s) ds + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta t)}{t}.\end{aligned}$$

Entspricht die Startreserve der Zielreserve (d.h. $\hat{\rho}_0 = 0$), so stimmen die Renditen überein. Die Sparer können also bei Beginn des Sparprozesses die gleiche Rendite erwarten, die auch das LVU mit ihrem Anlagevermögen erwirtschaftet. Eine anfängliche Reserve-*lücke* (d.h. $\rho_0 < \rho_{Ziel}$) führt jedoch *c.p.* zu durchschnittlich niedrigeren Renditen; dies bedeutet, dass die neu hinkommende Sparergeneration die Reserve-*lücke* der bestehenden Sparergeneration ausgleichen muss.

3.1.2 Bestimmung des Anlageprozesses

Die Managementregel (Gl. 3-2) beschreibt den ALM-Prozess nicht vollständig, da bisher nicht festgelegt wurden, nach welchen Kriterien die Risikoexposition der Kapitalanlagen ($\sigma(t)$) gesteuert wird.

Zur Steuerung von ($\sigma(t)$) wollen wir ein lineares Modell unterstellen; wir setzen

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t) \text{ mit Parametern } \hat{\sigma} > 0 \text{ und } a \in \mathbb{R} .^{10} \quad (\text{Gl. 3-8})$$

$\hat{\sigma}$ bezeichnen wir als die *strategische Risikoexposition*, und a die *Anpassungsgeschwindigkeit der Risikoexposition*. Wir wollen voraussetzen, dass die Parameter ($\hat{\sigma}, a$) so gewählt werden, dass $\sigma(0) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}(0) \geq 0$.

Dieses Modell ist motiviert durch die folgenden heuristischen Überlegungen. Hierzu betrachten wir die Solvabilitätsbedingung (ALM) in (Gl. 2-15) und die Deklarationsregel in (Gl. 3-2) und wählen jeweils eine maximal zulässige Deklaration.

Aus (Gl. 2-15) und (Gl. 3-2) folgt

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \mu(t) + \theta \hat{\rho}(t) \\ \eta(t) &= \mu(t) + \frac{\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_{\min}}{\Delta} - \sigma(t) \frac{u_\alpha}{\sqrt{\Delta}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma(t) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t), \quad (\text{Gl. 3-9})$$

wobei

$$\hat{\rho}_{\min} := \rho_{\min} - \rho_{\text{Ziel}},$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\alpha, \Delta, \hat{\rho}_{\min}) := -\frac{\hat{\rho}_{\min}}{u_\alpha \sqrt{\Delta}} > 0 \text{ und}$$

$$a = a(\alpha, \Delta, \theta) := \frac{\sqrt{\Delta}}{u_\alpha} \left(\frac{1}{\Delta} - \theta \right).$$

Wir können $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\alpha, \Delta, \hat{\rho}_{\min})$ als *strategische Risikoexposition* bezeichnen, denn nach (Gl. 3-9) schwankt die *taktische Risikoexposition* $\sigma(t)$ entsprechend der aktuellen Reserveposition um diesen Wert.

Die Managementregel (Gl. 3-8) folgt also in natürlicher Weise aus den oben dargestellten Rahmenbedingungen für zulässige ALM-Strategien.

¹⁰ Der Fall $a < 0$ ist ökonomisch nicht sinnvoll, denn das würde bedeuten, dass bei schwacher Reserveposition die Risikoexposition ausgebaut wird.

3.1.3 Definition des linearen Modells

Das **lineare Modell des kollektiven Sparens** wird durch die folgenden Parameter und Gleichungen bestimmt:

$\bar{\mu}$: sicherer Marktzins

r_{SR} : Zusatzrendite pro Risikoeinheit

$\sigma(t)$: Risikoexposition zum Zeitpunkt $t \geq 0$

$\mu(t) := \bar{\mu} + r_{SR} \sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t)$: Rendite eines Portfolios mit Risikoexposition $\sigma(t) \geq 0$

$dP(t) = P(t)(\tilde{\mu}(t)dt + \sigma(t)dW_t)$: Wertprozess des Anlagevermögens mit $P(0) = P_0$

$\eta(t)$: Deklaration zum Zeitpunkt $t \geq 0$

$dV(t) = V(t)\eta(t)dt$: Wertprozess der Versichertenguthaben mit $V(0) = V_0$

ρ_{Ziel} : Zielreservequote,

$\hat{\rho}_0 := \ln\left(\frac{P_0}{V_0}\right) - \rho_{Ziel}$: anfängliche Reservequote¹¹

$\hat{\rho}(t) := \ln\left(\frac{P(t)}{V(t)}\right) - \rho_{Ziel}$: Reservequote zum Zeitpunkt $t \geq 0$,

Managementregeln:

$\hat{\sigma} \geq 0$: strategische Risikoexposition

a : Anpassungsgeschwindigkeit der Risikoexposition an die Reserve

$\theta \geq 0$: Anpassungsgeschwindigkeit der Deklaration an die Reserve

$\sigma(t) = \hat{\sigma} + a\hat{\rho}(t)$; hierbei müssen wir sicherstellen, dass $\sigma(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

$\eta(t) = \mu(t) + \theta\hat{\rho}(t)$

Bemerkungen:

1. Wir lassen auch den Fall $a < 0$ zu, wenngleich dies bedeutet, dass man bei einer schwachen Reserveposition das Anlagerisiko erhöht.

¹¹ Wir verstehen hier die Reservequote als die Differenz der Ist-Reserve von der Zielreserve.

2. Falls $a = 0$, so wird unabhängig von der aktuellen Reserveposition die Risikoexposition der Kapitalanlagen konstant gehalten, d.h. $\sigma(t) = \hat{\sigma}$ für alle t . Eine solche Strategie können wir als *reine LM-Strategie* bezeichnen, da im Unterschied zum allgemeinen linearen Modell hier ausschließlich die Deklaration, also die Passivseite an die Reserveposition angepasst wird.
3. Weiter unten werden wir zeigen, dass $\sigma(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ bereits aus der Startbedingung $\sigma(0) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}_0 \geq 0$ folgt.

3.2 Elementare Eigenschaften des linearen Modells

Proposition 3-2

Für $a \in \mathbb{R}$ definieren wir den Prozess $E_t := \exp\left(aW_t - \frac{1}{2}a^2 t\right)$. Dann gilt:

1. $(E_t)_{t \geq 0}$ ist ein (*Exponential-*) *Martingal* mit der Darstellung

$$E_t = 1 + a \int_{[0,t]} E_s dW_s \quad \text{und} \quad dE_t = aE_t dW_t \quad (\text{Gl. 3-10})$$

2. Für $0 \leq s \leq t$ gilt $\frac{E_t}{E_s} = 1 + a \int_{[s,t]} \frac{E_u}{E_s} dW_u$ (Gl. 3-11)

3. Für $0 \leq u \leq v \leq s \leq t$ gilt $\mathbb{E}\left(\frac{E_s E_t}{E_u E_v}\right) = \exp(a^2(s-v))$, $\mathbb{E}\left(\frac{E_v E_t}{E_u E_s}\right) = 1$. (Gl. 3-12)

Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}(E_t) = \mathbb{E}\left(\frac{E_t}{E_s}\right) = 1, \quad \mathbb{E}\left(\frac{E_t^2}{E_s^2}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{E_t^2}{E_s}\right) = \exp(a^2(t-s)) \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(E_s E_t) = \exp(a^2 s).$$

Beweis

Zu 1.: Folgt mit Hilfe der Ito-Formel angewendet auf die Funktion

$$f(x, v) := \exp\left(ax + \frac{1}{2}a^2 v\right); \quad \text{vgl. [Karatzas/ Shreve 1991] S. 153f.}$$

Zu 2.: Die Zufallsvariable $E_t = \exp\left(aW_t - \frac{1}{2}a^2 t\right)$ lognormal-verteilt mit

$$\mathbb{E}(E_t) = \exp\left(\mathbb{E}\left(aW_t - \frac{1}{2}a^2 t\right) + \frac{1}{2}\text{Var}\left(aW_t - \frac{1}{2}a^2 t\right)\right) = \exp(0) = 1.$$

Entsprechend folgt für $0 \leq s \leq t$ $\mathbb{E} \left(\frac{E_t}{E_s} \right) = 1$.

Wir betrachten den Prozess

$$\left(\tilde{E}_u \right)_{u \geq 0} := \left(\frac{E_{s+u}}{E_s} \right)_{u \geq 0} = \left(\exp \left(a \tilde{W}_u - \frac{1}{2} a^2 u \right) \right)_{u \geq 0} = \left(\exp \left(a (W_{s+u} - W_s) - \frac{1}{2} a^2 u \right) \right)_{u \geq 0},$$

$$\text{dann folgt aus (Gl. 3-10)} \quad \frac{E_t}{E_s} = \tilde{E}_{t-s} = 1 + a \int_{[0, t-s]} \tilde{E}_u d\tilde{W}_u = 1 + a \int_{[s, t]} \frac{E_v}{E_s} dW_v.$$

Zu 3.: Da $\frac{E_s E_t}{E_u E_v} = \frac{E_t}{E_s} \frac{E_s^2}{E_v^2} \frac{E_v}{E_u}$ mit stochastisch unabhängigen Faktoren, folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{E_s E_t}{E_u E_v} \right) &= \mathbb{E} \left(\frac{E_t}{E_s} \right) \mathbb{E} \left(\frac{E_s^2}{E_v^2} \right) \mathbb{E} \left(\frac{E_v}{E_u} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{E_s^2}{E_v^2} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left(2a (W_s - W_v) - a^2 (s - v) \right) \right) = \exp \left(a^2 (s - v) \right); \end{aligned}$$

$$\text{entsprechend folgt} \quad \mathbb{E} \left(\frac{E_v E_t}{E_u E_s} \right) = \mathbb{E} \left(\frac{E_t}{E_s} \right) \mathbb{E} \left(\frac{E_v}{E_u} \right) = 1.$$

Proposition 3-3

Werden die Deklaration und die Risikoexposition entsprechend dem *linearen Modell* (Gl. 3-2) und (Gl. 3-8) an die jeweilige Reservesituation angepasst, und setzen wir voraus, dass $\sigma(0) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}_0 > 0$, so erfüllt der Prozess $(\sigma(t))_{t \geq 0}$ die folgende lineare SDG

$$d\sigma(t) = -\theta(\sigma(t) - \hat{\sigma}) dt + a\sigma(t) dW_t \quad (\text{Gl. 3-13})$$

mit der Startbedingung $\sigma(0) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}_0$ und der eindeutigen Lösung

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \exp(-\theta t) E_t \left[\sigma(0) + \theta \hat{\sigma} \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \right] \\ &= \hat{\sigma} \exp(-\theta t) E_t \left[1 + \frac{a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} + \theta \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \right]; \end{aligned} \quad (\text{Gl. 3-14})$$

insbesondere ist $\sigma(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

Beweis

Aus (Gl. 3-4) in Verbindung mit (Gl. 3-8) erhält man für $\sigma(t)$ die folgende Integraldarstellung

$$\sigma(t) - \hat{\sigma} = a \hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t) \left(\sigma(0) - \hat{\sigma} + a \int_{[0,t]} \sigma(s) \exp(\theta s) dW_s \right)$$

d.h. $\sigma(t)$ erfüllt die SDG in (Gl. 3-13). Diese lineare SDG hat (Gl. 3-14) als eindeutige Lösung - vgl. [Karatzas/ Shreve] S. 360f.

Da wir vorausgesetzt haben, dass $\theta \geq 0$, $\sigma(0) \geq 0$ und $\hat{\sigma} \geq 0$, folgt $\sigma(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

Wir erhalten damit die folgende Darstellung des Reserveprozesses $\hat{\rho}(t)$:

$$\hat{\rho}(t) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}}{a} \exp(-\theta t) E_t \left(1 + \frac{a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} + \theta \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \right) - \frac{\hat{\sigma}}{a} & (a \neq 0) \\ \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_{[0,t]} \exp(\theta s) dW_s \right) & (a = 0) \end{cases} \quad (\text{Gl. 3-15})$$

Zur einfacheren Darstellung definieren die stochastischen Prozesse (X_t) und (U_t) :

$$X_t := E_t \left(1 + \tau + \theta \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \right), \text{ hierbei sei } \tau \in \mathbb{R} \quad (\text{Gl. 3-16})$$

$$U_t := \int_{[0,t]} X_s dW_s \quad (\text{Gl. 3-17})$$

Proposition 3-4

1. (U_t) ist ein Martingal mit quadratischer Variation $[U]_t = \int_0^t X_s^2 ds$.

2. Es gilt:

$$X_t = aU_t + \tau + \exp(\theta t), \quad dX_t = a X_t dW_t + \theta \exp(\theta t) dt,$$

$$U_t = \begin{cases} \frac{1}{a} (X_t - \tau - \exp(\theta t)) & \text{falls } a \neq 0 \\ \int_{[0,t]} \tau + \exp(\theta s) dW_s & \text{falls } a = 0 \end{cases} \quad (\text{Gl. 3-18})$$

3. Setzen wir $\tau := \frac{a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}}$, so gilt

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t) (\hat{\sigma} U_t + \hat{\rho}_0) = \hat{\sigma} \exp(-\theta t) X_t \quad (\text{Gl. 3-19})$$

$$\sigma(t) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t) = \hat{\sigma} + a \exp(-\theta t) (\hat{\sigma} U_t + \hat{\rho}_0) \quad (\text{Gl. 3-20})$$

$$\mu(t) = \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma}(t) - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2(t) = \hat{\mu} + (b - \theta) \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} a^2 \hat{\rho}^2(t) \quad (\text{Gl. 3-21})$$

$$\eta(t) = \mu(t) + \theta \hat{\rho}(t) = \hat{\mu} + b \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} a^2 \hat{\rho}^2(t) \quad (\text{Gl. 3-22})$$

wobei wir abkürzend $\hat{\mu} := \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2$ und $b := \theta + a(r_{SR} - \hat{\sigma})$ setzen.

Beweis

zu 1. : dies folgt unmittelbar aus der Darstellung von (U_t) .

zu 2. : (E_t) ist ein Martingal mit $dE_t = a E_t dW_t$ und $V_t := 1 + \tau + \theta \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds$.

ist ein Prozess von beschränkter Variation mit $dV_t = \theta \frac{\exp(\theta t)}{E_t} dt$. Mit Hilfe der Ito-

Formel, angewendet auf die Funktion $f(x, v) = xv$ folgt dann:

$$\begin{aligned} X_t &= f(E_t, V_t) = f(E_0, V_0) + a \int_{[0, t]} V_s E_s dW_s + \int_0^t E_s \theta \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \\ &= 1 + \tau + a \int_{[0, t]} X_s dW_s + \exp(\theta t) - 1 = a U_t + \tau + \exp(\theta t). \end{aligned}$$

zu 3.: (Gl. 3-19) folgt unmittelbar aus (Gl. 3-14) und (Gl. 3-15); die übrigen Gleichungen ergeben sich dann aus den Definitionsgleichungen des linearen Modells.

Bemerkung:

Im Fall $a = 0$ ist $\hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_{[0, t]} \exp(\theta s) dW_s \right)$ normalverteilt mit

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}(t)) = \exp(-\theta t) \hat{\rho}_0 \quad \text{und} \quad \text{Var}(\hat{\rho}(t)) = \hat{\sigma}^2 \frac{1 - \exp(-2\theta t)}{2\theta}.$$

Ebenso ist für $a = 0$ $\eta(t) = \hat{\mu} + \theta \hat{\rho}(t)$ normalverteilt mit

$$\mathbb{E}(\eta(t)) = \hat{\mu} + \exp(-\theta t) \hat{\rho}_0 \quad \text{und} \quad \text{Var}(\eta(t)) = \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \theta (1 - \exp(-2\theta t)).$$

Proposition 3-5

Setzen wir $f_0(t) \equiv 1$ und für $k \geq 1$ $f_k(t) := \mathbb{E}(U_t^k)$, so gilt $f_1(t) \equiv 0$ und für $k \geq 2$ erfüllt die Funktion $t \mapsto f_k(t)$ die Differenzial-Gleichung

$$\frac{d f_k(t)}{dt} = \frac{k(k-1)}{2} \left(a^2 f_k(t) + 2a(\tau + \exp(\theta t)) f_{k-1}(t) + (\tau + \exp(\theta t))^2 f_{k-2}(t) \right) \quad (\text{Gl. 3-23})$$

mit der Anfangsbedingung $f_k(0) = 0$.

Beweis

Mit Hilfe der Ito-Formel mit der Funktion $x \mapsto x^k$ erhält man

$$\begin{aligned} U_t^k &= k \int_{[0,t]} U_s^{k-1} dU_s + \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t U_s^{k-2} d[U]_s \\ &= k \int_{[0,t]} U_s^{k-1} X_s dW_s + \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t U_s^{k-2} X_s^2 ds. \end{aligned}$$

Wegen $X_s^2 = a^2 U_s^2 + 2a(\tau + \exp(\theta s))U_s + (\tau + \exp(\theta s))^2$ folgt

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \mathbb{E}(U_t^k) \\ &= 0 + \frac{1}{2} k(k-1) \mathbb{E} \left(\int_0^t U_s^{k-2} \left(a^2 U_s^2 + 2a(\tau + \exp(\theta s))U_s + (\tau + \exp(\theta s))^2 \right) ds \right) \\ &= \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \left(a^2 \mathbb{E}(U_s^k) + 2a(\tau + \exp(\theta s)) \mathbb{E}(U_s^{k-1}) \right. \\ &\quad \left. + (\tau + \exp(\theta s))^2 \mathbb{E}(U_s^{k-2}) \right) ds \\ &= \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t \left(a^2 f_k(s) + 2a(\tau + \exp(\theta s)) f_{k-1}(s) \right. \\ &\quad \left. + (\tau + \exp(\theta s))^2 f_{k-2}(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Hierauf folgt die Behauptung.

Zur Vereinfachung der Darstellung setzen wir abkürzend

$$J_t(\alpha) := \int_0^t \exp(\alpha s) ds = \begin{cases} \frac{\exp(\alpha t) - 1}{\alpha} & \text{für } \alpha \neq 0 \\ t & \text{für } \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{Gl. 3-24})$$

Bemerkung

Da $f_k(0) = 0$ für alle $k \geq 2$, kann man mit Hilfe der Differenzialgleichungen (Gl. 3-23) rekursiv alle Momente $\mathbb{E}(U_t^k)$ bestimmen. Insbesondere gilt:

$$\frac{d \mathbb{E}(U_t^2)}{dt} = a^2 \mathbb{E}(U_t^2) + (\tau + \exp(\theta t))^2$$

$$\frac{d \mathbb{E}(U_t^3)}{dt} = 3a^2 \mathbb{E}(U_t^3) + 6a(\tau + \exp(\theta t)) \mathbb{E}(U_t^2)$$

$$\frac{d \mathbb{E}(U_t^4)}{dt} = 6a^2 \mathbb{E}(U_t^4) + 12a(\tau + \exp(\theta t)) \mathbb{E}(U_t^3) + 6(\tau + \exp(\theta t))^2 \mathbb{E}(U_t^2)$$

Für $\tau = \frac{a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}}$ erhält man:

$$\mathbb{E}(U_t^2) = \exp(2\theta t) J_t(a^2 - 2\theta) + \frac{2a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} \exp(\theta t) J_t(a^2 - \theta) + \left(\frac{a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} \right)^2 J_t(a^2) \quad (\text{Gl. 3-25})$$

$$\mathbb{E}(U_t^3) = \frac{6a \exp(3\theta t)}{2a^2 - \theta} (J_t(3a^2 - 3\theta) - J_t(a^2 - 2\theta)) + \hat{\rho}_0 \cdot \text{Restterm1} \quad (\text{Gl. 3-26})$$

$$\begin{aligned} \text{Restterm1} = & \frac{3 \exp(2t\theta)}{2a^2 - \theta} \left((6a^2 - \theta) J_t(3a^2 - 2\theta) \right. \\ & \left. - (2a^2 - \theta) J_t(a^2 - 2\theta) - 4a^2 J_t(a^2 - \theta) \right) \\ & + \frac{6a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} \exp(\theta t) (\exp(a^2 t) J_t(2a^2 - \theta) - J_t(a^2 - \theta)) \\ & + \frac{a^4 \hat{\rho}_0^2}{2} (2 + \exp(a^2 t)) J_t^2(a^2) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(U_t^4) = 6 \exp(4\theta t) \left(\frac{(15a^2 - \theta) J_t(6a^2 - 4\theta)}{(3a^2 - \theta)(5a^2 - 2\theta)} - \frac{12a^2 J_t(3a^2 - 3\theta)}{(2a^2 - \theta)(3a^2 - \theta)} + \frac{(10a^2 + \theta) J_t(a^2 - 2\theta)}{(2a^2 - \theta)(5a^2 - 2\theta)} \right) + \hat{\rho}_0 \cdot \text{Restterm2} \quad (\text{Gl. 3-27})$$

Hinweis: Für *Restterm2* ergibt sich eine unhandliche Formel; auf die explizite Darstellung von *Restterm2* wird daher verzichtet. Man kann sich davon überzeugen, dass

$\mathbb{E}(U_t^3)$ und $\mathbb{E}(U_t^4)$ auch an den Stellen, wo die jeweiligen Nenner verschwinden wohldefiniert sind.

Proposition 3-6

Für $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\mathbb{E}(U_s U_t) = \mathbb{E}(U_s^2) \tag{Gl. 3-28}$$

$$\mathbb{E}(U_s^2 U_t) = \mathbb{E}(U_s^3) \tag{Gl. 3-29}$$

$$\mathbb{E}(U_s U_t^2) = \exp(a^2(t-s))\mathbb{E}(U_s^3) + 2a(\exp(\theta t)J_{t-s}(a^2 - \theta) + \tau J_{t-s}(a^2))\mathbb{E}(U_s^2) \tag{Gl. 3-30}$$

$$\mathbb{E}(U_s^2 U_t^2) = \left(\begin{array}{l} \exp(a^2(t-s))\mathbb{E}(U_s^4) \\ + 2a\exp(\theta t)J_{t-s}(a^2 - \theta)\mathbb{E}(U_s^3) \\ + \exp(2\theta t)J_{t-s}(a^2 - 2\theta)\mathbb{E}(U_s^2) \end{array} \right) + \tau \left(\begin{array}{l} 2\exp(\theta t)J_{t-s}(a^2 - \theta)\mathbb{E}(U_s^2) \\ + J_{t-s}(a^2)(2a\mathbb{E}(U_s^3) + \tau\mathbb{E}(U_s^2)) \end{array} \right) \tag{Gl. 3-31}$$

Beweis

Die ersten beiden Gleichungen folgen aus der Martingal-Eigenschaft von (U_t) .

Es gilt $U_t^2 = [U]_t + U_0^2 + 2M_t$ mit $M_t := \int_{[0,t]} U_v dU_v = \int_{[0,t]} U_v X_v dW_v$. (M_t) ist ein Martingal.

Ferner gilt $U_0^2 = 0$ und für die quadratische Variation gilt $[U]_t = \int_0^t X_v^2 dv$.

Damit erhalten wir:

$$\mathbb{E}(U_s U_t^2) = \mathbb{E}(U_s ([U]_t + 2M_t)) = \mathbb{E}(U_s [U]_t) + 2\mathbb{E}(U_s M_t)$$

Da $[U]_t = \int_0^t X_v^2 dv$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_s [U]_t) &= \int_0^t \mathbb{E}(U_s X_v^2) dv = \int_0^s \mathbb{E}(U_s X_v^2) dv + \int_s^t \mathbb{E}(U_s X_v^2) dv \\ &= \int_0^s \mathbb{E}(U_v X_v^2) dv + \int_s^t \mathbb{E}(U_s X_v^2) dv \end{aligned}$$

Da (M_t) ein Martingal ist, folgt $\mathbb{E}(U_s M_t) = \mathbb{E}(U_s M_s)$.

Bezeichne $[U, M]_t$ den Kovarianzprozess, so ist $([U, M]_t - U_t M_t)_{t \geq 0}$ ein lokales Martingal,¹² und es gilt somit $\mathbb{E}([U, M]_s - U_s M_s) = 0$.

Da $dU_t = X_t dW_t$ und $dM_t = U_t X_t dW_t$ gilt für den Kovarianzprozess $[U, M]_t = \int_0^t U_v X_v^2 dv$ (vgl. Karatzas/ Shreve S. 170). Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}(U_s M_s) = \mathbb{E}([U, M]_s) = \int_0^s \mathbb{E}(U_v X_v^2) dv,$$

und somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U_s U_t^2) &= \mathbb{E}(U_s [U]_t) + 2 \mathbb{E}(U_s M_s) = 3 \int_0^s \mathbb{E}(U_v X_v^2) dv + \int_s^t \mathbb{E}(U_s X_v^2) dv \\ &= 3 \int_0^s \mathbb{E} \left(U_v \left(a^2 U_v^2 + 2a(\tau + \exp(\theta v)) U_v + (\tau + \exp(\theta v))^2 \right) \right) dv \\ &\quad + \int_s^t \mathbb{E} \left(U_s \left(a^2 U_v^2 + 2a(\tau + \exp(\theta v)) U_v + (\tau + \exp(\theta v))^2 \right) \right) dv \\ &= 3 \int_0^s a^2 \mathbb{E}(U_v^3) + 2a(\tau + \exp(\theta v)) \mathbb{E}(U_v^2) dv \\ &\quad + \int_s^t a^2 \mathbb{E}(U_s U_v^2) + 2a(\tau + \exp(\theta v)) \mathbb{E}(U_s U_v) dv \\ &= 3 \int_0^s a^2 \mathbb{E}(U_v^3) + 2a(\tau + \exp(\theta v)) \mathbb{E}(U_v^2) dv \\ &\quad + 2a \mathbb{E}(U_s^2) \int_s^t (\tau + \exp(\theta v)) dv + a^2 \int_s^t \mathbb{E}(U_s U_v^2) dv \end{aligned}$$

Setze nun für $0 \leq s \leq t$ $f_s(t) := \mathbb{E}(U_s U_t^2)$, dann erfüllt diese Funktion die (gewöhnliche) Differenzialgleichung:

$$\frac{d f_s(t)}{d t} = 2a \mathbb{E}(U_s^2) (\tau + \exp(\theta t)) + a^2 f_s(t) \text{ mit Anfangsbedingung } f_s(s) := \mathbb{E}(U_s^3).$$

Es ergibt sich als Lösung:

$$f_s(t) = \exp(a^2(t-s)) \mathbb{E}(U_s^3) + 2a \left(\exp(\theta t) J_{t-s}(a^2 - \theta) + \tau J_{t-s}(a^2) \right) \mathbb{E}(U_s^2).$$

¹² Vgl. [Irle 2003] S.224

Zur Berechnung von $\mathbb{E}(U_s^2 U_t^2)$ schreiben wir wie oben $U_s^2 U_t^2 = U_s^2 ([U]_t + 2M_t)$ und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_s^2 U_t^2) &= \mathbb{E}(U_s^2 [U]_t) + 2\mathbb{E}(U_s^2 M_t) = \mathbb{E}\left(U_s^2 \int_0^t X_v^2 dv\right) + 2\mathbb{E}(U_s^2 M_s) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}(U_s^2 X_v^2) dv + 2\mathbb{E}(U_s^2 M_s)\end{aligned}$$

Für $0 \leq s \leq t$ setzen wir $g_s(t) := \mathbb{E}(U_s^2 U_t^2)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d g_s(t)}{d t} &= \mathbb{E}\left(U_s^2 \left(a^2 U_t^2 + 2a(\tau + \exp(\theta t))U_t + (\tau + \exp(\theta t))^2\right)\right) \\ &= a^2 g_s(t) + 2a(\tau + \exp(\theta t))\mathbb{E}(U_s^2 U_t) + (\tau + \exp(\theta t))^2 \mathbb{E}(U_s^2) \\ &= a^2 g_s(t) + 2a(\tau + \exp(\theta t))\mathbb{E}(U_s^3) + (\tau + \exp(\theta t))^2 \mathbb{E}(U_s^2)\end{aligned}$$

Als Lösung der Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $g_s(s) := \mathbb{E}(U_s^4)$ erhält man schließlich

$$g_s(t) = \begin{pmatrix} \exp(a^2(t-s))\mathbb{E}(U_s^4) \\ + 2a\exp(\theta t)J_{t-s}(a^2 - \theta)\mathbb{E}(U_s^3) \\ + \exp(2\theta t)J_{t-s}(a^2 - 2\theta)\mathbb{E}(U_s^2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 2\exp(\theta t)J_{t-s}(a^2 - \theta)\mathbb{E}(U_s^2) \\ + J_{t-s}(a^2)(2a\mathbb{E}(U_s^3) + \tau\mathbb{E}(U_s^2)) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der vorstehenden Propositionen können wir nun explizite Darstellungen der Momente und Kovarianzen der Prozesse $(\hat{\rho}(t)), (\hat{\sigma}(t)), (\mu(t)), (\eta(t))$ angeben.

Proposition 3-7

Für $0 \leq s \leq t$ gilt:

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}(t)) = \hat{\rho}_0 \exp(-\theta t)$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}^2(t)) = \exp(-2\theta t)(\hat{\sigma}^2 \mathbb{E}(U_t^2) + \hat{\rho}_0^2)$$

$$\text{Var}(\hat{\rho}^2(t)) = \exp(-2\theta t)\hat{\sigma}^2 \mathbb{E}(U_t^2)$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}(s)\hat{\rho}(t)) = \exp(-\theta(s+t))(\hat{\sigma}^2 \mathbb{E}(U_s^2) + \hat{\rho}_0^2)$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}^2(s)\hat{\rho}(t)) = \exp(-\theta(2s+t))(\hat{\sigma}^3 \mathbb{E}(U_s^3) + 3\hat{\sigma}^2 \hat{\rho}_0 \mathbb{E}(U_s^2) + \hat{\rho}_0^3)$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}(s)\hat{\rho}^2(t)) = \exp(-\theta(s+2t))(\hat{\sigma}^3 \mathbb{E}(U_s U_t^2) + 2\hat{\sigma}^2 \hat{\rho}_0 \mathbb{E}(U_s^2) + \hat{\sigma}^2 \hat{\rho}_0 \mathbb{E}(U_t^2) + \hat{\rho}_0^3)$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}^2(s)\hat{\rho}^2(t)) = \exp(-2\theta(s+t)) \left(\begin{array}{l} \hat{\sigma}^4 \mathbb{E}(U_s^2 U_t^2) + 2\hat{\sigma}^3 \hat{\rho}_0 (\mathbb{E}(U_s U_t^2) + \mathbb{E}(U_s^3)) \\ + \hat{\sigma}^2 \hat{\rho}_0^2 (5\mathbb{E}(U_s^2) + \mathbb{E}(U_t^2)) + \hat{\rho}_0^4 \end{array} \right)$$

$$\mathbb{E}(\sigma(t)) = \hat{\sigma} + a \hat{\rho}_0 \exp(-\theta t)$$

$$\text{Var}(\sigma(t)) = a^2 \left(\mathbb{E}(\hat{\rho}^2(t)) - (\mathbb{E}\hat{\rho}(t))^2 \right)$$

Für $f(t) := -\frac{1}{2}a^2\hat{\sigma}^2 \exp(-2\theta t)$ und $g(t) := \hat{\sigma} \exp(-\theta t) (\theta + a(r_{SR} - \hat{\sigma}) - a^2\hat{\rho}_0 \exp(-\theta t))$ gilt:

$$\mathbb{E}(\eta(t)) = \hat{\mu} - \frac{1}{2}a^2\hat{\sigma}^2 \exp(-2\theta t)\mathbb{E}(U_t^2) + a\hat{\rho}_0 \exp(-\theta t)(r_{SR} - \hat{\sigma} - \frac{1}{2}a\hat{\rho}_0 \exp(-\theta t))$$

$$\eta(t) - \mathbb{E}(\eta(t)) = f(t)(U_t^2 - \mathbb{E}(U_t^2)) + g(t)U_t$$

$$\text{Var}(\eta(t)) = f^2(t) [\mathbb{E}(U_t^4) - (\mathbb{E}(U_t^2))^2] + 2f(t)g(t)\mathbb{E}(U_t^3) + g^2(t)\mathbb{E}(U_t^2)$$

Bemerkungen

1. Für $\hat{\rho}_0 = 0$ gilt: $\exp(-2\theta t)\mathbb{E}(X_t^2) = 1 + a^2 J_t(a^2 - 2\theta)$ (Gl. 3-32)

Begründung hierfür:

Aus Proposition 3-4 erhalten wir $X_t^2 = a^2 U_t^2 + 2a(\tau + \exp(\theta t))U_t + (\tau + \exp(\theta t))^2$.

Da $\mathbb{E}(U_t) = 0$ folgt $\mathbb{E}(X_t^2) = a^2 \mathbb{E}(U_t^2) + (\tau + \exp(\theta t))^2$; aus (Gl. 3-25) folgt dann (Gl. 3-32).

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\exp(-2\theta t)\mathbb{E}(U_t^2) \right) = \frac{1}{2\theta - a^2}$ falls $\theta > \frac{1}{2}a^2$ (Gl. 3-33)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\exp(-3\theta t)\mathbb{E}(U_t^3) \right) = \frac{2a}{(2\theta - a^2)(\theta - a^2)}$$
 falls $\theta > a^2$ (Gl. 3-34)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\exp(-4\theta t)\mathbb{E}(U_t^4) \right) = \frac{3(3a^2 + \theta)}{(2\theta - a^2)(\theta - a^2)(2\theta - 3a^2)}$$
 falls $\theta > \frac{3}{2}a^2$ (Gl. 3-35)

3. $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(\exp(-\theta t) X_t) = \begin{cases} \frac{a^2}{2\theta - a^2} & \text{falls } 2\theta > a^2 \\ +\infty & \text{falls } 2\theta \leq a^2. \end{cases}$ (Gl. 3-36)

$$4. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(\sigma(t)) = \begin{cases} \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2} & \text{falls } 2\theta > a^2 \\ +\infty & \text{falls } 2\theta \leq a^2 \end{cases} \quad (\text{Gl. 3-37})$$

$$5. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\rho}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\hat{\rho}^2(t)) = \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2} & \text{falls } 2\theta > a^2 \\ +\infty & \text{falls } 2\theta \leq a^2 \end{cases} \quad (\text{Gl. 3-38})$$

$$6. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta(t)) = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2(2\theta - a^2)} & \text{falls } 2\theta > a^2 \\ -\infty & \text{falls } 2\theta \leq a^2 \end{cases} \quad (\text{Gl. 3-39})$$

$$7. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}(\eta(t)) = \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2} \left(\left(r_{SR} - \frac{\theta \hat{\sigma}}{\theta - a^2} + \frac{\theta}{a} \right)^2 + \frac{a^2 \theta^3 \hat{\sigma}^2}{(\theta - a^2)^2 (2\theta - a^2)(2\theta - 3a^2)} \right)$$

$2\theta \leq a^2$ bedeutet also eine „*Stop-and-go*“-Strategie: Die Anpassung der Deklaration an die Reserveposition ist nicht schnell genug, um die Reserve aufzufüllen; dies hat zur Folge, dass die Risikoexposition immer heftiger gegengesteuert werden muss.

Die folgende Abbildung 3-1 illustriert den Effekt. Ausgehend von einem starken Ungleichgewicht, nämlich $\hat{\rho}_0 = +1$ bzw. $\hat{\rho}_0 = -1$ kommt es bei Wahl der Steuerungsparameter ($a = 0.5, \theta = 0.4$) zu einer Stabilisierung der Reserveposition. Ist jedoch die Deklarationsanpassung gegenüber der Anpassung der Risikoexponierung zu schwach ($a = 0.5, \theta = 0.05$), so kommt es erratischen Schwankungen der Reserveposition.

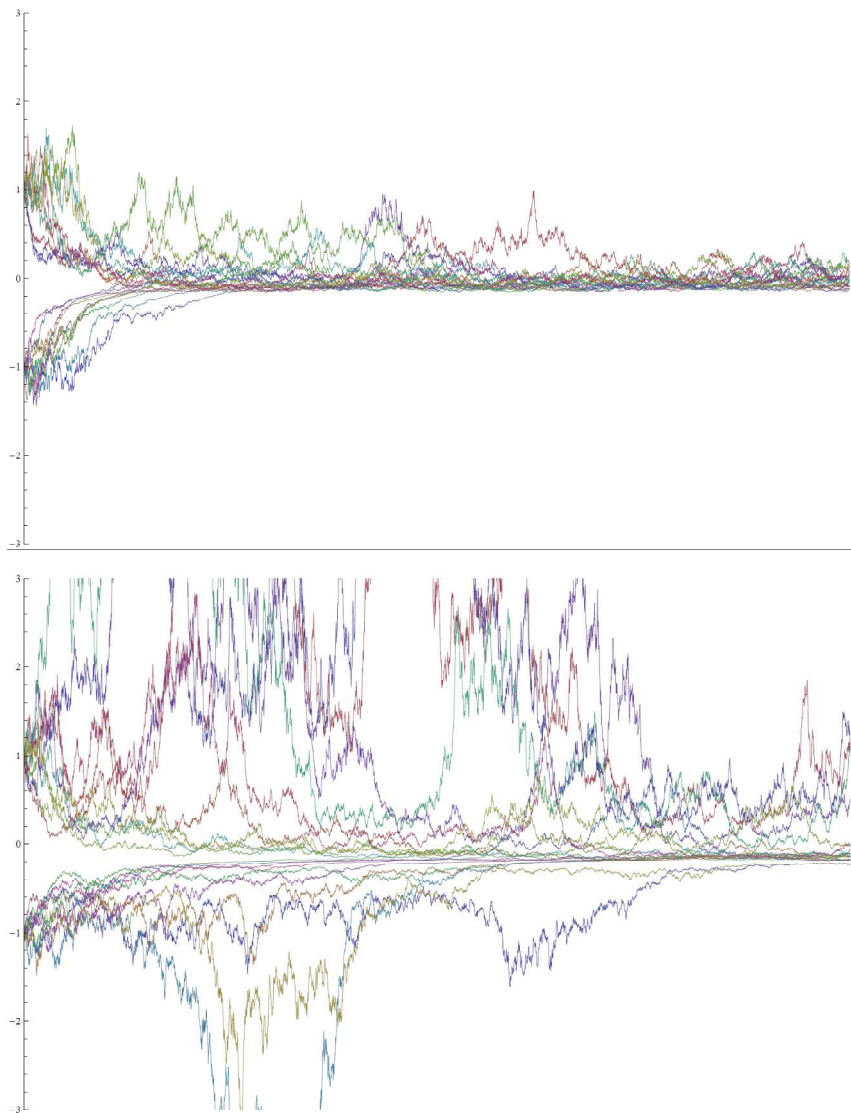


ABBILDUNG 3 -1: Simulationspfades des Reserveprozesses $(\hat{\rho}(t)) : 0 \leq t \leq 30$.
 Dargestellt werden jeweils 20 Trajektorien des Reserveprozesses, hiervon je 10 mit dem Startwert $\hat{\rho}_0 = +1$ und $\hat{\rho}_0 = -1$. Beim oberen Diagramm wurden folgende Parameter zugrunde gelegt: $\hat{\sigma} = 0.1$, $a = 0.5$, $\theta = 0.4$ (obere Grafik) bzw. $\hat{\sigma} = 0.1$, $a = 0.5$, $\theta = 0.05$ (untere Grafik).

3.3 Grenzprozesse im linearen Modell

Die obigen Gleichungen zeigen, dass die Prozesse $(X_t)_{t \geq 0}$ bzw. $(U_t)_{t \geq 0}$ die wesentlichen Treiber der ALM-Prozesse $(\sigma(t))$, $(\hat{\rho}(t))$ und $(\eta(t))$ sind. Der Prozess

$(\hat{\rho}_0 \exp(-\theta t) E_t)_{t \geq 0}$ ist ein Residualprozess, der den im Zeitablauf verschwindenden Effekt der Anfangsreserve $\hat{\rho}_0$ darstellt.

Es gilt: $\exp(-\theta t) E_t \rightarrow 0$ (f.s.), jedoch wegen $\mathbb{E}((\exp(-\theta t) E_t)^2) = \exp(-(2\theta - a^2)t)$

$$\exp(-\theta t) E_t \rightarrow 0 \text{ (in } L_2) \Leftrightarrow 2\theta - a^2 > 0.$$

Eine Zufallsvariable $X > 0$ heißt *invers-Gamma* (α, β) -verteilt mit den Parametern $\alpha > 0, \beta > 0$, wenn die Zufallsvariable X^{-1} Gamma- (α, β^{-1}) -verteilt ist. Bezeichne $f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(x)$ die Dichtefunktion der inversen Gamma-Verteilung, dann gilt:

$$f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(x) = 1_{]0, +\infty[}(x) (\beta \Gamma(\alpha))^{-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) \left(\frac{\beta}{x}\right)^{1+\alpha}$$

Ist X *invers-Gamma* (α, β) -verteilt, so existiert das k -te Moment der Verteilung genau dann wenn $\alpha > k$; in diesem Falle gilt:

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\beta^k}{(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - k)}.$$

Proposition 3-8

Ist $0 < a^2 < 2\theta$ so konvergieren $\sigma(t), \hat{\rho}(t), \mu(t)$ bzw. $\eta(t)$ in Verteilung gegen die Zufallsvariablen $\sigma_\infty, \hat{\rho}_\infty, \mu_\infty$ bzw. η_∞ mit den Dichtefunktionen

$$f(\sigma_\infty, x) = f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(x)$$

$$f(\hat{\rho}_\infty, x) = |a| f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(ax + \hat{\sigma})$$

$$f(\mu_\infty, x) = 1_{]-\infty, A_1[}(x) \frac{f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(B_1 + \sqrt{2(A_1 - x)}) + f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(B_1 - \sqrt{2(A_1 - x)})}{\sqrt{2(A_1 - x)}},$$

bzw.

$$f(\eta_\infty, x) = 1_{]-\infty, A_2[}(x) \frac{f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(B_2 + \sqrt{2(A_2 - x)}) + f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(B_2 - \sqrt{2(A_2 - x)})}{\sqrt{2(A_2 - x)}};$$

hierbei ist $z \mapsto f_{\Gamma(\alpha, \beta)}(z)$ die Dichtefunktion der inversen Gamma-Verteilung mit Parametern $\alpha = 1 + \frac{2\theta}{a^2}$ und $\beta = \frac{2\theta\hat{\sigma}}{a^2}$; ferner sei $A_1 := \bar{\mu} + \frac{1}{2}r_{SR}^2$, $B_1 := r_{SR}$ bzw. $A_2 := \bar{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{a} + r_{SR}\right)^2 - \frac{\theta\hat{\sigma}}{a}$, $B_2 := r_{SR} + \frac{\theta}{a}$.

Beweis

Nach (Gl. 3-16) gilt

$$\exp(-\theta t)X_t = \exp(-\theta t)\left(1 + \frac{a\hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}}\right)E_t + \theta \int_0^t \frac{E_t}{E_s} \exp(-\theta(t-s)) ds$$

Wir zeigen, dass $H_t := \int_0^t \frac{E_t}{E_s} \exp(-\theta(t-s)) ds$ in Verteilung gegen eine *invers-Gamma-verteilte* Zufallsvariable konvergiert.

Es gilt:

$$\begin{aligned} H_t &= \int_0^t \exp(a(W_t - W_s)) \exp\left(-\left(\frac{1}{2}a^2 + \theta\right)(t-s)\right) ds \\ &= \int_0^t \exp\left(a(W_t - W_{t-s}) - \frac{1}{2}a^2 s\right) \exp(-\theta s) ds. \end{aligned}$$

Für festes t ist $(W_t - W_{t-s})_{0 \leq s \leq t}$ ein Standard-Wiener-Prozess.

Sei nun $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ ein Standard-Wiener-Prozess; wir definieren die Prozesse

$$\bar{E}_t := \exp\left(a\bar{W}_s - \frac{1}{2}a^2 t\right) \text{ und } Y_t := \int_0^t \bar{E}_s \exp(-\theta s) ds,$$

so sind für alle $t \geq 0$ H_t und Y_t identisch verteilt.

Der Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$ konvergiert *fast sicher* gegen $Y_\infty := \int_0^\infty \bar{E}_t \exp(-\theta t) dt$.¹³

Falls $\theta > 0$, so konvergiert $Y_t \rightarrow Y_\infty$ (in L_1). Um dies zu zeigen, betrachten wir für $0 < s \leq t$:

¹³ Die *f.s.* Konvergenz ist gegeben sobald $\frac{1}{2}a^2 + \theta > 0$ - vgl. [Matsumoto/ Yor 2005a], S. 314.

$$Y_t - Y_s = \int_s^t \bar{E}_x \exp(-\theta x) dx = \exp(-\theta s) \bar{E}_s \bar{Y}_{t-s}$$

mit $\bar{Y}_r := \int_0^r \bar{E}_x \exp(-\theta x) dx$ und $\bar{E}_x := \exp(a(\bar{W}_{s+x} - \bar{W}_s) - \frac{1}{2}a^2 x)$. Hierbei sind \bar{E}_s und \bar{Y}_{t-s} stochastisch unabhängig. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}(|Y_t - Y_s|) = \exp(-\theta s) \mathbb{E}(\bar{E}_s) \mathbb{E}(\bar{Y}_{t-s}) = \exp(-\theta s) \frac{1 - \exp(-\theta(t-s))}{\theta}$$

$$\Rightarrow \limsup_{s \rightarrow \infty} \liminf_{t \geq s} \mathbb{E}(|Y_t - Y_s|) = 0 \text{ für } \theta > 0.$$

Falls $0 < a^2 < 2\theta$, so gilt konvergiert $Y_t \rightarrow Y_\infty$ (in L_2), denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2) &= \exp(-2\theta s) \mathbb{E}(\bar{E}_s^2) \mathbb{E}(\bar{Y}_{t-s}^2) \\ &= 2 \exp(-(2\theta - a^2)s) \int_0^{t-s} \int_0^y \mathbb{E}(\bar{E}_x \bar{E}_y) \exp(-\theta(x+y)) dx dy \\ &= 2 \exp(-(2\theta - a^2)s) \int_0^{t-s} \int_0^y \exp(a^2 x) \exp(-\theta(x+y)) dx dy \\ &= \begin{cases} 2 \exp(-(2\theta - a^2)s) \left(\frac{1 - \exp(-\theta(t-s))}{\theta(\theta - a^2)} - \frac{1 - \exp(-(2\theta - a^2)(t-s))}{(2\theta - a^2)(\theta - a^2)} \right) & \text{falls } a^2 \neq \theta \\ \frac{2 \exp(-\theta s)}{\theta^2} (1 - \exp(-\theta(t-s)))(1 + (t-s)\theta) & \text{falls } a^2 = \theta \end{cases} \end{aligned}$$

Das Doppelintegral ist für alle $t \geq s$ nach oben beschränkt; somit folgt für $a^2 < 2\theta$:

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \liminf_{t \geq s} \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2) = 0$$

Nach einem Ergebnis von Milevsky¹⁴ ist die Zufallsvariable Y_∞ invers-Gamma-verteilt mit Parameter $\alpha = 1 + \frac{2\theta}{a^2}$ und $\beta' = \frac{2}{a^2}$. Für die Dichtefunktion $f(Y_\infty, x)$ der Verteilung von Y_∞ gilt also

$$f(Y_\infty, x) = 1_{]0, \infty[}(x) (\beta' \Gamma(\alpha))^{-1} \exp\left(-\frac{\beta'}{x}\right) \left(\frac{\beta'}{x}\right)^{1+\alpha}.$$

¹⁴ Vgl. [Milevsky 1999], S. 150.

Nach (Gl.3-20) gilt für $a \neq 0$, $H_t := \int_0^t \frac{E_t}{E_s} \exp(-\theta(t-s)) ds$

$$\sigma(t) = \theta \hat{\sigma} H_t + (\theta + a \hat{\rho}_0) \exp(-\theta t) E_t, \hat{\rho}(t) = \frac{\sigma(t) - \hat{\sigma}}{a},$$

und für $a^2 < 2\theta$ konvergiert $\exp(-\theta t) E_t \rightarrow 0$ in L_2 .

Setzen wir $S(t) := \theta \hat{\sigma} Y_t + (\theta + a \hat{\rho}_0) \exp(-\theta t) \bar{E}_t$, $R(t) := \frac{S(t) - \hat{\sigma}}{a}$ so gilt:

$$S(t) \xrightarrow{L_2} \sigma_\infty := \theta \hat{\sigma} Y_\infty \text{ und } R(t) \xrightarrow{L_2} \hat{\rho}_\infty := \frac{\sigma_\infty - \hat{\sigma}}{a},$$

und für alle $t \geq 0$ sind $\sigma(t)$ und $S(t)$ bzw. $\hat{\rho}(t)$ und $R(t)$ identisch verteilt. σ_∞ ist invers-Gamma-verteilt mit den Parametern $\alpha = 1 + \frac{2\theta}{a^2}$ und $\beta := \theta \hat{\sigma} \beta' = \frac{2\theta \hat{\sigma}}{a^2}$.

Für die Dichtefunktion $f(\sigma_\infty, x)$ bzw. $f(\hat{\rho}_\infty, x)$ gilt dann:

$$f(\sigma_\infty, x) = 1_{]0, \infty[}(x) f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(x) \text{ und } f(\hat{\rho}_\infty, x) = 1_{|ax + \hat{\sigma}| > 0}(x) |a| f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(ax + \hat{\sigma}).$$

Wir betrachten nun die Grenzverteilungen von $\mu(t)$ und $\eta(t)$. Es gilt:

$$\mu(t) = \bar{\mu} + \frac{1}{2} r_{SR}^2 - \frac{1}{2} (\sigma(t) - r_{SR})^2 = A_1 - \frac{1}{2} (\sigma(t) - B_1)^2 \text{ und}$$

$$\eta(t) = \bar{\mu} + \frac{1}{2} \left(r_{SR} + \frac{\theta}{a} \right)^2 - \frac{\theta \hat{\sigma}}{a} - \frac{1}{2} \left(\sigma(t) - \left(r_{SR} + \frac{\theta}{a} \right) \right)^2 = A_2 - \frac{1}{2} (\sigma(t) - B_2)^2$$

Somit ist $\mu(t)$ bzw. $\eta(t)$ identisch verteilt wie

$$A_1 - \frac{1}{2} (S(t) - B_1)^2 \text{ bzw. } A_2 - \frac{1}{2} (S(t) - B_2)^2.$$

Da $S^2(t) \rightarrow \sigma_\infty$ (in L_2) konvergiert $\mu(t)$ in Verteilung gegen $\mu_\infty := A_1 - \frac{1}{2} (\sigma_\infty - B_1)^2$ und $\eta(t)$ gegen $\eta_\infty := A_2 - \frac{1}{2} (\sigma_\infty - B_2)^2$.

mit den Dichtefunktionen

$$f(\mu_\infty, x) = 1_{]-\infty, A_1[}(x) \frac{f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(B_1 + \sqrt{2(A_1 - x)}) + f_{i\Gamma(\alpha, \beta)}(B_1 - \sqrt{2(A_1 - x)})}{\sqrt{2(A_1 - x)}}.$$

bzw.

$$f(\eta_\infty, x) = 1_{]_{-\infty, A_2}[}(x) \frac{f_{\Gamma(\alpha, \beta)}(B_2 + \sqrt{2(A_2 - x)}) + f_{\Gamma(\alpha, \beta)}(B_2 - \sqrt{2(A_2 - x)})}{\sqrt{2(A_2 - x)}}.$$

Bemerkungen

1. Für $a = 0$ ist $\hat{\rho}(t)$ für alle $t \geq 0$ normalverteilt mit $\mathbb{E}(\hat{\rho}(t)) = \exp(-\theta t) \hat{\rho}_0$ und $\text{Var}(\hat{\rho}(t)) = \hat{\sigma}^2 \frac{1 - \exp(-2\theta t)}{2\theta}$. Somit konvergiert $\hat{\rho}(t)$ in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{2\theta}}$. Man kann sich davon überzeugen, dass $\lim_{a \rightarrow 0} f(\hat{\rho}_\infty, x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\hat{\sigma}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\theta x^2}{\hat{\sigma}^2}\right)$.

Entsprechend $\lim_{a \rightarrow 0} f(\eta_\infty, x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\hat{\sigma}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\theta(x - \hat{\mu})^2}{\hat{\sigma}^2}\right)$.

2. Wegen (Gl. 3-34) bzw. (Gl. 3-35) konvergieren die Prozesse (außer in trivialen Fällen) *nicht punktweise*.
3. Es gilt:

$$\mathbb{E}(\sigma_\infty) = \frac{\beta}{\alpha - 1} = \hat{\sigma}, \quad \mathbb{E}(\sigma_\infty^2) = \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} = \hat{\sigma}^2 \frac{2\theta}{2\theta - a^2}, \quad \text{Var}(\sigma_\infty) = \hat{\sigma}^2 \frac{a^2}{2\theta - a^2}$$

$$\mathbb{E}(\hat{\rho}_\infty) = 0, \quad \mathbb{E}(\hat{\rho}_\infty^2) = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2},$$

$$\mathbb{E}(\mu_\infty) = \mathbb{E}(\eta_\infty) = \hat{\mu} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \frac{a^2}{2\theta - a^2}$$

$$\text{Var}(\mu_\infty) = \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2} \left(\left(r_{SR} - \frac{\theta \hat{\sigma}}{\theta - a^2} \right)^2 + \frac{a^2 \theta^3 \hat{\sigma}^2}{(\theta - a^2)^2 (2\theta - a^2) (2\theta - 3a^2)} \right)$$

$$\text{Var}(\eta_\infty) = \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2} \left(\left(r_{SR} - \frac{\theta \hat{\sigma}}{\theta - a^2} + \frac{\theta}{a} \right)^2 + \frac{a^2 \theta^3 \hat{\sigma}^2}{(\theta - a^2)^2 (2\theta - a^2) (2\theta - 3a^2)} \right)$$

4. Da $\mu(t) = A_1 - \frac{1}{2}(\sigma(t) - B_1)^2$ gilt $\mu(t) \leq A_1 = \bar{\mu} + \frac{1}{2}r_{SR}^2$ für alle $t \geq 0$. Somit ist $f(\mu_\infty, x) = 0$ für $x \geq A_1$; allerdings gilt $\lim_{x \rightarrow A_1} f(\mu_\infty, x) = +\infty$.

Entsprechend gilt $f(\eta_\infty, x) = 0$ für $x \geq A_2$; allerdings gilt $\lim_{x \rightarrow A_2} f(\eta_\infty, x) = +\infty$.

5. Darstellung der Dichtefunktionen

a) σ_∞

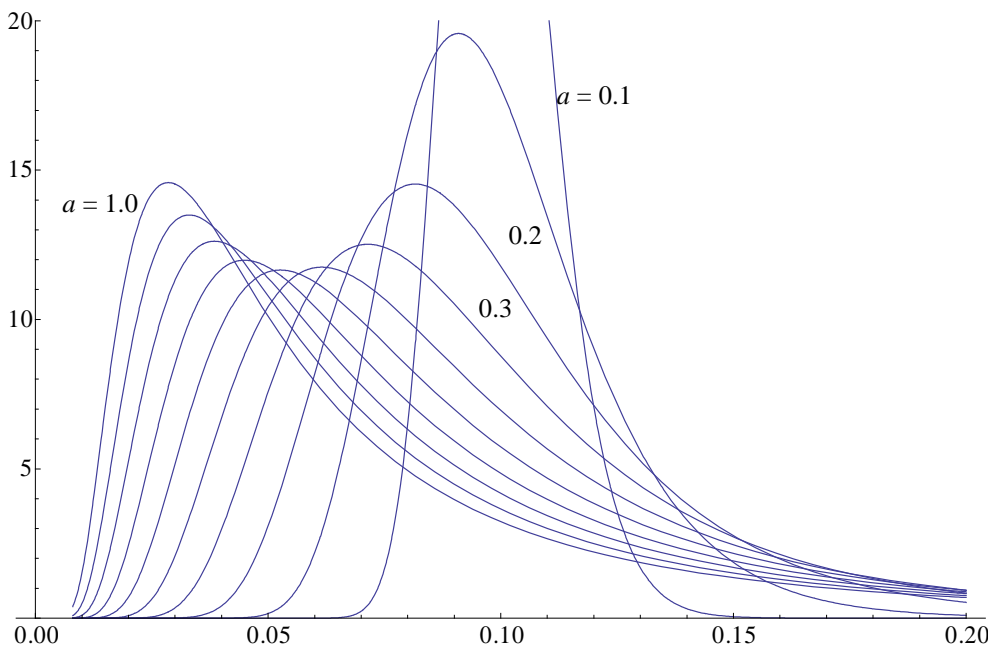


ABBILDUNG 3-2: Dichtefunktion der Verteilung von σ_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ und $a \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.

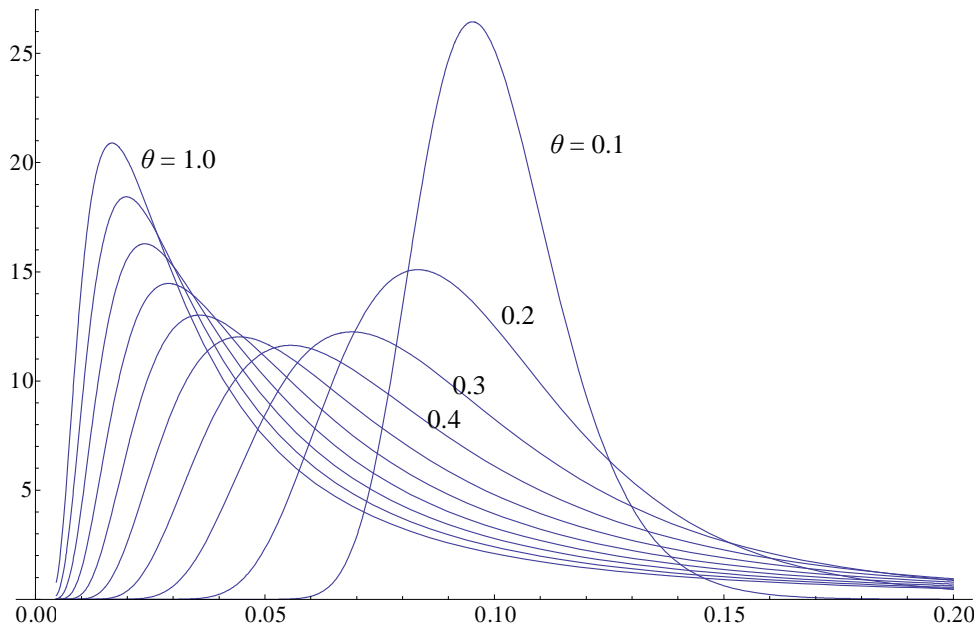


ABBILDUNG 3-3: Dichtefunktion der Verteilung von σ_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ und $\theta \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.

b) $\hat{\rho}_\infty$

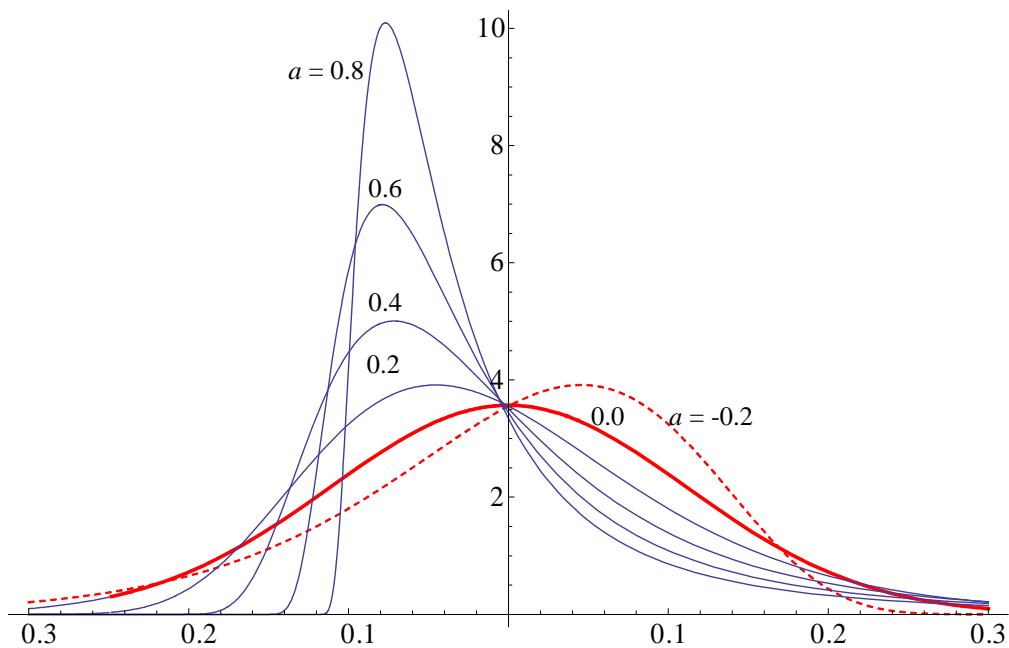


ABBILDUNG 3-4: Dichtefunktion der Verteilung von $\hat{\rho}_\infty$ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ und $a \in \{-0.2, 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

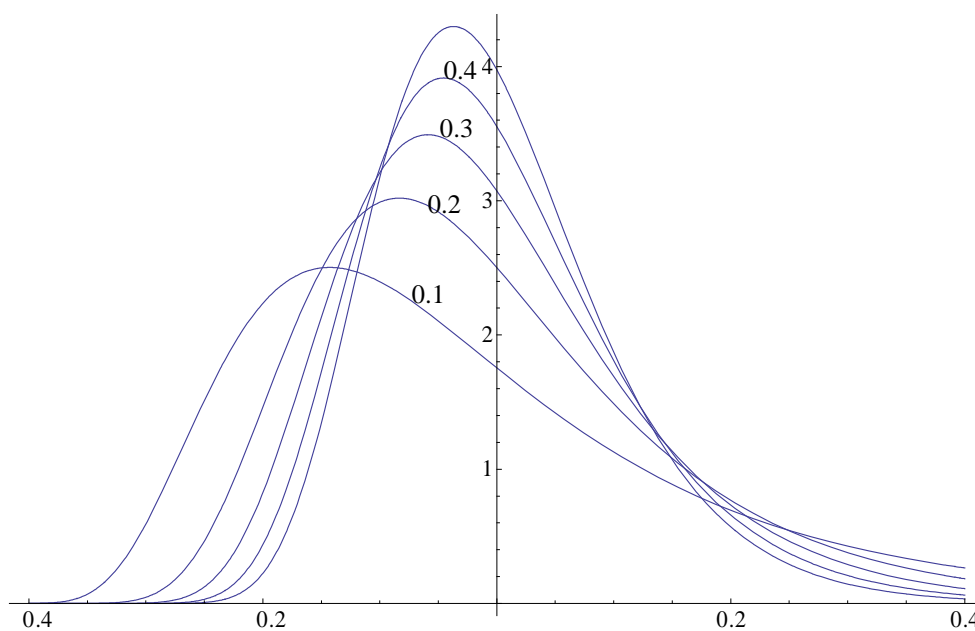


ABBILDUNG 3-5: Dichtefunktion der Verteilung von \hat{p}_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ und $\theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.

c) μ_∞

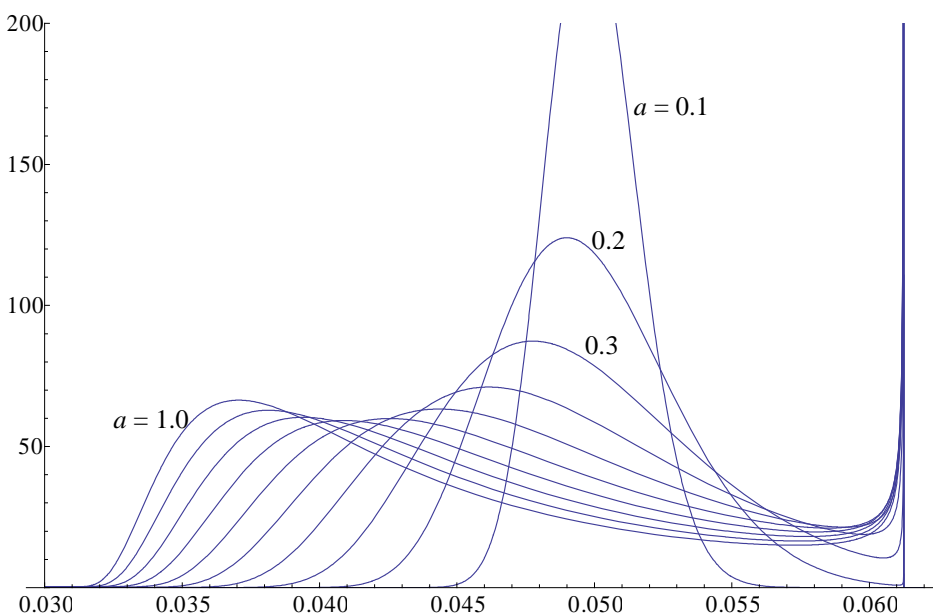


ABBILDUNG 3-6: Dichtefunktion der Verteilung von μ_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ und $a \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.

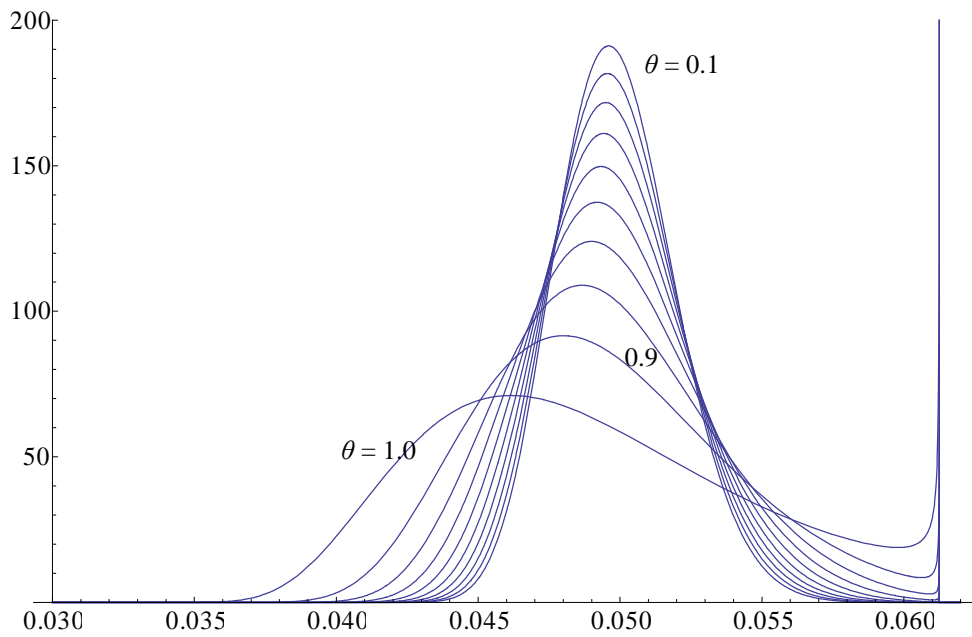


ABBILDUNG 3-7: Dichtefunktion der Verteilung von μ_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ und $\theta \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.

d) η_∞

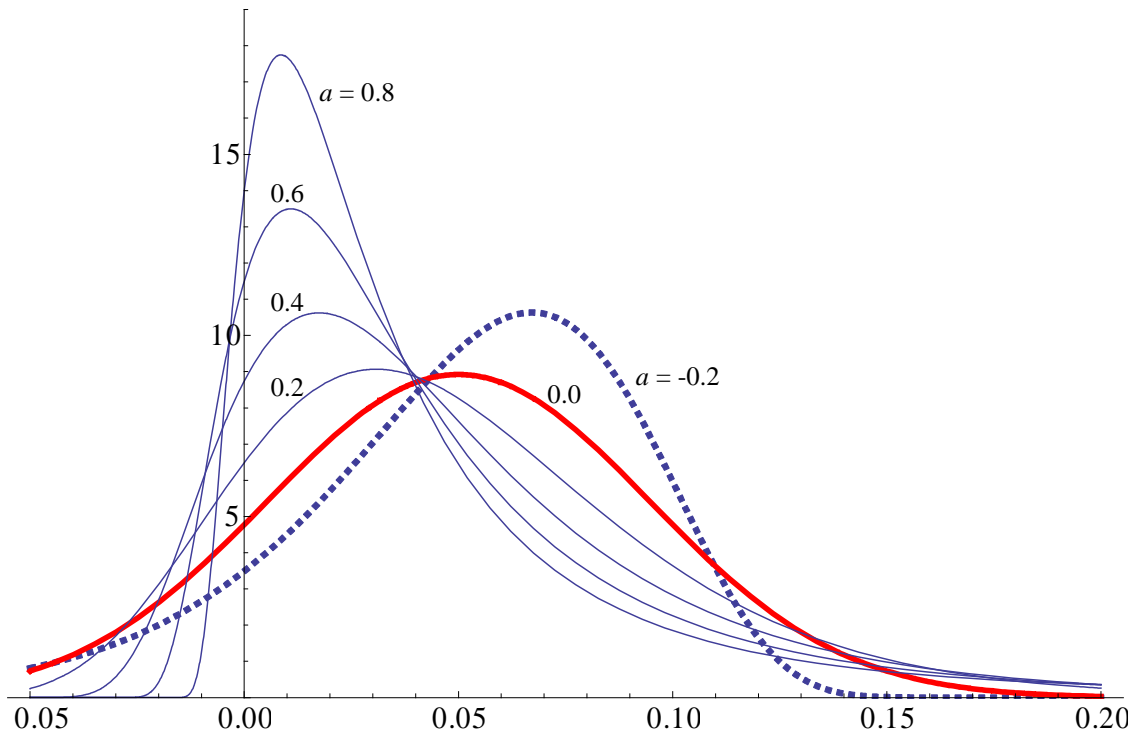


ABBILDUNG 3-8: Dichtefunktion der Verteilung von η_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ und $a \in \{-0.2, 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

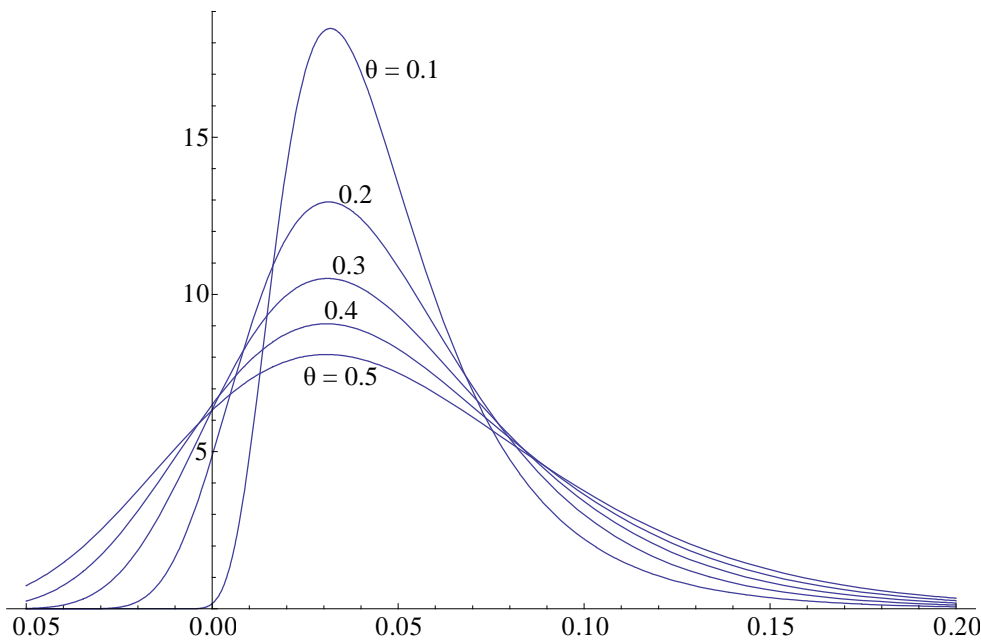


ABBILDUNG 3-9: Dichtefunktion der Verteilung von η_∞ für $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ und $\theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.

Bei der Darstellung der Verteilung von η_∞ ist zu beachten, dass für $a \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow A_2} f(\eta_\infty, x) = +\infty.$$

3.4 Risikoneutrale Bewertung im linearen Modell

Wenn ein Sparer zum Zeitpunkt $t=0$ den Betrag V_0 in den kollektiven Sparprozess investiert, so beträgt zum Zeitpunkt T sein Sparguthaben $V(T)$. Wir können $V(T)$ als *contingent claim* betrachten und den *fairen Preis* hierfür bestimmen. Da wir ein einfaches Black-Scholes-Modell zugrunde gelegt haben, errechnet sich der faire Preis $\pi(V(T))$ als Erwartungswert des diskontierten Sparprozesses unter der risikoneutralen Maß \mathbf{Q} – vgl. Abschnitt 2.2.

$$\pi(V(T)) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\exp(-\bar{\mu}T) V(T)) = \mathbb{E}(\exp(-\bar{\mu}T) V(T) L_T)$$

$$\text{mit } L_T := \exp\left(-\frac{1}{2} r_{SR}^2 T - r_{SR} W_T\right).$$

Für die folgende Proposition benötigen wir das Exponential-Martingal $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$

$$M_t := \exp \left(\int_{[0,t]} (\sigma(s) - r_{SR}) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma(s) - r_{SR})^2 ds \right) \text{ für } 0 \leq t \leq T .$$

Ferner sei \mathbf{Q}' das zu \mathbf{P} äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß, das durch $d\mathbf{Q}' = M_T d\mathbf{P}$ definiert wird. Dann gilt die folgende Proposition:

Proposition 3-9

Im linearen Modell gilt:

$$\pi(V(T)) = V_0 \exp(\hat{\rho}_0) \mathbb{E}_{\mathbf{Q}'}(\exp(-\hat{\rho}(T))), \quad (\text{Gl. 3-40})$$

Ist $a = 0$ (reine LM-Strategie), so gilt:

$$\pi(V(T)) = V_0 \exp \left\{ (1 - \exp(-\theta T)) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \frac{r_{SR} - \frac{1}{4} \hat{\sigma} (3 - \exp(-\theta T))}{\theta} \right) \right\} \quad (\text{Gl. 3-41})$$

Beweis

Wegen $\ln(V(T)) = \ln(P(T)) - \rho(T) = \ln\left(\frac{P(T)}{P_0}\right) + \ln(V_0) + \hat{\rho}_0 - \hat{\rho}(T)$ und

$$\ln(P(T)) = \ln(P_0) + \int_0^T \bar{\mu} + r_{SR} \sigma(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) dt + \int_{[0,T]} \sigma(t) dW_t$$

folgt

$$\begin{aligned} \ln(\exp(-\bar{\mu}T) V(T) L_T) &= -\rho(T) + \ln(P_0) - \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma(t) - r_{SR})^2 dt + \int_{[0,T]} (\sigma(t) - r_{SR}) dW_t \\ &= \ln(V_0) + \hat{\rho}_0 - \hat{\rho}(T) + \ln(M_T). \end{aligned}$$

$(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ist ein Martingal und nach dem Satz von Girsanov¹⁵ ist für $0 \leq t \leq T$

$$W'_t := W_t - \int_0^t \sigma(s) - r_{SR} ds$$

ein Standard-Wiener-Prozess bzgl. \mathbf{Q}' .

Somit erhalten wir

¹⁵ Vgl. [Karatzas/ Shreve] S. 191.

$$\begin{aligned}\pi(V(T)) &= \mathbb{E}\left(\exp(-\bar{\mu}T) V(T) L_T\right) = V_0 \exp(\hat{\rho}_0) \mathbb{E}\left(\exp(-\hat{\rho}(T)) M_T\right) \\ &= V_0 \exp(\hat{\rho}_0) \mathbb{E}_{Q'}\left(\exp(-\hat{\rho}(T))\right).\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Spezialfall $a = 0$:

Falls $a = 0$, so ist $\sigma(t) = \hat{\sigma}$ und $W'_t = W_t - t(\hat{\sigma} - r_{SR})$; aus (Gl. 3-4) folgt dann

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(T) &= \exp(-\theta T) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_{[0,T]} \exp(\theta t) dW_t \right) \\ &= \exp(-\theta T) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_{[0,T]} \exp(\theta t) dW'_t + \hat{\sigma} \int_0^T \exp(\theta t) (\hat{\sigma} - r_{SR}) ds \right) \\ &= \exp(-\theta T) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} (\hat{\sigma} - r_{SR}) \frac{\exp(\theta T) - 1}{\theta} + \hat{\sigma} \int_{[0,T]} \exp(\theta t) dW'_t \right) \\ &= \exp(-\theta T) \hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} (\hat{\sigma} - r_{SR}) \frac{1 - \exp(-\theta T)}{\theta} + \exp(-\theta T) \hat{\sigma} \int_{[0,T]} \exp(\theta t) dW'_t.\end{aligned}$$

$\hat{\rho}(T)$ ist also unter Q' normalverteilt mit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{Q'}(-\hat{\rho}(T)) &= -\exp(-\theta T) \hat{\rho}_0 - \hat{\sigma} (\hat{\sigma} - r_{SR}) \frac{1 - \exp(-\theta T)}{\theta} \\ \text{Var}_{Q'}(-\hat{\rho}(T)) &= \hat{\sigma}^2 \frac{1 - \exp(-2\theta T)}{2\theta}\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\pi(V(T)) &= V_0 \exp(\hat{\rho}_0) \exp\left(\mathbb{E}_{Q'}(-\hat{\rho}(T)) + \frac{1}{2} \text{Var}_{Q'}(-\hat{\rho}(T))\right) \\ &= V_0 \exp\left(\hat{\rho}_0 (1 - \exp(-\theta T)) - \hat{\sigma} (\hat{\sigma} - r_{SR}) \frac{1 - \exp(-\theta T)}{\theta} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \frac{1 - \exp(-2\theta T)}{2\theta}\right) \\ &= V_0 \exp\left\{(1 - \exp(-\theta T)) \left(\hat{\rho}_0 - \frac{\hat{\sigma} (\hat{\sigma} - r_{SR})}{\theta} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \frac{(1 + \exp(-\theta T))}{2\theta}\right)\right\} \\ &= V_0 \exp\left\{(1 - \exp(-\theta T)) \left(\hat{\rho}_0 - \hat{\sigma}^2 \frac{3 - \exp(-\theta T)}{4\theta} + \frac{r_{SR} \hat{\sigma}}{\theta}\right)\right\} \\ &= V_0 \exp\left\{(1 - \exp(-\theta T)) \left(\hat{\rho}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\theta} \left[r_{SR} - \frac{1}{4} \hat{\sigma} (3 - \exp(-\theta T))\right]\right)\right\}.\end{aligned}$$

In der *Abbildung 3-10* ist der Graph der Funktion $t \mapsto \frac{\pi(V(t))}{V_0} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(-\bar{\mu}t)V(t))}{V_0}$

dargestellt. $\frac{\pi(V(t))}{V_0} - 1$ sind die Hedgekosten für das Finanzprodukt mit der Auszahlungsfunktion $V(t)$. Wir können aber diesen Betrag auch als *Wert der Vertragstreue* interpretieren, denn durch den Beitritt in das Versichertenkollektiv kann der Sparer einen Zusatznutzen (= ersparte Kosten für das Hedging) realisieren.

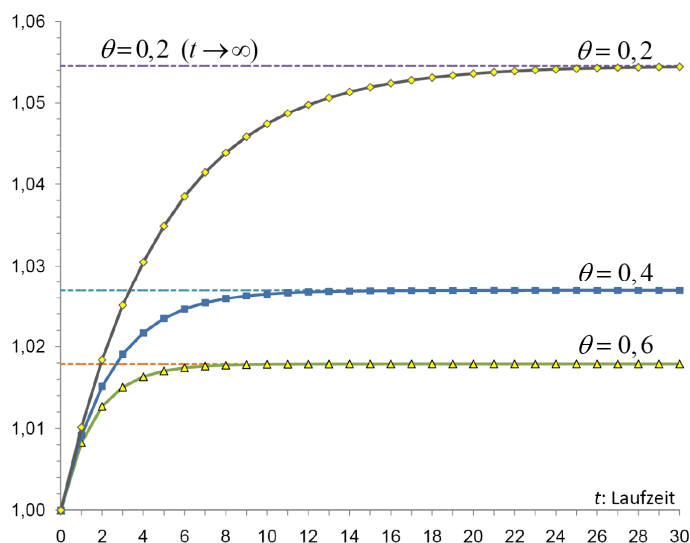


ABBILDUNG 3-10: Hedgekosten des Glättungseffekts; Darstellung des Graphen von $t \mapsto \pi(V(t))$ für $V_0 = 1$, $\hat{\rho}_0 = 0$, $\sigma_0 = 5\%$, und $\theta = 0,2 / 0,4 / 0,6$.

Der Zusatznutzen ist Null bei einer Haltedauer von $t = 0$ und strebt mit der Laufzeit des Vertrages asymptotisch einem Grenzwert zu. Ist allerdings $\hat{\rho}(0) + \frac{\hat{\sigma}}{\theta}(r_{SR} - \frac{3}{4}\hat{\sigma}) < 0$, so ist der Wert der Vertragstreue negativ, da der Sparer die Reserveauffüllung finanzieren muss.

Bemerkung:

Falls $a = 0$, so gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pi(V(T)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(-\bar{\mu}T)V(T)) = V_0 \exp\left(\hat{\rho}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\theta}(r_{SR} - \frac{3}{4}\hat{\sigma})\right) \quad (\text{Gl. 3-42})$$

Falls $a = 0$ und $\hat{\rho}_0 = 0$, so gilt

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \ln \left(\frac{\pi(V(T))}{V_0} \right) = \hat{\sigma} r_{SR} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \quad (\text{Gl. 3-43})$$

Dies bedeutet, dass zum Ende der Vertragslaufzeit der Sparer die volle Zusatzrendite aus dem Risiko $\hat{\sigma}$ der Kapitalanlagen risikofrei vereinnahmen kann, sofern die Reservesituation des Sparerkollektivs ausgeglichen ist.

Ist $a > 0$, so ist $\hat{\rho}(T)$ unter \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q}' nicht normalverteilt. Somit lässt sich auch nicht ohne weiteres eine einfache Formel für $\pi(V(T))$ herleiten. Die Darstellung in (Gl. 3-36) ermöglicht aber ein einfaches Monte-Carlo-Simulationsverfahren zur (näherungsweise) Berechnung von $\pi(V(T))$.

Es gilt (vgl. Gl. 3-3)

$$\begin{aligned} d\hat{\rho}(t) &= -\theta \hat{\rho}(t) dt + \sigma(t) dW_t \\ &= -\theta \hat{\rho}(t) dt + \sigma(t) dW'_t + \sigma(t) (\sigma(t) - r_{SR}) dt \\ &= -\theta \hat{\rho}(t) dt + (\hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t)) dW'_t + (\hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t)) (\hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t) - r_{SR}) dt \\ &= \left[\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma} r_{SR} + \hat{\rho}(t) (2a\hat{\sigma} - a r_{SR} - \theta) + a^2 \hat{\rho}^2(t) \right] dt + (\hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t)) dW'_t \end{aligned}$$

Somit erfüllt $\hat{\rho}(t)$ bzgl. W'_t die (nichtlineare) SDG

$$d\hat{\rho}(t) = (b_1 + b_2 \hat{\rho}(t) + a^2 \hat{\rho}^2(t)) dt + (\hat{\sigma} + a \hat{\rho}(t)) dW'_t \quad (\text{Gl. 3-44})$$

mit $b_1 := \hat{\sigma}(\hat{\sigma} - r_{SR})$ und $b_2 := a(2\hat{\sigma} - r_{SR}) - \theta$.

Da wir im allgemeinen linearen Modell mit $a > 0$ keine explizite Formel für den fairen Preis $t \mapsto \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}(\exp(-\bar{\mu}t)V(t))$ zur Verfügung haben, wollen wir zumindest mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen die Werte näherungsweise bestimmen.

Aus der SDG leitet sich in naheliegender Weise ein diskretes Verfahren zur Simulation von $\pi(V(T)) = V_0 \exp(\hat{\rho}_0) \mathbb{E}_{\mathbf{Q}'}(\exp(-\hat{\rho}(T)))$ ab. Wir untersuchen den Einfluss den Anpassungsparameters a auf den Wert von $\pi(V(T))$.

Für $r_{SR} = 0,25$; $\hat{\rho}_0 = 0$; $V_0 = 1$; $T = 10$; $\hat{\sigma} = 0,05$ und $\theta = 0,2 / 0,4 / 0,6$ ergeben sich bei jeweils 10.000 Simulation mit einer Schrittweite von $\Delta = \frac{T}{1000}$ folgende Werte:

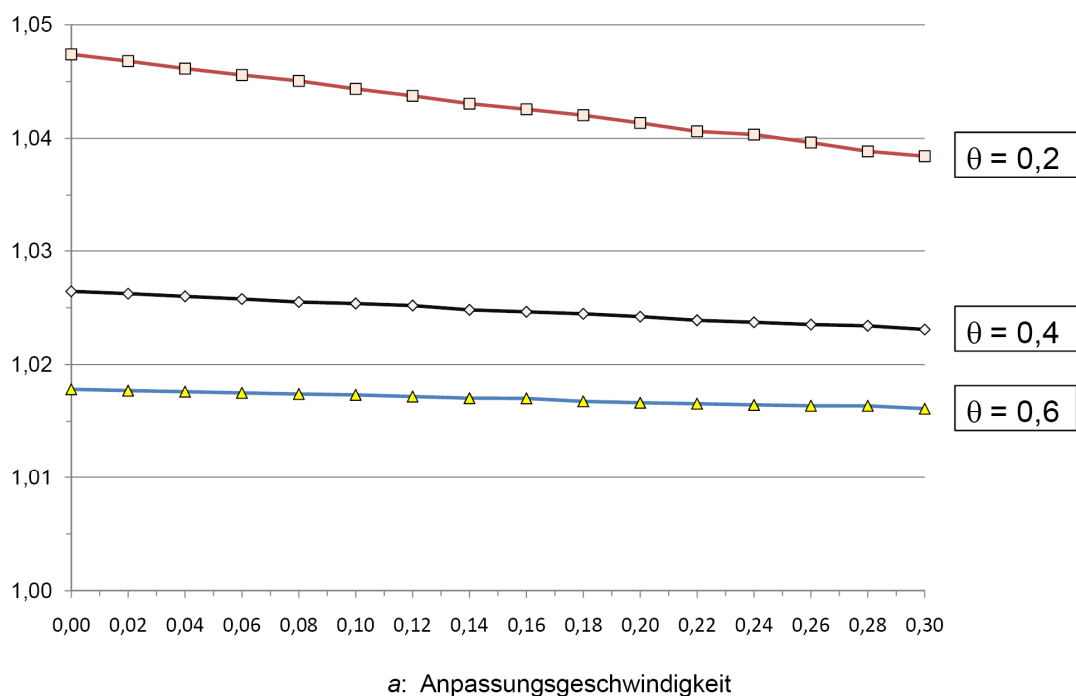


ABBILDUNG 3-11: Hedgekosten des Glättungseffekts; Darstellung des Graphen von $a \mapsto \mathbb{E}_Q(\exp(-\bar{\mu}t)V(t))$ für $t = 10, V_0 = 1, \hat{\rho}_0 = 0, \hat{\sigma} = 5\%$, $\theta = 0,2 / 0,4 / 0,6$

Für $a = 0$ könnte wir die Näherungswerte aus der Simulation mit den exakten Werten unmittelbar vergleichen:

	Näherung	exakter Wert	relativer Fehler
Theta = 0,2	1,04740219	1,04738963	1,20E-05
Theta = 0,4	1,02644852	1,02644778	7,22E-07
Theta = 0,6	1,01782464	1,01782400	6,33E-07

Der vernachlässigbare relative Fehler für $a = 0$ ist allerdings keine Gewähr für die Güte der Approximationen für $a > 0$! Aufgrund des quadratischen Terms (für $a > 0$) in der SDG (Gl. 3-40) können sich nämlich auch bei kleinen Schrittweiten Δ instabile Simulationen ergeben.¹⁶

¹⁶ Führt man für die obige Fallkonstellationen die Simulationen mit einer Schrittweite von 1/1000 durch, so ergeben sich keine wesentlich anderen Werte. Bei den Simulationsrechnungen wurden varianzminimierende Techniken verwendet (vgl. [Seydel] S.99 ff.).

3.5 Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit

Ruinwahrscheinlichkeit

Wir wollen von *Ruin* sprechen, wenn $R_t = P_t - V_t < 0 \Leftrightarrow \rho(t) < 0 \Leftrightarrow \hat{\rho}(t) < -\rho_{Ziel}$.
 Ruin bedeutet also, dass bei sofortiger Liquidation das vorhandene Vermögen nicht ausreicht, um alle individuellen Ansprüche zu befriedigen. Ruin in diesem Sinne bedeutet also nicht das Ende des kollektiven Sparprozesses; wegen (Gl. 3-5) wird lediglich die Deklaration herabgesetzt - ggf. kommt es zu einer negativen Deklaration – d.h. die Versichertenansprüche werden reduziert.

Wir wollen von einem „*Beinahe-Ruin*“ sprechen, wenn $\rho(t) < \rho_{min}$, d.h. $\hat{\rho}(t) < \rho_{min} - \rho_{Ziel}$.

Wir betrachten zunächst den Fall $a=0$, d.h. $\sigma(t) = \hat{\sigma}$ für alle $t \in [0, T]$. Dann haben wir für den Reserveprozess folgende Darstellung (vgl. Proposition 3-4):

$$\hat{\rho}_t = \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} M_t \right) \text{ mit } M_t := \int_{[0,t]} \exp(\theta s) dW_s ;$$

das Martingal (M_t) hat die quadratische Variation

$$[M]_t = \int_0^t \exp(2\theta s) ds = \frac{\exp(2\theta t) - 1}{2\theta}.$$

Wir definieren zwei Kenngrößen, nämlich

$$c_0 := \frac{\hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} = \frac{\rho_0 - \rho_{Ziel}}{\hat{\sigma}} : \text{ relativer Reserveüberschuss zu Beginn}$$

$$b := \frac{\rho_{Ziel} - \rho_{min}}{\hat{\sigma}} : \text{ strategischen Reservepuffer .}$$

Proposition 3-10

Sei $a = 0$ und $T > 0$, dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit im Zeitraum $[0, T]$:

$$\mathbf{P} \left(\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min} \right) = 1 - \mathbf{P} \left(\bar{W}_s \leq g(s) \text{ für alle } s \in [0, S_T] \right), \quad (\text{Gl. 3-45})$$

hierbei ist $g(s) := c_0 + b\sqrt{1 + 2\theta s}$, $S_T := \frac{\exp(2\theta T) - 1}{2\theta}$ und (\bar{W}_s) ist ein Standard-Wiener-Prozess.

Beweis

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{\min}\right) &= \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \hat{\rho}(t) < -(\rho_{\text{Ziel}} - \rho_{\min})\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\hat{\rho}(t) \geq -(\rho_{\text{Ziel}} - \rho_{\min}) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\exp(-\theta t)(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} M_t) \geq -(\rho_{\text{Ziel}} - \rho_{\min}) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(M_t \geq -(c_0 + b \exp(\theta t)) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \end{aligned}$$

Durch eine Änderung der „Ablaufgeschwindigkeit“ kann wird das Martingal (M_t) zu einem Standard-Wiener-Prozess:¹⁷ Setzt man $t(s) := \frac{\ln(1 + 2\theta s)}{2\theta}$, so gilt $[M]_{t(s)} = s$ und $\bar{W}_s := M_{t(s)}$ ist ein Standard-Wiener-Prozess bzgl. der Filtration $G_s := F_{t(s)}$.

Hieraus ergibt sich für $S_T = t^{-1}(T) = \frac{\exp(2\theta T) - 1}{2\theta}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{\min}\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(M_t \geq -(c_0 + b \exp(\theta t)) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(M_{t(s)} \geq -(c_0 + b \exp(\theta t(s))) \text{ für alle } s \in [0, S_T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bar{W}_s \geq -g(s) \text{ für alle } s \in [0, S_T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bar{W}_s \leq g(s) \text{ für alle } s \in [0, S_T]\right) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass \bar{W}_s und $-\bar{W}_s$ identisch verteilt sind. Wir können annehmen, dass $b + c_0 \geq 0$, da andernfalls $\rho_0 < \rho_{\min}$.

¹⁷ Time-Change for Martingales- Theorem, vgl. [Karatzas/ Shreve] S. 174

Die Ruinwahrscheinlichkeit hängt also (bei gegebenem Zeithorizont T und Anpassungsgeschwindigkeit θ) vom *relativen Reserveüberschuss zu Beginn* c_0 und dem *strategischen Reservepuffer* b ab.

In der Abbildung 3-12 sind beispielhaft zwei Standard-Wiener-Prozesse dargestellt, mit der Barrierefunktion $g(s) = b\sqrt{1 + 2\theta s} + c_0$ mit $\theta = 0.5, b = 2$ und $c_0 = 0$. Dem Intervall $s \in [0; 2]$ entspricht das Zeitintervall $t \in [0; \ln(3) \approx 1,0986]$. Um den Ruinfall in der Abbildung illustrieren zu können, wurde ein relativ niedriger Wert für b gewählt.

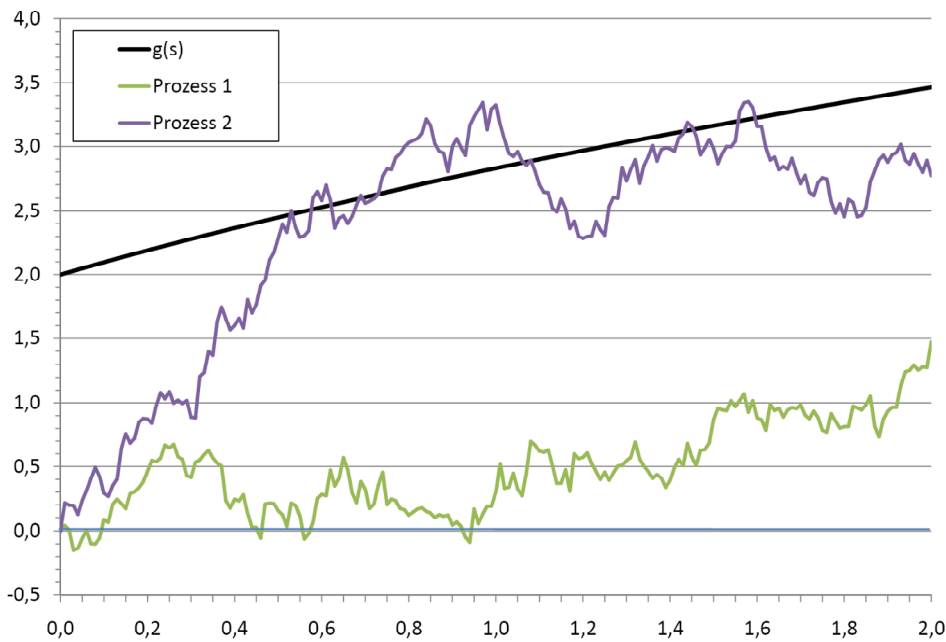


ABBILDUNG 3-12: Zwei Pfade eines Standard-Wiener-Prozesses mit Barriere $g(s)$

Numerische Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit

Proposition 3-10 erlaubt es nun, die Ruinwahrscheinlichkeit zumindest näherungsweise zu bestimmen. Statt der speziellen Funktion $g(s) = b\sqrt{1 + 2\theta s} + c_0$ können wir das Problem etwas allgemeiner darstellen.

Sei $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine 2-mal differenzierbare Funktion mit

$$g(0) > 0, g'(x) > 0 \text{ und } g''(x) < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Für $s \geq 0$ sei

$$g_s(t) := g(s) + g'(s)(t - s) = g(s) - s g'(s) + t g'(s)$$

die Tangente an die Funktion $x \mapsto g(x)$ an der Stelle s .

In Abhängigkeit von der Funktion $g(x)$ definieren wir Stoppzeiten:

$$\tau = \inf \{t : W(t) = g(t)\} \text{ und für } s \geq 0 : \tau_s = \inf \{t : W(t) = g_s(t)\} .$$

τ ist der Zeitpunkt, in dem der Wiener-Prozess erstmalig den Graphen $x \mapsto g(x)$ trifft und τ_s ist der Zeitpunkt, in dem der Wiener-Prozess erstmalig den Graphen der Tangenten $x \mapsto g_s(x)$ trifft; vgl. Abb. 3-13.

Lemma 3-11

Ist $t \mapsto c + bt$ eine Gerade und ist $(W_z(t))_{t \geq 0} = (z + W(t))_{t \geq 0}$ ein Wiener-Prozess, der von $z \in \mathbb{R}$ aus startet, so gilt für die Verteilung der Stoppzeit

$$\tau^{(z)} := \inf \{t : W_z(t) = c + bt\} :$$

$$\mathbf{P}(\tau^{(z)} \in dy) = \frac{|c - z|}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c - z + by)^2}{2y}\right) dy . \tag{Gl. 3-46}$$

Beweis (vgl. [Karatzas/ Shreve] S. 196f.)

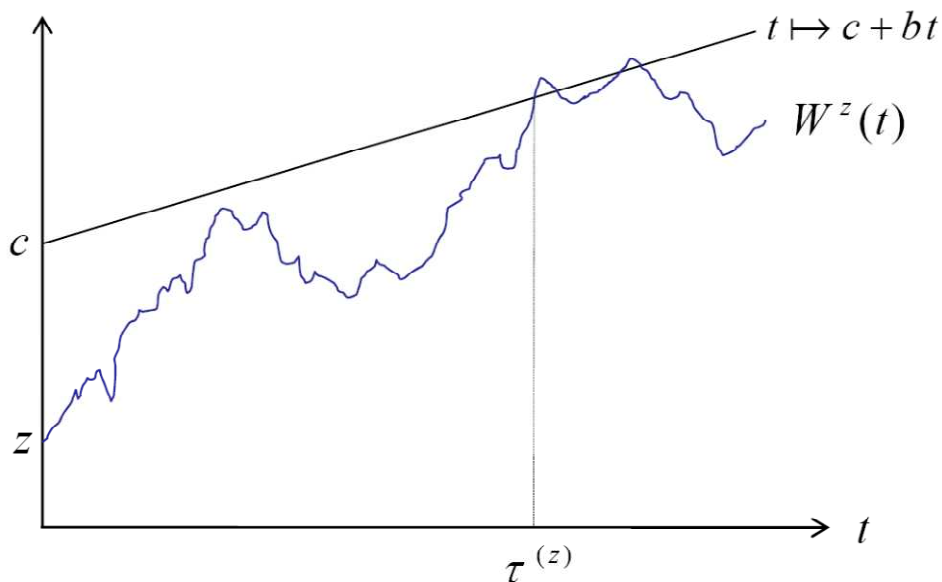


ABBILDUNG 3-13: Illustration zum Lemma 3-10

Bemerkungen

$$1. \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|c-z|}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c-z+by)^2}{2y}\right) = 0.$$

$$2. \quad \mathbf{P}\left(W^{(z)}(t) \leq c+bt \text{ für alle } t \in [0, S]\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\tau^{(z)} \leq S\right) \\ = 1 - \frac{|c-z|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^S x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c-z+bx)^2}{2x}\right) dx \quad (\text{Gl. 3-47})$$

3. Wendet man das obige Lemma für $c = g(s) - s g'(s)$, $b = g'(s)$ und $z = 0$ an, so erhält man:

$$\mathbf{P}(\tau_s \in dy) = \frac{g(s) - s g'(s)}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(g(s) - g'(s)(s-y))^2}{2y}\right) dy \quad (\text{Gl. 3-48})$$

Zur Vorbereitung auf die nächste Propostion sei $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine 2-mal differenzierbare Funktion mit

$$g(0) > 0, g'(x) > 0 \text{ und } g''(x) < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_+$$

und für $s \geq 0$ sei $t \mapsto g_s(t) := g(s) + g'(s)(t-s)$ die Tangente an den Graph der Funktion $x \mapsto g(x)$ an der Stelle s . Ferner setzen wir $c_s(x) := g(x) - g'(s)x$.

$c_s(x)$ können wir geometrisch deuten als den den Schnittpunkt mit der Ordinaten-Achse der Geraden, die parallel zur Tangente verläuft und durch den Punkt $(x, g(x))$ verläuft. Insbesondere gilt $g_s(t) = c_s(s) + g'(s)t$.

Wie oben bezeichne $\tau = \inf \{t : W(t) = g(t)\}$ den Zeitpunkt des erstens Treffens des Wiener-Prozesses auf die Funktion $g(t)$. Schließlich bezeichne $\psi(u)$ die Dichte der Verteilung der der Stoppzeit τ , also

$$\mathbf{P}(\tau \leq x) = \int_0^x \mathbf{P}(\tau \in du) = \int_0^x \psi(u) du.$$

Eine explizite Formel für die Dichte können wir nicht herleiten, jedoch eine charakterisierende Integralgleichung.

Proposition 3-12

Definiere die Funktionen $F_s : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}$ und $G_s : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < y \leq s\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_s(y) := y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) + y g'(s))^2}{2y}\right) = y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(g(s) - g'(s)(s-y))^2}{2y}\right)$$

und

$$\begin{aligned} G_s(x, y) &:= \frac{c_s(s) - c_s(x)}{c_s(s)} (y-x)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)(y-x))^2}{2(y-x)}\right) \\ &= \frac{g_s(x) - g(x)}{g(s) - g'(s)s} (y-x)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(g_s(x) - g(x) + g'(s)(y-x))^2}{2(y-x)}\right). \end{aligned}$$

Dann erfüllt $\psi(x)$ die folgende *Volterasche Integralgleichung erster Art* mit Kern $G_s(x, y)$:

$$F_s(y) = \int_0^y \psi(x) G_s(x, y) dx \quad \text{für alle } 0 < y \leq s \quad (\text{Gl. 3-49})$$

Beweis von Proposition 3.12

Wie oben definieren wir die Stoppzeiten

$$\tau = \inf \{t : W(t) = g(t)\} \quad \text{und für } \tau_s = \inf \{t : W(t) = g_s(t)\} .$$

Da für $0 < y \leq s$ $g(y) \leq g_s(y)$, folgt $\{\tau_s \leq y\} = \{\tau_s \leq y\} \cap \{\tau \leq y\}$ und somit

$$\mathbf{P}(\tau_s \leq y) = \mathbf{P}(\tau_s \leq y, \tau \leq y) = \int_0^y \mathbf{P}(\tau_s \leq y \mid \tau = x) \psi(x) dx .$$

Bezeichne $W_{g(x)}(t)$ einen in $g(x)$ startenden Wiener-Prozess; wir betrachten die Stoppzeit $\hat{\tau} := \inf \{t : W^{g(x)}(t) = g_s(x+t)\}$; dies ist der Zeitpunkt, zu dem ein Wiener-Prozess, der im Punkt $g(x)$ startet, die Gerade $t \mapsto g_s(x+t)$ trifft – vgl. Abbildung 3-14.

Aufgrund der starken Markov-Eigenschaft des Wiener-Prozesses gilt für $0 < x \leq y \leq s$

$$\mathbf{P}(\tau_s \leq y \mid \tau = x) = \mathbf{P}(\hat{\tau} \leq y - x),$$

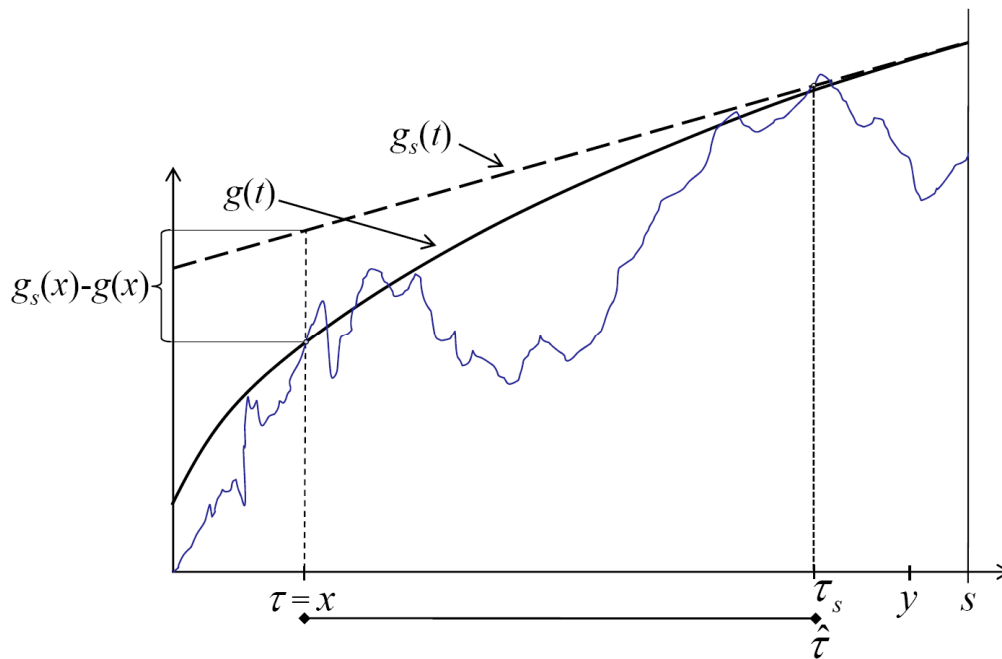


ABBILDUNG 3-14: Die Stoppzeiten τ , τ_s und $\hat{\tau}$.

Für $c_s(x) = g(x) - g'(s)x$ folgt mit Hilfe von Lemma 3-10:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_s \leq y \mid \tau = x) &= \mathbf{P}(\hat{\tau} \leq y - x) \\ &= \frac{g_s(x) - g(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y-x} u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(g_s(x) - g(x) + g'(s)u)^2}{2u}\right) du \\ &= \frac{c_s(s) - c_s(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y-x} u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)u)^2}{2u}\right) du \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau_s \leq y) &= \mathbf{P}(\tau_s \leq y, \tau \leq y) = \int_0^y \mathbf{P}(\tau_s \leq y \mid \tau = x) \psi(x) dx \\ &= \int_0^y \psi(x) \frac{c_s(s) - c_s(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y-x} u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)u)^2}{2u}\right) du dx \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\mathbf{P}(\tau_s \leq y) = \frac{c_s(s)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) + u g'(s))^2}{2u}\right) du.$$

Somit erfüllt die Funktion $\psi(x)$ für alle $0 \leq y \leq s$ die Integralgleichung:

$$\begin{aligned} \int_0^y \psi(x) \frac{c_s(s) - c_s(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y-x} u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)u)^2}{2u}\right) du dx \\ = \frac{c_s(s)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) + u g'(s))^2}{2u}\right) du \end{aligned}$$

Differenziert man beide Seiten nach y , so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left\{ \int_0^y \psi(x) \frac{c_s(s) - c_s(x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{y-x} v^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)v)^2}{2v}\right) dv dx \right\} \\ = \int_0^y \psi(x) \frac{c_s(s) - c_s(x)}{\sqrt{2\pi}} (y-x)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)(y-x))^2}{2(y-x)}\right) dx \\ + \psi(y) \frac{c_s(s) - c_s(y)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(y) + g'(s)h)^2}{2h}\right) \\ = \int_0^y \psi(x) \frac{c_s(s) - c_s(x)}{\sqrt{2\pi}} (y-x)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) - c_s(x) + g'(s)(y-x))^2}{2(y-x)}\right) dx \end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{c_s(s)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y u^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) + u g'(s))^2}{2u}\right) du \right\} = \frac{c_s(s)}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_s(s) + y g'(s))^2}{2y}\right)$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Bemerkung:

1. Da $\lim_{y \downarrow 0} F_s(y) = \lim_{x \uparrow y} G_s(x, y) = 0$ lässt sich die obige Volterrasche Integralgleichung erster Art nicht durch weiteres Differenzieren in eine Integralgleichung zweiter Art überführen.¹⁸
2. Man beachte, dass obige Darstellung nicht unmittelbar auf eine lineare Funktion $g(x) = c + b x$ angewendet werden kann, da in diesem Falle $g_s(x) - g(x) = 0$ und somit $G_s(x, y) \equiv 0$. Approximiert man die lineare Funktion $g(x) = c + b x$ durch eine Folge von Funktionen $g^{(n)}(x)$ die sämtlich die Voraussetzungen von Proposition 3-12 erfüllen, so konvergiert die linke Seite der Gleichung (Gl. 3-45) gegen

$$y^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c - b(s - y))^2}{2y}\right)$$

und die rechte Seite der Gleichung (Gl. 3-45) konvergiert gegen $\frac{\sqrt{2\pi}}{c} \psi(y)$. Somit kann man aus Proposition 3-4 als Spezialfall einer linearen Funktion $g(x) = c + b x$ ableiten.

Ist $g(x) = c + b x$ eine Gerade, so lässt sich bei gegebenem Betrachtungshorizont S die Ruinwahrscheinlichkeit explizit angeben. Wir wollen dies nutzen, um für die gesuchte Ruinwahrscheinlichkeit leicht zu berechnende untere und obere Schranken zu bestimmen.

Hierzu betrachten wir für einen festen Betrachtungshorizont $[0, S]$ die Sekante $h(s)$ der konvexen Funktion $g(s)$, die die Punkte $g(0)$ und $g(S)$ durch eine Gerade verbindet:

$$h(s) = \bar{c} + \bar{b} s \quad \text{mit } \bar{c} := g(0) \quad \text{und} \quad \bar{b} := \frac{g(S) - g(0)}{S}.$$

Für ein $z \in [0, S]$ betrachten wir ferner die Tangente $g_z(s)$ an den Graphen der Funktion $s \mapsto g(s)$ an der Stelle z :

$$g_z(s) = c_z + b_z s \quad \text{mit } c_z := g(z) - g'(z)z \quad \text{und} \quad b_z := g'(z).$$

Wir definieren die Stoppzeiten

$$\tau := \inf \{t : W(t) \geq g(t)\}, \quad \hat{\tau} := \inf \{t : W(t) \geq h(t)\} \quad \text{und} \quad \tau_z := \inf \{t : W(t) \geq g_z(t)\},$$

¹⁸ [Bronstein 2006] S. 605ff.

dann gilt $\hat{\tau} \leq \tau \leq \tau_z$, denn $h(s) \leq g(s) \leq g_z(s)$ für alle $s, z \in [0, S]$.

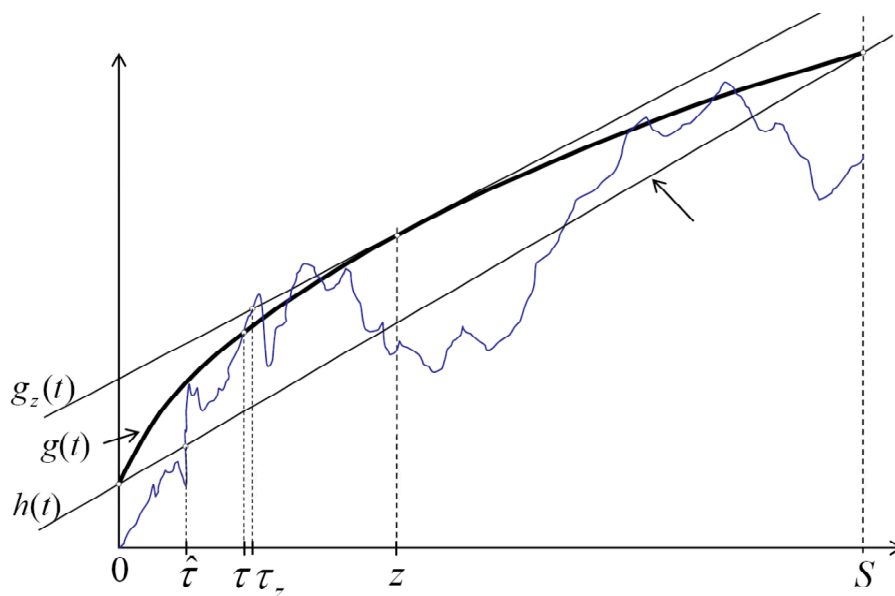


ABBILDUNG 3-15: Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit

Somit gilt für alle $z \in [0, S]$ $\mathbf{P}(\tau_z \leq S) \leq \mathbf{P}(\tau \leq S) \leq \mathbf{P}(\hat{\tau} \leq S)$ und mit Lemma 3-11 ergibt sich schließlich

$$\int_0^S \frac{c_z}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(c_z + b_z x)^2}{2x}\right) dx \leq \int_0^S \psi(x) dx \leq \int_0^S \frac{\bar{c}}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(\bar{c} + \bar{b} x)^2}{2x}\right) dx$$

(Gl. 3-50)

Bemerkung: Es gilt nicht $\mathbf{P}(\tau \leq S) = \sup\{\mathbf{P}(\tau_z \leq S) : 0 \leq z \leq S\}$!

Wir berechnen die Schranken für $g(s) = c_0 + b\sqrt{1 + 2\theta s}$ und $S = S_T = \frac{\exp(2\theta T) - 1}{2\theta}$

mit $c_0 = \frac{\rho_0 - \rho_{Ziel}}{\hat{\sigma}}$ (relative Reserveüberdeckung zu Beginn) und $b = \frac{\rho_{Ziel} - \rho_{min}}{\hat{\sigma}}$

(strategische Reservepuffer) – vgl. Proposition 3-10.

Es gilt dann $\bar{c} = c_0 + b$, $\bar{b} = \frac{g(S_T) - g(0)}{S_T} = 2\theta b \frac{\exp(\theta T) - 1}{\exp(2\theta T) - 1}$ und für $z \in [0, S_T]$

$$c_z = c_0 + b \frac{1 + \theta z}{\sqrt{1 + 2\theta z}} \text{ und } b_z = \frac{\theta b}{\sqrt{1 + 2\theta z}} .$$

Die *Abbildung 3-16* zeigt die jeweils obere und untere Schranke für die 1-jährige Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von b für verschiedene Anpassungsgeschwindigkeiten θ . Hierbei ist zu beachten, dass für $T = 1 \Rightarrow S_T = \frac{\exp(2\theta) - 1}{2\theta}$.

Für $\theta = 0$ fallen die obere und die untere Schranke zusammen; für $\theta = 0,2$ sind die obere und die untere Schranke in der *Abbildung* kaum zu unterscheiden. Soll beispielsweise die 1-jährige Ruinwahrscheinlichkeit nicht den Wert von 0,5% übersteigen, so muss der Zielreserverpuffer $\rho_{Ziel} - \rho_{min}$ mindestens das 2,6-fache der strategischen Risikoexposition der Kapitalanlage $\hat{\sigma}$ betragen.

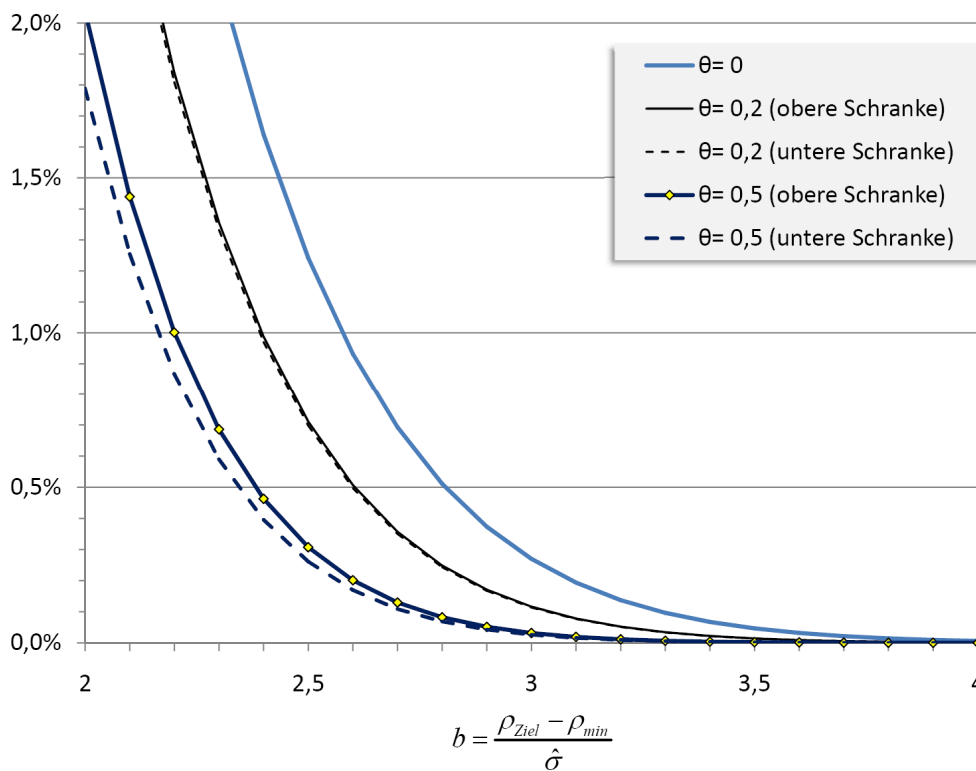


ABBILDUNG 3-16: Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von b .

Der allgemeine Fall $a \neq 0$

Falls $a \neq 0$, so gilt nach Proposition 3-4

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t)(\hat{\sigma}U_t + \hat{\rho}_0)$$

mit $U_t := \int_{[0,t]} X_s dW_s$, $X_t = E_t \left(1 + \frac{a\hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} + \theta \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \right)$ und $E_t = \exp(aW_t - \frac{1}{2}a^2 t)$.

(U_t) ist ein Martingal mit quadratischer Variation $[U]_t = \int_0^t X_s^2 ds$.

Wir setzen wie oben $c_0 := \frac{\hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}} = \frac{\rho_0 - \rho_{Ziel}}{\hat{\sigma}}$ und $b := \frac{\rho_{Ziel} - \rho_{min}}{\hat{\sigma}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min}\right) &= \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \hat{\rho}(t) < -(\rho_{Ziel} - \rho_{min})\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\hat{\rho}(t) \geq -(\rho_{Ziel} - \rho_{min}) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\exp(-\theta t)(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma}U_t) \geq -(\rho_{Ziel} - \rho_{min}) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(U_t \geq -(c_0 + b \exp(\theta t)) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \end{aligned}$$

Durch eine Änderung der „Ablaufgeschwindigkeit“ kann wird das Martingal (U_t) zu einem Standard-Wiener-Prozess:¹⁹ Für die Stoppzeit $\tau(s) := \inf\{t : [U]_t > s\}$, gilt dann $[U]_{\tau(s)} = s$ und $\bar{W}_s := U_{\tau(s)}$ ist ein Standard-Wiener-Prozess bzgl. der Filtration $\mathbf{G}_s := \mathbf{F}_{t(s)}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min}\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(U_t \geq -(c_0 + b \exp(\theta t)) \text{ für alle } t \in [0, T]\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\bar{W}_s \geq -(c_0 + b \exp(\theta \tau(s))) \text{ für alle } s \in [0, S_T]\right), \end{aligned}$$

hierbei ist $S_T = [U]_T$.

Die Ruinwahrscheinlichkeit ist also eine Funktion von (a, θ, T, b, c_0) und ist insbesondere unabhängig von den Kapitalmarktparametern $(\bar{\mu}, \mu_M, \sigma_M)$.

Ist speziell $\hat{\rho}_0 = 0$, so gilt $c_0 = 0$ und

$$\mathbf{P}\left(\min_{0 \leq t \leq T} \rho(t) < \rho_{min}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bar{W}_s \geq -b \exp(\theta \tau(s)) \text{ für alle } s \in [0, S_T]\right).$$

¹⁹ Time-Change for Martingales- Theorem, vgl. [Karatzas/ Shreve] S. 174

Die folgende *Abbildung 3-17* zeigt den Effekt der Anpassungsgeschwindigkeit a auf die Ruinwahrscheinlichkeit. Bei einem vorgegebenen Verhältnis von $b = \frac{\rho_{Ziel} - \rho_{min}}{\hat{\sigma}} = 1,5$ beträgt die 1-jährige Ruinwahrscheinlichkeit rund 11%, wenn die Risikoexposition nicht angepasst wird (d.h. $a = 0$); bei einer Anpassungsgeschwindigkeit von $a = 0,5$ beobachtet man eine Ruinwahrscheinlichkeit von 0,04% (4 Ruine bei 10.000 Simulationen).

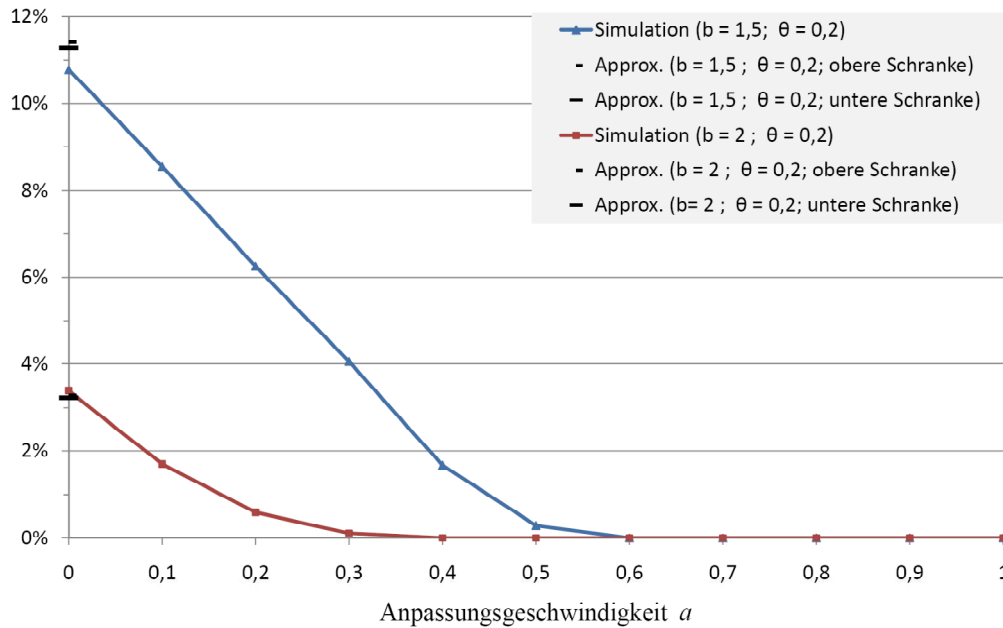


ABBILDUNG 3-17: Ruinwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Anpassungsgeschwindigkeit a . (jeweils 10.000 Simulationen mit 100 Anpassungen pro Jahr)

Die *Abbildung 3-16* zeigt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit deutlich reduziert werden kann, wenn nicht nur die Deklaration, sondern auch die Risikoexposition der Kapitalanlagen entsprechend der Reserveposition angepasst wird. In dieser Hinsicht ist also ein *echtes ALM* tatsächlich einer reinen Deklarationssteuerung überlegen.

4 Glättung des Anlagerisikos

4.1 Anlagerisiko bezogen auf das Endkapital

In dem oben beschriebenen linearen Modell wollen wir den Effekt des kollektiven Risikoausgleichs im Falle einer Einmalanlage vom Betrag 1 untersuchen.

Investiert man den Betrag 1 in das Portfolio des LVU (ohne Teilhabe am kollektiven Ausgleichsprozess), so beträgt die Rendite²⁰

$$\mu_D(T) := \frac{1}{T} \ln \left(\frac{P(T)}{P_0} \right) = \frac{1}{T} \left(\int_0^T \mu(t) dt + \int_{[0,T]} \sigma(t) dW_t \right). \quad (\text{Gl. 4-1})$$

bei einer Anlage in das Versichertenguthaben (also mit Teilnahme am kollektiven Ausgleichsprozess):

$$\eta_D(T) := \frac{1}{T} \ln \left(\frac{V(T)}{V_0} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt, \quad (\text{Gl. 4-2})$$

Falls $a = 0$, so gilt $\mu_D(T) = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{T} W_T$ und

$$\eta_D(T) = \hat{\mu} + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{T} + \frac{\hat{\sigma}}{T} \int_{[0,T]} (1 - \exp(-\theta(T-t))) dW_t \quad (\text{Gl. 4-3})$$

Begründung:

Da für $a = 0$ $\eta(t) = \hat{\mu} + b \hat{\rho}(t)$ (Gl. 3-22) und $\hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_{[0,t]} \exp(\theta s) dW_s \right)$

folgt

$$\begin{aligned} \eta_D(T) &= \hat{\mu} + \frac{\theta}{T} \int_0^T \hat{\rho}(t) dt = \hat{\mu} + \frac{\theta}{T} \int_0^T \exp(-\theta t) \left(\hat{\rho}_0 + \hat{\sigma} \int_{[0,t]} \exp(\theta s) dW_s \right) dt \\ &= \hat{\mu} + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{T} + \frac{\theta \hat{\sigma}}{T} \int_0^T \left(\int_{[0,t]} \exp(-\theta t) \exp(\theta s) dW_s \right) dt \\ &= \hat{\mu} + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{T} + \frac{\theta \hat{\sigma}}{T} \int_{[0,T]} \int_s^T \exp(-\theta t) \exp(\theta s) dt dW_s \end{aligned}$$

²⁰ Gemessen als annualisierter stetiger Zins.

$$= \hat{\mu} + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{T} + \frac{\hat{\sigma}}{T} \int_{[0, T]} (1 - \exp(-\theta(T-s))) dW_s .$$

Insbesondere ist $\eta_D(T)$ normalverteilt mit

$$\mathbb{E}(\eta_D(T)) = \hat{\mu} + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{T} \text{ und}$$

$$\text{Var}(\eta_D(T)) = \frac{\hat{\sigma}^2}{T^2} \int_0^T (1 - \exp(-\theta(T-s)))^2 ds = \frac{\hat{\sigma}^2}{T} \left(1 - \frac{(1 - \exp(-\theta T))(3 - \exp(-\theta T))}{2\theta T} \right).$$

Wir bestimmen nun für den Fall $a \neq 0$ Erwartungswert und Varianz von $\eta_D(T)$.

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2

$$U_t := \int_{[0, t]} X_s dW_s \text{ und } X_t := E_t \left(1 + \tau + \theta \int_0^t \frac{\exp(\theta s)}{E_s} ds \right) \text{ für } \tau := \frac{a \hat{\rho}_0}{\hat{\sigma}}$$

gilt nach Proposition 3-4

$$\hat{\rho}(t) = \exp(-\theta t) (\hat{\sigma} U_t + \hat{\rho}_0)$$

$$\mu(t) = \hat{\mu} + (b - \theta) \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} a^2 \hat{\rho}^2(t),$$

$$\eta(t) = \hat{\mu} + b \hat{\rho}(t) - \frac{1}{2} a^2 \hat{\rho}^2(t) \text{ mit } \hat{\mu} := \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \text{ und } b := \theta + a(r_{SR} - \hat{\sigma}).$$

Wir setzen abkürzend

$$J_t(\alpha) := \int_0^t \exp(\alpha s) ds = \begin{cases} \frac{\exp(\alpha t) - 1}{\alpha} & \text{für } \alpha \neq 0 \\ t & \text{für } \alpha = 0 \end{cases}$$

und

$$\bar{J}_t(\alpha) := \int_0^t J_s(\alpha) ds = \begin{cases} \frac{\exp(\alpha t) - 1 - \alpha t}{\alpha^2} & \text{falls } \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{2} t^2 & \text{falls } \alpha = 0 \end{cases} .$$

Proposition 4-1

$$\mathbb{E}(\eta_D(T)) = \hat{\mu} - \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2T} \bar{J}_T(a^2 - 2\theta) + \hat{\rho}_0 \text{ Restterm} \tag{Gl. 4-4}$$

mit

Restterm :=

$$\begin{cases} \frac{J_T(-\theta)}{T} \left(ar_{SR} + \theta + \frac{a\theta\hat{\sigma}}{a^2 - \theta} \right) - \frac{a^2 J_T(a^2 - 2\theta)}{2T} \left(\frac{2a\hat{\sigma}}{a^2 - \theta} + \hat{\rho}_0 \right) & \text{falls } \theta \neq a^2 \\ a\hat{\sigma} \exp(-a^2 T) + \left(1 + \frac{r_{SR} - 2\hat{\sigma}}{a} - \frac{\hat{\rho}_0}{2} \right) \frac{1 - \exp(-a^2 T)}{T} & \text{falls } \theta = a^2 . \end{cases}$$

Beweis

Mit Hilfe der Darstellung aus Proposition 3-7 erhalten wir

$$\mathbb{E}(\eta(t)) = \hat{\mu} - \frac{1}{2} a^2 \hat{\sigma}^2 \exp(-2\theta t) \mathbb{E}(U_t^2) + \hat{\rho}_0(\dots)$$

Wegen $\mathbb{E}(U_t^2) = \exp(2\theta t) J_t(a^2 - 2\theta) + \hat{\rho}_0(\dots)$ folgt

$$\mathbb{E}(\eta_D(T)) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(\eta(t)) = \hat{\mu} - \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2T} \int_0^T J_t(a^2 - 2\theta) + \hat{\rho}_0 \text{ Restterm}$$

Die Berechnung des Restterms ist einfach, aber etwas mühsam; es ergibt sich

$$\text{Restterm} = \frac{J_T(-\theta)}{T} \left(ar_{SR} + \theta + \frac{a\theta\hat{\sigma}}{a^2 - \theta} \right) - \frac{a^2 J_T(a^2 - 2\theta)}{2T} \left(\frac{2a\hat{\sigma}}{a^2 - \theta} + \hat{\rho}_0 \right)$$

Bemerkung:

Die erwarteten Renditen stimmen also bei ausgeglichener Anfangsreserve (d.h. $\hat{\rho}_0 = 0$) überein; weicht die Anfangsreserve allerdings von der Zielreserve ab, so ergibt sich bei einer Investition in das Versichertenguthaben eine Zusatzrendite (falls $\hat{\rho}_0 > 0$) bzw. ein Minderrendite (falls $\hat{\rho}_0 < 0$).

Falls $2\theta > a^2$, so gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\eta_D(T)) = \hat{\mu} - \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2(2\theta - a^2)}$$

Wird also die Risikoexposition jeweils an die Reserveposition (Aktienquote) angepasst, so ergibt ein eine geringere erwartete Rendite als bei einer reinen *LM-Strategie*, bei der nur die Deklaration an die Reserve angepasst wird. Hierbei ist zu beachten, dass die Grenzverteilung von $(\eta(t))_{t \rightarrow \infty}$ für $a \neq 0$ schief ist.

Proposition 4-2Ist $a = 0$, so gilt

$$\text{Var}(\eta_D(T)) = \frac{\hat{\sigma}^2}{T} \left(1 - \frac{(1 - \exp(-\theta T))(3 - \exp(-\theta T))}{2\theta T} \right). \quad (\text{Gl. 4-5})$$

Ist $a \neq 0$, so gilt

$$\text{Var}(\eta_D(T)) = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^t h(s,t) ds dt - \frac{a^4 \hat{\sigma}^4}{4T^2} \bar{J}_T^2 (a^2 - 2\theta) \quad (\text{Gl. 4-6})$$

$$\text{mit } h(s,t) := \begin{cases} f(s)f(t) \left(\mathbb{E}(U_s^2 U_t^2) - \mathbb{E}(U_s^2) \mathbb{E}(U_t^2) \right) + f(s)g(t) \mathbb{E}(U_s^3) \\ + f(t)g(s) \mathbb{E}(U_s U_t^2) + g(s)g(t) \mathbb{E}(U_s^2) \end{cases}$$

und $f(t) = -\frac{1}{2} a^2 \hat{\sigma}^2 \exp(-2\theta t)$ und $g(t) = \hat{\sigma} \exp(-\theta t) (b - a^2 \hat{\rho}_0 \exp(-\theta t))$.*Beweis*Wir setzen $\bar{\eta}(t) := \eta(t) - \mathbb{E}(\eta(t))$, $\bar{U}_t := U_t^2 - \mathbb{E}(U_t^2)$, dann gilt (vgl. Proposition 3-7):

$$\bar{\eta}(t) = f(t) \bar{U}_t + g(t) U_t$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\eta_D(T)) &= \mathbb{E} \left(\left(\eta_D(T) - \mathbb{E}(\eta_D(T)) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{T^2} \mathbb{E} \left(\left(\int_0^T \bar{\eta}(t) dt \right)^2 \right) = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^t \mathbb{E}(\bar{\eta}(s) \bar{\eta}(t)) ds dt \end{aligned}$$

Für $s \leq t$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{\eta}(s) \bar{\eta}(t)) &= f(s)f(t) \mathbb{E}(\bar{U}_s \bar{U}_t) + f(s)g(t) \mathbb{E}(\bar{U}_s U_t) \\ &\quad + g(s)f(t) \mathbb{E}(U_s \bar{U}_t) + g(s)g(t) \mathbb{E}(U_s U_t) \\ &= f(s)f(t) \left(\mathbb{E}(U_s^2 U_t^2) - \mathbb{E}(U_s^2) \mathbb{E}(U_t^2) \right) + f(s)g(t) \mathbb{E}(U_s^3) \\ &\quad + g(s)f(t) \mathbb{E}(U_s U_t^2) + g(s)g(t) \mathbb{E}(U_s^2) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen in Präposition 4-2 lässt sich somit $\text{Var}(\eta_D(T))$ explizit darstellen. Das Doppelintegral kann explizit ausgerechnet werden, da $h(s,t)$ als Polynom der Argumente $\exp(s)$ und $\exp(t)$ dargestellt werden kann.

Das Rendite-Risiko-Profil

Wir wollen nun das Anlagerisiko und die zu erwartende Rendite miteinander in Beziehung setzen.

In unserem einfachen Kapitalanlagemodell (vgl. Abschnitt 2.2) ergibt sich bei einer Constant-Mix-Strategie bei einer Anlage vom Betrage 1 und einer Laufzeit von T ein Endvermögen von

$$P(T) = \exp(T\hat{\mu} + \hat{\sigma}W_T), \text{ wobei } \hat{\mu} := \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2.$$

Hierbei ist $\hat{\sigma} \geq 0$ die gewählte Risikoexposition. Die *erwartete (Jahres-)Rendite* beträgt dann

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{T} \ln(P(T))\right) = \hat{\mu} = \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2,$$

und die *annualisierte Volatilität der Rendite* beträgt

$$\sqrt{T \text{Var}\left(\frac{1}{T} \ln(P(T))\right)} = \hat{\sigma}.$$

Die erwartete Rendite und die annualisierte Volatilität stehen also unabhängig von der Laufzeit in einem festen funktionalen Zusammenhang (vgl. Abb 2-5).

Wir vergleichen nun die Constant- Mix- Strategie mit einer Anlage in das Versicherten-guthaben. Hierbei wollen wir in unserem linearen Modell zunächst eine reine LM-Strategie (d.h. $a = 0$) betrachten.

Die erwartete Rendite bei einer Anlage von 1 beträgt dann

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{T} \ln(V(T))\right) = \mathbb{E}(\eta_D(T)) = \hat{\mu} + \hat{\rho}_0 \frac{1 - \exp(-\theta T)}{T},$$

und die annualisierte Volatilität

$$\sqrt{T \text{Var}\left(\frac{1}{T} \ln(V(T))\right)} = \sqrt{T \text{Var}(\eta_D(T))} = \hat{\sigma} g(\theta, T)$$

mit $g(\theta, T) := \sqrt{1 - \frac{(1 - \exp(-\theta T))(3 - \exp(-\theta T))}{2\theta T}}$ für $\theta T \neq 0$ und $g(\theta, T) := 0$ für $\theta T = 0$.

$g(\theta, T)$ können wir als *Dämpfungfaktor* interpretieren, denn er gibt an, in welchem Verhältnis die Volatilität der Ablaufrendite durch die Zwischenschaltung der kollektiven Reserve gemindert wird. Zu Beginn der Vertragslaufzeit (d.h. bei hoher Restlaufzeit T) ist der Dämpfungseffekt gering, denn es gilt für $\theta > 0$: $\lim_{T \rightarrow \infty} g(\theta, T) = 1$. Mit fortschreitender Vertragsdauer bzw. sinkender Restlaufzeit nimmt der Dämpfungseffekt zu, denn es gilt $\lim_{T \rightarrow 0} g(\theta, T) = 0$. Aus Sicht eines Altersvorsorgesparers ist dies ein sehr erwünschter Effekt, da mit näher rückendem Rentenbeginn das Sicherheitsbedürfnis zunimmt.

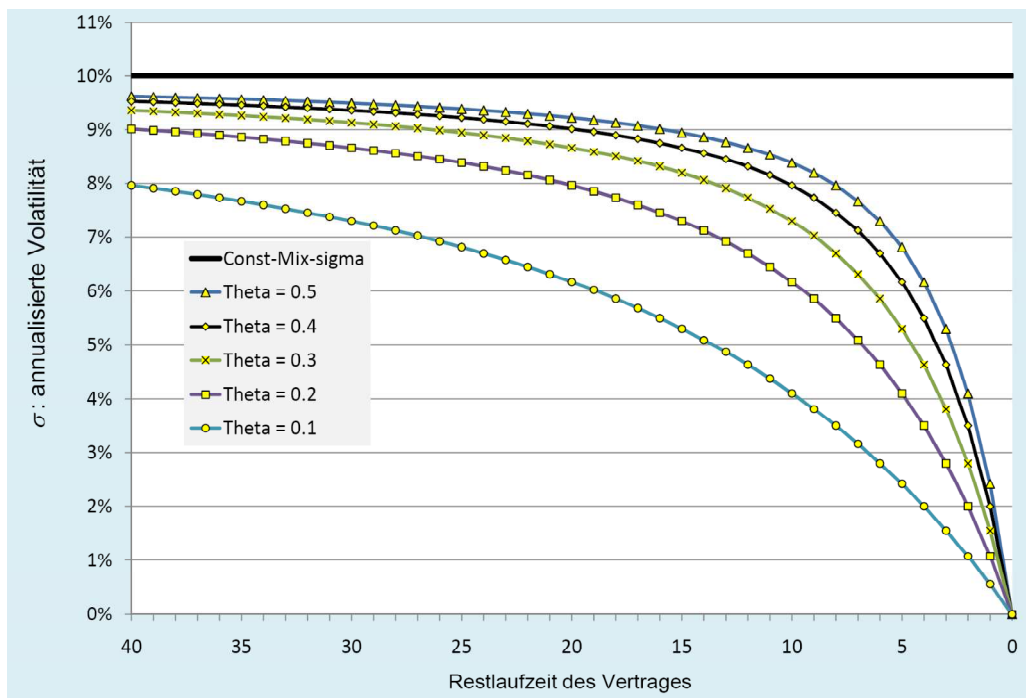


ABBILDUNG 4 -1: Dämpfungseffekt bezogen auf die Ablaufrendite in Abhängigkeit von der Restlaufzeit des Vertrages; $a=0$, $\hat{\sigma} = 10\%$, $\hat{\rho}_0 = 0$, $\theta \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.5\}$

In den folgenden Abbildungen wollen wir das *Rendite-Risiko-Profil* im (σ, μ) -Diagramm illustrieren: σ steht hierbei für das Risiko der Anlage, gemessen als annualisierte Volatilität und μ steht für die erwartete Rendite, gemessen als stetiger Jahreszins. Als Referenzkurve dient die arbitragefreie Kapitalmarktkurve (vgl. Abschnitt

2.2); sie entspricht dem Rendite-Risiko-Profil des Investments mit einer Constant-Mix-Strategie, bei der zu jedem Zeitpunkt die Aktienquote (bezogen auf die aktuellen Marktwerte) konstant sind.

Wenn wir eine reine LM-Strategie unterstellen ($a = 0$; das Portfoliorisiko wird nicht angepasst), so ist $\eta_D(T)$ normalverteilt; dies bedeutet, dass wir die Risikoprofile miteinander vergleichen können.

Die Abbildung 4.2. zeigt die Wirkung des Glättungsfaktors θ auf das Rendite-Risiko-Profil; bei einem niedrigen Wert für θ ändert sich die Deklaration nur sehr träge. Allerdings ist zu beachten, dass für niedrige Werte von θ auch die Ruinwahrscheinlichkeit zunimmt.

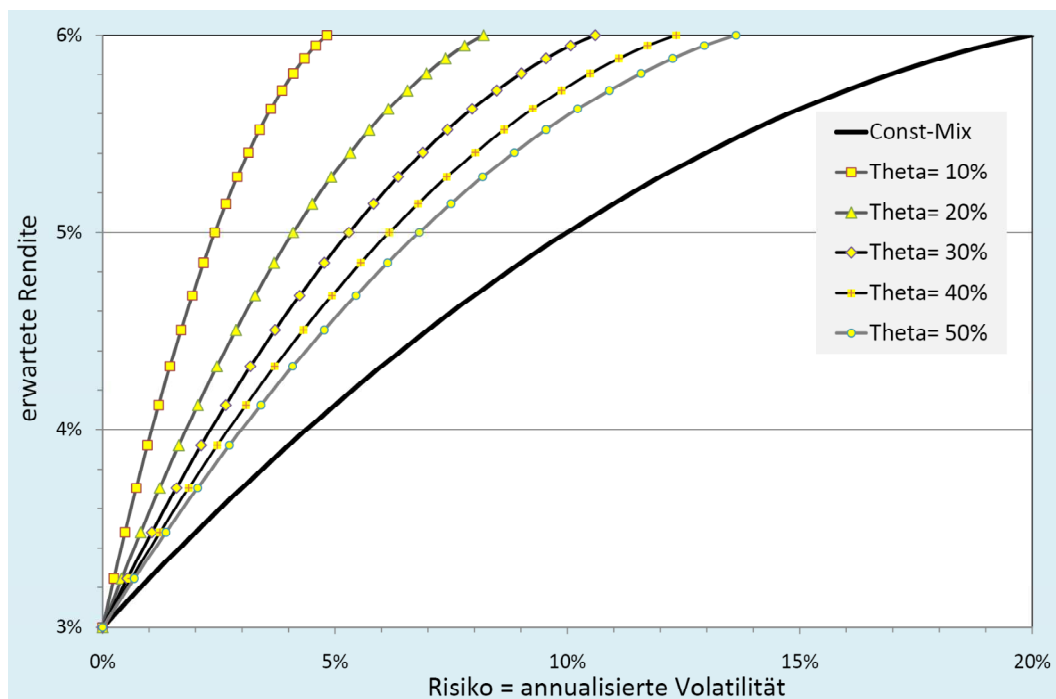


ABBILDUNG 4 -2: Rendite-Risiko-Profil, LM-Strategie ($a = 0$), $T = 5$ und $\theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.

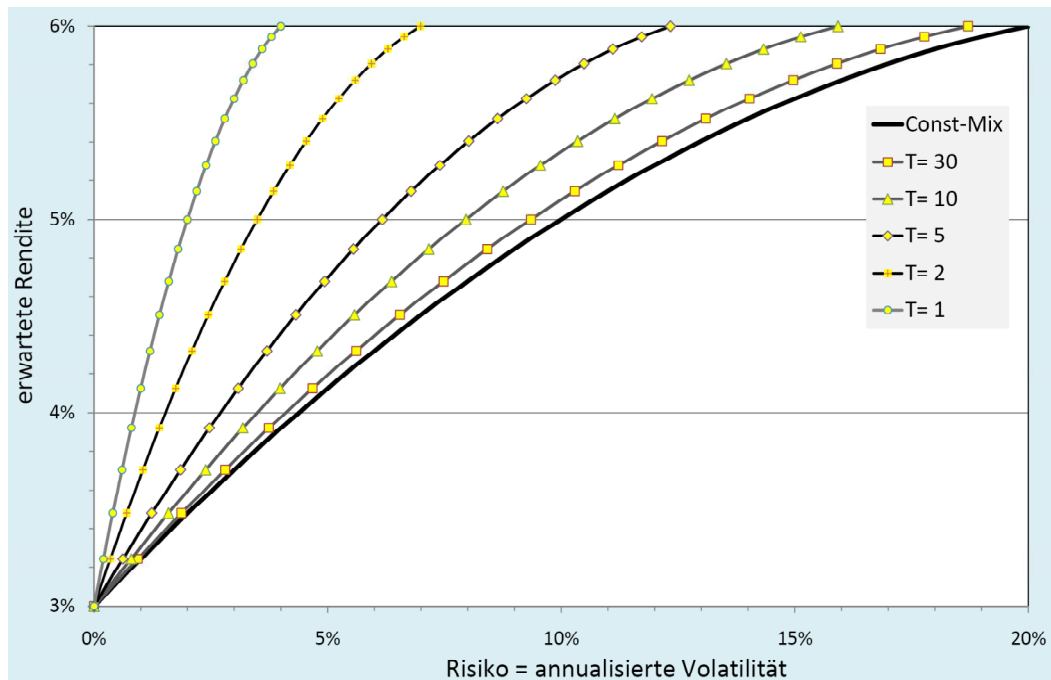


ABBILDUNG 4 -3: Rendite-Risiko-Profil, LM-Strategie ($a=0$) $\theta=0.4$ und $T \in \{1, 2, 5, 10, 30\}$.

In Abbildung 4.3 ist die Abhängigkeit des Rendite-Risiko-Profiles vom Anlagehorizont T dargestellt; für einen langen Anlagehorizont ist der Glättungseffekt bezogen auf die Rendite schwach.

In den obigen Darstellungen wurde unterstellt, dass $a=0$ und $\hat{\rho}_0=0$. Wir untersuchen nun den Effekt der Parameter a und $\hat{\rho}_0$ auf das Rendite-Risikoprofil. Für $a \neq 0$ ist allerdings zu beachten, dass die $\eta_D(T)$ nicht normalverteilt ist und somit das hier dargestellte Rendite-Risiko-Profil nur bedingt geeignet ist, den Zusammenhang von Rendite und Risiko zu vergleichen.

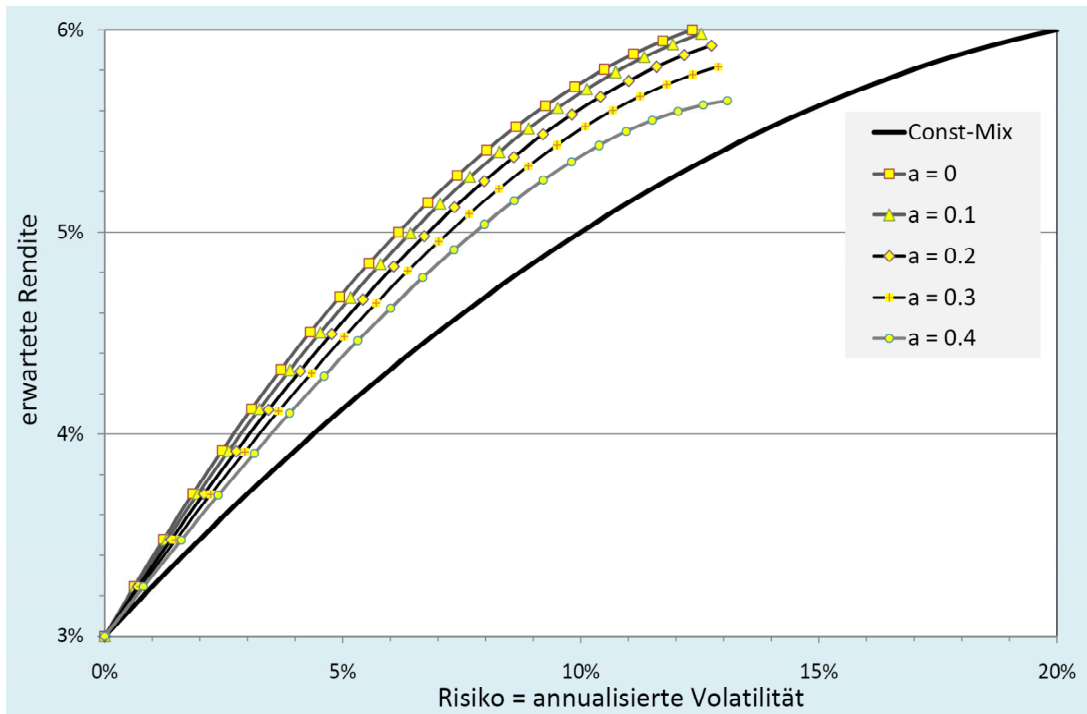


ABBILDUNG 4 -4: Rendite-Risiko-Profil, $\theta = 0.4$, $T = 5$, $\hat{\rho}_0 = 0$ und $a \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$.

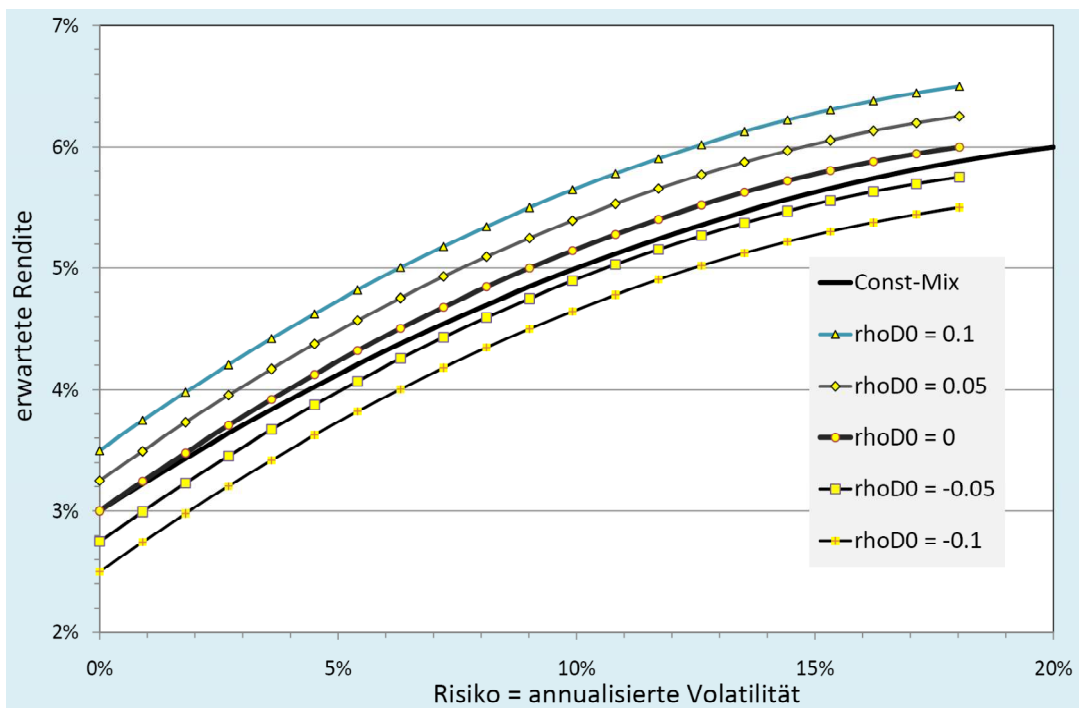


ABBILDUNG 4 -5: Rendite-Risiko-Profil, $\theta = 0.4$, $T = 20$, $a = 0$ und $\hat{\rho}_0 \in \{-0.1, -0.05, 0, 0.05, 0.1\}$.

4.2 Anlegerstress während der Vertragslaufzeit

Im letzten Abschnitt haben wir das Anlagerisiko auf die Rendite bei Ablauf des Vertrages (d.h. zu Beginn der Rentenbezugs) untersucht. Implizit wird also unterstellt, dass der Altersvorsorgesparer ausschließlich auf den Zeitpunkt des Ablaufs des Vertrages fokussiert ist.

Wir wollen nun den *Anlegerstress* während der Vertragslaufzeit analysieren. Hierzu vergleichen wir die Constant-Mix-Strategie mit der Volatilität einer Anlage in das Versichertenportfolio $(V(t))_{0 \leq t \leq T}$.

Der Wertprozess $(P(t))_{t \geq 0} = (P(\hat{\sigma}, t))_{t \geq 0}$ einer Constant-Mix-Strategie mit der gleichbleibenden Risikoexposition $\hat{\sigma}$ wird im Black-Scholes-Modell durch die folgende SDG beschrieben:

$$dP(t) = P(t) \left(\hat{\mu} dt + \hat{\sigma} dW_t \right) \quad (\text{mit Drift } \hat{\mu} := \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2).$$

$\hat{\sigma}$ können wir also als den (gleichbleibenden) *Anlegerstress* interpretieren.

Im Vergleich hierzu ist der Wertprozess $(V(t))_{0 \leq t \leq T}$ *lokal sicher*, also stressfrei, denn

$$dV(t) = V(t) \eta(t) dt.$$

Gleichwohl handelt es sich langfristig nicht um eine sichere Anlage, denn wegen

$$\eta(t) = \mu(t) + \theta \hat{\rho}(t)$$

führt eine schwankende Reserve zu schwankenden Deklarationen.

Die folgende *Abbildung 4-6* soll zunächst den „Glättungsprozess“ illustrieren: Betrachtet wird die Wertentwicklung einer Einmalanlage vom Betrag 1. Ist der Sparer unmittelbar am Anlageerfolg beteiligt, so führen Wertschwankungen am Kapitalmarkt unmittelbar zu gleichgerichteten Wertänderungen des Sparkapitals. Investiert der Sparer hingegen in das Versichertenguthaben, so werden Wertschwankungen durch Einschaltung der kollektiven Reserve gedämpft – die Wertentwicklung erfolgt daher gleichmäßig.

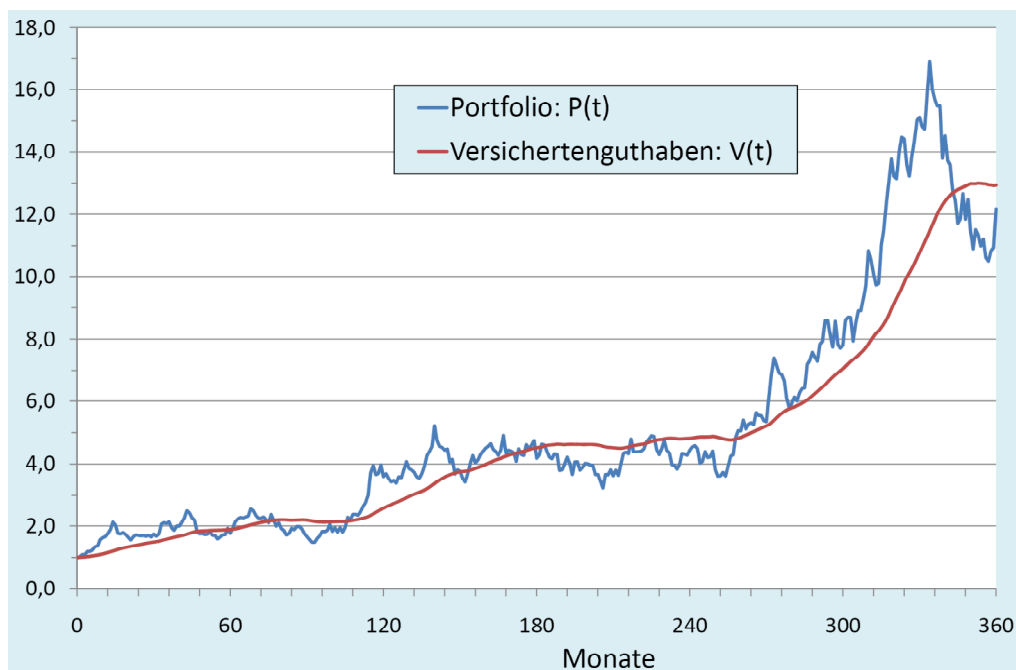


ABBILDUNG 4-6: Illustration des Glättungseffekts; unterstellt wird das lineare Modell mit $\bar{\mu} = 3\%$, $r_{SR} = 0.25$, $\theta = 0.4$, $a = 0$, $\hat{\sigma} = 0.2$, $\hat{\rho}_0 = 0$

Wir wollen zunächst ein sinnvolles Schwankungsmaß für den Deklarationsprozess $(\eta(t))$ definieren.

Wir setzen

$$\eta Stress(T) := \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{1}{T} \int_0^T (\eta(t) - \eta_D(T))^2 dt\right)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(\eta^2(t)) dt - \mathbb{E}(\eta_D^2(T))}. \quad (\text{Gl. 4-7})$$

$\eta Stress(T)$ ist das stetige Analogon zur Standardabweichung einer stochastischen Zeitreihe; $\eta Stress(T) = 0$ genau dann wenn $\eta(t)$ f.s. konstant ist. $\eta Stress(T)$ ist also ein sinnvolles Schwankungsmaß für den Deklarationsprozess.

Bemerkung:

Dieses Schwankungsmaß kann nicht ohne weiteres auf die Anlage in ein Constant-Mix-Portfolio übertragen werden, da man nicht sinnvoll eine *momentane Verzinsung* definieren, sondern jeweils nur für einen Zeitabschnitt $\Delta > 0$ die (annualisierte) Rendite bestimmen kann:

$$x_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta} \ln\left(\frac{P(t)}{P(t-\Delta)}\right) = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{\Delta} (W_t - W_{t-\Delta}), \quad (\text{Gl. 4-8})$$

hierbei sei $P(t)$ der Wert eines Constant-Mix-Portfolios zum Zeitpunkte t mit gleichbleibender Risikoexposition $\hat{\sigma}$. Beobachtet man in den Zeitabschnitten $[0, \Delta]$, $[\Delta, 2\Delta]$, $[2\Delta, 3\Delta]$, ..., $[(N-1)\Delta, N\Delta = T]$ die Wertentwicklung des Constant-Mix-Portfolios, so können wir analog zu (Gl. 4-7) den Anlegerstress definieren:

$$PStress_{\Delta}(T) := \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_{\Delta}(k\Delta) - \bar{x})^2\right)}, \text{ mit } \bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{\Delta}(k\Delta). \quad (\text{Gl. 4-9})$$

Es gilt: $\bar{x}_{\Delta} = \hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}}{T} W_T$ und

$$\begin{aligned} PStress_{\Delta}(T) &= \hat{\sigma} \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\Delta} (W_{k\Delta} - W_{(k-1)\Delta}) - \frac{W_T}{T}\right)^2\right)} \\ &= \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\Delta^2} \mathbb{E}\left((W_{k\Delta} - W_{(k-1)\Delta})^2\right) - \frac{2}{\Delta T} \mathbb{E}\left((W_{k\Delta} - W_{(k-1)\Delta})W_T\right) + \mathbb{E}\left(\frac{W_T^2}{T^2}\right)\right)} \quad (\text{Gl. 4-10}) \\ &= \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{2\Delta}{\Delta T} + \frac{1}{T}\right)} = \hat{\sigma} \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{T}\right)}. \end{aligned}$$

Der Anlegerstress ist also abhängig vom Zeithorizont T und der Länge der Beobachtungsintervalle Δ .

Bemerkung: $\lim_{T \rightarrow \infty} PStress_{\Delta}(T) = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}$; und für $\Delta = 1$: $\lim_{T \rightarrow \infty} PStress(T) = \hat{\sigma}$.

Anlegerstress bei Beobachtung des Deklarationsprozesses in diskreten Zeitpunkten

Die obige Definition des Anlegerstresses $\eta Stres(T)$ ist anders als die Definition von $PStress_{\Delta}(T)$ nicht von den Beobachtungsintervallen abhängig. Wählt man also im Extremfall $\Delta = T$ als Beobachtungsintervall, so ist $PStress_{\Delta}(T) = 0$, mithin sind für große Beobachtungsintervalle $\eta Stres(T)$ und $PStress_{\Delta}(T)$ nicht miteinander vergleichbar.

Wir wollen daher für Vergleichszweck für „große“ Δ analog zur Definition des $PStress_{\Delta}(T)$ die (empirische) Volatilität des Deklarationsprozesses $VStress_{\Delta}(T)$ untersuchen. Hierzu setzen wir für einen festen Zeitabschnitt $\Delta > 0$ (vgl. Gl. 4-8):

$$y_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \ln \left(\frac{V(t)}{V(t-\Delta)} \right) = \frac{1}{\Delta} \int_{t-\Delta}^t \eta(t) dt,$$

$y_{\Delta}(t)$ ist also die realisierte (annualisierte) Verzinsung der Versichertenguthaben im Zeitintervall $[t-\Delta, t]$.

Beobachtet man in den Zeitabschnitten $[0, \Delta], [\Delta, 2\Delta], \dots, [(N-1)\Delta, N\Delta = T]$ die Wertentwicklung des Versicherten-Portfolios, so definieren wir analog zu (Gl. 4-9) den Anlagestress:

$$VStress_{\Delta}(T) := \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_{\Delta}(k\Delta) - \bar{y})^2\right)}, \text{ mit } \bar{y} := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_{\Delta}(k\Delta). \quad (\text{Gl. 4-11})$$

Es gilt dann $\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t) dt = \eta_D(T)$ und

$$\begin{aligned} (VStress_{\Delta}(T))^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\left((y_{\Delta}(k\Delta) - \bar{y})^2\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{E}(y_{\Delta}^2(k\Delta)) - 2\bar{y} \mathbb{E}(y_{\Delta}(k\Delta)) + \mathbb{E}(\bar{y}^2)\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\mathbb{E}(y_{\Delta}^2(k\Delta)) - \mathbb{E}(\bar{y}^2)\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\frac{2}{\Delta^2} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^t \mathbb{E}(\eta(s)\eta(t)) ds dt\right) - \mathbb{E}(\bar{y}^2) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^t \mathbb{E}(\eta(s)\eta(t)) ds\right) dt - \mathbb{E}(\eta_D^2(T)) \end{aligned}$$

Definieren man die Funktion $h_{\Delta} : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h_{\Delta}(t) := \frac{2}{\Delta} \int_{(k-1)\Delta}^t \mathbb{E}(\eta(s)\eta(t)) ds \text{ falls } t \in [(k-1)\Delta, k\Delta[,$$

so erhält man:

$$(VStress_{\Delta}(T))^2 = \frac{1}{T} \int_0^T h_{\Delta}(t) dt - \mathbb{E}(\eta_D^2(T)) \quad (\text{Gl. 4-12})$$

Da $\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = \mathbb{E}(\eta^2(t))$ folgt

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} VStress_{\Delta}(T) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(\eta^2(t)) dt - \mathbb{E}(\eta_D^2(T))} = \eta Stress(T).$$

Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit von $PStress_{\Delta}(T)$ und $VStress_{\Delta}(T)$ von der Länge des Beobachtungsintervalls für die Parameter $\bar{\mu} = 3\%$, $r_{SR} = 0.25$, $\theta = 0.4$, $a = 0$, $\hat{\sigma} = 0.2$, $\hat{\rho}_0 = 0$.

	$\Delta = 1 / 252$ (börsentäglich)	$\Delta = 1 / 12$ (monatlich)	$\Delta = 1 / 4$ (dreimonatlich)	$\Delta = 1 / 1$ (jährlich)
$PStress_{\Delta}(T = 5)$	3.17364	0.68702	0.38987	0.17889
$VStress_{\Delta}(T = 5)$	0.05465	0.05388	0.05227	0.04526
$\eta Stress(T = 5)$	0.05469			
$PStress_{\Delta}(T = 10)$	3.17427	0.68993	0.39497	0.18974
$VStress_{\Delta}(T = 10)$	0.06678	0.06615	0.06484	0.05924
$\eta Stress(T = 10)$	0.06681			
$PStress_{\Delta}(T = 20)$	3.17459	0.69138	0.39749	0.19494
$VStress_{\Delta}(T = 20)$	0.07662	0.07607	0.07493	0.07010
$\eta Stress(T = 20)$	0.07665			
$PStress_{\Delta}(T = 30)$	3.17469	0.69186	0.39833	0.19664
$VStress_{\Delta}(T = 30)$	0.08060	0.08007	0.07899	0.07441
$\eta Stress(T = 30)$	0.08062			
$PStress_{\Delta}(T = \infty)$	3.17490	0.69282	0.40000	0.20000
$VStress_{\Delta}(T = \infty)$	0.08942	0.08895	0.08798	0.08386
$\eta Stress(T = \infty)$	0.08944			

Tabelle 4-1: Vergleich der Standardabweichung der Periodenrenditen bezogen auf das Anlageportfolio $x_{\Delta}(t)$ bzw. die Versichertenguthaben $y_{\Delta}(t)$.

Die folgenden *Abbildungen 4-7* zeigen den Verlauf von Periodenverzinsung $x_{\Delta}(t)$ und $y_{\Delta}(t)$ einen Simulationslauf im linearen Modell. $x_{\Delta}(t)$ ist hierbei die im Zeitintervall $[t - \Delta, t]$ (durch Simulation) realisierte Verzinsung eines Constant-Mix-Portfolios mit der gleichbleibenden Risikoexposition $\hat{\sigma} = 0.2$. $y_{\Delta}(t)$ ist die Deklaration für das Zeitintervall $[t, t + \Delta]$ auf der Grundlage der im Zeitpunkt t beobachteten Reservesituation (unter Zugrundelegung des gleichen Simulationslaufs). In den Teilabbildungen wurden unterschiedliche Aggregationsniveaus unterstellt, nämlich $\Delta = \frac{1}{12}$ (obere Abb.), $\Delta = \frac{1}{4}$ (mittlere Abb.) und $\Delta = 1$ (untere Abb.).

Vergleicht man beispielsweise die monatliche Wertentwicklung des Gesamtportfolios $x_{\Delta=1/12}(t)$ mit der monatlichen Wertentwicklung der Versichertenguthaben $y_{\Delta=1/12}(t)$, so sieht man, dass die kurzfristigen Schwankungen des Kapitalmarkts nahezu vollständig durch das kollektive Vermögen absorbiert werden. Je höher die Aggregationsstufe, desto geringer ist der Glättungseffekt.

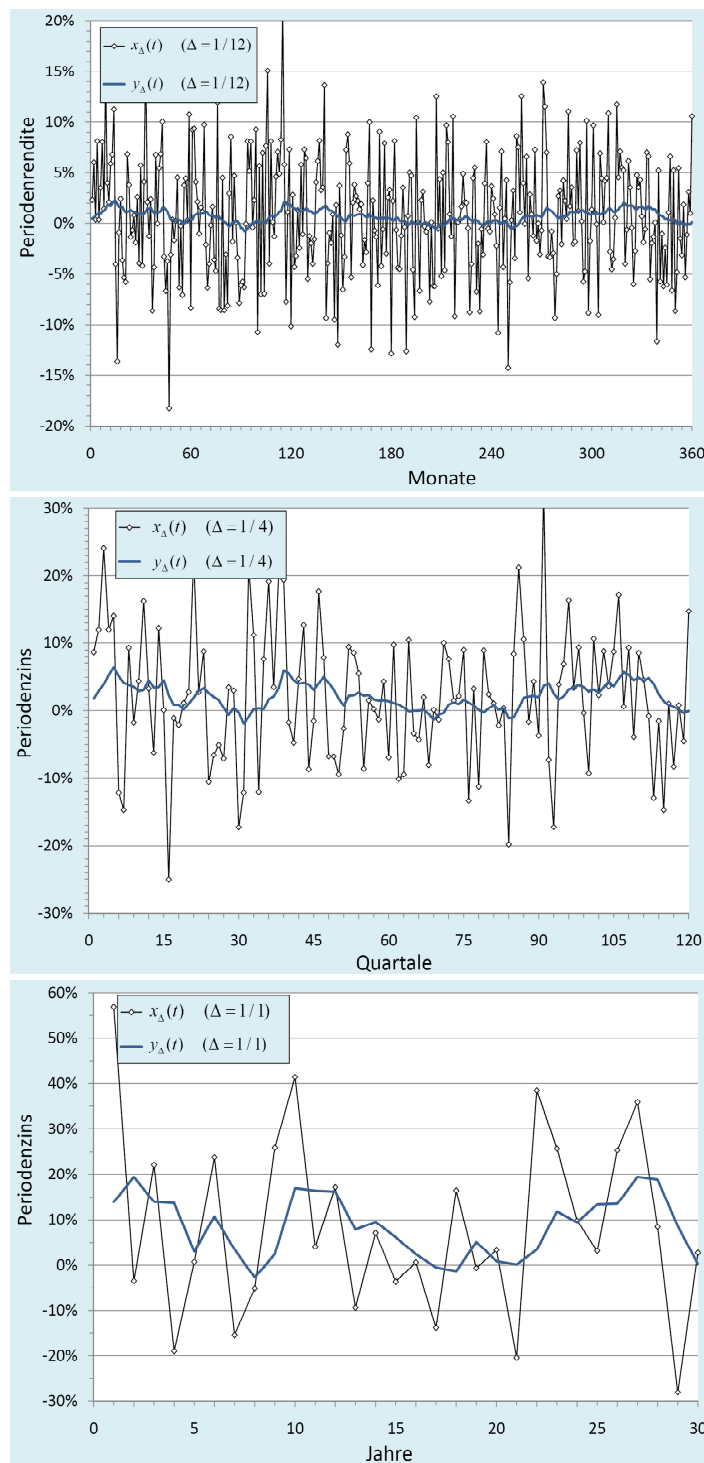


ABBILDUNG 4-7: Glättungseffekts im lineare Modell ($\bar{\mu} = 3\%$, $r_{SR} = 0.25$, $\theta = 0.4$, $a = 0$, $\hat{\sigma} = 0.2$, $\hat{\rho}_0 = 0$), Vergleich der Pfade $x_{\Delta}(t)$ und $y_{\Delta}(t)$ für $\Delta = 1/12$, $\Delta = 1/4$ und $\Delta = 1/1$. Es wurde hierbei der gleiche Simulationslauf wie in Abbildung 4-6 zugrunde gelegt.

Die folgende Tabelle zeigt die annualisierte Volatilität der Periodenrenditen $x_{\Delta}(t)$ und $y_{\Delta}(t)$ des in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellten Simulationslaufes im linearen Modell mit den Parametern $\bar{\mu} = 3\%$, $r_{SR} = 0.25$, $\theta = 0.4$, $a = 0$, $\hat{\sigma} = 0.2$, $\hat{\rho}_0 = 0$. Bei der Auswertung der Periodenrenditen wurden 4 Aggregationsstufen, nämlich börsentäglich, monatlich, dreimonatlich und jährlich unterstellt. Die annualisierte Volatilität der Periodenrendite des Constant-Mix-Portfolios hat auf jeder Aggregationsstufe eine Volatilität von rund 20%, während die annualisierte Volatilität der Periodenrendite des Versicherunguthabens um so geringer ist je kürzer der Betrachtungshorizont.

	$\Delta = 1 / 252$ (börsentäglich)	$\Delta = 1 / 12$ (monatlich)	$\Delta = 1 / 4$ (dreimonatlich)	$\Delta = 1 / 1$ (jährlich)
annualisierte Volatilität $x_{\Delta}(t)$	20,07%	20,47%	20,29%	20,02%
annualisierte Volatilität $y_{\Delta}(t)$	0,48%	2,17%	3,71%	6,86%
$\frac{Vola(y_{\Delta}(t))}{Vola(x_{\Delta}(t))}$	0,0238	0,1060	0,1829	0,3424

Tabelle 4-2: Vergleich der Standardabweichung der Periodenrenditen bezogen auf das Anlageportfolio $x_{\Delta}(t)$ bzw. die Versicherunguthaben $y_{\Delta}(t)$.

Im allgemeinen Fall sind die expliziten Darstellung der Größen $\eta Stress(T)$ und $VStress_{\Delta}(T)$ außerordentlich unhandlich. Speziell im Fall $a = 0$ ergeben sich jedoch recht übersichtliche Formeln.

Proposition 4-3

Für $2\theta > 3a^2$ gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\eta Stress(T))^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{2\theta - a^2} \left(\frac{(a r_{SR} + \theta)^2 - 2(a r_{SR} + \theta) \frac{a\theta\hat{\sigma}}{\theta - a^2}}{+ \frac{a^2 \theta^2 \hat{\sigma}^2 (4\theta - 3a^2)}{(\theta - a^2)(2\theta - a^2)(2\theta - 3a^2)}} \right) \quad (Gl. 4-13)$$

Für $a = 0$ ergibt sich speziell:

$$\begin{aligned}
(VStress_{\Delta}(T))^2 = & \\
& \frac{\hat{\sigma}^2}{2\theta T^2(1+\exp(\Delta\theta))} \left(\begin{aligned} & 3 - 2\theta T + \frac{T}{\Delta}(1+2\theta T) - \exp(\Delta\theta)\left(\frac{T}{\Delta}-1\right)\left(3 - 2\theta T + 2\frac{T}{\Delta}\right) \\ & - 4\exp(-\theta T) - 4\exp(-\theta(T-\Delta)) + \exp(-2\theta T)\left(1 - \frac{T}{\Delta}\right) \\ & + \exp(-\theta(2T-\Delta))\left(1 + \frac{T}{\Delta}\right) + 2\exp(-\Delta\theta)\frac{T^2}{\Delta^2} \end{aligned} \right) \\
& + \hat{\rho}_0^2 \frac{1-\exp(-\theta T)}{T} \left(\frac{(1+\exp(-\theta T))(\exp(\Delta\theta)-1)}{\Delta(1+\exp(\Delta\theta))} - \frac{1-\exp(-\theta T)}{T} \right)
\end{aligned} \tag{Gl. 4-14}$$

$$\begin{aligned}
(\eta Stress(T))^2 = & \frac{\hat{\sigma}^2}{T} \left(2\left(\frac{1-\exp(-\theta T)}{\theta T} - 1\right) - \left(\frac{1-\exp(-2\theta T)}{2\theta T} - 1\right) \left(1 + \frac{\theta}{2}T\right) \right) \\
& - \hat{\rho}_0^2 \frac{1-\exp(-\theta T)}{2T} \left((2+\theta T)\frac{1-\exp(-\theta T)}{T} - \theta \right)
\end{aligned} \tag{Gl. 4-15}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (VStress_{\Delta}(T))^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\Delta} \left(1 - \frac{1-\exp(-\Delta\theta)}{\Delta\theta} \right) \tag{Gl. 4-16}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\eta Stress(T))^2 = \frac{\hat{\sigma}^2 \theta}{2} \tag{Gl. 4-17}$$

Berechnung des Glättungseffekts

Geht man davon aus, dass der Anleger nur einmal jährlich die Performance seiner Kapitalanlage überprüft, so werden wir $\Delta=1$ setzen.

Wir setzen

$$g_{\Delta}(a, \theta, \hat{\rho}_0, T) := \frac{\eta Stress(T)}{PStress_{\Delta}(T)} = \frac{1}{\hat{\sigma}} \sqrt{\frac{T\Delta}{T-\Delta}} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(\eta^2(t)) dt - \mathbb{E}(\eta_D^2(T))}; \tag{Gl. 4-18}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_\Delta(a, \theta, \hat{\sigma}) &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta \text{Stress}(T)}{P \text{Stress}_\Delta(T)} \\ &= \sqrt{\frac{\Delta}{2\theta - a^2} \left(\left(a r_{SR} + \theta - \frac{a\theta\hat{\sigma}}{\theta - a^2} \right)^2 + \frac{a^4 \theta^3 \hat{\sigma}^2}{(\theta - a^2)^2 (2\theta - a^2)(2\theta - 3a^2)} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{Gl. 4-19})$$

Hierbei ist zu beachten, dass $g_\Delta(a, \theta, \hat{\rho}_0, T)$ im Allgemeinen auch von der Sharpe-Ratio r_{SR} abhängt. Im Fall $a=0$ gilt:

$$\begin{aligned} g_\Delta(a=0, \theta, \hat{\rho}_0, T) &= \sqrt{\frac{\Delta \left(\exp(-2\theta T)(2 + \theta T) - 8\exp(-\theta T) + 6 - 5\theta T + 2\theta^2 T^2 \right)}{4\theta T(T - \Delta)} + \hat{\rho}_0^2 A}; \end{aligned} \quad (\text{Gl. 4-20})$$

wobei $A := \frac{\Delta (1 - \exp(-\theta T))(\exp(-\theta T)(2 + \theta T) + \theta T - 2)}{\hat{\sigma}^2 2T(T - \Delta)}$

Wir können $g_\Delta(r_{SR}, a, \theta, \hat{\rho}, T)$ bzw. $\bar{g}_\Delta(r_{SR}, a, \theta)$ als *Stressreduktions-Faktor* interpretieren; der Faktor gibt an, um wieviel Prozent der Stress durch den kollektiven Risikoausgleich gemindert wird.

Hierbei ist zu beachten, dass die tatsächliche Stressreduktion durch den Glättungsmechanismus noch etwas stärker ist, denn es gilt für $\Delta < T$.

$$\frac{V \text{Stress}_\Delta(T)}{P \text{Stress}_\Delta(T)} < \frac{\eta \text{Stress}(T)}{P \text{Stress}_\Delta(T)} = g_\Delta(a, \theta, \hat{\rho}_0, T); \quad (\text{Gl. 4-21})$$

Für die numerische Auswertung wollen wir nunmehr stets $\Delta = 1$ unterstellen.

Als Referenzmodell wählen wir:

$$r_{SR} = 0.25, \hat{\rho}_0 = 0, a = 0, \theta = 0.4, T = 30; \text{ dann gilt}$$

$$g_1(a=0, \theta, \hat{\rho}_0=0, T) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\frac{(1 - \exp(-\theta T))(3 - \exp(-\theta T))}{(T-1)T\theta} + \frac{\exp(-2\theta T) - 5 + 2\theta T}{2(T-1)}}$$

und

$$\bar{g}_1(a=0, \theta, \hat{\rho}_0=0) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$$

Wir betrachten zunächst die Abhängigkeit von der Laufzeit T des Vertrages – vgl. Abb. 4-8. Bei kurzen Vertragsdauern ist der stressreduzierende Effekt besonders ausgeprägt

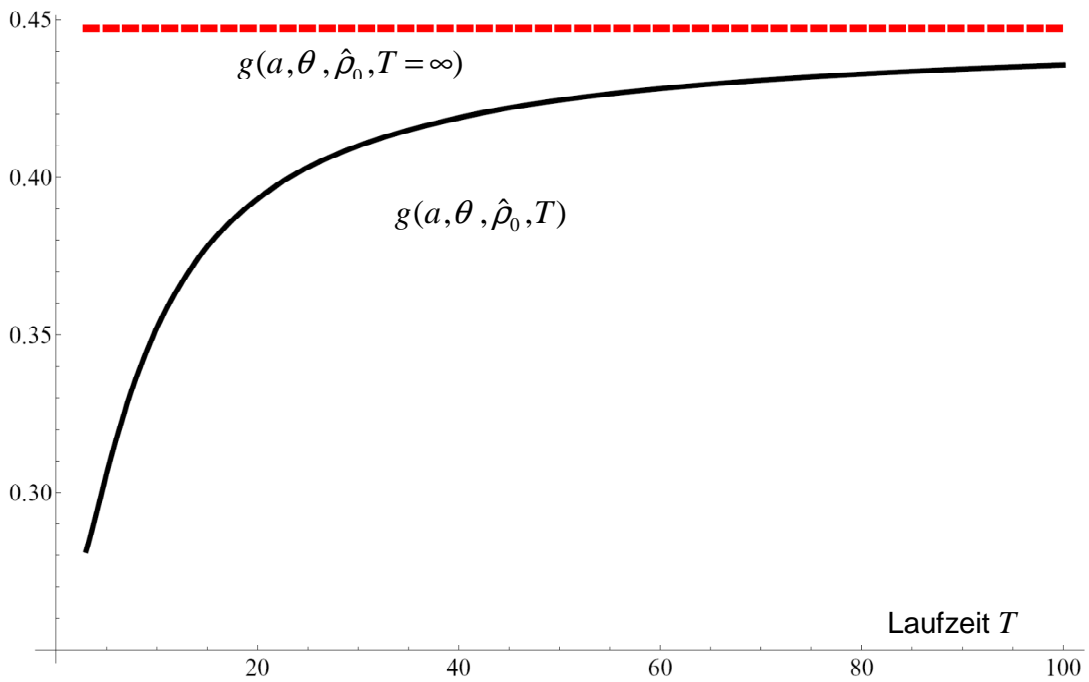


ABBILDUNG 4-8: Stressreduktion im lineare Modell: Stressreduktion in Abhängigkeit von T ($a = 0; \theta = 0.4; \hat{\rho}_0 = 0$).

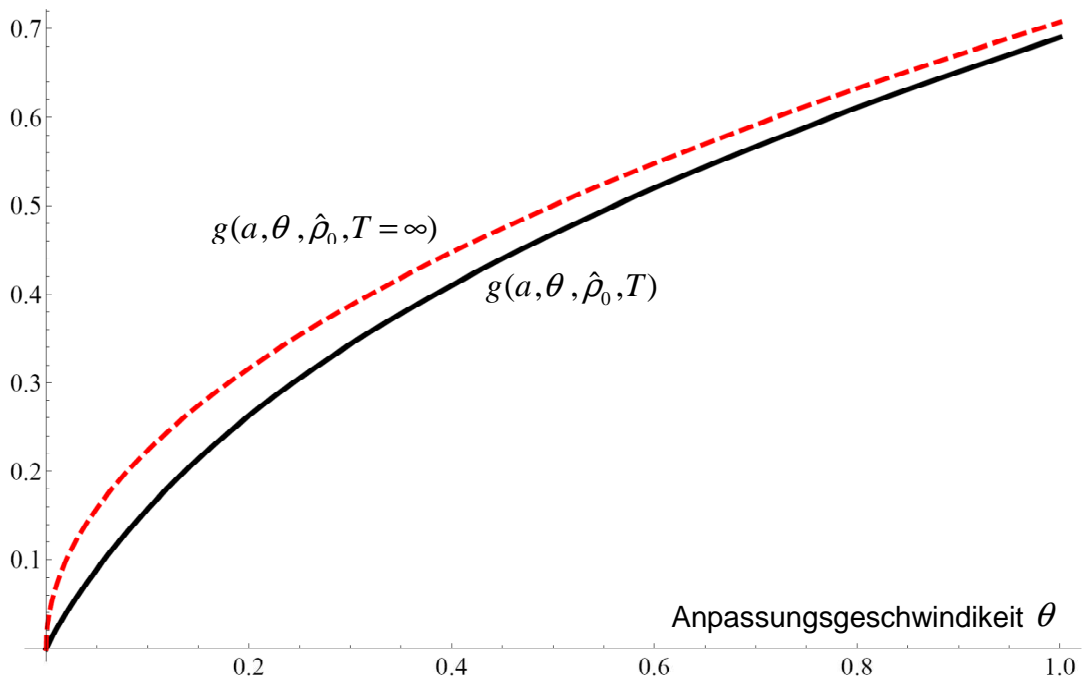


Abbildung 4-9: Stressreduktion im lineare Modell: Stressreduktion in Abhängigkeit von θ ($a = 0; \hat{\rho}_0 = 0; T = 30$ bzw. $T = \infty$)

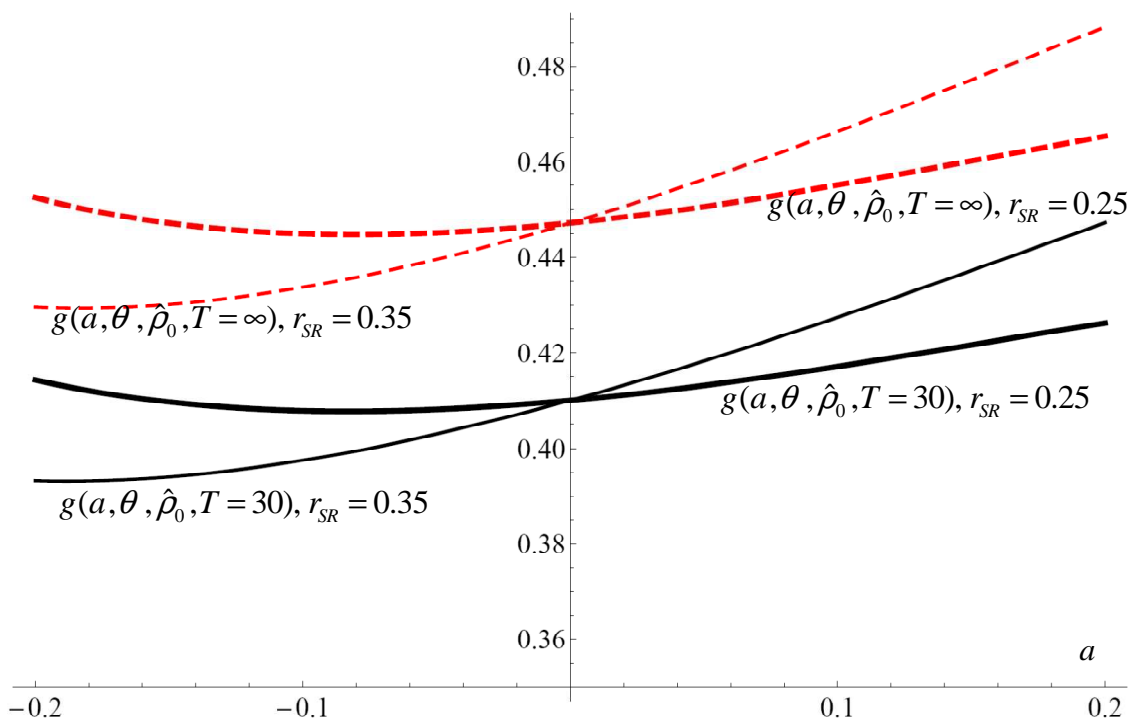


ABBILDUNG 4 -10: *Stressreduktion im lineare Modell*: Stressreduktion in Abhängigkeit von a für $r_{SR} = 0.25$ bzw. $r_{SR} = 0.35$ ($\theta = 0.4$; $\hat{\rho}_0 = 0$; $T = 30$ bzw. $T = \infty$)

Rendite-Risiko-Profil

Wir wollen abschließend noch das Risikoprofil einer Constant-Mix-Anlage mit der Anlage in einen kollektiven Sparprozess vergleichen. Als Risikokennzahl wählen wir hier den oben definierten Anlegerstress, wobei wir als Beobachtungsintervall $\Delta = 1$ wählen. Dies bedeutet, dass der Anleger einmal pro Jahr seine Kapitalanlage überprüft.

Im Folgenden gehen wir von einer Einmalanlage vom Betrage 1 und einem festen Anlagehorizont T aus. Dann ergibt sich für eine *Constant-Mix-Anlage* mit gleichbleibender Risikoexposition $\hat{\sigma} > 0$ ein Endvermögen von $P(T)$ und eine *erwartete Rendite* von

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{T} \ln(P(T))\right) = \hat{\mu} = \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2,$$

und ein einen Anlegerstress von

$$PStress_{\Delta=1}(T) = \hat{\sigma} \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{T}\right)} = \hat{\sigma} \sqrt{\frac{T-1}{T}}.$$

Durchläuft nun $\hat{\sigma}$ das Intervall $[0, \sigma_M]$, so können wir

$$\left(\hat{\sigma} \sqrt{\frac{T-1}{T}}, \bar{\mu} + r_{SR} \hat{\sigma} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \right)_{0 \leq \hat{\sigma} \leq \sigma_M}$$

als das Rendite-Risiko-Profil einer Constant-Mix-Anlage interpretieren. Bis auf den Faktor $\sqrt{\frac{T-1}{T}}$ entspricht das Rendite-Risiko-Profil dem „Anlageuniversum“ im hier unterstellten einfachen Kapitalmarktmodell (vgl. Abbildung 2-4). Betrachtet man die Kapitalmarktparameter $\bar{\mu}$ (sicherer Zins) und r_{SR} (Sharpe-Ratio) als gegeben, so hängt das Rendite-Risikoprofil lediglich von $\hat{\sigma}$ und T ab.

Bei einer Anlage in ein kollektives Sparvermögen ergibt sich im linearen Modell eine erwartete Rendite von (vgl. Proposition 4-1)

$$\mathbb{E}(\eta_D(T)) = \hat{\mu} - \frac{a^2 \hat{\sigma}^2}{2T} \frac{\exp((a^2 - 2\theta)t) - 1 - (a^2 - 2\theta)t}{a^2 - 2\theta} + \hat{\rho}_0 \cdot \text{Restterm}$$

und einen Anlegerstress von

$$\eta_{Stress}(T) = \sqrt{\mathbb{E}\left(\frac{1}{T} \int_0^T (\eta(t) - \eta_D(T))^2 dt\right)}. \tag{Gl. 4-22}$$

Das Rendite-Risiko-Profil $(\eta_{Stress}(T), \mathbb{E}(\eta_D(T)))_{0 \leq \hat{\sigma} \leq \sigma_M}$ von Kapitalmarktparametern sicherer Zins ($\bar{\mu}$) und der Sharpe-Ratio (r_{SR}), dem Anlagehorizont (T), der Risikoexposition $\hat{\sigma}$, dem Reservepuffer zu Beginn ($\hat{\rho}_0$) und den Steuerungsparametern a und θ ab.

Bei unseren Vergleichsrechnungen unterstellen wir folgendes *Basisszenario*:

$\bar{\mu} = 0.03$	$r_{SR} = 0.25$	$\sigma_M = 0.2$
$T = 30$	$\Delta = 1$	
$\hat{\rho}_0 = 0$	$\theta = 0.4$	$a = 0$

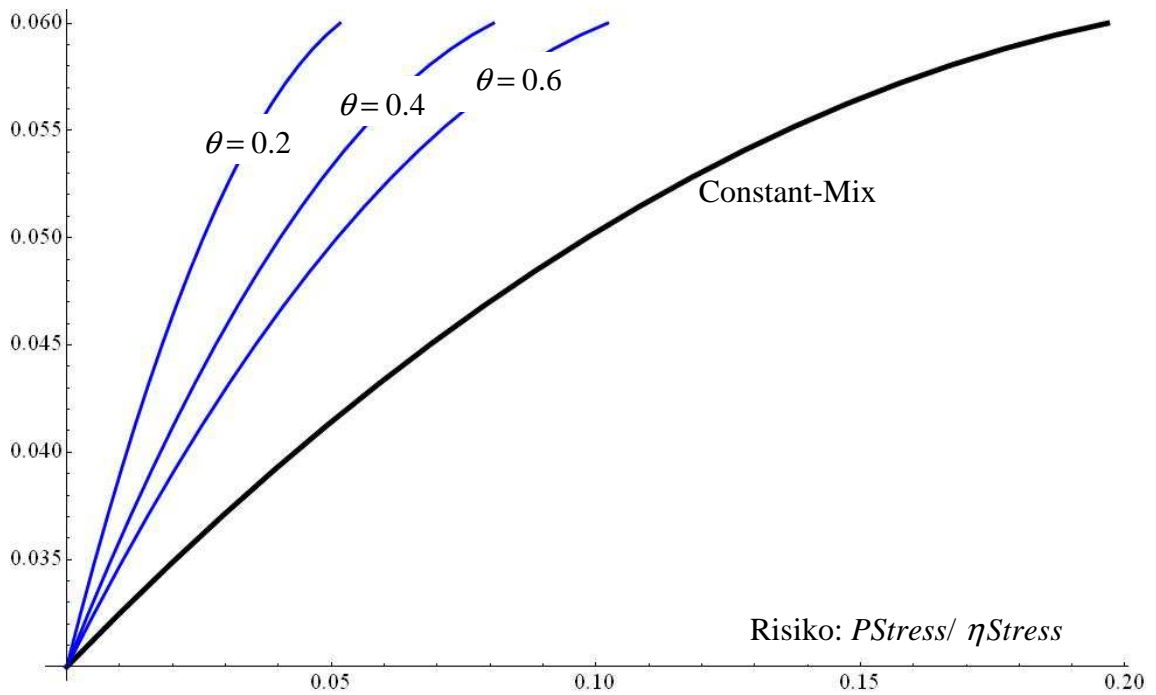


ABBILDUNG 4 -11: Rendite-Risiko-Profil: Vergleich Constant-Mix-Portfolio vs. Kollektiv-Sparen; Basisszenario ($a = 0$) mit verschiedenen θ -Werten.

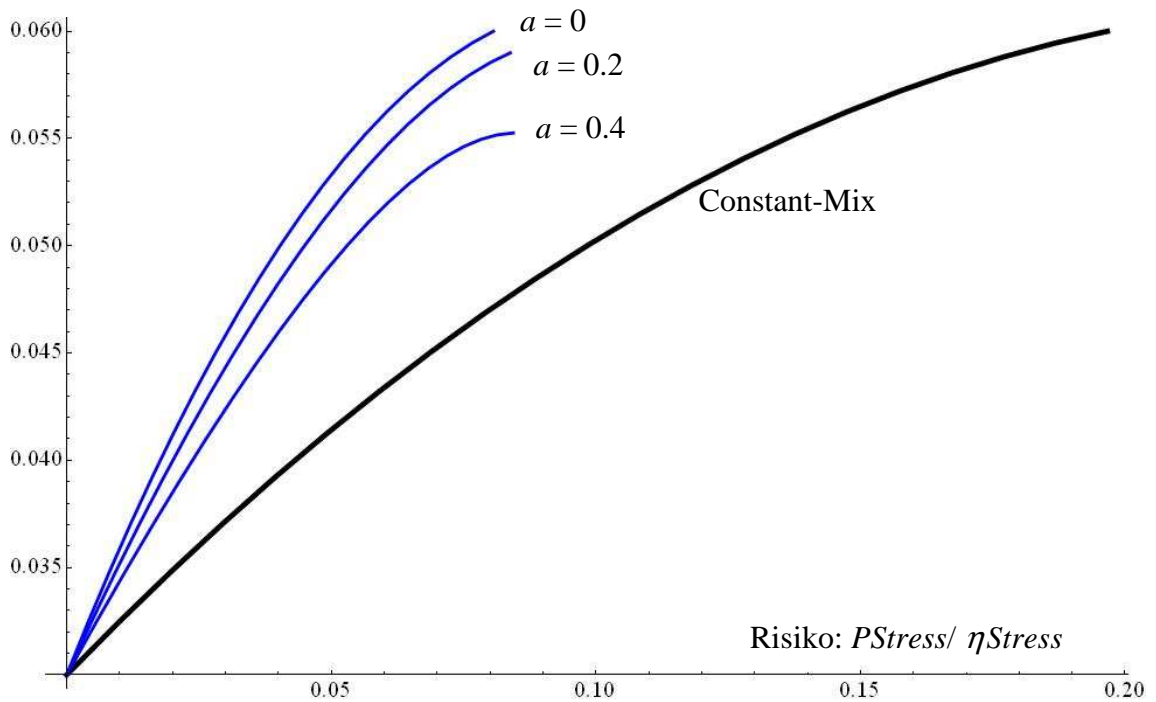


ABBILDUNG 4 -12: Rendite-Risiko-Profil: Vergleich Constant-Mix-Portfolio vs. Kollektiv-Sparen; Basisszenario ($\theta = 0.4$) mit verschiedenen a -Werten.

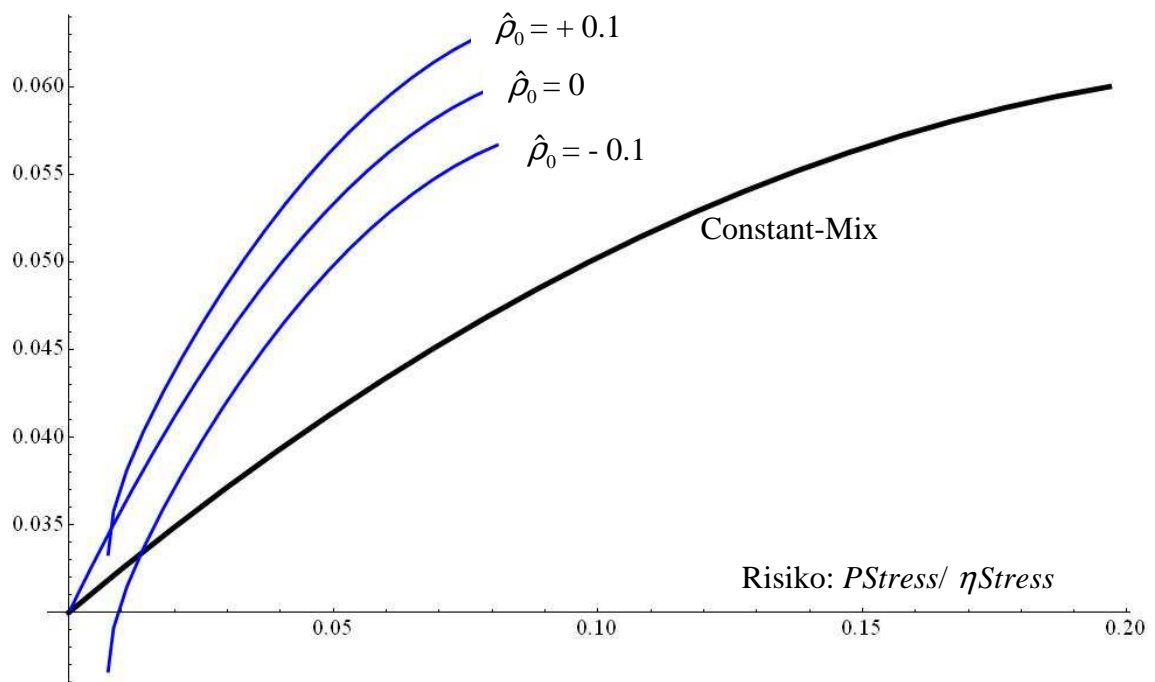


ABBILDUNG 4 -13: *Rendite-Risiko-Profil: Vergleich Constant-Mix-Portfolio vs. Kollektiv-Sparen; Basisszenario ($a = 0, \theta = 0.4$) mit verschiedenen Werten für den anfänglichen Reservepuffer $\hat{\rho}_0$.*

Die obigen Abbildungen verdeutlichen nochmals den Nutzen eines kollektiven Sparprozesses in Bezug auf das Rendite-Risiko-Verhältnis. Stellt man wie hier auf den Anlegerstress ab, so wird der Vorteil des kollektiven Sparens noch deutlicher als wenn man wie in Abschnitt 4.1 lediglich auf die Volatilität der Ablaufrendite abstellt.

Literaturverzeichnis

[**Albrecht 1992**] *Albrecht, Peter*: Zur Risikotransformationstheorie der Versicherung: Grundlagen und ökonomische Konsequenzen, Karlsruhe 1992.

[**Albrecht/ Dus/ Maurer/ Ruckpaul 2003**] *Albrecht, Peter; Dus, Ivica; Maurer, Raimond; Ruckpaul, Ulla*: Langfristiger Sparplan versus Einmalanlage: Probable Minimum Wealth und Shortfallrisiken, Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Nr. 144, Mannheim Feb. 2003.

[**Albrecht/ Maurer 2005**] *Albrecht, Peter; Maurer, Raimond*: Investment- und Risikomanagement, 2. Auflage, Stuttgart 2005.

[**Albrecht 2007**] *Albrecht, Peter*: Die Kapitalanlageperformance der Lebensversicherer 1980-2007, Risiko-/ Performanceprofile und risikobereinigte Performancekennzahlen, Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft Nr. 174, Mannheim 2008.

[**Arrow 1970**] *Arrow, Kenneth Joseph*: Essay in the Theory of Risk-Bearing, Amsterdam-London 1970.

[**Asmussen/ Glynn 2007**] *Asmussen, Søren; Glynn, Peter W.*: Stochastic Simulation, Algorithms and Analysis, Springer-Verlag, New York 2007.

[**Bouchaud/ Potters 2000**] *Bouchaud, Jean-Philippe; Potters, Marc*: Theory of Financial Risks - From Statistical Physics to Risk Management, Cambridge 2000.

[**Bronstein/ Semendjajew/ Musiol/ Mühlig 2005**] *Bronstein, I.; Semendjajew, K.; Musiol, G.; Mühlig, H.*: Taschenbuch der Mathematik, 6. vollständig überarbeitete und ergänzte Auflage, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main 2005 .

[**Consiglio/ Cocco/ Zenio 2001**] *Consiglio, Andrea; Cocco, Flavio; Zenions, Stavros A.*: Asset Liability Modeling for Participating Policies with Guarantees, The Wharton School, University of Pennsylvania, Working Paper, Dec. 2000, revised Feb. 2001

[**Defresne 1990**] *Defresne, D.*: The distribution of a perpetuity, with application to risk theory an pension funding. In: Scandinavian Actuarial Journal 9 (1990), S.39-79.

[Farny 2000] *Farny, Dieter* : Versicherungsbetriebslehre, 3. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft Karlsruhe 2000.

[Feller 1970] *Feller, William*: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 3rd Edition, Revised Printing, New York e.a. 1970.

[Gilles 2003] *Gilles, Christian; Rubin, Larry; Ryding, John; Tilman, Leo M.; Rajadhyaksha, Ajay* : Long-Term Economic and Market Trends and Their Implications for Asset/Liability Management of Insurance Companies, The Journal of Risk Finance, Winter 2003, S. 5-18.

[Goecke 2003] *Goecke, Oskar* : Über die Fähigkeit eines Lebensversicherers, Kapitalmarktrisiken zu transformieren, Blätter der DGVFM, Band XXVI, Heft2, November 2003, S. 207-227.

[Goecke 2006] *Goecke, Oskar* : Beispielrechnungen für Altersvorsorgeverträge - Rendite-Risiko-Profil langfristiger Sparprozesse, Lohmar- Köln 2006.

[Goecke 2007] *Goecke, Oskar* : Sind Zinsgarantien in der Lebensversicherung noch zeitgemäß?, in: Versicherungswirtschaft 2007, Heft 3, S. 157.

[Goecke 2009] *Goecke, Oskar* : Vom Wesen der Lebensversicherung- ein Diskussionsbeitrag, in: *Schimikowski, Peter* (Hrsg.): Festschrift für Johannes Wälder, München 2009, S. 291-322.

[Gollier 2001] *Gollier, Christian*: The Economics of Risk and Time, Cambridge (Massachusetts), London 2001.

[Gollier 2008] *Gollier, Christian*: Intergenerational risk sharing and risk taking in a pension fund, Journal of Public Economics, vol. 92, n. 5-6, June 2008, S.1463-1485.

[Gordon/ Varian 1988] *Gordon, Roger H.; Varian, Hal R.*: Intergenerational risk sharing, Journal of Public Economics 37 (1988), S.185-202.

[Guillén/ Jørgensen/ Perch-Nielsen 2007] *Gullién, Monserrat; Jørgensen, Peter Løchte; Perch-Nielsen, Jens*: Return Smoothing Mechanism in Life and Pension Insurance, Insurance: Mathematics and Econommics, 2006; Vol 38, Nr. 2, S.229-252.

[Hax 1964] *Hax, Karl*: Grundlagen des Versicherungswesens, Wiesbaden 1964.

[Irlle 2003] *Irlle, Albrecht*: Finanzmathematik – Die Bewertung von Optionen, 2. Auflage, Stuttgart- Leipzig- Wiesbaden 2003.

[Jørgensen 2007] *Jørgensen, Peter Løchte*: Lognormal Approximation of Complex Path Complex Path-Dependant Pension Scheme Payoffs, *European Journal of Finance*, 2007, Vol. 13, S.595-619.

[Karatzas/ Shreve 1991] *Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E.* : Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition, New York-Berlin-Heidelberg 1991.

[Karatzas/ Shreve 1998] *Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E.* : Methods of Mathematical Finance , New York-Berlin-Heidelberg 1998.

[Matsumoto/ Yor 2005a] *Matsumoto, Hiroyuki; Yor, Marc*: Exponential functionals of Brownian Motion, I: Probability laws at fixed time. In: *Probability Surveys*, Vol.2 (2005), S.312-347.

[Matsumoto/ Yor 2005b] *Matsumoto, Hiroyuki; Yor, Marc*: Exponential functionals of Brownian Motion, II: Some related diffusion processes. In: *Probability Surveys*, Vol.2 (2005), S.348-384.

[Milevsky 1997] *Milevsky, Moshe Arye*: The present value of a stochastic perpetuity and the Gamma distribution, in: *Insurance: Mathematics and Economics* 20(1997), 243-250.

[Milevsky 1999] *Milevsky, Moshe Arye*: Martingales, scale function and stochastic life annuities: a note,in: *Insurance: Mathematics and Economics* 24(1999), 149-154.

[Neftci 2000] *Neftci, Salih N.*: An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, 2nd Edition, San Diego, San Francisco e.a. 2000.

[Nielsen/ Sandmann/ Schögl 2010] *Nielsen, J. Aase; Sandmann, Klaus; Schögl, Erik*: Equity-Linked Pension Schemes with Guarantees, University of Technology Sydney, Research Paper 270, January 2010.

[Øksendal 2003] *Øksendal, Bernt*: Stochastic Differential Equations – An Introduction with Applications, 6. Auflage,Berlin- Heidelberg-New York 2003.

[Perole/ Sharpe 1988] *Perold, Andre F.; Sharpe, William F.*: Dynamic Strategies for Asset und Allocation, *Financial Analysts Journal*, Jan-Feb 1988, S.16-26.

[**Sandmann 2001**] *Sandmann, Klaus*: Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, 2. Auflage, Berlin- Heidelberg- New York 2001.

[**Schacht 2001**] *Schacht, Ulrich*: Finanztheoretische Analyse der Alterssicherung, Frankfurt a.M., Berlin e.a. 2001.

[**Schieber/ Shoven 1994**] *Schieber, S.J.; Shoven, J*: The consequences of population ageing on private pension fund saving and asset markets, NBER Working Paper No.4665.

[**Sharpe/ Alexander/ Bailey 1999**] *Sharpe, William F.; Alexander, Gordon J.; Bailey, Jeffery V.*: Investments (International Edition), 6th edition, Prentice Hall 1999.

[**Thøgersen 2006**] *Thøgersen, Øystein* : Intergenerational risk sharing by means of pay-as-you-go programs – an investigation of alternative mechanisms; SNF-Report No.12/06; SNF-project no. 1345, Institute for Research in Economics and Business Administration Bergen, May 2006.

[**Vigna 2009**] *Vigna, Elena* : Mean-variance inefficiency of CRRA and CARA utility function for portfolio selection in defined contribution pension schemes; talk presented to the AFIR/ LIFE –Conference, Munich 2009.

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

ABBILDUNG 2 -1: VEREINFACHTES BILANZSCHEMA EINES LEBENSVERSICHERERS	4
ABBILDUNG 2 -2: PRINZIP DER ERGEBNISGLÄTTUNG	5
ABBILDUNG 2 -3: ZINSTRANSFORMATION BEIM LEBENSVERSICHERUNGSSPAREN	6
ABBILDUNG 2-4: GRAPH DER FUNKTION $\sigma \mapsto \bar{\mu} + \sigma r_{SR} - \frac{1}{2} \sigma^2$	10
ABBILDUNG 2 -5: ZULÄSSIGE ALM-POSITIONEN NACH (GL. 2-16) FÜR $\Delta = 1$, $1-\alpha = 99,5\%$ UND $\rho(t) - \rho_{\min} = 12\%$.	14
ABBILDUNG 3 -1: SIMULATIONSPFADES DES RESERVEPROZESSES ($\hat{\rho}(t)$): $0 \leq t \leq 30$. DARGESTELLT WERDEN JEWEILS 20 TRAJEKTORIEN DES RESERVEPROZESSES, HIERVON JE 10 MIT DEM STARTWERT $\hat{\rho}_0 = +1$ UND $\hat{\rho}_0 = -1$. BEIM OBEREN DIAGRAMM WURDEN FOLGENDE PARAMETER ZUGRUNDE GELEGT: $\hat{\sigma} = 0.1$, $a = 0.5$, $\theta = 0.4$ (OBERE GRAFIK) BZW. $\hat{\sigma} = 0.1$, $a = 0.5$, $\theta = 0.05$ (UNTERE GRAFIK).	31
ABBILDUNG 3-2: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON σ_∞ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ UND $a \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.	37
ABBILDUNG 3-3: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON σ_∞ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ UND $\theta \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.	38
ABBILDUNG 3-4: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON $\hat{\rho}_\infty$ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ UND $a \in \{-0.2, 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.	38
ABBILDUNG 3-5: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON $\hat{\rho}_\infty$ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ UND $\theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.	39
ABBILDUNG 3-6: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON μ_∞ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ UND $a \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.	39
ABBILDUNG 3-7: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON μ_∞ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ UND $\theta \in \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$.	40
ABBILDUNG 3-8: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON η_∞ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $\theta = 0.4$ UND $a \in \{-0.2, 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.	40
ABBILDUNG 3-9: DICHTEFUNKTION DER VERTEILUNG VON η_∞ FÜR $\bar{\mu} = 0.03$; $r_{SR} = 0.25$; $\hat{\sigma} = 0.1$; $a = 0.2$ UND $\theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.	41
ABBILDUNG 3-10: HEDGEKOSTEN DES GLÄTTUNGSEFFEKTS; DARSTELLUNG DES GRAPHEN VON $t \mapsto \pi(V(t))$ FÜR $V_0 = 1$, $\hat{\rho}_0 = 0$, $\sigma_0 = 5\%$, UND $\theta = 0,2 / 0,4 / 0,6$.44	

ABBILDUNG 3-11: HEDGEKOSTEN DES GLÄTTUNGSEFFEKTS; DARSTELLUNG DES GRAPHEN VON $a \mapsto \mathbb{E}_Q(\exp(-\bar{\mu}t)V(t))$ FÜR $t = 10, V_0 = 1, \hat{\rho}_0 = 0, \hat{\sigma} = 5\%$, $\theta = 0,2 / 0,4 / 0,6$.	46
ABBILDUNG 3-12: ZWEI PFADE EINES STANDARD-WIENER-PROZESSES MIT BARRIERE $G(s)$	49
ABBILDUNG 3-13: ILLUSTRATION ZUM LEMMA 3-10	50
ABBILDUNG 3-14: DIE STOPPZEITEN τ, τ_s und $\hat{\tau}$.	53
ABBILDUNG 3-15: ABSCHÄTZUNG DER RUINWAHRSCHEINLICHKEIT	56
ABBILDUNG 3-16: RUINWAHRSCHEINLICHKEIT IN ABHÄNGIGKEIT VON B.	57
ABBILDUNG 3-17: RUINWAHRSCHEINLICHKEIT IN ABHÄNGIGKEIT VON DER ANPASSUNGSGESCHWINDIGKEIT A. (JEWEILS 10.000 SIMULATIONEN MIT 100 ANPASSUNGEN PRO JAHR)	59
ABBILDUNG 4-1: DÄMPFUNGSEFFEKT BEZOGEN AUF DIE ABLAUFRENDITE IN ABHÄNGIGKEIT VON DER RESTLAUFZEIT DES VERTRAGES; $A=0, \hat{\sigma}=10\%, \hat{\rho}_0=0, \theta \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.5\}$	65
ABBILDUNG 4-2: RENDITE-RISIKO-PROFIL, LM-STRATEGIE ($A = 0$), $T = 5$ UND $\theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$.	66
ABBILDUNG 4-3: RENDITE-RISIKO-PROFIL, LM-STRATEGIE ($A=0$) $\theta = 0.4$ UND $T \in \{1, 2, 5, 10, 30\}$.	67
ABBILDUNG 4-4: RENDITE-RISIKO-PROFIL, $\theta = 0.4, T = 5, \hat{\rho}_0 = 0$ UND $a \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$.	68
ABBILDUNG 4-5: RENDITE-RISIKO-PROFIL, $\theta = 0.4, T = 20, a = 0$ UND $\hat{\rho}_0 \in \{-0.1, -0.05, 0, 0.05, 0.1\}$.	68
ABBILDUNG 4-6: ILLUSTRATION DES GLÄTTUNGSEFFEKTS; UNTERSTELLT WIRD DAS LINEARE MODELL MIT $\bar{\mu} = 3\%, r_{SR} = 0.25, \theta = 0.4, a = 0, \hat{\sigma} = 0.2, \hat{\rho}_0 = 0$	70
ABBILDUNG 4-7: GLÄTTUNGSEFFEKTS IM LINEARE MODELL ($\bar{\mu} = 3\%, r_{SR} = 0.25, \theta = 0.4, a = 0, \hat{\sigma} = 0.2, \hat{\rho}_0 = 0$), VERGLEICH DER PFADE $x_\Delta(t)$ UND $y_\Delta(t)$ FÜR $\Delta = 1/12, \Delta = 1/4$ UND $\Delta = 1/1$. ES WURDE HIERBEI DER GLEICHE SIMULATIONS LAUF WIE IN ABBILDUNG 4-6 ZUGRUNDE GELEGT.	75
ABBILDUNG 4-8: STRESSREDUKTION IM LINEARE MODELL: STRESSREDUKTION IN ABHÄNGIGKEIT VON T ($a = 0; \theta = 0.4; \hat{\rho}_0 = 0$).	79
ABBILDUNG 4-9: STRESSREDUKTION IM LINEARE MODELL: STRESSREDUKTION IN ABHÄNGIGKEIT VON θ ($a = 0; \hat{\rho}_0 = 0; T = 30$ bzw. $T = \infty$)	79
ABBILDUNG 4-10: STRESSREDUKTION IM LINEARE MODELL: STRESSREDUKTION IN ABHÄNGIGKEIT VON A FÜR $r_{SR} = 0.25$ BZW. $r_{SR} = 0.35$ ($\theta = 0.4; \hat{\rho}_0 = 0; T = 30$ bzw. $T = \infty$)	80

ABBILDUNG 4 -11: RENDITE-RISIKO-PROFIL: VERGLEICH CONSTANT-MIX-PORTFOLIO VS. KOLLEKTIV-SPAREN; BASISZENARIO ($a = 0$) MIT VERSCHIEDENEN θ -WERTEN. 82

ABBILDUNG 4 -12: RENDITE-RISIKO-PROFIL: VERGLEICH CONSTANT-MIX-PORTFOLIO VS. KOLLEKTIV-SPAREN; BASISZENARIO ($\theta = 0.4$) MIT VERSCHIEDENEN A-WERTEN. 82

ABBILDUNG 4 -13: RENDITE-RISIKO-PROFIL: VERGLEICH CONSTANT-MIX-PORTFOLIO VS. KOLLEKTIV-SPAREN; BASISZENARIO ($a = 0, \theta = 0.4$) MIT VERSCHIEDENEN WERTE FÜR DEN ANFÄNGLICHEN RESERVEPUFFER $\hat{\rho}_0$. 83

TABELLE 4-1: VERGLEICH DER STANDARDABWEICHUNG DER PERIODENRENDITEN BEZOGEN AUF DAS ANLAGEPORTFOLIO $x_{\Delta}(t)$ BZW. DIE VERSICHERTENGUTHABEN $y_{\Delta}(t)$. 73

TABELLE 4-2: VERGLEICH DER STANDARDABWEICHUNG DER PERIODENRENDITEN BEZOGEN AUF DAS ANLAGEPORTFOLIO $x_{\Delta}(t)$ BZW. DIE VERSICHERTENGUTHABEN $y_{\Delta}(t)$. 76

Kontakt/Impressum

Diese Veröffentlichung erscheint im Rahmen der OnlinePublikationsreihe „**Forschung am IVW Köln**“.

Alle Veröffentlichungen dieser Reihe können unter www.ivw-koeln.de oder unter <http://opus.bsz-bw.de/fhk/index.php?la=de> abgerufen werden.

Eine weitere Publikationsreihe ist die **Schriftenreihe des Instituts für Versicherungswesen der Fachhochschule Köln**.

Herausgeber: Verein der Förderer des Instituts für Versicherungswesen an der Fachhochschule Köln e. V. Die Schriftenreihe kann über den Verlag Versicherungswirtschaft bezogen werden (<http://www.vvw.de/>).

Eine Übersicht aller Hefte der Schriftenreihe kann auch unter folgender Adresse abgerufen werden:

<http://www.f04.fh-koeln.de/fakultaet/institute/ivw/informationen/publikationen/00366/index.html>

Bildnachweis für das Deckblatt: Gebäude der Fachhochschule Köln

Copyright: Fachhochschule Köln/Monika Probst

Köln, Juli 2011

Herausgeber / Editorship:

Prof. Dr. Reimers-Rawcliffe
Prof. Dr. Peter Schimikowski
Prof. Dr. Jürgen Strobel

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences

Web www.ivw-koeln.de

Schriftleitung / Contact editor's office:

Prof. Dr. Jürgen Strobel

Tel. +49 221 8275-3270
Fax +49 221 8275-3277

Mail juergen.strobel@fh-koeln.de

Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Kontakt Autor / Contact author:

Prof. Dr. Oskar Goecke
Institut für Versicherungswesen /
Institute for Insurance Studies

Fakultät für Wirtschaftswissenschaften /
Faculty of Economics and Business Administration

Fachhochschule Köln / Cologne University of Applied Sciences
Gustav Heinemann-Ufer 54
50968 Köln

Tel. +49 221 8275-3278
Fax +49 221 8275-3277

Mail oskar.goecke@fh-koeln.de

ISSN (online) 2192-8479